

Los espacios de Hörmander $\mathcal{B}_{p,k}(E)$

Jairo Villegas G

Resumen

En este trabajo se extienden al marco vectorial algunos resultados de Björck sobre espacios de Hörmander $\mathcal{B}_{p,k}$ utilizando la teoría de ultradistribuciones de Beurling.

Palabras y frases claves: Espacio de Hörmander, ultradistribución, espacio de Fréchet, transformada de Fourier.

1 Introducción

Se sabe de la importancia de los espacios de Hörmander $\mathcal{B}_{p,k}$ en la teoría de operadores diferenciales parciales lineales (ver [6], [7]). De igual manera, en [2] Björck, utilizando ultradistribuciones de Beurling, estudia problemas de existencia, aproximación y regularidad de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales lineales con coeficientes constantes en espacios más generales que los de Hörmander. En este trabajo definimos los espacios de Hörmander con valores vectoriales vía la teoría de ultradistribuciones de Beurling e introducimos algunas propiedades de dichos espacios pero en el marco vectorial. Para ello, utilizaremos conceptos de la teoría de espacios localmente convexos. Para definiciones y propiedades ver [8], [11] y [13].

A continuación presentamos alguna terminología usada en este trabajo. Los espacios vectoriales usados en este artículo están definidos sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Si E es un espacio localmente convexo, denotamos por E' su dual topológico. Dados dos espacios localmente convexos E y F , $\mathcal{L}_b(E, F)$ denota el espacio de los operadores lineales y continuos de E en F , provisto de la topología de la convergencia uniforme sobre todos los subconjuntos acotados de E ; cuando $E = F$ escribimos $\mathcal{L}_b(E)$ y si $F = \mathbb{C}$ ponemos E'_b . Por $E \widehat{\otimes}_\epsilon F$ denotamos la completación del producto tensorial inyectivo de E y F . Si E es un espacio localmente convexo, $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n, E)$ denota el espacio de las funciones continuas de $\mathbb{R}^n$ en E , equipado de la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos de $\mathbb{R}^n$. Si $E = \mathbb{C}$ escribimos $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$. $\overline{B}_1$ denota la

bola unitaria cerrada y $B_t(x)$ a la bola abierta de centro en x y radio t ($t > 0$).

Finalmente, si u es una función compleja en $\mathbb{R}^n$ y $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau_x u$ y $\tilde{u}$ serán las funciones definidas por $(\tau_x u)(t) = u(t - x)$, $\tilde{u}(t) = u(-t)$ para $t \in \mathbb{R}^n$. Si $x \in \mathbb{R}^n$, e_x denota la función $e_x(t) = e^{ixt}$, $t \in \mathbb{R}^n$, donde $xt = \sum_{j=1}^n x_j t_j$ es el producto escalar usual de $\mathbb{R}^n$. Si $u \in L_1$ entonces la transformada de Fourier de u , $\hat{u}$ o $\mathcal{F}u$, es definida por $\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-i\xi x} dx$. Para definiciones y resultados sobre espacios de funciones diferenciables y distribuciones con valores vectoriales, nos remitimos a [14] y [15].

2 Preliminares

En esta sección extendemos al marco vectorial algunos resultados de Björck (ver [2]) sobre ultradistribuciones de Beurling. Tratamientos bastante exhaustivos sobre la teoría de ultradistribuciones (incluyendo las de Beurling) pueden encontrarse en [1], [2], [3], [4], [9] y [10]. Nuestra notación sigue el trabajo de [2].

Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de todas las funciones reales continuas $\omega(x)$ sobre $\mathbb{R}^n$ tales que para cada una de ellas existe una función $\sigma(t)$ que verifica $\omega(x) = \sigma(|x|)$ donde $\sigma(t)$ es una función cóncava, continua y creciente sobre $[0, \infty[$ con las siguientes propiedades: (i) $\sigma(0) = 0$, (ii) $\int_0^\infty \frac{\sigma(t)}{1+t^2} dt < \infty$ (condición de Beurling), (iii) existe un número real a y un número $b > 0$ tales $\sigma(t) \geq a + b \log(1+t)$ para $t \geq 0$. La propiedad más importante es la (ii), que es esencialmente la condición de no cuasi-analiticidad de Denjoy-Carleman (ver la Sección 1.5 de [2]). Dos de los ejemplos más importantes de funciones de $\mathcal{M}$ son $\omega(x) = \log(1+|x|)^d$ con $d > 0$ y $\omega(x) = |x|^\beta$ con $0 < \beta < 1$. Cada función $\omega \in \mathcal{M}$ es subaditiva.

Si $\omega \in \mathcal{M}$, entonces $\mathcal{K}_\omega$ es el conjunto de todas las funciones positivas k sobre $\mathbb{R}^n$ para la que existe una constante $\lambda > 0$ tal que $k(x+y) \leq e^{\lambda\omega(x)} k(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. Si $k, k_1, k_2 \in \mathcal{K}_\omega$ y s es un número real entonces $\log k$ es uniformemente continua, $k^s \in \mathcal{K}_\omega$, $k_1 k_2 \in \mathcal{K}_\omega$ y $M_k(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \frac{k(x+y)}{k(y)} \in \mathcal{K}_\omega$ (ver [2, Th.2.1.3]).

Definición 1. Sean E un espacio de Banach, $p \in [1, \infty]$, $\omega \in \mathcal{M}$ y $k \in \mathcal{K}_\omega$. $L_{p,k}(E)$ denota el conjunto de todas las funciones f medibles Bochner de $\mathbb{R}^n$ en E , tales que $kf \in L_p(E)$, donde $L_p(E)$ es el conjunto de todas las funciones (clases de funciones equivalentes) medibles Bochner de $\mathbb{R}^n$ en E , tales que $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E^p dx \right)^{1/p} < \infty$.

(Si $p = \infty$ se supone $\text{ess sup } \|f(x)\|_E < \infty$).

Como es bien conocido los espacios $L_p(E)$, equipados con la norma $\|\cdot\|_p$ son espacios de Banach. Definiendo $\|f\|_{L_{p,k}(E)} = \|kf\|_p$ para $f \in L_{p,k}(E)$, resulta que $L_{p,k}(E)$ es un espacio de Banach isométricamente isomorfo a $L_p(E)$. Denotamos por $L_1^{loc}(E)$ el conjunto de todas las funciones medibles Bochner de $\mathbb{R}^n$ en E , tales que $\int_K \|f(x)\|_E dx < \infty$, para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. Si $f \in L_1(E)$ la transformada de Fourier de f , $\hat{f}$ o $\mathcal{F}f$, es definida por $\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-itx} dx$.

En la definición que sigue extendemos al caso vectorial las definiciones 1.3.1, 1.3.2 y 1.8.1 de [2].

Definición 2. Si $\omega \in \mathcal{M}$ y E es un espacio de Banach, $\mathcal{D}_\omega(E)$ denota el conjunto de todas las funciones $\varphi \in L_1(E)$ con soporte compacto tales que para cada $\lambda > 0$ se tiene $\|\varphi\|_\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} \|\hat{\varphi}(x)\|_E e^{\lambda\omega(x)} dx < \infty$, donde $\hat{\varphi}(x)$ es la transformada de Fourier de φ .

Por otra parte, $\mathcal{S}_\omega(E)$ es el conjunto de todas las funciones $\varphi \in L_1(E)$ tales que φ y $\hat{\varphi}$ son funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ sobre $\mathbb{R}^n$ y

$$\vec{p}_{\alpha,\lambda}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} e^{\lambda\omega(x)} \|\partial^\alpha \varphi(x)\|_E < \infty$$

$$\vec{q}_{\alpha,\lambda}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} e^{\lambda\omega(x)} \|\partial^\alpha \hat{\varphi}(x)\|_E < \infty$$

para todo multiíndice α y todo $\lambda > 0$.

Si Ω es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathcal{D}_\omega(\Omega, E) = \{\varphi \in \mathcal{D}_\omega(E) : \text{sop } \varphi \subset \Omega\}.$$

Si Ω es un compacto entonces $\mathcal{D}_\omega(\Omega, E)$ equipado con la familia de normas $\{\|\cdot\|_\lambda : \lambda > 0\}$ llega a ser un espacio de Fréchet. Si Ω es un abierto y $\{K_j\}_1^\infty$ es una sucesión fundamental de compactos de Ω , entonces $\mathcal{D}_\omega(\Omega, E) = \varinjlim_j \mathcal{D}_\omega(K_j, E)$ y es un LF-estricto (para la definición de límite inductivo y de espacio LF-estricto ver p.e. [13]).

De igual manera, $\mathcal{S}_\omega(E)$ equipado de la topología localmente convexa generada por las seminormas $\vec{p}_{\alpha,\lambda}, \vec{q}_{\alpha,\lambda}$ ($\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \lambda > 0$) es un espacio de Fréchet y la transformada de Fourier es un automorfismo topológico de $\mathcal{S}_\omega(E)$.

Observación 3. 1. Si $E = \mathbb{C}$ entonces $\mathcal{D}_\omega(E)$ y $\mathcal{S}_\omega(E)$ coinciden con los espacios usuales $\mathcal{D}_\omega$ y $\mathcal{S}_\omega$. En este caso escribimos $p_{\alpha,\lambda}$ y $q_{\alpha,\lambda}$ en lugar de $\vec{p}_{\alpha,\lambda}$ y $\vec{q}_{\alpha,\lambda}$, respectivamente.

2. Al igual que sucede en el caso escalar (ver [2, Cor. 1.3.21]) la condición $\omega(x) \geq a + b \log(1 + |x|)$, ($a \in \mathbb{R}$, $b > 0$) y la fórmula de inversión de Fourier, permiten demostrar que si $f \in \mathcal{D}_\omega(E)$ entonces f , modificándola si es necesario en un conjunto de medida cero, llega a ser indefinidamente diferenciable. Por tanto $\mathcal{D}_\omega(E) \subset \mathcal{D}(E)$.

En la siguiente proposición demostramos la completitud de los espacios de la definición anterior.

Proposición 4. Sea K un compacto de $\mathbb{R}^n$, $\omega \in \mathcal{M}$ y E un espacio de Banach, entonces

1. $(\mathcal{D}_\omega(K, E), \{\|\cdot\|_\lambda : \lambda > 0\})$ es un espacio de Fréchet,
2. $(\mathcal{S}_\omega(E), \{\vec{p}_{\alpha,\lambda}, \vec{q}_{\alpha,\lambda} : \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \lambda > 0\})$ es un espacio de Fréchet.

Demostración.

1. Para ver que el espacio $\mathcal{D}_\omega(K, E)$ es de Fréchet bastará probar su completitud.

Sea (h_j) una sucesión de Cauchy en $\mathcal{D}_\omega(K, E)$. Entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ y para todo $\epsilon > 0$, existe j_0 tal que $\|h_j - h_s\|_m < \epsilon$, $j, s \geq j_0$, es decir, tal que

$$\begin{aligned} \|h_j - h_s\|_m &= \int_{\mathbb{R}^n} \|\hat{h}_j(z) - \hat{h}_s(z)\|_E e^{m\omega(z)} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \|\hat{h}_j(z) - \hat{h}_s(z)\|_E d\mu_m(z) < \epsilon, \quad j, s \geq j_0, \end{aligned}$$

siendo μ_m la medida definida por $d\mu_m(z) = e^{m\omega(z)} dz$. Por tanto para cada m , $(\hat{h}_j)$ es de Cauchy en $L_1(\mu_m, E)$. De este modo, para todo m existe una función $f_m \in L_1(\mu_m, E)$ tal que $\hat{h}_j \xrightarrow{j} f_m$, en $L_1(\mu_m, E)$ y de las inclusiones continuas $\cdots \hookrightarrow L_1(\mu_m, E) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow L_1(\mu_2, E) \hookrightarrow L_1(\mu_1, E) \hookrightarrow L_1(E)$ se deduce que $f_1 = f_2 = f_3 = \cdots$. Llamando f a esa función vemos que $f \in \bigcap_{m=1}^{\infty} L_1(\mu_m, E)$

y que también $\hat{h}_j \rightarrow f$ en $L_1(E)$. Teniendo en cuenta que la transformada de Fourier es un operador continuo de $L_1(E)$ en $\mathcal{C}_0(E)$ resulta que $\hat{\hat{h}}_j = (2\pi)^n \tilde{h}_j \rightarrow \hat{f}$ en $\mathcal{C}_0(E)$, es decir, $h_j \rightarrow (2\pi)^{-n} \tilde{\hat{f}}$ en $\mathcal{C}_0(E)$. Finalmente, si $g = (2\pi)^{-n} \tilde{\hat{f}}$ entonces $g \in \mathcal{D}_\omega(K, E)$

y $h_j \rightarrow g$ en $\mathcal{D}_\omega(K, E)$. Puesto que $\text{sop} h_j \subset K$, para cada j , es claro que $\text{sop} g \subset K$. Además $\hat{g} = f$ c.p.p. pues $\hat{g}(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(-z) e^{-ix \cdot z} dz = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(z) e^{ix \cdot z} dz = f(x)$ para casi todo x (en el último paso hemos aplicado la fórmula de inversión de Fourier ya que f y $\hat{f}$ están en $L_1(E)$). Por consiguiente,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|\hat{g}(x)\|_E e^{m\omega(x)} d\mu_m(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \|f(x)\|_E e^{m\omega(x)} d\mu_m(x) < \infty,$$

para cada entero positivo m , ya que $f \in L_1(\mu_m, E)$ para todo m . Que la sucesión (h_j) tiende a g en $\mathcal{D}_\omega(K, E)$ se deduce de las igualdades $\|h_j - g\|_m = \|\hat{h}_j - f\|_{L_1(\mu_m, E)}$, $m = 1, 2, \dots$.

2. La prueba de 2 se deduce de la inmersión $\mathcal{S}_\omega(E) \hookrightarrow \mathcal{S}(E)$, del hecho de que $\mathcal{S}(E)$ es un espacio de Fréchet (ver p.e., [14]) y de la continuidad de la transformación de Fourier.

□

La siguiente definición es la extensión al caso vectorial de las definiciones 1.8.8 y 1.8.9 de [2].

Definición 5. Sean $\omega \in \mathcal{M}$ y E un espacio de Banach. Una aplicación lineal y continua de $\mathcal{S}_\omega$ en E se llama una *ultradistribución* (ω -temperada) con valores en E . El espacio de todas las ultradistribuciones con valores en E se denota por $\mathcal{S}'_\omega(E)$ y está equipado con la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados de $\mathcal{S}_\omega$.

Si $T \in \mathcal{S}'_\omega(E)$ se define la transformada de Fourier $\hat{T} \in \mathcal{S}'_\omega(E)$ por $\langle u, \hat{T} \rangle = \langle \hat{u}, T \rangle$, para cada $u \in \mathcal{S}_\omega$.

$\hat{T}$ es un automorfismo topológico de $\mathcal{S}'_\omega(E)$.

El siguiente lema lo demostramos por motivos de completitud.

Lema 6. Sea $f \in L_1^{loc}(E)$ y sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0,$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}_\omega(\Omega)$. Entonces $f = 0$ c.p.p. en Ω .

Demostración. Primero supongamos que f es escalar. En virtud del teorema de Lebesgue se sabe que, para casi todo x ,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^n} \int_{B_t(x)} |f(y) - f(x)| dy = 0.$$

Sea entonces $\varphi \in \mathcal{D}_\omega$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$ y $\text{sop} \varphi \subset \overline{B}_1$ (Lema 1.3.9 de [2]). Sea $x \in \Omega$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) t^{-n} \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) dy \\ &= \int_{B_t(x)} [f(y) - f(x)] t^{-n} \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) dy + \\ &\quad \int_{\Omega} f(y) t^{-n} \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) dy \quad (*) \end{aligned}$$

Si t es lo suficientemente pequeño, $t^{-n} \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) \in \mathcal{D}_\omega$ y $\text{sop} t^{-n} \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) \subset B_t(x) \subset \Omega$, por lo que $\int_{\Omega} f(y) t^{-n} \varphi\left(\frac{x-y}{t}\right) dy = 0$. Si $x \in \Omega$, es tal que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^n} \int_{B_t(x)} |f(y) - f(x)| dy$ resulta que $f(x) = 0$ (basta hacer tender t a 0^+ en $(*)$).

Veamos ahora el caso vectorial. Para cada $e' \in E'$ se tiene que $e' \circ f \in L_1^{loc}(E)$ y $\int_{\Omega} e' \circ f(x) \varphi(x) dx = 0$, para cada $\varphi \in \mathcal{D}_\omega$. Por tanto, $e' \circ f = 0$ c.p.p. en Ω , para cada $e' \in E'$. Sabemos (ver [5, Cor.7, p.48]) que esto implica $f = 0$ c.p.p. en Ω . $\square$

El siguiente resultado extiende al caso vectorial resultados de inmersión escalar (ver [2]).

Proposición 7. Sean $\omega \in \mathcal{M}$, $k \in \mathcal{K}_\omega$, $1 \leq p \leq \infty$ y E un espacio de Banach. Entonces

1. La aplicación $\xi : L_{p,k}(E) \longrightarrow \mathcal{S}'_\omega(E)$ definida por

$$\langle u, \xi(f) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) f(x) dx$$

para cada $u \in \mathcal{S}_\omega$, está bien definida, es lineal, inyectiva y continua.

2. La aplicación $\eta : \mathcal{S}_\omega(E) \longrightarrow L_{p,k}(E)$ que a cada $f \in \mathcal{S}_\omega(E)$ hace corresponder su clase de equivalencia es lineal, inyectiva y continua.

Demostración. 1. Sea $u \in \mathcal{S}_\omega$ y $f \in L_{p,k}(E)$, entonces uf es medible Bochner. Si $1 < p < \infty$ y p' es el exponente conjugado de p , se tiene, en virtud de la desigualdad de Hölder y de las estimaciones $\frac{1}{k(x)} \leq ce^{\lambda\omega(x)}$,

$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\beta p' \omega(x)} dx < \infty$ (c , λ y β son ciertas constantes mayores que cero; recuérdese que $\frac{1}{k} \in \mathcal{K}_\omega$ y que $\omega(x) \geq a + b \log(1 + |x|)$ con $b > 0$), que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \|u(x) f(x)\|_E dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|k(x) f(x)\|_E^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|u(x)|}{k(x)} \right)^{p'} dx \right)^{1/p'} \\ &\leq \|kf\|_p \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[c |u(x)| e^{(\lambda+\beta)\omega(x)} \right]^{p'} e^{-\beta p' \omega(x)} dx \right)^{1/p'} \\ &= cp_{0,\lambda+\beta}(u) \|kf\|_p. \end{aligned}$$

De modo que $\int_{\mathbb{R}^n} u(x) f(x) dx$ es un elemento bien determinado de E y además $\|\langle u, \xi(f) \rangle\|_E \leq cp_{0,\lambda+\beta}(u) \|kf\|_p$ por lo que $\xi(f) \in \mathcal{S}'_\omega(E)$. Obviamente, la aplicación $\xi(f)$ es lineal. De otro lado, para cada acotado $B \subset \mathcal{S}_\omega$ tenemos

$$\|\xi(f)\|_B = \sup_{u \in B} \|\langle u, \xi(f) \rangle\|_E \leq c \|kf\|_p \sup_{u \in B} p_{0,\lambda+\beta}(u)$$

de lo cual resulta que ξ es continua. Resta probar que ξ es inyectiva. Para ello, supongamos que $\xi(f) = 0$, entonces para cada $u \in \mathcal{S}_\omega$ tenemos $\int_{\mathbb{R}^n} u(x) f(x) dx = 0$, puesto que $\mathcal{D}_\omega \subset \mathcal{S}_\omega$ (ver [2, Prop.1.8.6]) y $f \in L_1^{loc}(E)$, el lema anterior prueba entonces que $f = 0$ c.p.p. Por tanto, ξ es inyectiva. (En los casos $p = 1, \infty$ se razona análogamente haciendo las modificaciones necesarias.)

2. Si $f \in \mathcal{S}_\omega(E)$, entonces $kf \in L_p(E)$. En efecto, kf es continua y por tanto medible Bochner. Si $1 \leq p < \infty$, se tiene

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|k(x) f(x)\|_E^p dx \right)^{1/p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} [k(x)]^p \|f(x)\|_E^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq c \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[e^{\lambda \omega(x)} \|f(x)\|_E \right]^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq c \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\beta p \omega(x)} dx \right)^{1/p} \vec{p}_{0,\lambda+\beta}(f) \end{aligned}$$

para ciertos λ y β positivos, luego $kf \in L_p(E)$. Estas desigualdades prueban que la aplicación η , que obviamente es lineal e inyectiva, es continua. Si $p = \infty$ se tiene que $\|kf\|_\infty \leq c \vec{p}_{0,\lambda}(f)$ y esto termina la prueba. $\square$

3 Los espacios $\mathcal{B}_{p,k}(E)$

Extendemos ahora al caso vectorial la definición de los espacios de Hörmander $\mathcal{B}_{p,k}^\omega$ (ver Definición 2.2.1 de [6], Definición 2.2.1 y Proposición 2.2.2 de [2]; ver también la Definición 1 de [12])

Definición 8. Sean $\omega \in \mathcal{M}$, $k \in \mathcal{K}_\omega$, $1 \leq p \leq \infty$ y E un espacio de Banach. Denotamos por $\mathcal{B}_{p,k}(E)$ el conjunto de todas las ultradistribuciones vectoriales $T \in \mathcal{S}'_\omega(E)$ para las que existe alguna función $f \in L_{p,k}(E)$ tales que $\langle \hat{u}, T \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) f(x) dx$, para cada $u \in \mathcal{S}_\omega$.

$\mathcal{B}_{p,k}(E)$ es un subespacio lineal de $\mathcal{S}'_\omega(E)$ y la aplicación $\mathcal{B}_{p,k}(E) \rightarrow L_{p,k}(E) : T \mapsto f \left(\xi(f) = \hat{T} \right)$ es un isomorfismo algebraico (Sobreyectividad: si $g \in L_{p,k}(E)$ entonces $T = \mathcal{F}^{-1}(\xi(g)) \in \mathcal{B}_{p,k}(E)$ es la antiimagen de g). Provisto de la norma

$$\|T\|_{p,k} = \begin{cases} \left((2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \|k(x) \hat{T}(x)\|_E^p dx \right)^{1/p} & \text{si } p < \infty \\ \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \|k(x) \hat{T}(x)\|_E & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

$\mathcal{B}_{p,k}(E)$ llega a ser un espacio de Banach isométricamente isomorfo a $L_p(E)$. (Hemos puesto $\hat{T}(x)$ en lugar de $f(x)$. Cometeremos este abuso de notación frecuentemente).

Nota 9. 1. $\mathcal{B}_{p,k}(\mathbb{C})$ es el espacio de Hörmander-Beurling $\mathcal{B}_{p,k}$ considerado por Björck en [2]. Nuestra definición coincide con la Definición 1 de [12] cuando $\omega(x) = \log(1 + |x|)$.

2. El estudio de los espacios $\mathcal{B}_{p,k}(E)$ no se reduce al estudio de los espacios $\mathcal{B}_{p,k} \hat{\otimes}_\epsilon E$ puesto que, como es bien conocido, $L_p(E)$ y $L_p \hat{\otimes}_\epsilon E$ no son isomorfos en general. Por motivos de completitud recordamos algunos ejemplos: El espacio $L_1(\ell_p)$ no es isomorfo a $L_1 \hat{\otimes}_\epsilon \ell_p$ si $2 \leq p < \infty$ (ver [5, p.117 y Cor. p.258]). Si $\dim E = \infty$ y $1 < p < \infty$ entonces $L_p(E)$ no es isomorfo a $L_p \hat{\otimes}_\epsilon E$ (ver [5, p.253]).

En el siguiente teorema necesitamos algunos resultados sobre el producto (resp. la convolución) de funciones de $\mathcal{S}_\omega$ por ultradistribuciones de $\mathcal{S}'_\omega(E)$. Las definiciones son análogas a las dadas por Schwartz en [14] y las correspondientes propiedades se establecen a partir del caso escalar y del teorema de Hahn-Banach: Para $\varphi \in \mathcal{S}_\omega$, $T \in \mathcal{S}'_\omega(E)$ y $\psi \in \mathcal{S}_\omega$, definimos $\langle \psi, \varphi T \rangle = \langle \psi \varphi, T \rangle$. La “multiplicación puntual” $\mathcal{S}_\omega \times \mathcal{S}'_\omega(E) \rightarrow$

$\mathcal{S}'_\omega(E) : (\varphi, T) \mapsto \varphi T$ es una aplicación bilineal separadamente continua y sucesionalmente continua. Si $\varphi \in \mathcal{S}_\omega$ y $T \in \mathcal{S}'_\omega(E)$, definimos $\varphi * T(x) = \langle \tau_x \tilde{\varphi}, T \rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$. La función $\varphi * T : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ se denomina la convolución de φ y T . Se tiene que $\varphi * T$ es continua y existen constantes positivas C y Λ tales que $\|\varphi * T(x)\|_E \leq C e^{\Lambda \omega(x)}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por tanto, podemos identificar $\varphi * T$ con la ultradistribución ω -temperada con valores en E definida por $\psi \mapsto \langle \psi, \varphi * T \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) (\varphi * T)(x) dx$, $\psi \in \mathcal{S}_\omega$. La aplicación bilineal $\mathcal{S}_\omega \times \mathcal{S}'_\omega(E) \rightarrow \mathcal{S}'_\omega(E) : (\varphi, T) \mapsto \varphi * T$ es separadamente continua y sucesionalmente continua. Se comprueba fácilmente que $\langle \psi, \varphi * T \rangle = \langle \tilde{\varphi} * \psi, T \rangle$, $\widehat{\varphi * T} = \hat{\varphi} \hat{T}$, $\widehat{\varphi T} = (2\pi)^{-n} (\hat{\varphi} * \hat{T})$, para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{S}_\omega$ y $T \in \mathcal{S}'_\omega(E)$.

En el siguiente teorema extendemos al caso vectorial resultados de [6] (ver también [7], [2] y [12]).

Teorema 10. Sean $\omega \in \mathcal{M}$, $k \in \mathcal{K}_\omega$, $1 \leq p \leq \infty$ y E un espacio de Banach. Entonces

1. La inyección canónica $\mathcal{B}_{p,k}(E) \hookrightarrow \mathcal{S}'_\omega(E)$ es continua. La aplicación $Z : \mathcal{S}_\omega(E) \rightarrow \mathcal{B}_{p,k}(E)$ dada por

$$\langle u, Z(f) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) f(x) dx, \quad f \in \mathcal{S}_\omega(E), \quad u \in \mathcal{S}_\omega$$

está bien definida, es lineal, inyectiva y continua.

2. Las aplicaciones bilineales

$$a) \mathcal{S}_\omega \times \mathcal{B}_{p,k}(E) \rightarrow \mathcal{B}_{p,k}(E) : (u, T) \mapsto u T$$

$$b) \mathcal{S}_\omega \times \mathcal{B}_{p,k}(E) \rightarrow \mathcal{B}_{p,k}(E) : (u, T) \mapsto u * T$$

son continuas.

Demostración. 1. Sea $\{T_j\}$ una sucesión en $\mathcal{B}_{p,k}(E)$ convergente a 0. Si $\hat{T}_j = \xi(f_j)$ con $f_j \in L_{p,k}(E)$ entonces $f_j \rightarrow 0$ en $L_{p,k}(E)$. Por la Proposición 7 parte 1, $\hat{T}_j = \xi(f_j) \rightarrow 0$ en $\mathcal{S}'_\omega(E)$, luego, $\hat{T}_j \rightarrow 0$ en $\mathcal{S}'_\omega(E)$. Por tanto la inyección canónica $\mathcal{B}_{p,k}(E) \hookrightarrow \mathcal{S}'_\omega(E)$ es continua. Consideremos ahora la aplicación $Z = \xi \circ \eta : \mathcal{S}_\omega(E) \rightarrow \mathcal{S}'_\omega(E)$, donde ξ y η son las aplicaciones definidas en la Proposición 7, veamos que $Z(\mathcal{S}_\omega(E)) \subset \mathcal{B}_{p,k}(E)$. En efecto, debemos ver que para cada $f \in \mathcal{S}_\omega(E)$, se verifica $\widehat{Z(f)} = Z(\hat{f})$. Si $f \in \mathcal{S}_\omega(E)$ se tiene para cada $u \in \mathcal{S}_\omega$, $\langle u, \widehat{Z(f)} \rangle = \langle \hat{u}, Z(f) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x) f(x) dx$. De otro lado, $\langle u, Z(\hat{f}) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \hat{f}(x) dx$, luego para cada

$e \in E'$ se verifica que

$$\begin{aligned}
 \left\langle \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x) f(x) dx, e \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x) \langle f(x), e \rangle dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \widehat{(e \circ f)}(x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e \circ \hat{f}(x) dx \\
 &= \left\langle \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \hat{f}(x) dx, e \right\rangle
 \end{aligned}$$

por el teorema de Hahn-Banach se concluye $\langle u, \widehat{Z(f)} \rangle = \langle u, Z(\hat{f}) \rangle$, para cada $u \in \mathcal{S}_\omega$. Así, $\widehat{Z(f)} = Z(\hat{f})$ y $Z(\mathcal{S}_\omega(E)) \subset \mathcal{B}_{p,k}(E)$. Consecuentemente, Z es una aplicación lineal e inyectiva de $\mathcal{S}_\omega(E)$ en $\mathcal{B}_{p,k}(E)$. Veamos que Z es continua de $\mathcal{S}_\omega(E)$ en $\mathcal{B}_{p,k}(E)$. Sea $\{f_j\}$ una sucesión en $\mathcal{S}_\omega(E)$ convergente a 0, entonces $\hat{f}_j \rightarrow 0$ en $\mathcal{S}_\omega(E)$ por lo que $\eta(\hat{f}_j) \rightarrow 0$ en $L_{p,k}(E)$ (Proposición 7 parte 2), pero esto equivale a que $Z(f_j) \rightarrow 0$ en $\mathcal{B}_{p,k}(E)$.

2 a) Supongamos que $u \in \mathcal{S}_\omega$ y $T \in \mathcal{B}_{p,k}(E)$. Sabemos que $uT \in \mathcal{S}'_\omega(E)$, puesto que $\mathcal{B}_{p,k}(E) \subset \mathcal{S}'_\omega(E)$ y también $\widehat{uT} = (2\pi)^{-n} \hat{u} * \hat{T}$. Veamos que $\hat{u} * \hat{T} \in L_{p,k}(E)$. En efecto, $\hat{u} * \hat{T}$ es medible, y como $\hat{T} \in L_{p,k}(E)$ entonces $(\hat{u} * \hat{T})(x) = \left\langle \tau_x \hat{u}, \hat{T} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x-y) \hat{T}(y) dy$, $x \in \mathbb{R}^n$ multiplicando esta última expresión por $k(x)$ y teniendo en cuenta que $k(x) \leq M_k(x-y)k(y)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
 \|k(x)(\hat{u} * \hat{T})(x)\|_E &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} k(x) \hat{u}(x-y) \hat{T}(y) dy \right\|_E \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} M_k(x-y) k(y) |\hat{u}(x-y)| \|\hat{T}(y)\|_E dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} M_k(x-y) |\hat{u}(x-y)| \|k(y) \hat{T}(y)\|_E dy \\
 &= (|M_k \hat{u}| * \|k \hat{T}\|_E)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.
 \end{aligned}$$

Ahora bien, como $M_k \hat{u} \in L_1$ y $\|k \hat{T}\|_E \in L_p$, entonces por la desigualdad

de Young se tiene

$$\begin{aligned} \left\| |M_k \hat{u}| * \|k \hat{T}\| \right\|_{L_p} &\leq \|M_k \hat{u}\|_{L_1} \| \|k \hat{T}\|_E \|_{L_p} \\ &= (2\pi)^{-n(1+\frac{1}{p})} \|u\|_{1, M_k} \|T\|_{p,k}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\hat{u} * \hat{T} \in L_{p,k}(E)$, es decir, $uT \in \mathcal{B}_{p,k}(E)$ y además,

$$\|uT\|_{p,k} \leq \|u\|_{1, M_k} \|T\|_{p,k} \leq c q_{0,\Lambda}(u) \|T\|_{p,k}$$

siendo c y Λ ciertas constantes positivas independientes de u y T . Estas desigualdades implican que la aplicación bilineal

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\omega \times \mathcal{B}_{p,k}(E) &\longrightarrow \mathcal{B}_{p,k}(E) \\ (u, T) &\longmapsto uT \end{aligned}$$

sea continua.

b) Si $u \in \mathcal{S}_\omega$ y $T \in \mathcal{B}_{p,k}(E)$, entonces $\widehat{u * T} = \hat{u} \hat{T}$. Además, como $\hat{T}$ se puede representar por una función de $L_{p,k}(E)$ (función que también representamos por $\hat{T}$) tenemos que $\widehat{u * T}$ también se puede representar por una función de $L_{p,k}(E)$. En efecto, si $1 \leq p < \infty$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left\| k(x) \hat{u}(x) \hat{T}(x) \right\|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\| k(x) \hat{T}(x) \right\|^p \left[e^{\lambda\omega(x)} |\hat{u}(x)| \right]^p e^{-\lambda p \omega(x)} dx \\ &\leq [q_{0,\lambda}(u)]^p \int_{\mathbb{R}^n} \left\| k(x) \hat{T}(x) \right\|^p e^{-\lambda p \omega(x)} dx \\ &\leq [q_{0,\lambda}(u)]^p \int_{\mathbb{R}^n} \left\| k(x) \hat{T}(x) \right\|^p dx \\ &= (2\pi)^{n/p} \|T\|_{p,k}^p [q_{0,\lambda}(u)]^p. \end{aligned}$$

Si $p = \infty$ entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \left\| k(x) \hat{u}(x) \hat{T}(x) \right\| &= e^{\lambda\omega(x)} |\hat{u}(x)| e^{-\lambda\omega(x)} \left\| k(x) \hat{T}(x) \right\|_{\infty,k} \\ &\leq q_{0,\lambda}(u) \|T\|_{\infty,k} \end{aligned}$$

Por tanto, $u * T \in \mathcal{B}_{p,k}(E)$ y $\|u * T\|_{p,k} \leq q_{0,\lambda}(u) \|T\|_{p,k}$. De esta última desigualdad y de la continuidad de la transformada de Fourier se sigue la continuidad de la aplicación bilineal dada. $\square$

Agradecimientos. Agradezco al evaluador sus comentarios y sugerencias. Al Prof. Joaquín Motos por su apoyo constante en el desarrollo de este trabajo.

Referencias

- [1] A. Beurling, Quasi-analyticity and general distributions. *Lectures 4 and 5*. A.M.S. Summer institute, Stanford, 1961 (mimeographed).
- [2] G. Björck, Linear partial differential operators and generalized distributions, *Ark Mat.* 6, pág 351-407, 1966.
- [3] R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor, Ultradifferentiable functions and Fourier analysis. *Result. Math.* 17, pág 206-237, 1990.
- [4] I. Cioranescu, L. Zsido, ω -ultradistributions and their application to the operator theory. *Banach Center Pub.* Vol 8, Polish Sci. Publ. Warsaw, pág 77-220, 1982.
- [5] J. Diestel and J. J. Uhl Jr, *Vector Measures*. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 15. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island, 1977.
- [6] L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1963.
- [7] Hörmander L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators II*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1983.
- [8] H. Jarchow, *Locally Convex Spaces.*, B.B. Teubner, Stuttgart, 1981.
- [9] H. Komatsu, Ultradistributions I. Structure theorems and a characterization. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA Math.* 20, pág 25-105, 1973.
- [10] H. Komatsu, Ultradistributions II. The kernel theorem and ultradistributions with support in a submanifold. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA Math.* 24, pág 607-628, 1977.
- [11] G. Köthe, *Topological Vector Spaces I*, Springer Verlag. New York. Heidelberg, Berlin, 1969.
- [12] J. Motos y M^a. J. Planells, Sobre los espacios de Hörmander vectoriales $\mathcal{B}_{p,k}(E)$, *Collectanea Mathematica*, pág 263-286, 1988.
- [13] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*. Grad. Texts in Mat, Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York, 1999.
- [14] L. Schwartz, Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles, *J. Analyse Math.* 4, pág 88-148, 1954-55.
- [15] L. Schwartz, Théorie des distributions à valeurs vectorielles, *Ann. Inst. Fourier* 7, pág 1-141, 1957.

Dirección del autor: Jairo Villegas G Universidad Eafit, Medellín, Colombia.
javille@eafit.edu.co