Vol. VIII, Nº 1, Mayo (3004)
Matemáticas: 1–16

Matemáticas:
Enseñanza Universitaria

Caracterización de los operadores (∞, σ)-Integrales. Una re-visión

Gerardo Arango Ospina

Recibido Sept. 30, 2005 Aceptado Dic. 1, 2005

Abstract

In a recent paper [5] María José Rivera Ortún, Juan Antonio López Molina and Gerardo Arango Ospina published a characterization theorem for (∞, σ)-integral operators by means of factorization through classical Banach spaces. This article presents an alternative proof using the metrical properties of the spaces involved in a more complete way, thus avoiding the necessity of weighted spaces and the construction of conmeasurable spaces. Besides reducing significantly the length of the proof, the new approach also also provides a better insight on the geometry of the spaces under study.

Keywords: Integral operators, ultraproducts of Banach spaces, characterization of operators.

AMSC(2000): Primary: 46B28, Secondary: 46B08, 46M07.

Resumen

En un artículo reciente [5] María José Rivera Ortún, Juan Antonio López Molina y Gerardo Arango Ospina publicaron un teorema de caracterización de los operadores (∞, σ)-integrales mediante factorización a través de espacios de Banach clásicos. El presente artículo presenta una prueba alternativa que utiliza en forma mas completa las propiedades métricas de los espacios involucrados, lo cual evita la necesidad de construir espacios conmesurables y utilizar espacios ponderados. Ello, aparte de reducir significativamente la longitud de la prueba, aporta al mejor conocimiento de la geometría de los espacios.

Palabras y frases claves: Operadores integrales, ultraproductos de espacios de Banach, caracterización de operadores.

1 Introducción

Los operadores (p, σ)-absolutamente continuos fueron introducidos por Urs Matter [13] en 1985, aplicando un procedimiento de "interpolación"de ideales al ideal $\mathfrak{P}_p$ de los operadores p-absolutamente sumantes $(1 \leq p < \infty)$. Los ideales $\mathfrak{P}_{p\sigma}$ $(0 < \sigma < 1)$, resultantes de la interpolación, tienen propiedades similares a las de los operadores p-absolutamente sumantes $\mathfrak{P}_p$, entre otras la de ser absolutamente continuos, según la definición dada por Constantin P. Niculescu en su artículo "*Absolute Continuity and Weak Compactness*"[14], donde introdujo el ideal $\mathfrak{AC}$ de operadores absolutamente continuos.

En su trabajo de tesis doctoral "*Ideales de Operadores Absolutamente Continuos y Normas Tensoriales Asociadas*" [16], Enrique Sánchez Pérez presentó nuevas caracterizaciones de los operadores (p, σ)-absolutamente continuos de Matter, hizo el cálculo de la norma tensorial asociada al ideal $\mathfrak{P}_{p\sigma}$ para el caso $1 < p < \infty$ y caracterizó los correspondientes ideales de operadores nucleares e integrales mediante factorizaciones a través de espacios clásicos de Banach y espacios de interpolación. Mayor información sobre los operadores (p,σ)-absolutamente continuos puede encontrarse en [11] y [12].

El caso $p=1$ fue estudiado por Gerardo Arango Ospina en su tesis doctoral [2] e implica complejidades mayores, especialmente en la factorización de los operadores integrales. En correspondencia con el ideal de operadores $(1,\sigma)$-absolutamente continuos, se define la norma tensorial $g_{\infty\sigma}$ y se obtiene el ideal de operadores (∞,σ)-integrales, los cuales son estudiados y caracterizados en [5] mediante factorización a través de espacios clásicos de Banach.

En la prueba de que la factorización es condición necesaria para que el operador sea (∞,σ)-integral se recurre al uso de espacios ponderados y a varios cambios de medida buscando la conmesurabilidad de espacios involucrados. En el presente artículo se presenta una prueba alternativa de la condición necesaria, que es por lo demás la parte más extensa y elaborada de la prueba original. Si bien se mantiene la estructura general de la construcción, se aprovechan en forma más completa las propiedades métricas de algunos espacios y se logra la definición de un álgebra de funciones medibles más apropiada, lo cual evita la necesidad de buscar conmesurabilidad de espacios. De esa manera se simplifica significativamente la prueba y se logra un conocimiento más detallado de las propiedades métricas de los espacios.

Los fundamentos conceptuales se pueden encontrar, según los temas en las siguientes referencias: Retículos de Banach en [1] y [10], productos tensoriales topológicos en [6], ideales de operadores en [15] y ultraproductos de espacios de Banach en [9].

2 Contexto Matemático

En esta sección se presentan en forma resumida los conceptos y resultados fundamentales relativos a los operadores $(1,\sigma)$-absolutamente continuos, la norma tensorial $g_{\infty\sigma}$ y los operadores (∞,σ)-nucleares.

En [3] se puede consultar el desarrollo completo de los siguientes temas, incluyendo las pruebas: ideal de operadores $(1,\sigma)$-absolutamente continuos, la norma tensorial $g_{\infty\sigma}$, los teoremas de caracterización de la compleción del producto tensorial y del ideal en términos del producto tensorial. En [3] se encuentra también la definición de los conceptos básicos.

En [4] se definen y caracterizan los operadores (∞,σ)-nucleares y se usan los teoremas de factorización de los operadores (∞,σ)-nucleares e (∞,σ)-integrales para establecer algunas propiedades métricas y topológicas en los espacios componentes de esos ideales.

2.1 Los operadores $(1,\sigma)$-absolutamente continuos

Para la definición de los operadores y de la norma tensorial, necesitamos definir primero la siguiente función:

Definición 1. *Dados un número real* σ *tal que* $0 < \sigma < 1$ *y un espacio normado* E*, la función* $\delta_{1\sigma} : E^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ *se define mediante:*

$$\delta_{1\sigma}\left((x_i)\right) := \sup_{x' \in B_{E'}} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\left|\left\langle x_i, x' \right\rangle\right|^{1-\sigma} \|x_i\|^{\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \right)^{1-\sigma} \right\}$$

Se define además

$$H_{1,\sigma}\left(E\right) := \left\{ (x_i) \in E^{\mathbb{N}} : \delta_{1\sigma}\left((x_i)\right) < \infty \right\}$$

La función $\delta_{1\sigma}$ así definida no constituye una norma, pues no cumple con la desigualdad triangular; sin embargo ella nos sirve para definir los operadores:

Definición 2. *Si* E *y* F *son espacios normados, se dice que el operador* $T \in \mathfrak{L}(E, F)$ *es* $(1, \sigma)$***-absolutamente continuo*** *si existe un número real* $C > 0$ *tal que para toda sucesión* $(x_i) \in H_{1,\sigma}\left(E\right)$ *se cumple que*

$$\pi_{\frac{1}{1-\sigma}}\left(\left(T\left(x_i\right)\right)\right) \leq C\delta_{1\sigma}\left((x_i)\right). \tag{1}$$

El conjunto de operadores así definido se denota como $\mathfrak{P}_{1\sigma}(E, F)$*. Si* $T \in \mathfrak{P}_{1\sigma}(E, F)$*, se define la norma de* T*,* $\Pi_{1\sigma}\left(T\right)$*, como el ínfimo de todos los números* C *que satisfacen la desigualdad (1).*

Se prueba que en efecto $\mathfrak{P}_{1\sigma}$ es un ideal de operadores y $\Pi_{1\sigma}\left(T\right)$ una norma en $\mathfrak{P}_{1\sigma}(E, F)$, para cualquier par de espacios normados E y F.

En el caso general $1 \leq p \leq \infty$, en forma análoga se pueden definir la función $\delta_{p\sigma}$ y el ideal $\mathfrak{P}_{p\sigma}$ de los operadores (p, σ)-absolutamente continuos y los resultados de esta sección y de la siguiente se cumplen en general. Como el caso que nos ocupa es cuando $p = 1$, todos los enunciados se hacen para este caso particular. Además es conveniente advertir que, en nuestro caso, el número conjugado de p (es decir, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) esta definido como $p' = \infty$.

2.2 La norma tensorial $g_{\infty\,\sigma}$

El propósito principal de esta sección es introducir la norma tensorial $g_{\infty\sigma}$, caracterizar la compleción del producto tensorial de cualquier par de espacios normados dotado de esa norma, y describir el ideal $\mathfrak{P}_{1\sigma}(E, F)$ en términos del producto tensorial normado con $g_{\infty\sigma}$:

Definición 3. *Dados* E, F *dos espacios normados y* $0 < \sigma < 1$*, se define la función* $g_{\infty\sigma} : E \otimes F \to \mathbb{R}$ *de la siguiente manera: Dado* $z = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in E \otimes F$

$$g_{\infty\sigma}(z; E, F) = \inf \left\{ \pi_{\frac{1}{\sigma}}\left((x_i)\right) \delta_{1\sigma}\left((y_i)\right) : z = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \otimes y_i\right) \right\}$$

donde el ínfimo se toma sobre las distintas representaciones de z*.*

Se demuestra que $g_{\infty\sigma}$ es una norma tensorial. Los elementos de la compleción del producto tensorial dotado de esa norma se pueden caracterizar en términos de su representación en series.

Teorema 1. *$z \in E\widehat{\otimes}_{g_{\infty\sigma}}F$ si y sólo si z se puede expresar en la forma $z = \sum\limits_{i=1}^{\infty} (x_i \otimes y_i)$; $x_i \in E$, $y_i \in F$, donde*

$$\pi_{\frac{1}{\sigma}}\left((x_i)\right) < \infty \quad y \quad \delta_{1\sigma}\left((y_i)\right) < \infty. \tag{1}$$

En ese caso,

$$g_{\infty\sigma}(z; E, F) = \inf\left\{\pi_{\frac{1}{\sigma}}\left((x_i)\right)\delta_{1\sigma}\left((y_i)\right) : z = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i, cumple\ (1)\right\}$$

El siguiente resultado es central y caracteriza el ideal $\mathfrak{P}_{1\sigma}$ en términos del dual topológico del producto tensorial dotado con la tensornorma $g_{\infty\sigma}$.

Teorema 2. *$(E \otimes_{g_{\infty\sigma}} F)' \overset{1}{\cong} \mathfrak{P}_{1\sigma}(F, E')$, donde E y F son espacios normados y $0 < \sigma < 1$.*

El teorema podría enunciarse también diciendo que la norma tensorial asociada al ideal $\mathfrak{P}_{1\sigma}$ es la traspuesta de la norma $g'_{\infty\sigma}$, que a su vez es la dual de la norma $g_{\infty\sigma}$.

2.3 El ideal de operadores (∞, σ)-nucleares

Dado un par de espacios de Banach E y F, se puede establecer una aplicación

$$\Phi_{EF} : E' \otimes_{g_{\infty\sigma}} F \to \mathfrak{L}(E, F)$$

de modo que para todo $z \in E' \otimes_{g_{\infty\sigma}} F$ con representación $z = \sum_{i=1}^{n} x'_i \otimes y_i$, se verifica que $\Phi_{EF}(z) = T_z$, donde

$$T_z(x) = \sum_{i=1}^{n} < x'_i, x > y_i.$$

La aplicación Φ_{EF} es continua y puede extenderse con continuidad a la compleción del $g_{\infty\sigma}$-producto tensorial. Si llamamos $\widehat{\Phi}_{EF}$ a la extensión de la aplicación

$$\widehat{\Phi}_{EF} : E'\widehat{\otimes}_{g_{\infty\sigma}}F \to \mathfrak{L}(E, F),$$

los operadores de su conjunto imagen se dice que son (∞, σ)-nucleares.

Se destaca el hecho de que esta aplicación $\widehat{\Phi}_{EF}$ no siempre es inyectiva, y esto da lugar a uno de los aspectoss más interesantes de la teoría de Grothendieck que es la llamada Propiedad de Aproximación.

Definición 4. *Un operador $T : E \to F$ se dice que es (∞, σ)-**nuclear** si existe un $z \in E' \widehat{\otimes}_{g_{\infty\sigma}} F$ tal que $\widehat{\Phi}_{EF}(z) = T$.*

Denotamos por $\mathfrak{N}_{\infty\sigma}(E, F)$ al conjunto de operadores (∞, σ)-nucleares, dotado con la topología cociente respecto de $\widehat{\Phi}_{EF}$, es decir con la topología de la norma

$$N_{\infty\sigma}(T) = \inf \left\{ g_{\infty\sigma}(z) : z \in E' \widehat{\otimes}_{g_{\infty\sigma}} F;\ \widehat{\Phi}_{EF}(z) = T \right\}$$

que hace de él un espacio de Banach. Se prueba en [2] que $(\mathfrak{N}_{\infty\sigma}, \mathbf{N}_{\infty\sigma})$ es un ideal normado de operadores.

Y finalmente el teorema de caracterización de los operadores (∞, σ)-nucleares.

Teorema 3. *Sean E y F espacios de Banach y $T \in \mathfrak{L}(E, F)$. T es (∞, σ)-nuclear si y sólo si existe una medida μ en $\mathbb{N}$ tal que $E \xrightarrow{T} F$ puede factorizarse de acuerdo con el diagrama siguiente*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "T"] \arrow[d, "A"'] & & F \\
\ell_\infty \arrow[r, "B"] & \ell_{1/\sigma}(\mu) \arrow[r, "\mathrm{G}_{\frac{1}{\sigma}}"] & \ell_1(\mu) + \ell_\infty(\mu) \arrow[u, "D"']
\end{tikzcd}$$

en donde $N_{\infty\sigma}(T) = \inf \{ \|D\| \, \|B\| \, \|A\| \}$, tomando el ínfimo sobre todas las factorizaciones posibles de este tipo. En la factorización B es un operador diagonal y $\mathrm{G}_{\frac{1}{\sigma}}$ es la inclusión canónica.

3 El ideal de operadores (∞, σ)-integrales

3.1 Teorema de Factorización

De acuerdo con la teoría general de normas tensoriales e ideales de operadores (ver [6] y [15]), definimos los operadores de la siguiente manera:

Definición 5. *Sean E y F dos espacios de Banach. Un operador $S : E \to F$ se dice que es (∞, σ)-**integral** si él pertenece al ideal normado maximal de operadores $(\mathcal{I}_{\infty\sigma}, I_{\infty\sigma})$ asociado a la norma tensorial $g_{\infty\sigma}$, es decir, al ideal maximal asociado $(\mathcal{N}_{\infty\sigma}^{\text{máx}}, \mathbf{N}_{\infty\sigma}^{\text{máx}})$ en el sentido de Pietsch [15].*

En particular, un operador $T \in \mathcal{L}(E, F')$ es (∞, σ)-integral si y sólo si $T \in (E \otimes_{g'_{\infty\sigma}} F)'$. El propósito de esta sección es enunciar el teorema que caracteriza los operadores (∞, σ)-integrales mediante una factorización apropiada y orientar al lector sobre el aporte que se hace en esta revisión a la prueba original. La estrategia básica de la prueba del teorema es aplicar la técnica de ultraproductos al diagrama obtenido para la caracterización de los operadores (∞,σ)-nucleares en una sección anterior. Esa estrategia se mantiene en la revisión.

Dado un espacio de medida (Ω,Σ,μ), denotaremos por $\mathcal{T}_\mu$ el correspondiente espacio de funciones simples integrables.

Teorema 4. *Sean E y F dos espacios de Banach y $T \in \mathfrak{L}(E,F)$. T es (∞,σ)-integral si y sólo si existe un espacio de medida σ-finita (Ω,Σ,μ) tal que $J_F T$ se puede factorizar como*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "T"] \arrow[d, "A"'] & & F \arrow[r, "J_F"] & F'' \\ L_\infty(\mu) \arrow[rr, "D_w"] & & L_{\frac{1}{\sigma}}(\mu) \arrow[r, "I"] & \overline{\mathcal{T}_\mu}^{L_1(\mu)+L_\infty(\mu)} \arrow[u, "B"'] \end{tikzcd}$$

donde D_w es un operador multiplicación por una función positiva $w \in L_{\frac{1}{\sigma}}(\mu)$. Más aun, la norma canónica (∞,σ)-integral $\mathbf{I}_{\infty\sigma}(T)$ de T verifica que

$$\mathbf{I}_{\infty\sigma}(T) = \inf\{\|B\|\|D_w\|\|A\|\},$$

tomando el ínfimo sobre todas las factorizaciones del tipo descrito.

Demostración. $\Leftarrow$) Por una propiedad de los ideales de operadores, si $\mathfrak{A}$ es un ideal de operadores, E, D, G y F son espacios de Banach, y $R \in \mathfrak{L}(E,D)$, $S \in \mathfrak{A}(D,G)$ y $T \in \mathfrak{L}(G,F)$, entonces $TSR \in \mathfrak{A}(E,F)$, por lo cual basta demostrar el siguiente □

Lema 5. *Dado un espacio de medida σ-finita (Ω,Σ,μ), y un operador diagonal $D_w : L_\infty(\mu) \to L_{\frac{1}{\sigma}}(\mu)$, si denotamos por $I : L_{\frac{1}{\sigma}}(\mu) \to \overline{\mathcal{T}_\mu}^{L_1(\mu)+L_\infty(\mu)}$ la aplicación inclusión, entonces ID_w es (∞,σ)-integral.*

La prueba detallada del lema se encuentra en el teorema 88 de [2].

$\Rightarrow$) La prueba sigue las mismas líneas que en el caso clásico de los operadores integrales (ver, por ejemplo el capítulo 18 de [6] y el teorema 9.3 de [7]). Sin embargo, en el caso de los operadores (p,σ)-absolutamente continuos y muy particularmente en nuestro caso $p = 1$ aparecen dificultades mayores que en buena parte motivaron los dos trabajos de tesis sobre el tema. Por lo tanto, el resto del artículo se dedica a la prueba de que la condición establecida por el teorema es necesaria. La sección 3.2 esta destinada a preparar la parte mas sustantiva de la prueba, la cual fue precisamente el objeto de la revisión acá presentada, mientras que en la sección 3.3 se presenta la prueba completa de la condición necesaria. ■

3.2 Factorización de operadores entre algunos ultraproductos de retículos de Banach

El propósito central de esta sección es la prueba del teorema 12 que constituye la pieza fundamental en la prueba de la necesidad de la factorización en el teorema de caracterización, la cual se hace en la siguiente sección.

Sea D be un conjunto de índices y $\mathcal{D}$ un ultrafiltro no trivial en D. Dada una familia $\{A^d : d \in D\}$ de espacios de Banach, definimos $\ell_\infty((A^d)_{d\in D}) := \{(a^d)_{d\in D} \in \Pi_{d\in D} A^d : \sup_{d\in D} \|a^d\|_{A^d} < \infty\}$ y denotamos por $(A^d)_{\mathcal{D}}$ el correspondiente ultraproducto sobre $\mathcal{D}$ y por $(x^d)_{\mathcal{D}}$ la clase de $(x^d) \in \ell_\infty((A^d)_{d\in D})$ en $(A^d)_{\mathcal{D}}$. Dada una familia de operadores $\{T^d \in \mathfrak{L}(A^d, F^d),\quad d \in D\}$ que cumplen $\sup_{d\in D} \|T^d\| < \infty$, denotamos por $(T^d)_{\mathcal{D}} \in \mathfrak{L}((A^d)_{\mathcal{D}}, (F^d)_{\mathcal{D}})$ al operador ultraproducto correspondiente.

Si cada $A^d,\ d \in D$ es un retículo de Banach, $(A^d)_{\mathcal{D}}$ tiene un orden canónico con el cual es un retículo de Banach. Para todo $d \in D$, sean $A^d_{u_1}$ y $A^d_{u_2}$ espacios de Banach continuamente incluidos en un espacio vectorial topológico A^d. Como las aplicaciones inyectivas $J^d_{u_i} : A^d_{u_i} \to A^d_{u_1} + A^d_{u_2}$, $i = 1, 2$, $J^d_{u_1u_2} : A^d_{u_1} \cap A^d_{u_2} \to A^d_{u_1} + A^d_{u_2}$ son continuas y tienen norma menor o igual que uno, sean $J_{u_i} = (J^d_{u_i})_{\mathcal{D}} : (A^d_{u_i})_{\mathcal{D}} \to (A^d_{u_1} + A^d_{u_2})_{\mathcal{D}}$, $i = 1, 2$, y $J_{u_1u_2} = (J^d_{u_1u_2})_{\mathcal{D}} : (A^d_{u_1} \cap A^d_{u_2})_{\mathcal{D}} \to (A^d_{u_1} + A^d_{u_2})_{\mathcal{D}}$, las aplicaciones ultraproducto correspondientes (se destaca el hecho que J_{u_i} and $J_{u_1u_2}$ pueden no ser inyectivas).

Usamos la notación $\mathcal{S} := (A^d_{u_1} + A^d_{u_2})_{\mathcal{D}}$, $\mathcal{I} := (A^d_{u_1} \cap A^d_{u_2})_{\mathcal{D}}$, y sean $Q_{u_i} : \ell_\infty((A^d_{u_i})_{d\in D}) \to (A^d_{u_i})_{\mathcal{D}}$, $Q_{u_1u_2} : \ell_\infty((A^d_{u_1} \cap A^d_{u_2})_{d\in D}) \to \mathcal{I}$ and $Q : \ell_\infty((A^d_{u_1} + A^d_{u_2})_{d\in D}) \to \mathcal{S}$ las aplicaciones cociente canónicas. Definimos los espacios $\mathcal{U}_{u_i} := (A^d_{u_i})_{\mathcal{D}}$; $E_{u_i} := J_{u_i}(\mathcal{U}_{u_i})$, $E_{u_1u_2} := J_{u_1u_2}((A^d_{u_1} \bigcap A^d_{u_2})_{\mathcal{D}})$ dotados con la correspondiente norma cociente canónica. Es claro que las inclusiones de $E_{u_1u_2}$ en E_{u_i}, $i = 1, 2$ y de E_{u_i} en $\mathcal{S}$ son continuas y en [5] se prueba que $\mathcal{S} \overset{1}{\cong} E_{u_1} + E_{u_2}$ y $E_{u_1u_2} \overset{1}{\cong} E_{u_1} \cap E_{u_2}$.

De manera similar, sean $A^d_{u_3}$ espacios de Banach y $J^d_{u_3} : A^d_{u_3} \to A^d_{u_1} + A^d_{u_2}$ operadores que cumplen $\sup_d \|J^d_{u_3}\| < \infty$ y $\mathcal{U}_{u_3} := (A_{u_3})_{\mathcal{D}}$. Entonces se puede definir el operador ultraproducto $J_{u_3} = (J^d_{u_3})_{\mathcal{D}} : \mathcal{U}_{u_3} \to \mathcal{S}$, que no tiene que ser inyectivo aunque los $J^d_{u_3}$ lo sean. Definimos también $E_{u_3} := J_{u_3}(\mathcal{U}_{u_3})$, y es claro que la inclusion $I_{u_3} : E_{u_3} \to E_{u_1} + E_{u_2}$ es continua.

Recurriendo a la notación introducida, redefinamos $u_1 := 1$, $u_2 := \infty$ y $u_3 := \frac{1}{\sigma}$, $0 < \sigma < 1$. Supongamos ahora que para cada $d \in D$, $A^d_i = \ell_i(\Omega_d, \mu_d), i = 1, \frac{1}{\sigma}, \infty$ para algún espacio de medida atómica finita (Ω_d, μ_d). Es fácil verificar que E_i, $i = 1, \frac{1}{\sigma}$ son espacios L_i-abstractos, E_∞ es un espacio M-abstracto y $E_1 \cap E_\infty$ está continuamente incluido en $E_{\frac{1}{\sigma}}$.

Como las inclusiones $A^d_{\frac{1}{\sigma}} \subset \overline{A^d_1 \cap A^d_\infty}^{A^d_1 + A^d_\infty}$ y $\overline{A^d_1 \cap A^d_\infty}^{A^d_1 + A^d_\infty} \subset A^d_1 + A^d_\infty$ tienen norma menor o igual que uno para cada $d \in D$, existen operadores $\overline{J}_{1\infty}$ de $\mathcal{U}_{\frac{1}{\sigma}}$ en $(\overline{A^d_1 \cap A^d_\infty}^{A^d_1 + A^d_\infty})_{\mathcal{D}}$ y $J_{\mathcal{S}}$ de $(\overline{A^d_1 \cap A^d_\infty}^{A^d_1 + A^d_\infty})_{\mathcal{D}}$ en $\mathcal{S}$. Usamos la notación $\overline{E}_{1\infty} := J_{\mathcal{S}}((\overline{A_1^d \cap A_\infty^d}^{A_1^d + A_\infty^d})_{\mathcal{D}})$. Puede probarse fácilmente que $\overline{E}_{1\infty}$ está continuamente incluido en $\overline{E_1 \cap E_\infty}^{E_1+E_\infty}$. De esa manera obtenemos la siguiente cadena de inclusiones continuas:

$$E_1 \cap E_\infty \longrightarrow E_{\frac{1}{\sigma}} \longrightarrow \overline{E}_{1\infty} \longrightarrow \overline{E_1 \cap E_\infty}^{E_1+E_\infty} \longrightarrow E_1 + E_\infty$$

por lo cual si $E_{\frac{1}{\sigma}} \neq \{0\}$ entonces $E_1 \cap E_\infty \neq \{0\}$.

Ahora, supongamos que $T^d : A_\infty^d \to A_{\frac{1}{\sigma}}^d$ son operadores positivos tales que $\sup_{d\in D} \|T^d\| < \infty$; redesignando $T := (T^d)_{\mathcal{D}}$, tenemos la siguiente cadena

$$\mathcal{U}_\infty \xrightarrow{T} \mathcal{U}_{\frac{1}{\sigma}} \xrightarrow{J_{\frac{1}{\sigma}}} E_{\frac{1}{\sigma}} \longrightarrow E_1 + E_\infty$$

El propósito de esta sección es lograr un teorema de factorización para esta cadena. En adelante supondremos que $E_{\frac{1}{\sigma}} \neq \{0\}$.

Definición 6. *Sea E un espacio M-abstracto. $u \in E$ es una* ***unidad fuerte*** *si $[-u, u]$ es la bola unitaria de E.*

Lema 6. *Sea $u := (u^d)_{\mathcal{D}}$ donde $[-u^d, u^d]$ es la bola unitaria en $\ell_\infty(\mu^d)$, entonces u es una unidad fuerte en $\mathcal{U}_\infty$.*

Demostración. Definamos $\lambda(x) := \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : |x| \leq \lambda u\}$, o sea el funcional de Minkowsky de $[-u, u]$. Queremos probar que $\|.\|_{\mathcal{U}_\infty} = \lambda(.)$, o equivalentemente que $[-u, u] = B_{\mathcal{U}_\infty}$.

Claramente $\|u\|_{\mathcal{U}_\infty} = 1$, entonces $[-u, u] \subset B_{\mathcal{U}_\infty}$ y $\| x \|_{\mathcal{U}_\infty} \leq \lambda(x)$.

Para la desigualdad contraria, suponga primero que $\|x\|_{\mathcal{U}_\infty} < 1$, y sea $(x^d)_{\mathcal{D}}$ un representante de la clase de $|x|$ con $x^d \geq 0$ $\forall d \in D$. Definamos $D_1 := \{d \in D : 0 \leq \|x^d\|_{\ell_\infty(\mu^d)} < 1\}$ y $D_{\overline{1}} := \{d \in D : 1 \leq \|x^d\|_{\ell_\infty(\mu^d)}\}$. Si $D_{\overline{1}} \in \mathcal{D}$, cambiando aquellos x^d para los cuales $\|x^d\|_{\ell_\infty(\mu^d)} < 1$ por elementos con norma $\ell_\infty(\mu^d)$ mayor o igual que 1, aún se tiene que $|x| = (x^d)_{\mathcal{D}}$ y $\|x\|_{\mathcal{U}_\infty} = \lim_{\mathcal{D}} \|x^d\|_{\ell_\infty(\mu^d)} \geq 1$, lo cual es una contradicción. En consecuencia $D_1 \in \mathcal{D}$ y, como antes, cambiando aquellos x^d para los cuales $\|x^d\|_{\ell_\infty(\mu^d)} \geq 1$ por elementos con norma $\ell_\infty(\mu^d)$ menor que 1, aún tenemos que $|x| = (x^d)_{\mathcal{D}}$ y para cada $d \in D$ se cumple que $x^d \leq u^d$, entonces $|x| \leq u$.

En el caso $\|x\|_{\mathcal{U}_\infty} = 1$, la sucesión $(1 - \frac{1}{n})|x| \uparrow |x|$, pero por el primer caso $(1 - \frac{1}{n})|x| \uparrow\leq u$, lo cual implica que $|x| \leq u$. Se ha probado así que $B_{\mathcal{U}_\infty} \subset [-u, u]$ y se concluye que $\lambda(x) \leq \| x \|_{\mathcal{U}_\infty}$. □

Como $J_\infty : \mathcal{U}_\infty \to E_\infty$ es una proyección reticular isométrica entonces, $\overline{u} := J_\infty(u)$ es una unidad fuerte en E_∞.

Lema 7. *Sea $e \in E_1 \cap E_\infty$ si $\|e\|_{E_\infty} \leq 1$ entonces $\|e\|_{E_{\frac{1}{\sigma}}}^{\frac{1}{\sigma}} \leq \|e\|_{E_1}$.*

Demostración. Sea $e = J_\infty((e^d)_\mathcal{D})$. Como e está en la bola unitaria de E_∞ y J_∞ es una proyección reticular isométrica, $(e^d)_\mathcal{D}$ se puede tomar en la bola unitaria $[-u, u]$ de $\mathcal{U}_\infty$. Como en la prueba del lema 6, para cada $d \in D$ podemos suponer que $e^d \in [-u^d, u^d]$, donde u^d es una unidad fuerte en $\ell_\infty(\mu^d)$; mas aún:

$$\|e^d\|_{\ell_{\frac{1}{\sigma}}(\mu^d)}^{\frac{1}{\sigma}} = \sum_{i\in\Omega_d} |e_i^d|^{\frac{1}{\sigma}} \mu_i^d \leq \sup_{i\in\Omega_d} |e_i^d|^{\frac{1}{\sigma}-1} \sum_{i\in\Omega_d} |e_i^d| \mu_i^d \leq \|e^d\|_{\ell_1(\mu^d)}.$$

Tomando $\text{lím}_\mathcal{D}$ en ambos extremos de la desigualdad anterior se obtiene

$$\|(e^d)_\mathcal{D}\|_{\mathcal{U}_{\frac{1}{\sigma}}}^{\frac{1}{\sigma}} \leq \|(e^d)_\mathcal{D}\|_{\mathcal{U}_1}.$$

Como las J_i son proyecciones reticulares isométricas, $\|e\|_{E_{\frac{1}{\sigma}}}^{\frac{1}{\sigma}} \leq \|e\|_{E_1}$. □

Denotemos ahora con E_0 a la clausura de $E_1 \cap E_\infty$ en $E_1 + E_\infty$. Se constata fácilmente que la norma de $E_1 + E_\infty$ es orden continua en E_0, entonces existe un conjunto $\mathcal{E} := \{e_v, v \in \mathcal{V}\} \subset E_1 \cap E_\infty$ que es un sistema maximal de elementos positivos disjuntos a pares en E_0 y por lo tanto también en $E_{\frac{1}{\sigma}}$. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar $\|e_v\|_{E_\infty} < 1$ para todo $v \in \mathcal{V}$. La prueba de los hechos enunciados, con pequeñas modificaciones, se encuentran en los lemas 2 y 3 de [12].

Lema 8. *El sistema maximal $\{e_v, v \in \mathcal{V}\}$ se puede reemplazar con un sistema maximal $\{u_v, v \in \mathcal{V}\}$ tal que para toda $v \in \mathcal{V}$, el vector u_v es una unidad fuerte en la banda que el genera en E_∞.*

Demostración. Sea $\overline{u} := J_\infty(u)$, donde $[-u, u]$ es la bola unitaria de $\mathcal{U}_\infty$, entonces $[-\overline{u}, \overline{u}]$ es la bola unitaria de E_∞.

Definamos $u_v := \bigvee_{m\in\mathbb{N}} \overline{u} \wedge m e_v$. Como $\|e_v\|_{E_\infty} \leq 1$ entonces $e_v \leq \overline{u}$, y por tanto $e_v = \overline{u} \wedge e_v \leq u_v$ y e_v está en la banda generada por u_v. También, por la definición, para $i = 1,\ \frac{1}{\sigma},\ \infty$, u_v está en la banda generada por e_v en E_i, en consecuencia u_v y e_v generan las mismas bandas en E_i. Ahora, la maximalidad del sistema ortogonal $\{u_v, v \in \mathcal{V}\}$ es clara, como también que cualquier vector x en la banda generada por u_v, con norma no mayor que uno, cumple que $|x| = \bigvee_{m\in\mathbb{N}} |x| \wedge m e_v \leq \bigvee_{m\in\mathbb{N}} \overline{u} \wedge m e_v = u_v$, es decir, que $x \in [-u_v, u_v]$. Como además $\|u_v\|_{E_\infty} \leq \|\overline{u}\|_{E_\infty} = 1$, se concluye que u_v es una unidad fuerte en la banda que genera. □

Fijemos el vector $z_0 := J_{\frac{1}{\sigma}} T(u)$, donde $[-u, u]$ es la bola unitaria de $\mathcal{U}_\infty$; por el teorema de Kakutani (Proposición 1.a.9 en [10]), existe un conjunto numerable $\mathcal{V}_0 = \{v_n, n \in \mathbb{N}\}$ tal que $z_0 = \sum_{i=1}^\infty x_n$, la serie converge en E_0 y cada x_n está en la banda generada por u_{v_n} en E_0.

Para $i = 1, \frac{1}{\sigma}, \infty$, definamos

$$G_i := \{x \in E_i : |x| \wedge u_v = 0, \forall v \in \mathcal{V} - \mathcal{V}_0\}.$$

Las G_i son bandas proyección en E_i y el ideal $I((u_{v_n}))$ generado por $\{u_{v_n}, n \in \mathbb{N}\}$ en E_i es denso en G_i para $i = 1, \frac{1}{\sigma}$. Sea $\overline{P}_{G_i}$ la restricción por rango de la proyección de E_i en G_i. Se constata con facilidad que $G_{\frac{1}{\sigma}}$ está contenido en forma continua en $G_1 + G_\infty$.

Para $i = 1, \frac{1}{\sigma}, \infty$, sean $B_{E_i}(v_n)$ las bandas generadas por u_{v_n} en E_i.

Lema 9. *Existe un espacio de medida finita $(\Omega_{v_n}, \Sigma_{v_n}, \mu^i_{v_n})$, tal que para cada u_{v_n}, $B_{E_i}(v_n)$ es reticularmente isométrico a $L_i(\mu^i_{v_n})$ para $i = 1, \frac{1}{\sigma}$, $B_{E_\infty}(v_n)$ es reticularmente isométrico a $L_\infty(\mu^1_{v_n})$ y $\mu^{\frac{1}{\sigma}}_{v_n} \leq \mu^1_{v_n}$.*

Demostración. Siguiendo las mismas líneas de demostración que en la prueba del teorema 12.26 en [1] y recurriendo al teorema de representación de Stone (ver [18]), construimos un isomorfismo G_{v_n} entre $\mathcal{M}_{v_n}$, el álgebra booleana de las componentes de u_{v_n} in E_0, y el álgebra booleana $\mathcal{O}_{v_n}$ de los conjuntos abierto-cerrados en un espacio topológico separado, compacto y extremadamente disconexo Ω_{v_n}.

Para $i = 1, \frac{1}{\sigma}$ definimos las funciones $\mu^i_{v_n} : \mathcal{O}_{v_n} \to \mathbb{R}^+$ como

$$\mu^i_{v_n}(G_{v_n}(x)) := \|x\|^i_{E_i},$$

las cuales resultan ser medidas σ-aditivas en $(\Omega_{v_n}, \mathcal{O}_{v_n})$. Usando el procedimiento de extensión de Caratheodory, obtenemos medidas $\mu^{i\star}_{v_n}$ en $(\Omega_{v_n}, \Sigma^i_{v_n})$, cuyas σ-álgebras $\Sigma^i_{v_n}$ son ambas extensiones de $\mathcal{O}_{v_n}$. Mas aún, como $\mu^1_{v_n}$ y $\mu^{\frac{1}{\sigma}}_{v_n}$ tienen los mismos conjuntos de medida cero, la compleción de ambas medidas tienen la misma álgebra de conjuntos medibles, digamos Σ_{v_n}, y por el teorema §13.C. en [8], para cada medida el álgebra de conjuntos medibles de su extensión es igual al álgebra de conjuntos medibles de su compleción; por lo tanto $\Sigma^i_{v_n} = \Sigma_{v_n}$, para $i = 1, \frac{1}{\sigma}$.

Se define una aplicación del conjunto de combinaciones lineales

$$K_{v_n} := \{\sum_{t=1}^{m} a_t x_t : x_t \in \mathcal{M}_{v_n}; a_t \in \mathbb{R}; x_s \wedge x_h = 0; s \neq h; s, h \in \{1, ., m\}\}$$

al espacio generado por las funciones características de los conjuntos en $\mathcal{O}_{v_n}$ mediante

$$M_{v_n}\left(\sum_{t=1}^{m} a_t x_t\right) = \sum_{t=1}^{m} a_t \chi_{G_{v_n}(x_t)}. \tag{1}$$

M_{v_n} es una isometría reticular bien definida de K_{v_n} sobre $\mathcal{T}_{\mu^1_{v_n}}$, el espacio de funciones simples integrables en $(\Omega_{v_n}, \Sigma_{v_n}, \mu^1_{v_n})$. Por el teorema espectral de

Freudenthal (ver teorema 6.8 de [1]), K_{v_n} es orden denso en el ideal generado por u_{v_n} y por lo tanto es orden denso también en $B_{E_i}(v_n)$ para $i = 1, \frac{1}{\sigma}, \infty$ y en consecuencia. Como E_i tiene norma orden continua para $i = 1, \frac{1}{\sigma}$, entonces K_{v_n} es denso en norma en $B_{E_i}(v_n)$, lo cual permite extender M_{v_n} por densidad a isometrías reticulares

$$M^i_{v_n} : B_{E_i(v_n)} \to L_i(\Omega_{v_n}, \Sigma_{v_n}, \mu^{i\star}_{v_n}).$$

Como en la prueba del teorema 12.26 en [1], se demuestra que tales isometrías son sobreyectivas y como $\|u_{v_n}\|_{E_\infty} \leq 1$, recurriendo al lema 7, se cumple que $\mu^{\frac{1}{\sigma}\star}_{v_n} \leq \mu^{1\star}_{v_n}$. Redesignando $\mu^i_{v_n} = \mu^{i\star}_{v_n}$, se concluye la primera parte de la demostración.

Se quiere demostrar ahora que la isometría reticular definida por (1) se puede extender a una isometría reticular

$$M^\infty_{v_n} : B_{E_\infty}(v_n) \to L_\infty(\Omega_{v_n}, \Sigma_{v_n}, \mu^1_{v_n}),$$

que coincide con $M^1_{v_n}$ en $B_{E_\infty}(v_n) \bigcap B_{E_1}(v_n)$. Como la unidad fuerte u_{v_n} de $B_{E_\infty}(v_n)$ está en $B_{E_1}(v_n)$, entonces $B_{E_\infty}(v_n) \subset B_{E_1}(v_n)$, por lo cual basta probar que la restricción de $M^1_{v_n}$ a $B_{E_\infty}(v_n)$ es la extensión deseada.

Sea $x := \sum_{t=1}^m a_t x_t \in K_{v_n}$. Como x_t es una componente de u_{v_n} para cada t, entonces $\|x_t\|_{E_\infty} = 1$ y se cumple que

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{t=1}^m a_t x_t\right\|_{E_\infty} &= \left\|\left|\sum_{t=1}^m a_t x_t\right|\right\|_{E_\infty} = \left\|\sum_{t=1}^m |a_t x_t|\right\|_{E_\infty} = \left\|\bigvee_{t=1}^m |a_t| x_t\right\|_{E_\infty} \\
&= \bigvee_{t=1}^m \||a_t| x_t\|_{E_\infty} = \bigvee_{t=1}^m |a_t| \, \|x_t\|_{E_\infty} = \bigvee_{t=1}^m |a_t| \\
&= \left\|\sum_{t=1}^m a_t \chi_{G_{v_n}(x_t)}\right\|_{L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu^1)} \\
&= \left\|M_{v_n}\left(\sum_{t=1}^m a_t(x_t)\right)\right\|_{L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu^1)}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Sea entonces y un elemento positivo de la banda $B_{E_\infty}(v_n)$. Por la densidad de orden de K_{v_n} en $B_{E_\infty}(v_n)$ mencionada anteriormente, existe una sucesión de vectores $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K_{v_n}$ tal que $0 \leq y_n \uparrow y$ y $0 \leq y - y_n \leq n^{-1} u_{v_n}$ para cada n. La condición $0 \leq y_n \uparrow y$ nos permite deducir que $\|y\|_{E_\infty} = \text{lím}_n \|y_n\|_{E_\infty}$, ya que tal afirmación es válida en cualquier espacio $C(K)$ y por el corolario 1 del teorema 7.4 de [17], $B_{E_\infty}(v_n)$ es reticularmente isómetrica a algun espacio $C(K)$ de funciones reales continuas definidas en un espacio compacto K. De otra parte $0 \leq M^1_{v_n}(y_n) \uparrow M^1_{v_n}(y)$ y, de nuevo, $\|M_{v_n}(y)\|_{L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu^1)} =$

$\text{lím}_n \|M_{v_n}(y_n)\|_{L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu^1)}$. Utilizando las afirmaciones anteriores y la ecuación 2, se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \|y\|_{E_\infty} &= \lim_n \|y_n\|_{E_\infty} = \lim_n \|M^1_{v_n}(y_n)\|_{L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu^1)} \\ &= \|M^1_{v_n}(y)\|_{L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu^1)}. \end{aligned}$$

Si y es un vector cualquiera, aplicando el resultado anterior a y^+ y a y^- se establece la ecuación para y. Se prueba así que

$$M^\infty_{v_n} := M^1_{v_n} \upharpoonright B_{E_\infty}(v_n) : B_{E_\infty}(v_n) \to L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu^1)$$

es una isometría reticular. La sobreyectividad de $M^\infty_{v_n}$ se demuestra en la misma forma que la de $M^1_{v_n}$. □

Teorema 10. *Utilizando la notación anterior, existen espacios de medida (Ω, Σ, μ^i) tales que G_i es reticularmente isométrico a $L_i(\mu^i)$ for $i = 1, \frac{1}{\sigma}$, y G_∞ es reticularmente isométrico a $L_\infty(\mu^1)$. Existe también una isometría reticular*

$$M_{1\infty} : \overline{G_1 \cap G_\infty}^{G_1+G_\infty} \to \overline{L_1(\mu^1) \cap L_\infty(\mu^1)}^{L_1(\mu^1)+L_\infty(\mu^1)}.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un espacio $(\Omega_{v_n}, \Sigma_{v_n}, \mu^i_{v_n})$ de medida finita, tal que $B_{E_i}(v_n) = L_i(\mu^i_{v_n})$. Sean

$$\begin{aligned} \Omega &:= \cup_{i=1}^\infty \Omega_{v_n}, \\ \Sigma &:= \{M \subset \Omega \mid M \cap \Omega_{v_n} \in \Sigma_{v_n}, \forall n \in \mathbb{N}\} \text{ y} \\ \mu^i(M) &:= \sum_{n=1}^\infty \mu^i_{v_n}(M \cap \Omega_{v_n}), \ \ \forall\, M \in \Sigma. \end{aligned}$$

El primer resultado se obtiene fácilmente usando las isometrías reticulares M^i, definidas a partir de las $M^i_{v_n}$ del lema 9, en una forma canónica. Puesto que M^1 coincide con M^∞ en $G_1 \cap G_\infty$, el operador $M_{1\infty}$ es la extensión a $\overline{G_1 \cap G_\infty}^{G_1+G_\infty}$ de su restricción común. □

Proposición 11. $L_{\frac{1}{\sigma}}(\Omega, \Sigma, \mu^{\frac{1}{\sigma}}) \overset{1}{\cong} L_{\frac{1}{\sigma}}(\Omega, \Sigma, \mu^1)$ *mediante una isometría reticular.*

Demostración. Como $\mu^{\frac{1}{\sigma}} \le \mu$, entonces $\mu^{\frac{1}{\sigma}}$ es absolutamente continua con respecto a μ. Por el teorema de Radon-Nikodym, existe una función medible, positiva y acotada t tal que $\mu^{\frac{1}{\sigma}}(A) = \int_A t d\mu$. El operador multiplicación $D_{t^\sigma} : L_{\frac{1}{\sigma}}(\mu^{\frac{1}{\sigma}}) \to L_{\frac{1}{\sigma}}(\mu)$ provee la isometría deseada. □

Teorema 12. *Sea $T : \mathcal{U}_\infty \to \mathcal{U}_{\frac{1}{\sigma}}$ un operador positivo. Entonces existen un espacio de medida σ-finita (Ω, Σ, μ) y una función $w \in L_{\frac{1}{\sigma}}(\mu)$ tales que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}_\infty \arrow[r, "T"] \arrow[d, "A"'] & \mathcal{U}_{\frac{1}{\sigma}} \arrow[r, "J_{\frac{1}{\sigma}}"] & E_{\frac{1}{\sigma}} \arrow[r, "I"] & E_1 + E_\infty \\
L_\infty(\mu) \arrow[rr, "D_w"] & & L_{\frac{1}{\sigma}}(\mu) \arrow[r, "I"] & \overline{\mathcal{T}_\mu}^{L_1(\mu)+L_\infty(\mu)} \arrow[u, "B"']
\end{tikzcd}$$

donde I es la inclusión, $J_{\frac{1}{\sigma}}$ es la aplicación cociente, D_w es el operador diagonal de multiplicación por w, y todos los demás son operadores continuos.

Demostración. Con la notación anterior: Redefina $\mu := \mu^1$ y defina $w := M^{\frac{1}{\sigma}}\overline{P}_{G_{\frac{1}{\sigma}}} J_{\frac{1}{\sigma}} T(u)$, donde $[-u, u]$ es la bola unidad en $\mathcal{U}_\infty$.

A y B son las composiciones: $A = M^\infty \overline{P}_{G_\infty} J_\infty$ y $B = I_{1\infty} M_{1\infty}^{-1}$, donde $I_{1\infty}$ es la inclusión $\overline{G_1 \cap G_\infty}^{G_1+G_\infty} \to E_1 + E_\infty$.

Claramente $\overline{\mathcal{T}_\mu}^{L_1(\mu)+L_\infty(\mu)} = \overline{L_1(\mu) \cap L_\infty(\mu)}^{L_1(\mu)+L_\infty(\mu)}$. $\square$

3.3 Factorización de operadores $(\infty\sigma)$-integrales - Condición necesaria

En esta sección se concluye la prueba del teorema de caracterización de los operadores. La pieza fundamental en lo que resta de la prueba es el teorema 12. En esta sección se presenta en forma detallada la construcción de ultraproductos que permite pasar de la factorización de los operadores (∞, σ)-nucleares a la de los operadores (∞, σ)-integrales. Como ya se dijo, aunque esa construcción sigue las líneas de la demostración original en la prueba del teorema análogo para los operadores integrales, es importante presentarla acá para que el lector tenga una idea clara de la demostración, y porque esa construcción provee el contexto sobre el cual se aplica el teorema 12.

Conclusión de la prueba del teorema 4: Sea $T \in \mathfrak{I}_{\infty\sigma}(E, F)$, entonces $J_F T \in (E \otimes_{g'_{\infty\sigma}} F')'$.

Definimos $\mathcal{F}(E, F') := \{(M, N) : M \in FIN(E), N \in FIN(F')\}$, dotado con la relación de orden natural procedente de la inclusión, es decir

$$(M_1, N_1) \leq (M_2, N_2) \leftrightarrow M_1 \subset M_2, N_1 \subset N_2.$$

Para todo $(M_0, N_0) \in \mathcal{F}(E, F')$, sea

$$R(M_0, N_0) := \{(M, N) \in \mathcal{F}(E, F') : (M_0, N_0) \leq (M, N)\}$$

y sea

$$\mathcal{R} := \left\{R(M, N) : (M, N) \in \mathcal{F}(E, F')\right\}.$$

Es fácil ver que $\mathcal{R}$ es una base de filtro en $\mathcal{F}(E, F')$. Por el lema de Zorn, sea $\mathcal{D}$ un ultrafiltro de $\mathcal{F}(E, F')$ que contiene a $\mathcal{R}$. Llamemos D al correspondiente conjunto de índices. Hacemos resaltar que cada $d \in D$ viene asociado a un par (M_d, N_d) de espacios de dimensión finita de E y F' respectivamente. Para todo $d \in D$, sea $(M_d, N_d) \in \mathcal{F}(E, F')$. Si $z \in M_d \otimes N_d$, entonces

$$g'_{\infty\sigma}(z; E \otimes F') \leq g'_{\infty\sigma}(z; M_d \otimes N_d),$$

por tanto $J_F T\restriction_{M_d \otimes N_d} \in (M_d \otimes_{g'_{\infty\sigma}} N_d)'$. Pero como M_d y N_d tienen dimensión finita, entonces $(M_d \otimes_{g'_{\infty\sigma}} N_d)' = M'_d \otimes_{g_{\infty\sigma}} N'_d$, y en consecuencia

$$J_F T\restriction_{M_d \otimes N_d} \in M'_d \otimes_{g_{\infty\sigma}} N'_d,$$

que equivale a decir que $J_F T\restriction_{M_d \otimes N_d}$, como aplicación de M_d en N'_d, es nuclear, es decir que

$$J_F T\restriction_{M_d \otimes N_d} \in \mathfrak{N}_{\infty\sigma}(M_d, N'_d).$$

Como hemos visto en el teorema de factorización de los operadores nucleares, $J_F T\restriction_{M_d \otimes N_d}$ factoriza del siguiente modo:

$$\begin{tikzcd}
M_d \arrow[rr, "J_F T\restriction_{M_d \otimes N_d}"] \arrow[d, "A^d"] & & N'_d \\
\ell_\infty(\mu^d) \arrow[r, "D^d"] & \ell_{\frac{1}{\sigma}}(\mu^d) \arrow[r, "I"] & \ell_1(\mu^d) + \ell_\infty(\mu^d) \arrow[u, "B^d"']
\end{tikzcd}$$

donde μ^d es una medida finita en $\{1, 2, .., m_d\}$ y m_d es la dimensión de M_d.

Además podemos tomar la factorización de modo que si $\epsilon > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
I_{\infty\sigma}(J_F T\restriction_{M_d \otimes N_d}) &= N_{\infty\sigma}(J_F T\restriction_{M_d \otimes N_d}) \leq \|B^d\|\|D^d\|\|A^d\| \\
&\leq N_{\infty\sigma}(J_F T\restriction_{M_d \otimes N_d})(1 + \epsilon) \\
&= I_{\infty\sigma}(J_F T\restriction_{M_d \otimes N_d})(1 + \epsilon) \leq I_{\infty\sigma}(J_F T)(1 + \epsilon).
\end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\|A^d\| = \|B^d\| = 1$ y $\|D^d\| \leq I_{\infty\sigma}(J_F T)(1 + \epsilon)$.

Sea $H_E : E \to (M_d)_{\mathcal{D}}$, de modo que $H_E(x) = (z^d)_{\mathcal{D}}$ con $z^d = x$ si $x \in M_d$, y $z^d = 0$ si $x \notin M_d$.

De manera análoga sea $H_{F'} : F' \to (N_d)_{\mathcal{D}}$, tal que $H_{F'}(y') = (w^d)_{\mathcal{D}}$ con $w^d = y'$ si $w \in N_d$, y $w^d = 0$ si $w \notin N_d$.

Podemos obtener así el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "J_F T"] \arrow[d, "H_E"] & & F'' \\
(M_d)_{\mathcal{D}} \arrow[r, "(J_F T\restriction_{M_d\otimes N_d})^d"] & (N_d')_{\mathcal{D}} \arrow[r, "I"] & ((N_d)_{\mathcal{D}})' \arrow[u, "H'_{F'}"']
\end{tikzcd}$$

Como en la sección anterior denotamos $\mathcal{U}_i := (\ell_i(\mu^d))_{\mathcal{D}}$ para $i = 1, \frac{1}{\sigma}, \infty$, y $\mathcal{S} := (\ell_i(\mu^d) + \ell_\infty(\mu^d))_{\mathcal{D}}$.

Sean $A := (A^d)_{\mathcal{D}} : (M_d)_{\mathcal{D}} \to \mathcal{U}_\infty$, $D := (D^d)_{\mathcal{D}} : \mathcal{U}_\infty \to \mathcal{U}_{\frac{1}{\sigma}}$ y $B := (B^d)_{\mathcal{D}} : \mathcal{S} \to (N_d')_{\mathcal{D}}$. En la sección anterior vimos que existe un espacio de medida σ-finita (Ω, Σ, μ) y un operador multiplicación $D_w : L_\infty(\mu) \to L_{\frac{1}{\sigma}}(\mu)$ de modo que

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}_\infty \arrow[r, "D"] \arrow[d, "R"] & \mathcal{U}_{\frac{1}{\sigma}} \arrow[r, "IJ_{\frac{1}{\sigma}}"] \arrow[d] & \mathcal{S} \\
L_\infty(\mu) \arrow[r, "D_w"] & L_{\frac{1}{\sigma}}(\mu) \arrow[r, "I"] & \overline{\mathcal{T}_{(\Sigma,\mu)}}^{L_1(\mu)+L_\infty(\mu)} \arrow[u, "G"']
\end{tikzcd}$$

De los tres diagramas anteriores se demuestra el teorema pues

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "J_F T"] \arrow[d, "A"] & & F'' \\
L_\infty(\mu) \arrow[r, "D_w"] & L_{\frac{1}{\sigma}}(\mu) \arrow[r, "I"] & \overline{\mathcal{T}_{(\Sigma,\mu)}}^{L_1(\mu)+L_\infty(\mu)} \arrow[u, "B"']
\end{tikzcd}$$

Referencias

[1] Aliprantis, C.D. and Burkinshaw, O.: Positive operators. Academic Press. New York, London. 1985.

[2] Arango Ospina, G.: Ideales de operadores $(1,\sigma)$-absolutamente continuos. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia, 2000.

[3] Arango, G., Rivera, M. J., López, J. A.: Cálculo de la norma tensorial $g_{\infty\sigma}$. Rev. Matemáticas: Enseñanza Universitaria (Nueva Serie), Vol. VII n- 1,2, pp. 3-28. 2000.

[4] Arango, G.; López Molina, J. A.; Rivera, M. J.: Properties of the (∞,σ)-nuclear and (∞,σ)-integral operators. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (2) Suppl. no. 68, part I, pp. 257–267. 2002.

[5] Arango, G., Rivera, M. J., López J. A.: Characterization of $g_{\infty\sigma}$-integral operators. Mathematische Nachrichten, Volume 278, Issue 9, pp. 995-1014. Julio 2005.

[6] Defant, A. and Floret, K.: Tensor Norms and Operator Ideals. North Holland Math. Studies. Amsterdam. 1993.

[7] Gilbert, J.E. and Leih, T.J.: Factorization, tensor products and bilinear forms in Banach space theory, in *Notes in Banach spaces*, 182-305, University of Texas Press, Austin, London, 1980.

[8] Halmos, P. R.: Measure Theory. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1970.

[9] Heinrich, S.: Ultraproducts in Banach Spaces Theory. J. Reine Angew. Math. 313, 72-104, 1980.

[10] Lindenstrauss, J. y Tzafriri, L.: Classical Banach Spaces II. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

[11] López Molina, J.A. y Sánchez Pérez, E.A.: Operator ideals related to (p, σ)-absolutely continuous operators. Studia Math. 138(1), 25-40, 2000.

[12] López Molina, J.A. y Sánchez Pérez, E.A.: On ultraproducts of compositions of certain operators between some finite dimensional ℓ^p spaces. Revista Colombiana de Matemáticas. 35 n- 2, 67-76. 2001.

[13] Matter, U.: Absolutely continuous operators and super-reflexivity. Math. Nach.130, 193-216. 1987.

[14] Niculescu, C.P.: Absolute continuity and weak compactness. Bulletin of the American Mathematical Society, S1 1064-1066. 1975.

[15] Pietsch, A.: Operator Ideals. North Holland Math. Library. Amsterdam, New York. 1980.

[16] Sánchez Pérez, E.A.: Ideales de Operadores Absolutamente Continuos y Normas Tensoriales Asociadas. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia. 1997.

[17] Schaefer, H. H.: Banach Lattices and Positive Operators. Springer-Verlag. New York. 1974.

[18] Stone, M.H.: The theory of representations for Boolean Algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 40, 37-111. 1936.

Dirección del autor: G. Arango, Universidad Eafit, Medellín. garango@eafit.edu.co