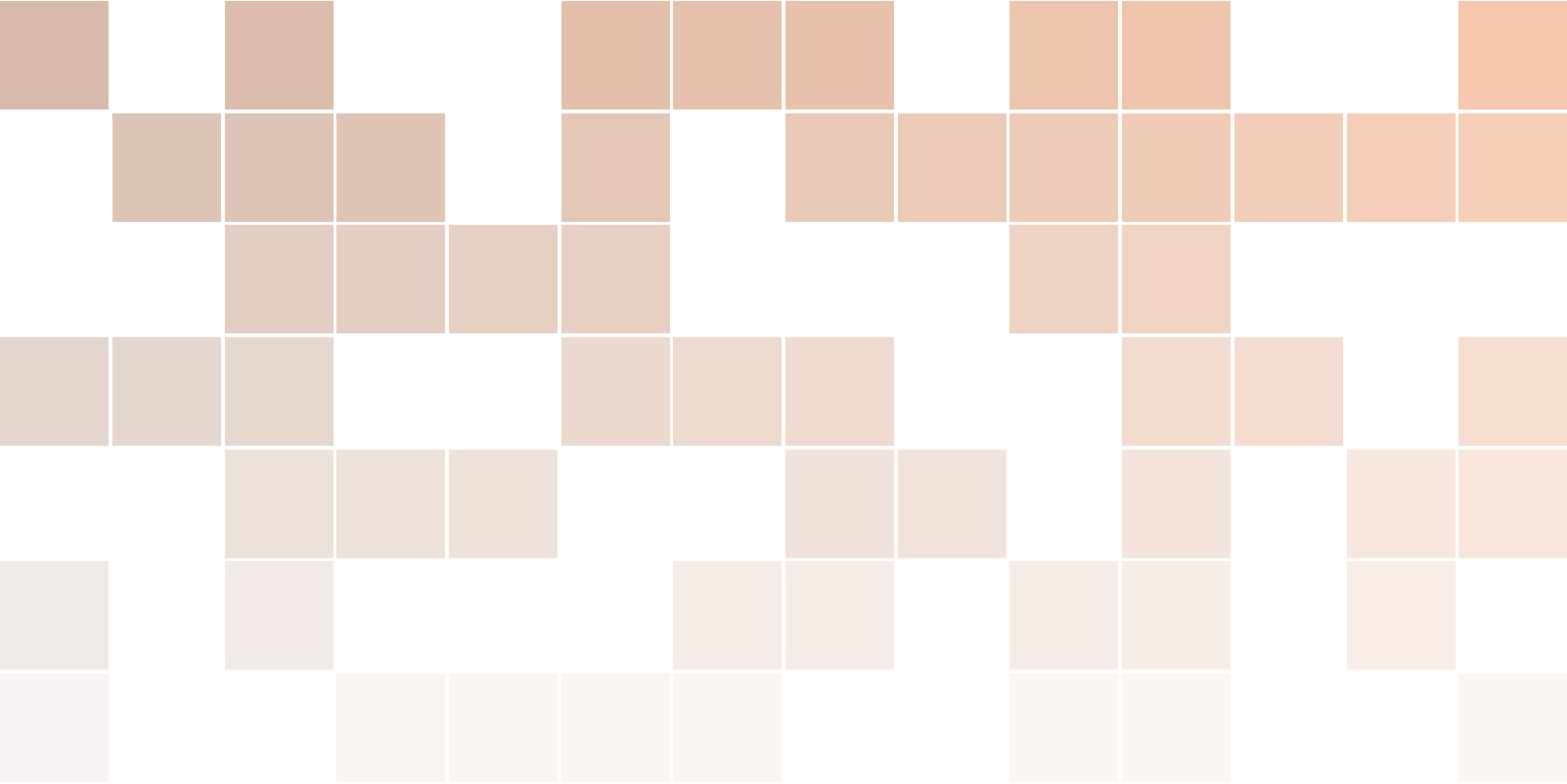
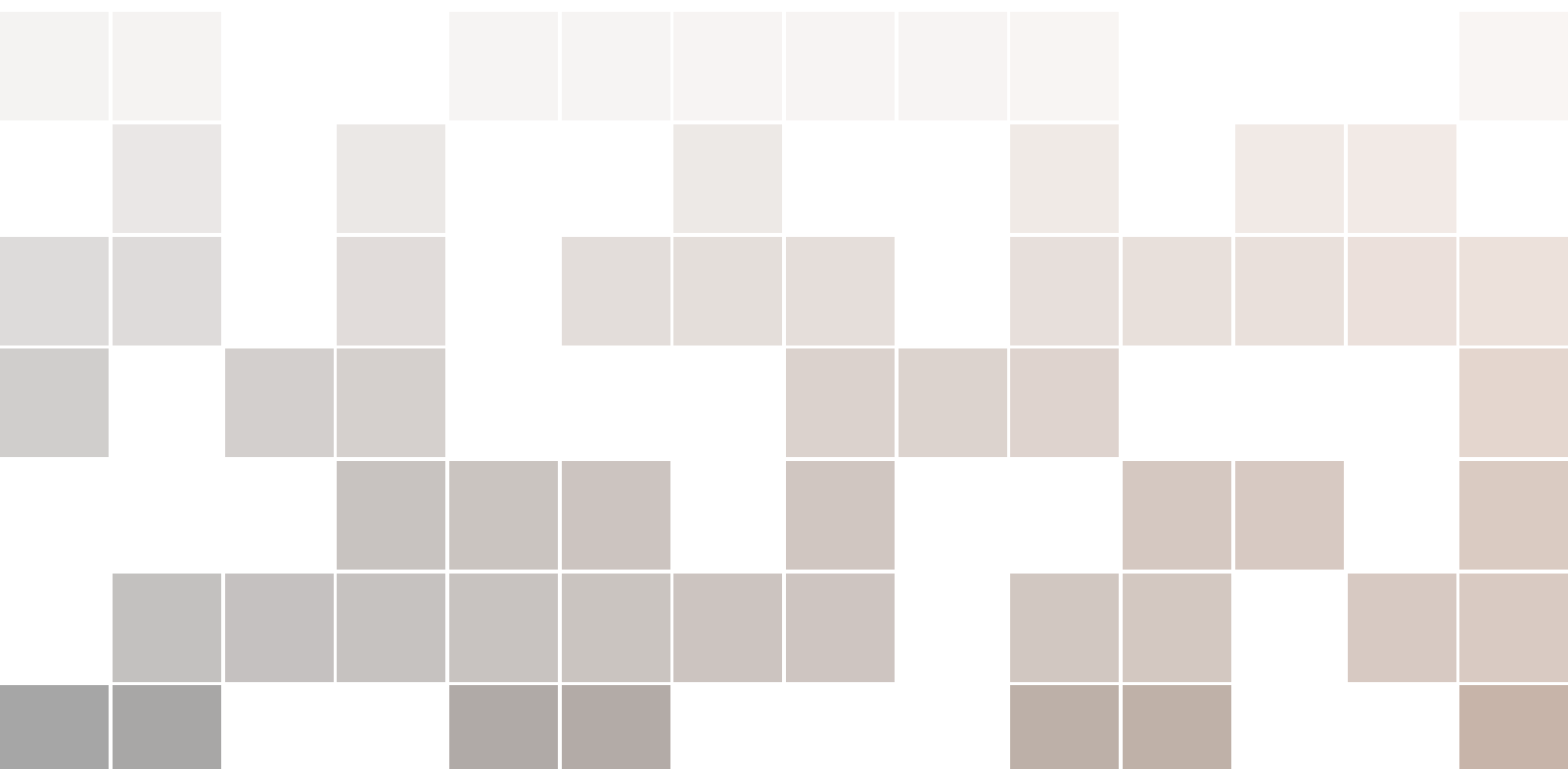




Hipersuperficies espaciales del espacio de de Sitter

Jeison de Jesús Benavides Luna



Hipersuperficies espaciales del espacio de de Sitter

Jeison Benavides Luna

Universidad del Valle



Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Matemáticas

Trabajo presentado para optar al título de Magíster en Matemáticas

Hipersuperficies espaciales del espacio de de Sitter

Jeison Benavides Luna

Evaluadores

Angela Roldan Cuesta
IES Guadalquivir

Oscar Andrés Montaña
Universidad del Valle

Director

Heber Mesa Palomino
Universidad del Valle

2024

Hipersuperficies espaciales del espacio de de Sitter

Jeison Benavides Luna

Trabajo presentado para optar al título de Magíster en Matemáticas, Agosto, 2024

Evaluable: Angela Roldan y Oscar Montano

Director: Heber Mesa P.

Universidad del Valle

Facultad de Ciencias Naturales y Exactas

Departamento de Matemáticas

Calle 13 # 100-00, Edificio 320, Ciudadela Universitaria Meléndez

76001 - Cali

Palabras Claves: Geometría pseudo-Riemanniana, Aplicación de Gauss de de Sitter, Espacio de de Sitter, Hipersuperficies espaciales, Modelo estereográfico.

Resumen

En este trabajo de investigación se introduce un modelo estereográfico para el espacio de de Sitter, el cual es visualmente acotado y topológicamente un anillo abierto. En este modelo, la frontera asintótica del espacio de de Sitter se determina como la unión de dos esferas disjuntas y se caracterizan las geodésicas a través de líneas y círculos euclidianos. Además, se prueba que las inmersiones propias y espaciales de variedades completas y no compactas en el espacio de de Sitter son tangentes a la frontera asintótica. A través de la fórmula de representación presentada por A. Roldán se estudian las inmersiones espaciales de dominios esféricos en el espacio de de Sitter, obteniendo una correspondencia entre la familia de hipersuperficies espaciales totalmente umbilicales satisfaciendo $|H| > 1$ y la familia de bolas totalmente geodésicas de una de las componentes conexas de la frontera asintótica del espacio de de Sitter.

Abstract

In this research work, a stereographic model for the de Sitter space is introduced, which is visually bounded and topologically an open ring. In this model, the asymptotic boundary of the de Sitter space is determined as union of two disjoint spheres and geodesics are characterized through euclidean lines and circles. Furthermore, it is proved that any spacelike proper immersion of a complete non compact manifold in the de Sitter space is tangent to the asymptotic boundary. Through the representation formula presented by A. Roldán, the spacelike immersions of spherical domains are studied, obtaining a correspondence between the family of totally umbilical spacelike hypersurfaces with $|H| > 1$ and the family of totally geodesic balls in one of the connected components of the asymptotic boundary of the de Sitter space.

Agradecimientos

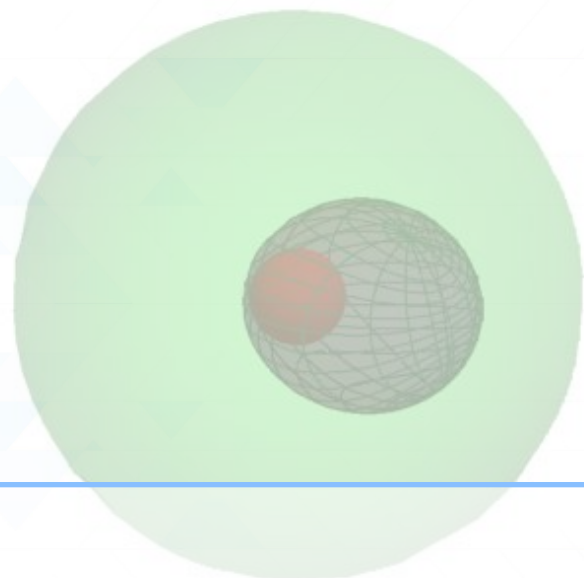
En estas líneas quiero expresar, que me siento orgulloso y motivado por este trabajo realizado bajo la dirección del profesor Heber Mesa. Agradezco a Dios por poner al profesor Heber como mi mentor, es una persona más que inteligente, es una persona sabia. Él logró motivarme mucho a retomar este trabajo, creyó en todo momento en mi. Es la idealización de un talentoso y buen maestro, algún día como el profesor Heber Mesa.

Quiero también agradecer y dedicar este trabajo a mi madre, Darleny Luna, quien incondicionalmente cree en mi, me ha acompañado desde antes de mis primeros pasos y hasta el día de hoy es mi refugio, mi mayor apoyo para mis siguientes pasos.

Agradezco a mi amada, a mi corazón hojaldrado dulce y relleno de almíbar, Alina Ipia, por motivarme, apoyarme y acompañarme, sin tú amor, sin tus tiernas palabras, todo hubiera sido más complicado, menos dulce. Mi Alina que al caminar, siempre deja una flor al pisar, me recargas mucho de buena energía, te amo.

Agradezco también a mi hermana Karelys por su gran admiración, sus consejos y palabras de apoyo, he aprendido mucho de como hace observaciones y análisis, ha sido útil Kare.

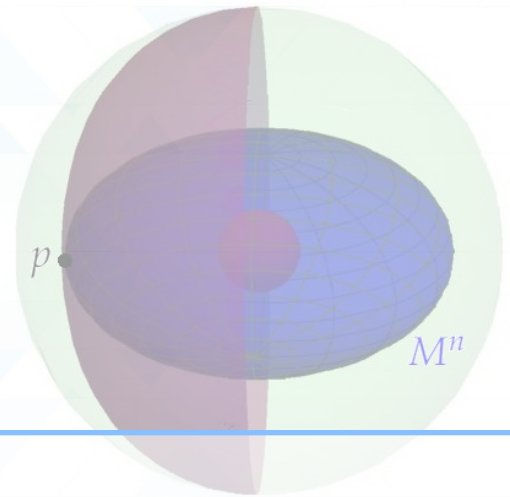
Por último, quiero decir que terminar esta tesis fue algo difícil por la ausencia de mi padre, pero Dios en su infinita sabiduría dejó las personas mencionadas, para hacer esto posible, por ello, también dedico esta tesis a mi padre Sofanor Benavides y a Dios, que de alguna manera siempre han estado ahí conmigo. He aprendido mucho durante esta etapa.



Índice general

Resumen	3
1 Introducción	7
2 Modelos del espacio de de Sitter	9
2.1 El espacio de de Sitter	10
2.1.1 Geodésicas en $(S_1^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$	12
2.2 Modelo de Klein	13
2.3 Modelo estereográfico	13
2.3.1 Geodésicas en $(\mathcal{E}^{n+1}, g)$	15
2.4 Modelación del espacio de de Sitter en GeoGebra	19
3 Hipersuperficies espaciales	21
3.1 Aplicación de Gauss-de Sitter	21
3.2 Una fórmula de representación local	24
3.3 Hipersuperficies espaciales totalmente umbilicas en el espacio en S_1^{n+1}.	25
3.4 Representación de hipersuperficies totalmente umbilicas de la familia $\mathbb{E}_b$	26
3.4.1 Parametrización de $E(a, b)$	27
3.4.2 Bolas geodésicas como fronteras	29
3.4.3 Inmersando dominios cuya frontera es la frontera de una bola geodésica . .	32
4 Hipersuperficies propiamente inmersas	37
4.1 Propiedad de la fórmula de representación	37
4.2 Comportamiento en infinito de hipersuperficies espaciales	41

4.3	Tangencia en infinito	44
	Bibliografía	47
	Books	47
	Articles	47



1. Introducción

Un problema clásico en la teoría de subvariedades es la clasificación y caracterización de las hipersuperficies conexas, completas y totalmente umbílicas de una variedad riemanianna o semi-riemanianna. En el caso del espacio euclidiano $(n + 1)$ –dimensional, denotado por $\mathbb{R}^{n+1}$, es bien conocido que estas se clasifican como n –esferas o hiperplanos de $\mathbb{R}^{n+1}$ [Do 16]. Resulta natural plantearse el mismo problema en otros espacios ambiente como el espacio hiperbólico o el espacio de de Sitter. Aunque la clasificación en ambos casos se encuentra totalmente determinada [ABD17; Mon88; RM99], encontramos que posibles caracterizaciones de dichas hipersuperficies han sido de interés matemático; por ejemplo, en 1977 A. Goddard conjeturó que *cada hipersuperficie espacial del espacio de de Sitter con curvatura media constante debía ser totalmente umbílica*, [God77]. Este problema fue estudiado por algunos matemáticos como J. Ramanathan y K. Akutagawa, entre otros. Ramanathan demostró que una superficie espacial del espacio de de Sitter 3–dimensional con curvatura media H , tal que $H^2 < 1$, debe ser totalmente umbílica, [Ram87] y Akutagawa prueba la conjetura de Goddard para hipersuperficies espaciales de dimensión $n > 2$, cuya curvatura media H verifica $H^2 < 4(n - 1)/n^2$, [Aku87]. Finalmente la conjetura de Goddard fue resuelta en 1988 por S. Montiel [Mon88] resultando solo cierta para el caso compacto, aún más, en dicho trabajo Montiel caracteriza las hipersuperficies espaciales completas, conexas y totalmente umbílicas en el espacio de de Sitter, esta caracterización será importante para este trabajo.

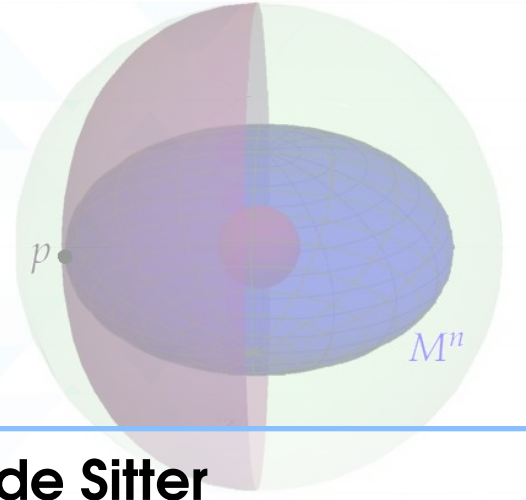
El estudio de hipersuperficies totalmente umbílicas de una variedad riemanniana sigue siendo relevante hoy en día; por ejemplo, para el espacio hiperbólico $(n + 1)$ –dimensional, $\mathbb{H}^{n+1}$, D. Abanto y J. Espinar en 2019 presentan una correspondencia entre bolas geodésicas de la esfera unitaria n –dimensional e hipersuperficies totalmente umbílicas de $\mathbb{H}^{n+1}$ (Sección 2.4 en [ED19]), correspondencia obtenida través de una fórmula de representación dada por Espinar et. al. [EGM09]. En este mismo trabajo se presentan condiciones que permiten estudiar inmersiones isométricas de dominios esféricos dotados con métricas conformes completas tal que la curvatura media de la frontera es constante, demostrando que la frontera de cada una de estas inmersiones se encuentra sobre una hipersuperficie equidistante totalmente geodésica formando un ángulo constante con la misma. Es importante resaltar que en 2021 A. Roldan [Rol21] desarrolló una fórmula que permite obtener hipersuperficies espaciales del espacio de de Sitter como inmersiones de dominios de la

esfera euclídea; este resultado es muy similar a la fórmula de representación para hipersuperficies horoesféricamente convexas en $\mathbb{H}^{n+1}$ dada por Espinar et. al. [EGM09].

El objetivo principal de este trabajo será obtener algunos resultados equivalentes a los presentados por Abanto y Espinar en [ED19], para hipersuperficies completas, conexas, espaciales y totalmente umbílicas del espacio de de Sitter $(n+1)$ -dimensional; para ello, se propone un nuevo modelo para este espacio, dicho modelo es ambientado en el interior del anillo comprendido entre las n -esferas de radio $\sqrt{2}-1$ y $\sqrt{2}+1$ del espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n+1}$, conjunto que denotamos por $\mathcal{E}$. Tenemos así, en este modelo, dos componentes conexas para la frontera ideal (o frontera en infinito) del espacio de de Sitter, $\partial\mathcal{E} = \partial\mathcal{E}^+ \cup \partial\mathcal{E}^-$, a saber

$$\partial\mathcal{E}^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x|_e = 1 + \sqrt{2}\right\} \text{ y } \partial\mathcal{E}^- = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x|_e = \sqrt{2} - 1\right\},$$

donde $|\cdot|_e$ representa la norma euclídea.



2. Modelos del espacio de de Sitter

El objetivo principal de este capítulo es construir un modelo “visualmente acotado” del espacio de de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$, donde algunos elementos geométricos del espacio como geodésicas y ciertas hipersuperficies totalmente umbílicas se caracterizarán a través de objetos euclidianos. Tomaremos inspiración del modelo de la bola de Poincaré del espacio hiperbólico. El espacio hiperbólico $(n+1)$ –dimensional es la única variedad riemanniana completa, simplemente conexa de curvatura seccional constante -1 , el cual se puede visualizar a través del modelo de la bola de Poincaré, el cual es obtenido al dotar la bola unitaria abierta y centrada en el origen de $\mathbb{R}^{n+1}$, denotada por $\mathbb{B}^{n+1}$, con la métrica riemanniana g definida para cada $v \in T_p\mathbb{B}^{n+1}$ como

$$g_p(v, v) = \left(\frac{2}{1 - |p|^2} \right)^2 g_0(v, v),$$

donde g_0 es la métrica estándar o euclidiana de $\mathbb{B}^{n+1}$. Resulta interesante de dicho modelo que algunos objetos geométricos como geodésicas, horoesferas y frontera ideal o en infinito pueden caracterizarse o definirse a través de elementos euclidianos. Un ejemplo de lo anterior es que toda geodésica en $(\mathbb{B}^{n+1}, g)$ es un segmento de recta euclidiana que pasa por el origen o un arco de circunferencia euclidiana ortogonal a la frontera de $\mathbb{B}^{n+1}$, Figura 2.1.

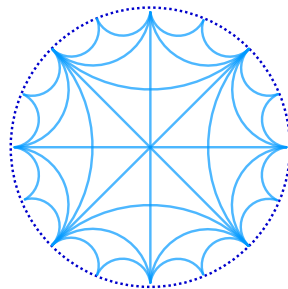


Figura 2.1: Geodésicas de $(\mathbb{B}^2, g)$.

A continuación definiremos el espacio de de Sitter como una subvariedad de una variedad semirriemanniana llamada espacio de Lorentz. Posteriormente presentaremos el modelo de Klein para $\mathbb{S}_1^{n+1}$ el cual será el apoyo para construir el nuevo modelo de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ el cual hemos llamado modelo estereográfico y será ambientado en un anillo abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$. Finalmente caracterizaremos las geodésicas en el espacio de de Sitter en el modelo estereográfico usando segmentos de rectas y arcos de circunferencia euclidianos, de manera análoga a la caracterización de geodésicas del espacio hiperbólico en el modelo de la bola de Poincaré. Las construcciones presentadas serán de utilidad para la construcción de una modelación del espacio de de Sitter de dimensiones 2 y 3 en el software GeoGebra.

2.1 El espacio de de Sitter

Se define el espacio de Lorentz como la variedad semirriemanniana $\mathbb{L}^{n+2} = (\mathbb{R}^{n+2}, \langle\langle, \rangle\rangle)$ donde la forma bilineal $\langle\langle, \rangle\rangle$ se define para $x = (x_0, \bar{x}), y = (y_0, \bar{y}) \in \mathbb{L}^{n+2}$ como

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle = -x_0 y_0 + \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno euclídeo de $\mathbb{R}^{n+1}$. En este espacio definimos los conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^{n+1} &= \{x \in \mathbb{L}^{n+2} : \langle\langle x, x \rangle\rangle = -1\}, \\ \mathbb{N}^{n+1} &= \{x \in \mathbb{L}^{n+2} : \langle\langle x, x \rangle\rangle = 0, x \neq 0\}, \\ \mathbb{S}_1^{n+1} &= \{x \in \mathbb{L}^{n+2} : \langle\langle x, x \rangle\rangle = 1\}. \end{aligned}$$

Los elementos de $\mathbb{N}^{n+1}, \mathbb{S}_1^{n+1}$ y $\mathbb{H}^{n+1}$ serán llamados *vectores de luz*, *vectores de tiempo* y *vectores de espacio*, respectivamente.

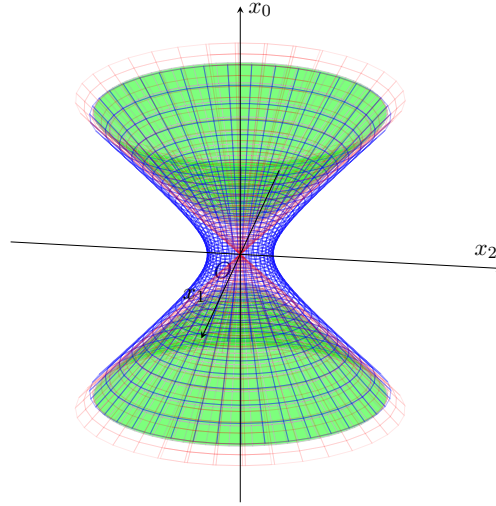


Figura 2.2: Representación de los conjuntos $\mathbb{N}^{n+1}$, $\mathbb{H}^{n+1}$ y $\mathbb{S}_1^{n+1}$.

En general dado un conjunto $A \subseteq \mathbb{L}^{n+1}$ denotamos

$$A_+ = \{a \in A : a_0 > 0\} \text{ y } A_- = \{a \in A : a_0 < 0\}.$$

Denotamos por D la *conexión Levi-Civita* asociada a la forma bilineal $\langle\langle, \rangle\rangle$, la cual coincide con la conexión Levi-Civita del espacio Euclideo $\mathbb{R}^{n+2}$, esto es, dados X, Y campos vectoriales en $\mathbb{L}^{n+2}$, entonces

$$D_X Y = (X(Y_0), \dots, X(Y_{n+1})),$$

donde $Y = (Y_0, \dots, Y_{n+1})$. El *Espacio de de Sitter* de dimension $(n+1)$ es definido como la subvariedad semirriemanniana de $\mathbb{L}^{n+2}$, dada por $(\mathbb{S}_1^{n+1}, \langle \langle, \rangle \rangle)$. Considerando la inclusión,

$$i: \mathbb{S}_1^{n+1} \rightarrow \mathbb{L}^{n+2},$$

e identificando $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$ con $i(p)$ y $v \in T_p \mathbb{S}_1^{n+1}$ con $di_p(v)$, se logra identificar $T_p \mathbb{S}_1^{n+1}$ con un subespacio vectorial $(n+1)$ -dimensional de $T_p \mathbb{L}^{n+2} \equiv \mathbb{L}^{n+2}$. Simplificando la notación, la forma bilineal inducida en $\mathbb{S}_1^{n+1}$ vía i es denotada por $\langle \langle, \rangle \rangle$, es decir,

$$\langle \langle v, w \rangle \rangle = \langle \langle di_p(v), di_p(w) \rangle \rangle, \forall p \in \mathbb{S}_1^{n+1} \text{ y } \forall v, w \in T_p \mathbb{S}_1^{n+1}.$$

Por $\bar{\nabla}$ denotaremos la *conexión de Levi-Civita* asociada en $(\mathbb{S}_1^{n+1}, \langle \langle, \rangle \rangle)$. Un *campo vectorial a lo largo de i* es una aplicación suave que asocia a cada $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$ un vector $X(p) \in T_p \mathbb{L}^{n+2} \equiv \mathbb{L}^{n+2}$. Decimos que un *campo vectorial a lo largo de i es tangencial* si $X(p) \in T_p \mathbb{S}_1^{n+1}$, y que un *campo vectorial a lo largo de i es normal*, si $X(p) \in (T_p \mathbb{S}_1^{n+1})^\perp$. Para cada $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$, tenemos la descomposición lineal,

$$\mathbb{L}^{n+2} \equiv T_p \mathbb{L}^{n+2} = T_p \mathbb{S}_1^{n+1} \oplus (T_p \mathbb{S}_1^{n+1})^\perp,$$

donde $(T_p \mathbb{S}_1^{n+1})^\perp = \text{gen}\{p\}$ actúa como un complemento ortogonal de $T_p \mathbb{S}_1^{n+1}$ en $\mathbb{L}^{n+2}$ respecto de la forma bilineal $\langle \langle, \rangle \rangle$. Puesto que $\langle \langle p, v \rangle \rangle = 0$ se identifica el conjunto de campos vectoriales tangenciales suaves a lo largo de i con el conjunto de campos vectoriales diferenciables de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ el cual se simboliza como $\mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1})$ y el conjunto de campos normales a lo largo de i se denotará por $\mathfrak{X}^\perp(\mathbb{S}_1^{n+1})$. Luego si $v \in \mathbb{L}^{n+2}$ podemos escribir de manera única,

$$v = v^T + v^\perp, \text{ donde } v^T \in T_p \mathbb{S}_1^{n+1}, v^\perp \in (T_p \mathbb{S}_1^{n+1})^\perp;$$

de esta forma la conexión Levi-Civita de $\mathbb{L}^{n+2}$ se descompone en

$$D_X Y = D_X Y^T + D_X Y^\perp, X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1}), \quad (2.1)$$

la parte tangencial de $D_X Y$, satisface $\bar{\nabla}_X Y = D_X Y^T$ y la parte normal de $D_X Y$ será llamada *segunda forma fundamental del encaje i* y se denotará por $\bar{\alpha}$, es decir, $\bar{\alpha}: \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1}) \times \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1})^\perp$ esta dada por

$$\bar{\alpha}(X, Y) = D_X Y - \bar{\nabla}_X Y.$$

 La aplicación $\eta(p) = p$, es un campo suave a lo largo de $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Dado que $p \in (T_p \mathbb{S}_1^{n+1})^\perp$ y $\langle \langle p, p \rangle \rangle = 1$, se dirá que η es un campo normal unitario. Por lo tanto, $\mathbb{S}_1^{n+1}$ es orientable.

El operador de forma o de Weigarten $A: \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1})$, esta dado por,

$$A(X) = -D_X \eta = -X.$$

Considerando la siguiente relación del operador de forma y la segunda forma fundamental,

$$\langle \langle AX, Y \rangle \rangle = \langle \langle \bar{\alpha}(X, Y), \eta \rangle \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}_1^{n+1}),$$

se concluye que la conexión Levi-Civita de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, $\bar{\nabla}_X Y$ esta dada por,

$$\bar{\nabla}_X Y = D_X Y + \langle \langle X, Y \rangle \rangle p.$$

Por otro lado, dado que la curvatura seccional de $\mathbb{L}^{n+2}$ es idénticamente cero, la *ecuación de Gauss* establece,

$$\bar{K} = \langle \langle \bar{\alpha}_p(v, v), \bar{\alpha}_p(w, w) \rangle \rangle - \sqrt{\langle \langle \bar{\alpha}_p(v, w), \bar{\alpha}_p(v, w) \rangle \rangle},$$

para todo $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$ y v, w ortonormales en $T_p \mathbb{S}_1^{n+1}$, donde $\bar{K}$ es la curvatura seccional de $\mathbb{S}_1^{n+1}$; y en consecuencia $\bar{K} = 1$.

2.1.1 Geodésicas en $(\mathbb{S}_1^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

Sean $p \in \mathbb{S}_1^{n+1}$ y $v \in T_p \mathbb{S}_1^{n+1}$, definimos $|v|^2 = |\langle v, v \rangle|$. La geodésica γ del espacio de de Sitter satisfaciendo $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$, se determina como:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \cos(|v|t)p + \frac{1}{|v|} \sin(|v|t)v, & \text{si } \langle v, v \rangle > 0, \\ p + tv, & \text{si } \langle v, v \rangle = 0, \\ \cosh(|v|t)p + \frac{1}{|v|} \sinh(|v|t)v, & \text{si } \langle v, v \rangle < 0, \end{cases}$$

la cual se denomina *geodésica espacial*, *geodésica de luz* y *geodésica temporal* respectivamente según el caso. Verificaremos que en cada caso esta curva es efectivamente una geodésica.

Si γ es una geodésica espacial, entonces

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = |v|^2 \sin^2(|v|t) + \cos^2(|v|t) \langle v, v \rangle = |v|^2,$$

$$D_{\gamma(t)} \gamma'(t) = \gamma''(t) = -(|v|^2 \cos(|v|t)p + |v| \sin(|v|t)v) = -|v|^2 \gamma(t) = -|v|^2 \eta(\gamma(t))$$

$$\bar{\nabla}_{\gamma'} \gamma' = D_{\gamma(t)} \gamma'(t) + \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \eta(\gamma(t)) = -|v|^2 \eta(\gamma(t)) + |v|^2 \eta(\gamma(t)) = 0.$$

Si γ es una geodésica de luz, tenemos

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = \langle v, v \rangle = 0,$$

$$D_{\gamma(t)} \gamma'(t) = \gamma''(t) = 0$$

$$\bar{\nabla}_{\gamma'} \gamma' = D_{\gamma(t)} \gamma'(t) + \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \eta(\gamma(t)) = 0.$$

Por último, si γ es una geodésica temporal, se observa

$$\begin{aligned} \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle &= |v|^2 \sinh^2(|v|t) + \cosh^2(|v|t) \langle v, v \rangle \\ &= |v|^2 \sinh^2(|v|t) + \cosh^2(|v|t) (-|v|^2) \\ &= |v|^2 \sinh^2(|v|t) - |v|^2 \cosh^2(|v|t) \\ &= -|v|^2 (\cosh^2(|v|t) - \sinh^2(|v|t)) = -|v|^2 \end{aligned}$$

$$D_{\gamma(t)} \gamma'(t) = \gamma''(t) = |v|^2 \cosh(|v|t)p + |v| \sinh(|v|t)v = |v|^2 \gamma(t) = |v|^2 \eta(\gamma(t))$$

$$\bar{\nabla}_{\gamma'} \gamma' = D_{\gamma(t)} \gamma'(t) + \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \eta(\gamma(t)) = |v|^2 \eta(\gamma(t)) - |v|^2 \eta(\gamma(t)) = 0.$$

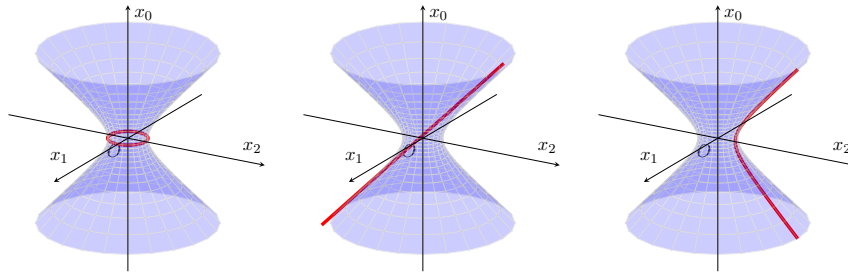


Figura 2.3: Geodésicas de $\mathbb{S}_1^2$



Las geodésicas espaciales son circunferencias o elipses, nótese que son las únicas curvas compactas. Más aun, las geodésicas se obtienen por intersección planos que pasan por el origen con $\mathbb{S}_1^{n+1}$.

Dado que las geodésicas están definidas para cada $t \in \mathbb{R}$, deducimos que $\mathbb{S}_1^{n+1}$ es completa.

2.2 Modelo de Klein

Realizaremos una proyección estereográfica de $\mathbb{S}_1^{n+1}$, pero nos apoyaremos en el modelo de Klein. Este modelo es útil para la representación de algunos conceptos. Considere la banda $\mathcal{K}^{n+1}$ de $\mathbb{S}^{n+1}$ de los puntos cuya altura esta en $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, esto es,

$$\mathcal{K}^{n+1} = \left\{ p = (p_0, \bar{p}) \in \mathbb{R}^{n+2} : |p|_e = 1, -\frac{1}{\sqrt{2}} < p_0 < \frac{1}{\sqrt{2}} \right\},$$

donde $|\cdot|_e$ representa la norma euclídea. La frontera de $\mathcal{K}$, es dada por $\partial\mathcal{K} = \partial\mathcal{K}^+ \cup \partial\mathcal{K}^-$, donde

$$\partial\mathcal{K}^+ = \left\{ p = (p_0, \bar{p}) \in \mathbb{S}^{n+1} : p_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \text{ y } \partial\mathcal{K}^- = \left\{ p = (p_0, \bar{p}) \in \mathbb{S}^{n+1} : p_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

La transformación $T : \mathbb{S}_1^{n+1} \rightarrow \mathcal{K}$, definida por

$$T(p) = \frac{p}{|p|_e},$$

es un difeomorfismo. Sí se dota a $\mathcal{K}$ con la métrica $T^*(\langle\langle, \rangle\rangle)$, tenemos que $(\mathcal{K}, T^*(\langle\langle, \rangle\rangle))$ es una variedad semirriemanniana isométrica al espacio de de Sitter. Dada una inmersión $\phi : M \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$, entonces $T \circ \phi : M \rightarrow \mathcal{K}$ es de nuevo una inmersión, claramente isométrica a la inicial (ver Figura 4.1).

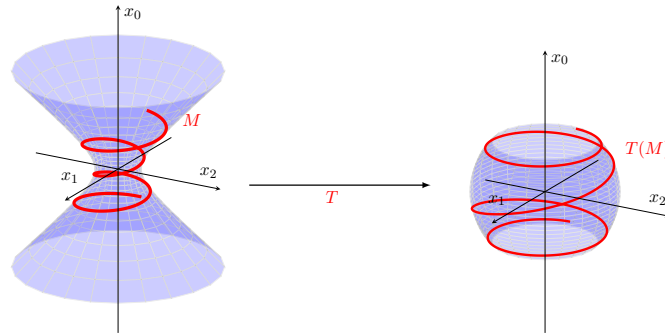


Figura 2.4: Una hipersuperficie en $\mathbb{S}_1^{n+1}$ y el modelo de Klein.

Dado que las geodésicas en el espacio de de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ son intersecciones de planos de $\mathbb{L}^{n+2}$ que pasan por el origen con $\mathbb{S}_1^{n+1}$, entonces las geodésicas en el modelo de Klein nuevamente se obtienen por intersección de dichos planos con $\mathcal{K}^{n+1}$, puesto que los planos son invariantes por la transformación T así, las geodésicas de $\mathcal{K}^{n+1}$ están contenidas en las circunferencias maximales de $\mathbb{S}^{n+1}$.

2.3 Modelo estereográfico

Este modelo se construye partiendo del modelo de Klein. Para ello, sí $\mathbb{S}^{n+1}$ es la esfera unitaria de $\mathbb{R}^{n+2}$, e_{n+1} el polo norte de $\mathbb{S}^{n+1}$ y $\pi_N : \mathbb{S}^{n+1} \setminus \{e_{n+1}\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, es la proyección estereográfica de $\mathbb{S}^{n+1}$, respecto del polo norte. Consideramos $\mathcal{E} = \pi_N(\mathcal{K})$, en otros términos,

$$\mathcal{E} = \left\{ (p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sqrt{2} - 1 < |p|_e < \sqrt{2} + 1 \right\}.$$

La transformación $L : \mathbb{S}_1^{n+1} \rightarrow \mathcal{E}$, definida como $L = (\pi_N \circ T)$, es un difeomorfismo. Inducimos la métrica de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ en $\mathcal{E}$, vía la aplicación L , esto es, $(\mathcal{E}, L^*(\langle\langle, \rangle\rangle))$ es isométrico al espacio de de Sitter. La frontera ideal de $\mathcal{E}$ esta dada por $\partial\mathcal{E} = \partial\mathcal{E}^+ \cup \partial\mathcal{E}^-$, donde

$$\partial \mathcal{E}^+ = \mathbb{S}^n \left(\sqrt{2} + 1 \right) \text{ y } \partial \mathcal{E}^- = \mathbb{S}^n \left(\sqrt{2} - 1 \right).$$

Para el computo de la métrica de este modelo, note que

$$T^{-1}(x_0, \bar{x}) = \left(\frac{1}{1 - 2x_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} (x_0, \bar{x}) \text{ y } \pi_N^{-1}(\bar{x}) = \frac{1}{1 + \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} (\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle - 1, 2\bar{x}).$$

Tenemos, para $x \in \mathcal{E}$

$$L^{-1}(x) = T^{-1} \left(\frac{1}{1 + \langle x, x \rangle} (\langle x, x \rangle - 1, 2x) \right) = \left(\frac{1}{-\langle x, x \rangle^2 + 6\langle x, x \rangle - 1} \right)^{\frac{1}{2}} (\langle x, x \rangle - 1, 2x).$$

Consideremos $p = (p_1, \dots, p_{n+1}) \in \mathcal{E}$ y $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ la base canónica de $T_p \mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^{n+1}$. Sean $\varepsilon > 0$ y la curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{E}$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = e_i$. Usaremos estos elementos para hallar las componentes g_{ij} de la métrica en p . Por un lado,

$$\frac{d}{dt} \left(\sqrt{\frac{1}{-\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle^2 + 6\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle - 1}} \right)_{t=0} = \frac{(2|p|_e^2 - 6) p_i}{(-|p|_e^4 + 6|p|_e^2 - 1)^{\frac{3}{2}}},$$

lo que permite concluir

$$dL_p^{-1}(e_i) = \frac{(2|p|_e^2 - 6) p_i}{(-|p|_e^4 + 6|p|_e^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} (|p|_e^2 - 1, 2p) + \frac{1}{(-|p|_e^4 + 6|p|_e^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} (2p_i, 2e_i).$$

Análogamente,

$$dL_p^{-1}(e_j) = \frac{(2|p|_e^2 - 6) p_j}{(-|p|_e^4 + 6|p|_e^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} (|p|_e^2 - 1, 2p) + \frac{1}{(-|p|_e^4 + 6|p|_e^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} (2p_j, 2e_j).$$

Luego

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \langle dL_p^{-1}(e_i), dL_p^{-1}(e_j) \rangle = p_i p_j \frac{4(|p|_e^2 - 3)^2}{(-|p|_e^4 + 6|p|_e^2 - 1)^2} \\ &\quad - \frac{8(|p|_e^2 - 3)^2 p_i p_j}{(-|p|_e^4 + 6|p|_e^2 - 1)^2} - \frac{4p_i p_j}{(-|p|_e^4 + 6|p|_e^2 - 1)} \\ &\quad + \frac{4\delta_{ij}}{(-|p|_e^4 + 6|p|_e^2 - 1)} \\ &= -p_i p_j \left(\frac{4(|p|_e^2 - 3)^2 + 4(-|p|_e^4 + 6|p|_e^2 - 1)}{(-|p|_e^4 + 6|p|_e^2 - 1)^2} \right) \\ &\quad + \frac{4\delta_{ij}}{(-|p|_e^4 + 6|p|_e^2 - 1)} \\ &= \frac{-32p_i p_j}{(-|p|_e^4 + 6|p|_e^2 - 1)^2} + \frac{4\delta_{ij}}{(-|p|_e^4 + 6|p|_e^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si tomamos $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ y $w = \sum_{j=1}^n w_j e_j$ en $T_p \mathcal{E}$, entonces por la bilinealidad de la métrica y la expresión anterior, concluimos que la métrica en p esta dada por,

$$g_p(v, w) = L^*(\langle v, w \rangle) = \frac{4}{(-|p|_e^4 + 6|p|_e^2 - 1)} \left(\langle v, w \rangle - \frac{8\langle p, w \rangle \langle p, v \rangle}{(-|p|_e^4 + 6|p|_e^2 - 1)} \right).$$

Analicemos un poco los vectores radiales. Sea $p \in \mathcal{E}$, decimos que un vector $v \in T_p \mathcal{E}$, es radial si es de la forma αp , siendo $\alpha \in \mathbb{R}$. Nótese que,

$$\begin{aligned} g_p(v, v) &= \alpha^2 g_p(p, p) \\ &= \frac{4\alpha^2}{(-|p|_e^4 + 6|p|_e^2 - 1)} \left(|p|_e^2 - \frac{8|p|_e^4}{(-|p|_e^4 + 6|p|_e^2 - 1)} \right) \\ &= -\frac{4\alpha^2 (|p|_e^3 + |p|_e)^2}{(-|p|_e^4 + 6|p|_e^2 - 1)^2} \\ &= -\frac{4\langle v, v \rangle (|p|_e^2 + 1)^2}{(-|p|_e^4 + 6|p|_e^2 - 1)^2} < 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Concluimos que todos los vectores de $T_p \mathcal{E}$ múltiplos de p son vectores de tiempo.

2.3.1 Geodésicas en $(\mathcal{E}^{n+1}, g)$

Anteriormente se observó que las geodésicas en el modelo de Klein se obtenían intersecando planos que pasan por el origen con el conjunto $\mathcal{K}^{n+1}$, por tanto estas curvas son circunferencias maximales de la esfera $n+1$ -dimensional de $\mathbb{R}^{n+2}$ o arcos de este tipo de circunferencias. Es bien sabido que la proyección estereográfica π_N envía círculos maximales en círculos o en rectas de $\mathbb{R}^{n+1}$, luego todas las geodésicas en el modelo estereográfico pueden caracterizarse de manera euclidiana como circunferencias, arcos de circunferencia o segmentos de recta. Las siguientes proposiciones determinan con exactitud como son estos elementos euclidianos. Iniciamos con un par de lemas.

Lema 2.3.1 — Propiedades de la proyección estereográfica. Sea $\pi_N : \mathbb{S}^{n+1} \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ la proyección estereográfica de la esfera unitaria centrada en el origen de $\mathbb{R}^{n+2}$, desde el polo norte N , esto es,

$$\pi_N(x_0, \bar{x}) = \frac{\bar{x}}{1-x_0}.$$

Sea C una circunferencia contenida en $\mathbb{S}^{n+1}$, entonces:

- $\pi_N(-N) = 0$.
- $\pi_N(C)$ es una circunferencia o una recta en $\mathbb{R}^{n+1}$.

Lema 2.3.2 Un arco de circunferencia C en $\mathcal{E}$ que contiene dos puntos antipodales de $\mathbb{S}^n$ es una geodésica del espacio de de Sitter.

Demostración. Dado que $\pi_N^{-1}(C)$ es un arco de circunferencia, basta con ver que $\pi_N^{-1}(C)$ tiene diámetro 2. Por hipótesis existen $x, -x \in \mathbb{S}^n \cap C$, luego $\pi_N^{-1}(x), \pi_N^{-1}(-x) \in \pi_N^{-1}(C)$. Por lo tanto, por un calculo directo

$$|\pi_N^{-1}(-x) - \pi_N^{-1}(x)|_e = |(0, 2x)|_e = 2,$$

de donde se concluye el resultado, pues π_N^{-1} es un arco de circunferencia maximal en el modelo de Klein. 

Teorema 2.3.3 Una circunferencia o arco de circunferencia euclidiano A en $\mathcal{E}$ es geodésica del espacio de de Sitter sí, y solo sí, es la intersección de una circunferencia de radio R y centro $C \in \mathbb{R}^{n+1}$ con $\mathcal{E}$, que verifica $R^2 = 1 + \langle C, C \rangle$. Más aún, la geodésica es espacial sí $1 \leq R < \sqrt{2}$ (y por tanto compacta), es de luz sí $R = \sqrt{2}$ y de tiempo sí $R > \sqrt{2}$.

Demostración. Considere una circunferencia o un arco de circunferencia con centro C y radio R que sea una geodésica del espacio de de Sitter en el modelo estereográfico. Este conjunto, denominado A , está contenido en la n -esfera

$$S = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x - C|_e^2 = R^2\}.$$

De donde,

$$\pi_N^{-1}(S) = \{y \in \mathbb{R}^{n+2} : |\pi_N(y) - C|_e^2 = R^2\} = \left\{ y \in \mathbb{R}^{n+2} : \frac{\langle \bar{y}, \bar{y} \rangle}{(1 - y_0)^2} - 2 \frac{\langle \bar{y}, C \rangle}{(1 - y_0)} + \langle C, C \rangle = R^2 \right\}.$$

En el modelo de Klein, la geodésica $\pi_N^{-1}(A)$ debe estar contenida en $\pi_N^{-1}(S) \cap \mathcal{K}$, más aún

$$\begin{aligned} \pi_N^{-1}(S) \cap \mathcal{K} &\subset \{y \in \mathbb{S}^{n+1} : (1 + y_0) - 2\langle \bar{y}, C \rangle + (1 - y_0)\langle C, C \rangle = R^2(1 - y_0)\} \\ &\subseteq \{y \in \mathbb{S}^{n+1} : \langle y, \eta \rangle = R^2 - \langle C, C \rangle - 1\}, \end{aligned}$$

donde $\eta = (1 - \langle C, C \rangle + R^2, -2C)$. Dado que las geodésicas en el modelo de Klein se obtienen por intersección de planos que pasan por el origen con $\mathcal{K}^{n+1}$, dicho plano debe estar contenido en el hiperplano

$$\{y \in \mathbb{R}^{n+2} : \langle y, \eta \rangle = R^2 - \langle C, C \rangle - 1\},$$

por ende, este último hiperplano pasa por el origen, lo que implica la identidad $R^2 = 1 + \langle C, C \rangle$. Recíprocamente, en el modelo estereográfico considérese una circunferencia o arco de circunferencia A de radio R y centro C , satisfaciendo, $R^2 = 1 + \langle C, C \rangle$. Es decir, $(R - |C|)(R + |C|) = 1$. La última igualdad, implica $R - |C| < 1$, esto garantiza que $A \cap \mathbb{S}^n$ tiene al menos dos puntos, más explícitamente reconocemos los siguientes casos

$$\{X, Y\} = A \cap \mathbb{S}^n, \text{ con } X \neq Y, \text{ o } A \cap \mathbb{S}^n \text{ tiene infinitos puntos.}$$

Para el segundo caso, A es una circunferencia centrada en el origen con radio 1, así contiene pares de puntos antipodales, lo que implica por el lema anterior que el arco es geodésica. En el primer caso $X \neq Y$, probaremos que $X = -Y$. Sea O el origen en $\mathcal{E}$. Considere el triángulo $\triangle OCX$, en virtud de $R^2 = 1 + \langle C, C \rangle$, dicho triángulo debe ser rectángulo, por lo tanto, $\angle COX = \frac{\pi}{2}$.

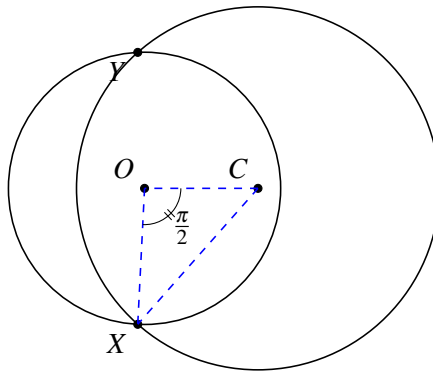


Figura 2.5: Representación de $\triangle OCX$.

Análogamente considerando $\triangle OCY$, obtenemos $\angle COY = \frac{\pi}{2}$, en consecuencia $\angle XOY = \pi$. Por lo tanto, X y Y son diametralmente opuestos en $\mathbb{S}^n$, lo que de muestra que A es geodésica. Para concluir la prueba, considere una geodésica pasando por un punto p con velocidad v en el modelo $\mathbb{S}_1^{n+1}$. Dado que la geodésica está contenida en el plano Π generado por el conjunto de vectores $\{p, v\}$, entonces la recta $\alpha = \{tv : t \in \mathbb{R}\}$ está sobre Π . Sea θ el ángulo entre α y el hiperplano

$\bar{\Pi} = \{x = (x_0, \bar{x}) \in \mathbb{R}^{n+2} : x_0 = 0\}$. Si el vector v es un vector de luz, entonces $v_0^2 = \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle$ y por tanto $\theta = \frac{\pi}{4}$. Similarmente, observe que si $\theta > \frac{\pi}{4}$ el vector v es de tiempo y por último $\theta < \frac{\pi}{4}$ implica que v es un vector espacial. Nótese que la geodésica es espacial, de luz o de tiempo si y solo si v lo es.

La proyección estereográfica de la geodésica en $\mathcal{E}$ es, como ya se demostró, un arco de circunferencia de radio R , el cual será considerado en función de θ .

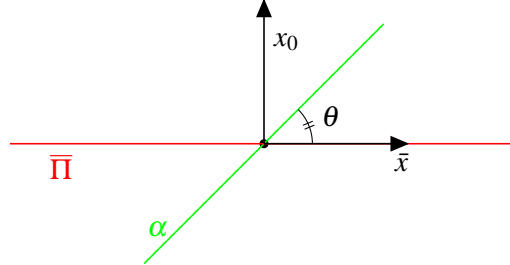


Figura 2.6: Ángulo θ entre α y $\bar{\Pi}$.

Apoyándose en la Figura 2.7 se razonará en el modelo de Klein, sea N el polo norte de $\mathbb{S}^{n+1}$ y O el origen. Considérese P y Q los dos puntos de la recta α que están en $\mathbb{S}^{n+1}$. Obsérvese que en la circunferencia máxima que contiene a la geodésica, P y Q son diametralmente opuestos. Dado que la proyección estereográfica envía puntos diametralmente opuestos en puntos diametralmente opuestos, el segmento de extremos $\pi(P)$, $\pi(Q)$ debe ser un diámetro en la circunferencia que contiene a la geodésica en $\mathcal{E}$, y por tanto, mide $2R$.

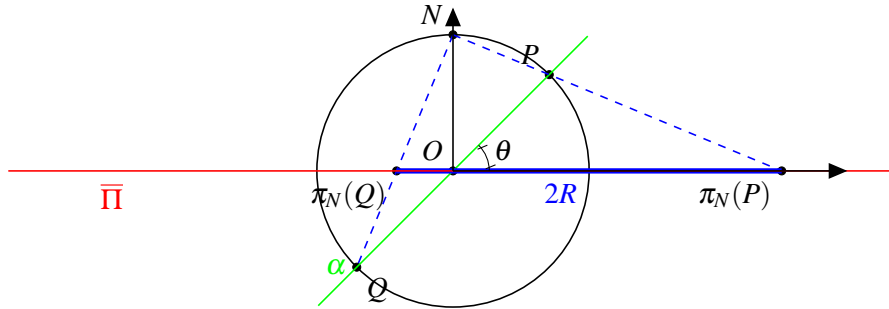


Figura 2.7: Diámetro de $\pi_N(\mathbb{S}^{n+1} \cap \Pi)$ en azul.

Dado que O es un punto interior del segmento $\overline{\pi(P)\pi(Q)}$, entonces

$$2R = \overline{\pi_N(Q)O} + \overline{O\pi_N(P)}.$$

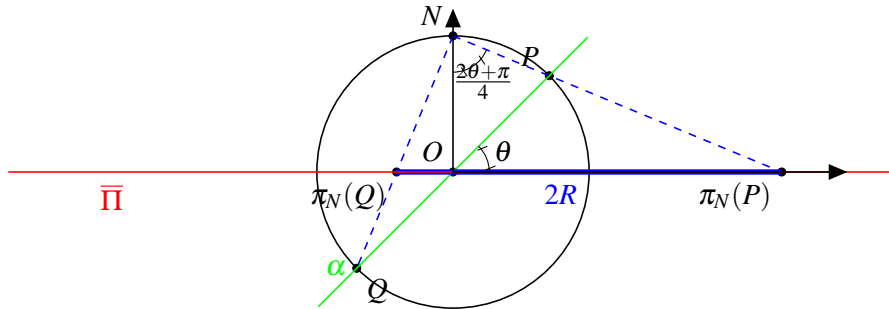


Figura 2.8: El ángulo entre α y $\bar{\Pi}$.

Dado que el $\triangle OPN$ es isocel, $\triangle QPN$ es rectángulo y $\overline{NO} = 1$, se sigue que

$$\overline{\pi_N(Q)O} = \tan\left(\frac{-2\theta + \pi}{4}\right) \text{ y } \overline{O\pi_N(P)} = \tan\left(\frac{\pi + 2\theta}{4}\right).$$

Por lo tanto

$$R = R(\theta) = \frac{\tan\left(\frac{\pi + 2\theta}{4}\right) + \tan\left(\frac{-2\theta + \pi}{4}\right)}{2}.$$

En resumen, la expresión anterior determina una función $R : [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$, la cuál es creciente. Si $\theta \in [0, \frac{\pi}{4})$, entonces $R \in [1, \sqrt{2})$ y las geodésicas de radio R son geodésicas espaciales. Si $\theta = \frac{\pi}{4}$, entonces $R = \sqrt{2}$ y las geodésicas correspondientes son de luz. Finalmente, si $\theta > \frac{\pi}{4}$, entonces $R > \sqrt{2}$ y las geodésicas de radio R son geodésicas de tiempo.



Teorema 2.3.4 Sea una geodésica en $\mathcal{E}$ que no es un arco de circunferencia, entonces su traza esta contenida en una recta que pasa por el origen. Más aún, son geodésicas de tiempo.

Demostración. Sea A la recta que contiene dicha geodésica. Dado que esta geodésica no es un arco de circunferencia, por las propiedades de la proyección estereográfica, la única posibilidad es que este contenida en una recta. Así, por las propiedades de la proyección estereográfica $N = (1, 0, \dots, 0) \in \overline{\pi_N^{-1}(A)}$. Por consiguiente, $-N$ debe estar en $\pi_N^{-1}(A)$, pues, es geodésica en $\mathbb{S}^{n+1}$ y por tanto, debe ser la imagen a través de π_N de un ecuador. Lo que inmediatamente conlleva a que $\pi_N(-N) = 0 \in A$, completando la prueba.



Corolario 2.3.5 Todas las geodésicas de luz son arcos de una circunferencia con centro a distancia 1 del origen y radio $\sqrt{2}$. Más aún, su traza es una semicircunferencia.

Se presenta continuación una ilustración del corolario anterior.

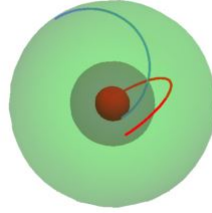


Figura 2.9: Dos geodésicas de luz y $\mathbb{S}^2$ en morado.

Corolario 2.3.6 Los dos tipos de geodésicas descritas en los Teoremas 2.3.3 y 2.3.4 caracterizan todas las geodésicas del espacio de de Sitter en el modelo estereográfico.



En el modelo estereográfico observamos que de los tres tipos de geodésicas, las geodésicas de luz y tiempo son las únicas que escapan de compactos de $\mathcal{E}$. Para el caso de geodésicas espaciales, deben ser circunferencias contenidas en $\mathcal{E}$.

Corolario 2.3.7 El modelo estereográfico es una variedad geodésicamente completa, donde una única geodésica queda determinada por dos puntos distintos x, y , donde $x \in \mathbb{S}^n$ e $y \in \mathcal{E}$.

2.4 Modelación del espacio de de Sitter en GeoGebra

Usando las construcciones de las pruebas de los Teoremas 2.3.3 y 2.3.4 y teniendo en cuenta que el modelo estereográfico es visualmente acotado, se ha ambientado en el entorno de GeoGebra una simulación dinámica para el espacio $\mathbb{S}_1^2$. Dado $p \in \mathcal{E}$ y $v \in T_p\mathcal{E}$ la animación permite visualizar la única geodésica que pasa por p con velocidad v . Esta interacción esta disponible en el enlace <https://www.geogebra.org/m/ewfjkxdv>. Dentro de la animación encontramos lo siguiente

Geodésicas en modelo estereográfico del espacio de de Sitter
Se representa en verde la geodésica que pasa por B con velocidad u

Geodésica temporal

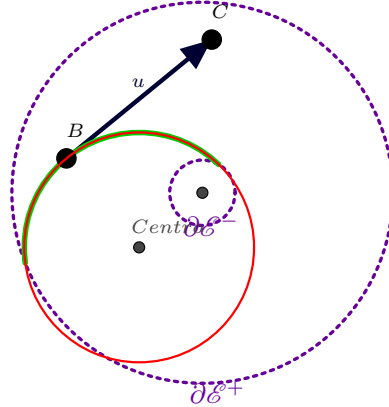


Figura 2.10: Explorando animación en GeoGebra.

En la interacción, es posible modificar los puntos B y C moviéndolos con el puntero para obtener la geodésica que pasa por B con velocidad $u = C - B$.

Geodésicas en modelo estereográfico del espacio de de Sitter
Se representa en verde la geodésica que pasa por B con velocidad u

Geodésica espacial

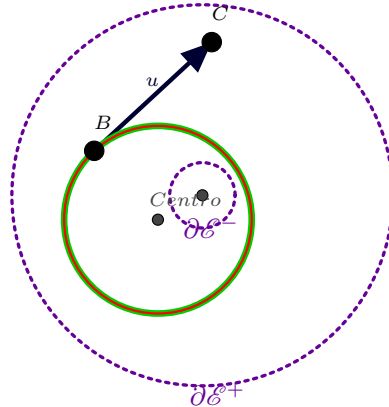
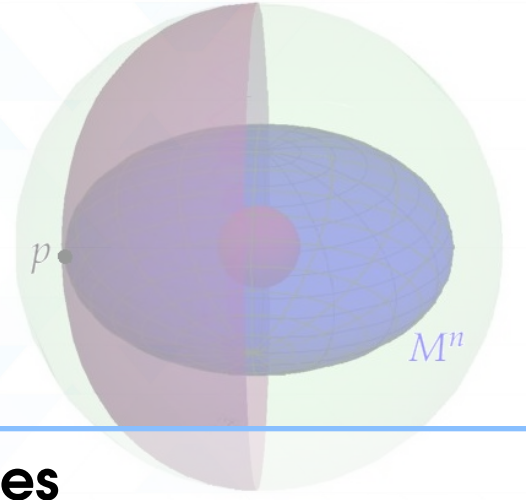


Figura 2.11: Explorando una geodésica compacta en GeoGebra.

-  Obsérvese que la circunferencia que contiene a la geodésica es marcada en color rojo. La animación también nos permite ver como cambia el centro de dicha circunferencia al variar la geodésica.



3. Hipersuperficies espaciales

En este capítulo se definirán las hipersuperficies espaciales del espacio de de Sitter y una función análoga a la aplicación de Gauss para superficies inmersas en $\mathbb{R}^3$, llamada aplicación de Gauss-de Sitter la cual tendrá un papel importante para introducir una noción de convexidad para estas subvariedades. En [Rol21], A. Roldan presenta una fórmula de representación para hipersuperficies espaciales, la cual muestra que estas subvariedades pueden ser representadas localmente como immersiones conformes de dominios esféricos. Estos elementos serán utilizados para el estudio de hipersuperficies espaciales en el espacio de de Sitter, en particular aquellas que son totalmente umbílicas, lo cual es el objetivo de las últimas secciones de este capítulo.

A continuación se presentan algunas definiciones y resultados y preliminares.

Una inmersión $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ se dice una *hipersuperficie espacial* si la métrica semirriemanniana inducida vía ϕ es una métrica Riemanniana en M^n , definimos (en el modelo estereográfico) la *frontera ideal* o en infinito de $M^n \subseteq \mathbb{S}_1^{n+1}$ como $\overline{L(M^n)} \cap \partial \mathcal{E}$, la cual denotaremos como $\partial_\infty M^n$. Para cada $p \in M^n$ se tiene que $T_p \mathbb{S}_1^{n+1} = T_p M^n \oplus \text{gen}\{\eta(p)\}$, donde $\eta(p) \in T_p \mathbb{S}_1^{n+1}$ es un vector que satisface $\langle \langle \eta(p), \eta(p) \rangle \rangle = -1$, $\langle \langle p, \eta(p) \rangle \rangle = 0$ y para todo $v \in T_p M$, se tiene que $\langle \langle \eta(p), v \rangle \rangle = 0$, diremos que $\eta(p)$ es un vector normal unitario de M^n en p . Diremos que M^n es orientable si la escogencia de estos vectores $\eta(p)$ se puede realizar de forma diferenciable en toda la hipersuperficie, la cual llamaremos una *orientación*; en resumen, M es orientable si existe un campo normal suave $\eta : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$. Dado que $\mathbb{H}^{n+1}$ tiene dos componentes conexas, $\mathbb{H}_+^{n+1}$ y $\mathbb{H}_-^{n+1}$, entonces podemos elegir $\eta = (\eta_0, \bar{\eta})$ apuntando hacia el futuro, esto es cuando $\eta_0 > 0$ o η apuntando hacia el pasado, cuando $\eta_0 < 0$, lo que nos induce dos posibles orientaciones para una hipersuperficie orientable. Como consecuencia de se tiene que toda hipersuperficie espacial es orientable, una prueba de este hecho puede encontrarse en [Rol21].

3.1 Aplicación de Gauss-de Sitter

A continuación introduciremos y estudiaremos el mapa de Gauss-de Sitter y otros elementos necesarios para presentar la fórmula de representación para hipersuperficies espaciales en el espacio de de Sitter.

El cociente proyectivo $\mathbb{S}_\infty^n = \mathbb{S}_1^{n+1} / \mathbb{R}^*$ es naturalmente identificado con la esfera unitaria usando la proyección $\pi : \mathbb{S}_1^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^n \equiv \mathbb{S}_\infty^n$ dada por

$$\pi(q) = \frac{1}{q_0} \bar{q}.$$

Sea $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ una hipersuperficie espacial en $\mathbb{S}_1^{n+1}$ con normal unitario $\eta : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$. Definimos el *mapa cónico asociado a la inmersión ϕ* como la aplicación dada por

$$\psi = \phi - \eta : M^n \rightarrow \mathbb{N}^{n+1}.$$

Sí escribimos $\psi = (\psi_0, \bar{\psi})$ entonces su aplicación cociente

$$G = [\psi] : M^n \rightarrow \mathbb{S}^n \equiv \mathbb{S}_\infty^n, \text{ dada por } G = \frac{1}{\psi_0} \bar{\psi},$$

será llamada *aplicación de Gauss-de Sitter asociada a ϕ* .

R Observe que $\psi(M^n) \subset \mathbb{N}_+^{n+1}$ o $\psi(M^n) \subset \mathbb{N}_-^{n+1}$, ya que sí lo anterior no sucediera, necesariamente existiría $p \in M^n$ tal que $\eta(p) = \phi(p)$, implicando $\langle \phi(p), \phi(p) \rangle < 0$, lo cual no es posible, pues $\phi(p) \in \mathbb{S}_1^{n+1}$. Más aún, por continuidad $\phi + \eta$ y $\phi - \eta$ están en componentes conexas distintas de $\mathbb{N}^{n+1}$.

Sea $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ una hipersuperficie espacial, se define la *función de soporte de ϕ* , como $e^\rho : M^n \rightarrow \mathbb{R}$, donde $e^\rho = |\psi_0|$. Así, eligiendo una orientación para M^n , tal que $\psi_0 > 0$, el mapa cónico ψ y la aplicación de Gauss-de Sitter satisface la relación, $\psi = e^\rho(1, G)$. Una interpretación geométrica para la aplicación de Gauss-de Sitter en el modelo de Klein $\mathcal{K}^{n+1}$, es la siguiente. Sea $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ una hipersuperficie espacial y $p \in M^n$ con vector normal unitario $\eta(p)$ en $\phi(p)$, entonces elegimos la única geodésica $\gamma(t)$, $t > 0$, que inicia en $\phi(p)$ con velocidad $-\eta(p)$. Sea T la proyección al modelo de Klein, entonces $T(\circ\gamma(t))$ es una geodésica en $\mathcal{K}^{n+1}$ para la cual existe $\lim_{t \rightarrow \infty} T(\gamma(t)) = q$, el cual está en la frontera de $\mathcal{K}$, y se verifica $G(p) = [q]$. Observe que si $\eta \in \mathbb{H}_-^{n+1}$, entonces $q \in \partial \mathcal{K}^+$ y si $\eta(p) \in \mathbb{H}_+^{n+1}$, entonces $q \in \partial \mathcal{K}^-$.

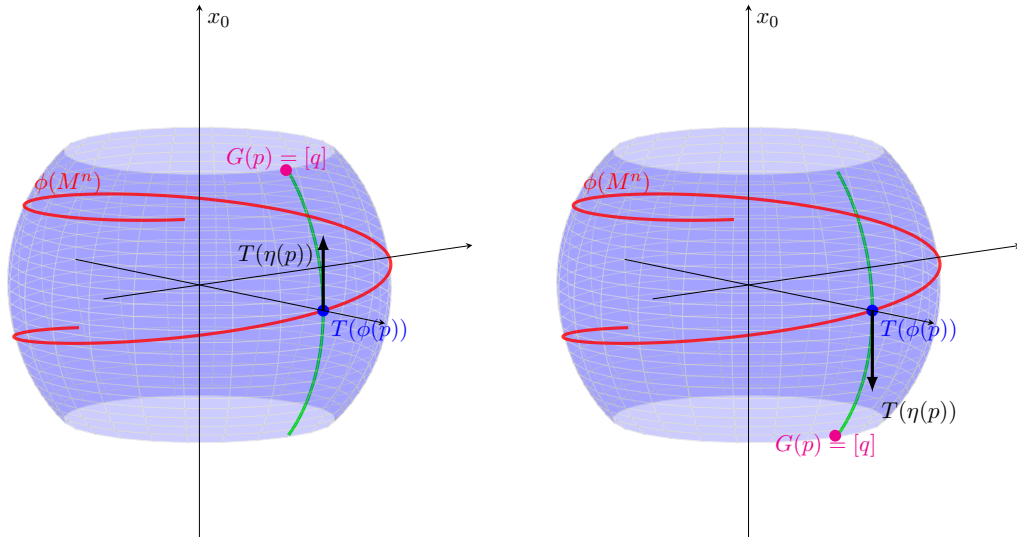


Figura 3.1: Interpretación geométrica de la aplicación de Gauss-de Sitter en el modelo de Klein, a la izquierda con $\eta(p) \in \mathbb{H}_+^{n+1}$ y a la derecha con $\eta(p) \in \mathbb{H}_-^{n+1}$.

Proposición 3.1.1 — (Rol21). Sea $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ una hipersuperficie espacial. Las siguientes condiciones son equivalentes en $p \in M$:

- 1) La aplicación de Gauss-de Sitter es un difeomorfismo local.
- 2) El mapa cónico ψ es una inmersión espacial en $\mathbb{N}^{n+1}$.
- 3) Todas las curvaturas principales de M^n son diferentes de -1 .

Demostración. $[1 \Rightarrow 2]$ Sea G la aplicación de Gauss-de Sitter, Como G es un difeomorfismo local entonces G es regular, luego para todo $0 \neq v \in T_p M$, $dG(v) \neq 0$. En particular

$$\langle d\psi(v), d\psi(v) \rangle = e^{2\rho} \langle dG_p(v), dG_p(v) \rangle \neq 0.$$

Por lo tanto ψ es regular.

$[2 \Rightarrow 3]$ Consideremos $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base de direcciones principales de M en p , con curvaturas principales $k_1(p), \dots, k_n(p)$. Observe que

$$d\psi_p(e_i) = d\phi_p(e_i) - d\eta_p(e_i) = e_i + k_i(p)e_i = (1 + k_i)e_i, \quad (3.1)$$

dado que ψ es regular, $d\psi(e_i) \neq 0$. Por lo tanto la ecuación (3.1) $k_i(p) \neq -1$.

$[3 \Rightarrow 1]$ Consideremos $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base de direcciones principales de M en p , con curvaturas principales $k_1(p), \dots, k_n(p)$. Teniendo en cuenta que $k_i(p) \neq -1$ en la ecuación (3.1), tenemos

$$e^{2\rho} \langle dG(e_i), dG(e_i) \rangle = \langle d\psi(e_i), d\psi(e_i) \rangle = (1 + k_i)^2 e_i \neq 0.$$

Luego dG_p es un isomorfismo lineal, así en consecuencia del teorema de la función inversa, G es un difeomorfismo local. 

Definición 3.1.1 — (Rol21). Una hipersuperficie espacial $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ se dice débilmente convexa si existe un campo normal unitario η tal que las curvaturas principales de ϕ satisfacen simultáneamente $k_i(p) > -1$ para todo $i = 1, \dots, n$ y $p \in M^n$.

Observe que M^n es débilmente convexa en $p \in M^n$ con vector normal unitario $\eta(p)$, siempre que M^n esté localmente en p contenida en el interior o exterior de la única hipersuperficie plana y totalmente umbílica pasando en p con vector normal unitario $\eta(p)$ en p . Ilustramos eso en la Figura 3.2, note que tal hipersuperficie umbílica es representada en color morado

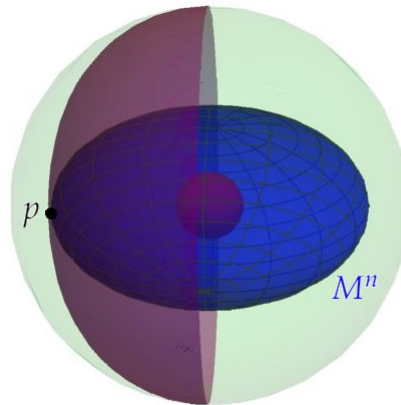


Figura 3.2: Representación de una superficie M^n débilmente convexa en p en el modelo estereográfico.

3.2 Una fórmula de representación local

Sea $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ una hipersuperficie espacial orientada con campo normal unitario η , función de soporte e^ρ y aplicación de Gauss-de Sitter $G : M^n \rightarrow \mathbb{S}^n$. Si G es un difeomorfismo local, considere la función inversa local,

$$G^{-1} : U \subseteq \mathbb{S}^n \rightarrow V \subseteq M^n,$$

donde U y V son ciertos subconjuntos abiertos de $\mathbb{S}^n$ y M^n respectivamente. Podemos reparametrizar localmente a M^n al rededor de p tomando la inmersión

$$\hat{\phi} = \phi \circ G^{-1} : U \subseteq \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}_1^n,$$

con campo normal unitario $\hat{\eta} = \eta \circ G^{-1}$ y aplicación de Gauss-de Sitter $\hat{G}(x) = x$, $x \in \mathbb{S}^n$. En conclusión, sin pérdida de generalidad se puede suponer que la aplicación de Gauss-de Sitter es la función identidad, siempre que la aplicación de Gauss-de Sitter sea un difeomorfismo local, esto es, si $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ es débilmente convexa en todos sus puntos.

Teorema 3.2.1 — Teorema de Representación (Rol21). Sea $\phi : U \subseteq \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ una hipersuperficie espacial orientada con mapa de Gauss-de Sitter $G(x) = x$ y función de soporte $e^\rho : U \subseteq \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$\phi = \pm \left(\frac{e^\rho}{2} (1 - e^{-2\rho} (1 + \|\nabla^{g_0} \rho\|_{g_0}^2)) (1, x) - e^{-\rho} (0, -x + \nabla^{g_0} \rho) \right), \quad (3.2)$$

donde g_0 es la restricción a U de la métrica sobre $\mathbb{S}^n$ y $\nabla^{g_0} \rho$ es el gradiente de ρ respecto a g_0 . Aquí el signo $\pm$ se toma positivo si $\eta_0 < 0$, y negativo si $\eta_0 > 0$.

Demostración. La demostración puede ser consultada en [Rol21].



R La fórmula (4.3) para hipersuperficies espaciales de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ es análoga a la presentada en [EGM09] para hipersuperficies localmente horoesféricamente convexas de $\mathbb{H}^{n+1}$. Donde la conclusión de ser horoesféricamente convexa en $\mathbb{H}^{n+1}$ es equivalente a que las curvaturas principales en cada punto sean distintas de 1.

A continuación se presenta la fórmula (4.3) usando el modelo estereográfico del espacio de de Sitter bajo las hipótesis del teorema anterior. Haciendo la sustitución $\sigma = e^{-\rho}$, se reescribirán todos los términos de la expresión anterior, así;

$$\phi_0 = \frac{1}{2\sigma} (1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|_{g_0}^2). \quad (3.3)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + 2\phi_0^2} - \phi_0 &= \sqrt{1 + \frac{1}{2\sigma^2} (1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|_{g_0}^2)^2} - \frac{1}{2\sigma} (1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|_{g_0}^2) \\ &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{2\sigma^2 + (1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|_{g_0}^2)^2} - (1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|_{g_0}^2)}{2\sigma}. \end{aligned}$$

Componiendo ϕ con $L : \mathbb{S}_1^{n+1} \rightarrow \mathcal{E}$, y usando la orientación hacia el futuro la fórmula de representación, en el modelo estereográfico toma la forma $\Phi_+(x) = L(\phi(x)) : U \rightarrow \mathcal{E}$, donde,

$$\Phi_+(x) = \frac{(1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|_{g_0}^2)x + 2\sigma^2 x + 2\sigma \nabla^{g_0} \sigma}{\sqrt{2}\sqrt{2\sigma^2 + (1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|_{g_0}^2)^2} - (1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|_{g_0}^2)}. \quad (3.4)$$

Análogamente, usando la orientación hacia el pasado

$$\Phi_-(x) = -\frac{(1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|_{g_0}^2)x + 2\sigma^2x + 2\sigma\nabla^{g_0} \sigma}{\sqrt{2}\sqrt{2\sigma^2 + (1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|_{g_0}^2)^2 + (1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|_{g_0}^2)}}. \quad (3.5)$$

Resumiendo todo lo anterior, tenemos el siguiente teorema

Teorema 3.2.2 Sea $\Phi : U \subseteq \mathbb{S}^n \rightarrow \mathcal{E}^{n+1}$ una hipersuperficie espacial tal que $L^{-1} \circ \Phi : U \subset \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ es orientada, con campo normal unitario $\eta : U \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$, mapa de Gauss-de Sitter $G(x) = x$ y función de soporte $e^\rho : U \subseteq \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$, entonces,

$$\Phi(x) = \Phi_+(x) = \frac{(1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|_{g_0}^2)x + 2\sigma^2x + 2\sigma\nabla^{g_0} \sigma}{\sqrt{2}\sqrt{2\sigma^2 + (1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|_{g_0}^2)^2 - (1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|_{g_0}^2)}}.$$

o

$$\Phi(x) = \Phi_-(x) = -\frac{(1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|_{g_0}^2)x + 2\sigma^2x + 2\sigma\nabla^{g_0} \sigma}{\sqrt{2}\sqrt{2\sigma^2 + (1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|_{g_0}^2)^2 + (1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|_{g_0}^2)}}.$$

donde g_0 es la restricción a U de la métrica sobre $\mathbb{S}^n$, $\sigma := e^{-\rho}$ y $\nabla^{g_0} \sigma$ es el gradiente de σ respecto a g_0 . Aquí se toma Φ_+ si $\eta_0 < 0$, y Φ_- si $\eta_0 > 0$.

3.3 Hipersuperficies espaciales totalmente umbilicas en el espacio en $\mathbb{S}_1^{n+1}$.

En esta sección se presenta una caracterización de las hipersuperficies conexas, completas, espaciales, totalmente umbilicas del espacio de de Sitter, realizada por S. Montiel en [Mon88]. Dicha caracterización servirá para estudiar las hipersuperficies totalmente umbilicas con ayuda de la fórmula de representación en el espacio de de Sitter. La idea principal es estudiar hipersuperficies totalmente umbilicas de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ siguiendo las ideas planteadas por Espinar y Abanto en [ED19]. Presentaremos una correspondencia entre bolas geodesicas de $\partial \mathcal{E}^+$ y cierta familia de hipersuperficies espaciales y totalmente umbilicas (Proposición 3.4.6), también algunas condiciones que permiten estudiar la frontera de estas inmersiones, en especial, se demuestra que la frontera de cada una de estas inmersiones se encuentra dentro de una hipersuperficie totalmente umbilica formando un ángulo constante con la misma (Proposiciones 3.4.8 y 3.4.7).

Sea M^n una hipersuperficie, conexa, completa, espacial, totalmente umbilica en $\mathbb{S}_1^{n+1}$, entonces,

$$M^n = \{p \in \mathbb{S}_1^{n+1} : \langle \langle p, a \rangle \rangle = b\},$$

donde $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ satisface $\varepsilon := \langle \langle a, a \rangle \rangle \in \{-1, 0, 1\}$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que $b^2 > \varepsilon$. Más aún, tenemos los siguientes casos:

- 1) Sí $\varepsilon = -1$ (intersección de M y un hiperplano espacial con $\mathbb{S}_1^{n+1}$), entonces b puede tomar cualquier valor real. Un campo normal unitario esta dado por $\eta(p) = \frac{1}{\sqrt{b^2+1}}(a - bp)$ y su operador de forma es dado por $A = \frac{b}{\sqrt{b^2+1}}I$. En particular, M^n tiene curvaturas principales constantes iguales a $\frac{b}{\sqrt{b^2+1}} \in (-1, 1)$, curvatura media constante satisfaciendo $|H| < 1$ y curvaturas seccionales $K = \frac{1}{b^2+1} > 0$. Así M^n es isométrica a una esfera n -dimensional de radio $\sqrt{b^2+1}$, es decir,

$$M^n \equiv \mathbb{S}^n(\sqrt{b^2+1}).$$

- 2) Sí $\varepsilon = 0$ (intersección de M y un hiperplano de luz con $\mathbb{S}_1^{n+1}$), entonces b puede tomar cualquier valor real no nulo. Un campo normal unitario está dado por $\eta(p) = \frac{1}{|b|}(a - bp)$ y su operador de forma es $A = \frac{b}{|b|}I$. En particular, M^n tiene curvaturas iguales a ± 1 , curvatura media constante satisfaciendo $|H| = 1$ y curvatura seccional constante $K = 0$. Así M^n es isométrica al espacio euclídeo n -dimensional,

$$M^n \equiv \mathbb{R}^n.$$

- 3) Sí $\varepsilon = 1$ (intersección de M y un hiperplano de tiempo con $\mathbb{S}_1^{n+1}$), entonces $b \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, un campo normal unitario es dado por $\eta(p) = \frac{1}{\sqrt{b^2-1}}(a - bp)$ y su operador de forma es $A = \frac{b}{\sqrt{b^2-1}}I$. En particular, M^n tiene curvaturas principales iguales a $\frac{b}{\sqrt{b^2-1}} \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, tiene curvatura media constante satisfaciendo $|H| > 1$ y curvatura seccional constante $K = \frac{-1}{b^2-1} < 0$. Así M^n es isométrica al espacio hiperbólico con dos hojas

$$M^n \equiv \mathbb{H}^n(\sqrt{b^2-1}).$$

Se denotarán por $E(a, b)$ las hipersuperficies de este tipo, a saber,

$$E(a, b) = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+1} : \langle x, a \rangle = b\},$$

para algunos $b \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{L}^{n+2}$ tales que $b^2 > 1$ y $\langle a, a \rangle = 1$. Para $b \in \mathbb{R}$ fijo con $b^2 > 1$, denotaremos por $\mathbb{E}_b$ el conjunto de dichas hipersuperficies, a saber

$$\mathbb{E}_b := \{E(a, b) : a \in \mathbb{L}^{n+2} \text{ y } \langle a, a \rangle = 1\}.$$

R Cada hipersuperficie conexa, espacial, totalmente umbilical de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ debe estar contenida en alguno de los casos anteriores.

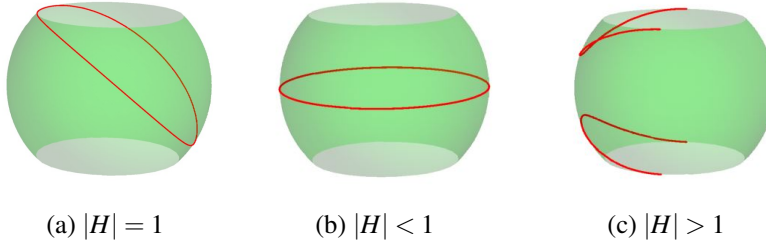


Figura 3.3: Hipersuperficies espaciales conexas, completas y totalmente umbilicas de curvatura media constante H en el modelo de Klein.

3.4 Representación de hipersuperficies totalmente umbilicas de la familia $\mathbb{E}_b$

El objetivo de esta sección es estudiar la representación de elementos en $\mathbb{E}_b$ vistos en el modelo estereográfico, para ello usaremos las fórmulas (3.5) y (3.4). El punto clave es que estas hipersuperficies son espaciales y su aplicación de Gauss-de Sitter es un difeomorfismo global, admitiendo así una parametrización global a través de la fórmula de representación del teorema 4.1.

Proposición 3.4.1 Sea $E(a, b) \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$, denotando con G su aplicación de Gauss-de Sitter, entonces $G : E(a, b) \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{q \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle q, \vec{a} \rangle = a_0\}$ es un difeomorfismo.

Demostración. Iniciamos calculando el mapa conico $\psi = \frac{1}{\psi_0}(1, G)$, observe que

$$\begin{aligned}\psi(p) &= p - \eta(p) \\ &= \left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - 1}}\right)p - \frac{a}{\sqrt{b^2 - 1}}.\end{aligned}$$

Por un calculo directo, a partir de las igualdades anteriores, tenemos

$$G(p) = \frac{1}{\left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - 1}}\right)p_0 - \frac{a_0}{\sqrt{b^2 - 1}}} \left(\left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - 1}}\right)\bar{p} - \frac{\bar{a}}{\sqrt{b^2 - 1}} \right).$$

Dado $q \in \mathbb{S}^n$ queremos determinar $p = (p_0, \bar{p}) \in E(a, b)$ tal que $G(p) = q$. Entonces, necesariamente

$$\bar{p} = q \left(p_0 - \frac{a_0}{b + \sqrt{b^2 - 1}} \right) + \frac{\bar{a}}{b + \sqrt{b^2 - 1}}.$$

Por otro lado, dado que $a = (a_0, \bar{a}) \in \mathbb{S}_1^{n+1}$, $p = (p_0, \bar{p}) \in E(a, b)$, $\langle \bar{a}, \bar{a} \rangle = 1 + a_0^2$ y $\langle \bar{p}, \bar{a} \rangle = b + p_0 a_0$. Así

$$\left(p_0 - \frac{a_0}{b + \sqrt{b^2 - 1}} \right) \langle q, \bar{a} \rangle + \frac{1}{b + \sqrt{b^2 - 1}} (1 + a_0^2) = b + p_0 a_0. \quad (3.6)$$

Obtenemos así

$$p_0 = \frac{\sqrt{b^2 - 1}}{\langle q, \bar{a} \rangle - a_0} + \frac{a_0}{b + \sqrt{b^2 - 1}}.$$

En consecuencia $G(p) = q$, implica necesariamente

$$\begin{aligned}p &= \left(\frac{\sqrt{b^2 - 1}}{\langle q, \bar{a} \rangle - a_0} + \frac{a_0}{b + \sqrt{b^2 - 1}}, q \left(\frac{\sqrt{b^2 - 1}}{\langle q, \bar{a} \rangle - a_0} + \frac{a_0}{b + \sqrt{b^2 - 1}} - \frac{a_0}{b + \sqrt{b^2 - 1}} \right) + \frac{\bar{a}}{b + \sqrt{b^2 - 1}} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{b^2 - 1}}{\langle q, \bar{a} \rangle - a_0} + \frac{a_0}{b + \sqrt{b^2 - 1}}, \frac{\sqrt{b^2 - 1}}{\langle q, \bar{a} \rangle - a_0} q + \frac{\bar{a}}{b + \sqrt{b^2 - 1}} \right).\end{aligned}$$

Por la expresión anterior, se sigue inmediatamente la inyectividad de G y el codominio de G . 

Corolario 3.4.2 Dada $E(a, b) \in \mathbb{E}_b$, entonces si G denota su aplicación de Gauss-de Sitter, entonces $G^{-1} : \mathbb{S}^n \setminus \{q \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle q, \bar{a} \rangle = a_0\} \rightarrow E(a, b) \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ es dada por

$$G^{-1}(q) = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 1}}{\langle q, \bar{a} \rangle - a_0} + \frac{a_0}{b + \sqrt{b^2 - 1}}, \frac{\sqrt{b^2 - 1}}{\langle q, \bar{a} \rangle - a_0} q + \frac{\bar{a}}{b + \sqrt{b^2 - 1}} \right).$$

3.4.1 Parametrización de $E(a, b)$

Construiremos una carta en el modelo estereográfico para la componente conexa de $E(a, b)$, que tiene frontera en $\partial \mathcal{E}^-$. Dado que $E(a, b)$ es una variedad Riemanniana, esta hipersuperficie debe ser espacial, consideramos $E(a, b) \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ a través de la inmersión dada por la inclusión y con la orientación generada por $\eta(p) = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 1}}(a - bp)$. Podemos reparametrizar, a saber, por $G^{-1} : \mathbb{S}^n \setminus \{q \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle q, \bar{a} \rangle = a_0\} \rightarrow E(a, b)$, así la aplicación de Gauss-de Sitter en estas coordenadas es $\hat{G}(x) = x$, y obtenemos que nuestra nueva orientación es $\hat{\eta} = \eta \circ G^{-1}$. Por consiguiente, podemos usar la fórmula de representación del teorema 4.1 para cubrir $E(a, b)$ con una sola carta.

R La hipersuperficie $E(a, b)$ contiene dos componentes conexas disjuntas, podemos parametrizar estas a partir del siguiente par de cartas

$$\varphi_1 : \mathbb{S}^n \setminus \{q \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle q, \vec{a} \rangle > a_0\} \rightarrow E(a, b) \text{ y } \varphi_2 : \mathbb{S}^n \setminus \{q \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle q, \vec{a} \rangle < a_0\} \rightarrow E(a, b),$$

donde φ_1 y φ_2 son solo la restricciones de G^{-1} en el correspondiente dominio.

Estudiaremos la componente conexa de $E(a, b)$ que tiene frontera en $\partial \mathcal{E}^-$, en esta componente conexa (vista en el modelo $\mathbb{S}_1^{n+1}$), considere una sucesión $(G^{-1}(q_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset E(a, b)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n \in \mathbb{S}^n \setminus \{q \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle q, \vec{a} \rangle = a_0\},$$

en virtud de la expresión de G^{-1} , necesitamos la única parametrización que satisface

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{b^2 - 1}}{\langle q_n, \vec{a} \rangle - a_0} + \frac{a_0}{b + \sqrt{b^2 - 1}} = -\infty,$$

obtenemos que en nuestro par de cartas, φ_1 y φ_2 la única que parametriza dicha componente conexa es

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \mathbb{S}^n \setminus \{q \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle q, \vec{a} \rangle < a_0\} &\rightarrow E(a, b) \\ q &\mapsto G^{-1}(q), \end{aligned}$$

en esta componente al considerar $b > 1$, tenemos orientación hacia el futuro ($\hat{\eta}_0 > 0$), por lo tanto, en el modelo estereográfico podemos construir una carta de dicha componente a partir de (3.5), siendo esta $\Phi_- = L \circ \phi$, donde ϕ es la fórmula de representación de la inmersión φ_2 , dada por el teorema 4.1, así tenemos la carta

$$\begin{aligned} \Phi_- : \mathbb{S}^n \setminus \{q \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle q, \vec{a} \rangle < a_0\} &\rightarrow E(a, b) \subset \mathcal{E}^{n+1} \\ x &\mapsto \Phi_-(x). \end{aligned}$$

R Para ver que $\hat{\eta}_0 > 0$, sobre la componente conexa considerada, usamos el hecho que $\hat{\eta}_0$ no cambia de signo en la componente conexa y que podemos considerar una sucesión $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{S}^n \setminus \{q \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle q, \vec{a} \rangle < a_0\}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{b^2 - 1}}{\langle q_n, \vec{a} \rangle - a_0} + \frac{a_0}{b + \sqrt{b^2 - 1}} = -\infty,$$

y en virtud de

$$\eta_0(G^{-1}(q)) = \frac{a_0 - b \left(\frac{\sqrt{b^2 - 1}}{\langle q, \vec{a} \rangle - a_0} + \frac{a_0}{b + \sqrt{b^2 - 1}} \right)}{\sqrt{b^2 - 1}},$$

obtenemos lo deseado, siempre que $b > 1$, por un simple limite.

Nótese que si $b < -1$, entonces la componente buscada es parametrizada por la carta

$$\begin{aligned} \Phi_+ : \mathbb{S}^n \setminus \{q \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle q, \vec{a} \rangle < a_0\} &\rightarrow E(a, b) \subset \mathcal{E}^{n+1} \\ x &\mapsto \Phi_+(x). \end{aligned}$$

3.4.2 Bolas geodésicas como fronteras

El objetivo en esta sección es estudiar en $\mathbb{S}_1^{n+1}$ la frontera ideal (en infinito) de algunas hipersuperficies espaciales, completas, no compactas y totalmente umbilicas con curvatura media en valor absoluto mayor a 1, vistas en el modelo estereográfico. También estudiaremos inmersiones a través de la fórmula de representación de ciertos dominios abiertos de la esfera cuya frontera es la frontera de una bola geodésica. Explícitamente estudiaremos la inmersión a través de la fórmula dada por A. Roldan en [Rol21] de una variedad riemanianna $(\Omega, e^{2\rho} g_0)$ donde Ω es un abierto de $\mathbb{S}^n$, $\rho \in C^\infty(\Omega \cup \mathcal{V}_1)$ es completa (Definición 3.4.1) y la frontera de Ω tiene dos componentes conexas, disjuntas siendo $\mathcal{V}_1$ una de dichas componentes conexas, tomaremos $\mathcal{V}_1$ como la frontera de alguna bola geodésica de $\mathbb{S}^n$.

Introduciendo un poco de notación. Sean $p, q \in \mathbb{S}^n$ y $r \in (0, \frac{\pi}{2})$, la *bola geodésica de $\mathbb{S}^n$ centrada en p de radio r* es denotada como

$$B_r(p) = \{q \in \mathbb{S}^n : d_{\mathbb{S}^n}(p, q) < r\},$$

donde $d_{\mathbb{S}^n}(p, q)$ es la distancia entre p y q en $(\mathbb{S}^n, g_0)$. Similarmente, para $p \in \partial \mathcal{E}^-$ y $r \in (0, \frac{(\sqrt{2}-1)\pi}{2})$, la *bola geodésica de $\partial \mathcal{E}^-$ centrada en p de radio r* es

$$E_r^-(p) = \left\{ q \in \mathbb{S}^n \left(\sqrt{2} - 1 \right) : d_{\mathbb{S}^n(\sqrt{2}-1)}(p, q) < r \right\},$$

donde $d_{\mathbb{S}^n(\sqrt{2}-1)}(p, q)$ es la función distancia en la n -esfera de radio $\sqrt{2} - 1$.

Uno de los principales objetivos de esta sección es probar que para $b \in \mathbb{R}$, fijo, donde $b^2 > 1$, cada elemento $E(a, b)$ de la familia de hipersuperficies $\mathbb{E}_b$, tiene asociada una bola geodésica $E_r^-(p) \subset \partial \mathcal{E}^-$ de manera biunívoca. La asociación satisface en el modelo estereográfico $\partial E_r^-(p) = \partial_\infty E(a, b)$.

Antes de presentar el resultado mencionado, se presentan algunos resultados previos y necesarios para facilitar la prueba.

Lema 3.4.3 Sea $E(a, b)$ una hipersuperficie espacial y totalmente umbilica tal que $|H| > 1$ con aplicación Gauss-de Sitter G . Entonces G un difeomorfismo; más aún, si e^ρ es la función de soporte de la inmersión ϕ dada por el teorema 4.3, entonces $\sigma = e^{-\rho}$ esta dada por,

$$\sigma(q) = \frac{\langle q, \bar{a} \rangle - a_0}{b + \sqrt{b^2 - 1}}. \quad (3.7)$$

Demostración. Un campo normal unitario $\eta : E(a, b) \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$, es

$$\eta(p) = \frac{a - bp}{\sqrt{b^2 - 1}}.$$

Un calculo directo muestra que sí G es la aplicación de Gauss-de Sitter, entonces $G^{-1} : \mathbb{S}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, \bar{a} \rangle = a_0\} \rightarrow E(a, b)$ esta dada por,

$$G^{-1}(q) = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 1}}{\langle q, \bar{a} \rangle - a_0} + \frac{a_0}{b + \sqrt{b^2 - 1}}, \frac{\sqrt{b^2 - 1}}{\langle q, \bar{a} \rangle - a_0} q + \frac{\bar{a}}{b + \sqrt{b^2 - 1}} \right),$$

donde $q \in \mathbb{S}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, \bar{a} \rangle = a_0\}$. Dado que

$$\psi(p) = \phi(p) - \eta(p) = p - \frac{a - bp}{\sqrt{b^2 - 1}} = \left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - 1}} \right) p - \frac{a}{\sqrt{b^2 - 1}},$$

se obtiene que en la fórmula de representación en $\mathcal{E}$ la aplicación σ asociada es

$$\begin{aligned}\sigma(q) &= ((\psi_0 \circ G^{-1})(q))^{-1} \\ &= \left(\left(1 + \frac{b}{\sqrt{b^2 - 1}} \right) \left(\frac{\sqrt{b^2 - 1}}{\langle q, \bar{a} \rangle - a_0} + \frac{a_0}{b + \sqrt{b^2 - 1}} \right) - \frac{a_0}{\sqrt{b^2 - 1}} \right)^{-1} \\ &= \frac{\langle q, \bar{a} \rangle - a_0}{b + \sqrt{b^2 - 1}}.\end{aligned}$$



Obsérvese que σ se extiende de manera suave a a todo $\mathbb{S}^n$ usando la misma expresión algebraica, la cual es lineal.

Lema 3.4.4 Sí la intersección de la esfera $\partial\mathcal{E}^-$ y el plano

$$\Pi = \{q \in \mathbb{R}^n : \langle q, \bar{a} \rangle = -a_0(\sqrt{2} - 1)\},$$

es la frontera de una bola geodésica, entonces el centro p y radio r de dicha bola satisfacen

$$p = - \left(\operatorname{sgn}(a_0) \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{a_0^2 + 1}} \right) \bar{a} \text{ y } |a_0| = \cot((1 + \sqrt{2})r). \quad (3.8)$$

Demostración. Se determinará el centro p y el radio r de dicha bola. Note que la recta $t\bar{a}$ en algún instante t pasa por p , esto ocurre cuando $t^2|\bar{a}|^2 = (\sqrt{2} - 1)^2$, es decir, $t = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{a_0^2+1}}$.

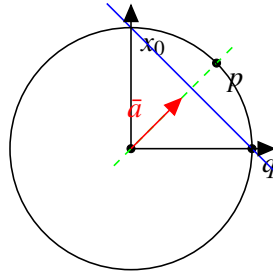


Figura 3.4: Representación de p en la n -esfera $\partial\mathcal{E}^-$ y el plano Π en azul.

Entonces $p = \left(-\operatorname{sgn}(a_0) \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{a_0^2+1}} \right) \bar{a}$. Por otra parte, para calcular el radio r , sea $\gamma(t)$, la geodésica de $\partial\mathcal{E}^-$ que minimiza la distancia de p a $q \in \partial B(r, p)$, ver figura 3.4. Necesariamente dicha geodésica es de la forma,

$$\gamma(t) = \left(-\operatorname{sgn}(a_0) \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{a_0^2+1}} \right) \bar{a} \cos((\sqrt{2}+1)t) + v \sin((\sqrt{2}+1)t),$$

así, tomando el producto interno $\langle \gamma(r), \bar{a} \rangle = -a_0(\sqrt{2} - 1)$. Por lo tanto,

$$\operatorname{sgn}(a_0) \frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{a_0^2+1}} \cos((\sqrt{2}+1)r) \langle \bar{a}, \bar{a} \rangle = a_0(\sqrt{2}-1),$$

equivalentemente,

$$\operatorname{sgn}(a_0) \sqrt{1 + a_0^2} \cos((\sqrt{2} + 1)r) = a_0.$$

En consecuencia

$$a_0^2 = \cot^2((\sqrt{2} + 1)r),$$

despejando, $|a_0| = \cot((\sqrt{2} + 1)r)$.



El siguiente resultado establecerá cuando dos elementos de $\mathbb{E}_b$ tienen la misma frontera ideal en $\partial\mathcal{E}^-$. Garantizaremos que dada $E(a, b)$ solo existe otra hipersuperficie distinta en $\mathbb{E}_b$ con la misma frontera, a saber, dicha hipersuperficie será $E(-a, b)$.

Lema 3.4.5 $E(a, b)$ y $E(c, b)$ tienen la misma frontera ideal en $\partial\mathcal{E}^-$ si, y solo si, $a = \pm c$.

Demostración. Sea $E(a, b)$ en las condiciones consideradas (b fijo y $b^2 > 1$), entonces por el lema 3.4.3 la componente conexa con frontera en $\partial\mathcal{E}^-$ de la hipersuperficie $E(a, b)$ se obtiene como una inmersión de la forma $\Phi_- : U \subset \mathbb{S}^n \rightarrow \mathcal{E}$ o $\Phi_+ : U \subset \mathbb{S}^n \rightarrow \mathcal{E}$ dadas por la expresión (3.5), (3.4) respectivamente, donde la función σ en esta expresión se extiende de manera suave a todo $\mathbb{S}^n$ como una función lineal. Estudiaremos la frontera ideal de $E(a, b)$. Un calculo directo muestra que si $x_0 \in \partial U = \partial(\mathbb{S}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \bar{a} \rangle = a_0\})$ entonces

$$\sigma(x_0) = 0 \text{ y } \|\nabla \sigma(x_0)\|^2 = \left(\frac{1}{b + \sqrt{b^2 - 1}} \right)^2 < 1.$$

Nuevamente un calculo directo, usando la expresión (3.5) o (3.4) para Φ_- , Φ_+ , respectivamente, según sea el caso, muestra que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \Phi_-(x) = -(\sqrt{2} - 1)x_0 \in \partial\mathcal{E}^- \text{ o } \lim_{x \rightarrow x_0} \Phi_+(x) = (\sqrt{2} - 1)x_0 \in \partial\mathcal{E}^-$$

En conclusión $\partial_\infty E(a, b) \cap \partial\mathcal{E}$ es la frontera de una bola geodésica. Analizaremos primero el caso cuando $b > 1$, así tenemos la parametrización de nuestra componente dada por $\Phi_- : U \rightarrow E(a, b)$, donde

$$U = \{x : \langle x, \bar{a} \rangle < a_0\}$$

$$\partial U = \mathbb{S}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, \bar{a} \rangle = a_0\}.$$

Note que, $\lim_{x \rightarrow x_0} \Phi_-(x) \in \partial\mathcal{E}^-$ si y solo si

$$\langle x_0, \bar{a} \rangle = a_0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow x_0} \Phi_-(x) = -(\sqrt{2} - 1)x_0.$$

Dado que $E(a, b)$ y $E(c, b)$ tienen la misma frontera, se tiene

$$\{x_0 \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x_0, \bar{a} \rangle = a_0\} = \{x_0 \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x_0, \bar{c} \rangle = c_0\}, \quad (3.9)$$

por lo tanto, calculando la distancia al origen del hiperplano anterior, debe tenerse $\frac{|a_0|}{|\bar{a}|} = \frac{|c_0|}{|\bar{c}|}$. Por consiguiente, (considerando $a_0 \neq 0$)

$$\frac{a_0^2}{1 + a_0^2} = \frac{c_0^2}{1 + c_0^2} \text{ y } \frac{\bar{a}}{a_0} = \frac{\bar{c}}{c_0} \text{ o } \frac{\bar{a}}{a_0} = -\frac{\bar{c}}{c_0}, \quad (3.10)$$

de donde $a_0^2 = c_0^2$. La última igualdad y (3.10) nos lleva a $a = c$ o $a = -c$. En el caso $a_0 = 0$ de (3.9) concluimos $\bar{a} = \bar{c}$ o $\bar{a} = -\bar{c}$, lo que completa la prueba. El caso $b < -1$, se sigue de un argumento similar, considerando ahora la parametrización $\Phi_+ : U \rightarrow E(a, b)$, donde

$$U = \{x : \langle x, \bar{a} \rangle < a_0\}$$

$$\partial U = \mathbb{S}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, \bar{a} \rangle = a_0\}.$$

y observando que $\lim_{x \rightarrow x_0} \Phi_+(x) \in \partial\mathcal{E}^-$ si y solo si

$$\langle x_0, \bar{a} \rangle = a_0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow x_0} \Phi_+(x) = (\sqrt{2} - 1)x_0.$$



Estamos listos para probar el siguiente resultado que identifica cierta familia de hipersuperficies, espaciales y totalmente umbílicas con bolas geodésicas en $\partial \mathcal{E}^-$ a través de la frontera de estas en el modelo estereográfico.

Proposición 3.4.6 $\partial_\infty E(a, b) \cap \partial \mathcal{E}^-$ es la frontera de una bola geodésica $E_r^-(p)$, donde

$$p = - \left(\frac{\text{sgn}(a_0)(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{a_0^2 + 1}} \right) \bar{a} \text{ y } r \in \left(0, \frac{(\sqrt{2} - 1)\pi}{2} \right) \text{ satisface } \cot((\sqrt{2} + 1)r) = |a_0|.$$

Recíprocamente, la frontera de una bola geodésica $\partial E_r^-(p) \subset \partial \mathcal{E}^-$ tiene asociada una única hipersuperficie $E(a, b)$, tal que $\partial_\infty E(a, b) \cap \partial \mathcal{E}^- = \partial E_r^-(p)$, siempre que se considere fijo el parámetro b .

Demostración. Sea $E(a, b)$ en las condiciones consideradas (b fijo y $b^2 > 1$), apoyándose en los argumentos de la prueba del lema anterior, la frontera en $\partial \mathcal{E}^-$ de $E(a, b)$ es

$$\left\{ q \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle q, \bar{a} \rangle = -a_0(\sqrt{2} - 1) \right\} \cap \partial \mathcal{E}^-.$$

Por el lema 3.8, se sigue que el centro p radio r de la bola geodésica satisface

$$p = - \left(\frac{\text{sgn}(a_0)(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{a_0^2 + 1}} \right) \bar{a} \text{ y } r \in \left(0, \frac{(\sqrt{2} - 1)\pi}{2} \right) \text{ satisface } \cot((\sqrt{2} + 1)r) = |a_0|.$$

Recíprocamente, considere $b \in \mathbb{R}$ fijo satisfaciendo $b^2 > 1$ y la bola geodésica $E_r^-(p)$ en $\partial \mathcal{E}^-$, donde $r \in \left(0, \frac{(\sqrt{2} - 1)\pi}{2} \right)$, entonces

$$a = \left(\cot((\sqrt{2} + 1)r), (\sqrt{2} + 1) \left(\sqrt{\cot((\sqrt{2} + 1)r)^2 + 1} \right) p \right).$$

Sí $r \in \left[\frac{(\sqrt{2} - 1)\pi}{2}, (\sqrt{2} - 1)\pi \right)$ entonces

$$a = \left(-\cot((\sqrt{2} + 1)r), -(\sqrt{2} + 1) \left(\sqrt{\cot((\sqrt{2} + 1)r)^2 + 1} \right) p \right).$$

Un calculo directo muestra que en ambos casos $\langle a, a \rangle = 1$ y $\partial_\infty E(a, b) \cap \partial \mathcal{E}^- = \partial E_r^-(p)$. Notese $E(a, b)$ y $E(c, b)$ tienen la misma frontera ideal si y solo si $a = -c$.



En resumen, fijado b y dados p y r sabemos que existe a tal que el borde en $\partial \mathcal{E}^-$ de $E(a, b)$ es la frontera de la bola geodésica con centro en p y radio r .

3.4.3 Inmersando dominios cuya frontera es la frontera de una bola geodésica

A continuación, el objetivo es analizar ciertas inmersiones de variedades riemannianas ambientadas en abiertos de la esfera bajo la fórmula de representación local de hipersuperficies espaciales. Dichas variedades a inmersar tendrán métrica completa en el siguiente sentido.

Definición 3.4.1 Sea $\Omega \subset \mathbb{S}^n$ un dominio abierto tal que $\partial \Omega = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$, donde $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$ son subvariedades disjuntas. Se dice que una métrica $g = e^{2\rho} g_0$, $\rho \in C^\infty(\Omega \cup \mathcal{V}_1)$ es completa si dada una curva divergente $\gamma: [0, 1) \rightarrow \Omega$, entonces se da solo uno de los siguientes casos

1. $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) \in \mathcal{V}_1$ y $\int_0^1 |\dot{\gamma}'(t)|_g dt < \infty$, o
2. $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) \in \mathcal{V}_2$ y $\int_0^1 |\dot{\gamma}'(t)|_g dt = \infty$.

Considere $\Omega \subset \mathbb{S}^n$ un dominio abierto tal que $\partial\Omega = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$, donde $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$ son subvariedades disjuntas y una métrica $g = e^{2\rho} g_0$, $\rho \in C^\infty(\Omega \cup \mathcal{V}_1)$ completa, tales que $\Omega \cup \mathcal{V}_1 \subset \overline{B_r(p)}$ y $\partial B_r(p) \subset \mathcal{V}_1$. Denote por $h(g)$ la curvatura media de $\partial B_r(p)$ con respecto a g .

Proposición 3.4.7 Bajo las condiciones anteriores, asumiendo que $\mathcal{V}_1$ contiene la frontera de una bola geodésica $\partial B_r(p)$, $p \in \mathbb{S}^n$, $r \in (0, \pi)$ y $h(g) = c = cte$, con $c^2 > 1$, a lo largo de $\partial B_r(p)$, entonces $\pm\phi(\partial B_r(p)) \subset E(a, \pm c)$, donde $E(a, \pm c)$ es la hipersuperficie espacial totalmente umbilical dada por

$$E(a, \pm c) = \{x \in \mathbb{S}_1^{n+1} : \langle \langle x, a \rangle \rangle = \pm c\} \text{ y } a = \left(\cot(r), \frac{1}{\sin(r)} p \right).$$

Demostración. Sea ∇^g la conexión Levi-Civita asociada a g . Considere el vector normal a lo largo de la variedad riemanniana $(\partial B_r(p), g_0)$ dado por

$$\eta(x) = \csc(r)p - \cot(r)x, \quad x \in \partial B_r(p). \quad (3.11)$$

A partir de (3.11), tenemos $h(g_0) = \cot(r)$.

Para $x \in \partial B_r(p)$, el vector $a = h(g_0)(1, x) + (0, \eta(x))$ es un vector espacial constante (no depende de x) como se ve a continuación.

$$a = h(g_0)(1, x) + (0, \eta(x)) = \cot(r)(1, x) - (0, \csc(r)p - \cot(r)x) = \left(\cot(r), \frac{1}{\sin(r)} p \right).$$

Donde $\langle \langle a, a \rangle \rangle = -\cot^2(r) + \csc^2(r)\langle p, p \rangle = \csc^2(r) - \cot^2(r) = 1$.

Vamos a demostrar que $\langle \langle \pm\phi(x), a \rangle \rangle = \pm c$.

El campo $e^{-\rho}\eta$ es normal unitario a lo largo de la variedad riemanniana $(\partial B_r(p), g)$. Sí se toma $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$ una base ortonormal de $T_x \partial B_r(p)$ con respecto a la métrica g_0 . Denotando por $\nabla^{g_0}\rho$ el gradiente respecto a la métrica g_0 y por $h(g_0)$ la curvatura media respecto a g_0 , se sigue que en el punto $x \in \partial B_r(p)$.

$$\begin{aligned} h(g) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} g(-\nabla_{e^{-\rho}e_i}^g(e^{-\rho}\eta), e^{-\rho}e_i) \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} g_0(-\nabla_{e_i}^g(e^{-\rho}\eta), e_i) \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} g_0(-e^{-\rho}\nabla_{e_i}^g\eta + d\rho(e_i)e^{-\rho}\eta, e_i) \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} e^{-\rho} g_0(-\nabla_{e_i}^{g_0}\eta - g_0(e_i, \nabla^{g_0}\rho)\eta - g_0(\eta, \nabla^{g_0}\rho)e_i + g_0(e_i, \eta)\nabla^{g_0}\rho, e_i) \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (e^{-\rho} g_0(-\nabla_{e_i}^{g_0}\eta, e_i) - g_0(e^{-\rho}\eta, \nabla^{g_0}\rho)) \\ &= e^{-\rho} h(g_0) - g_0(\eta, e^{-\rho}\nabla^{g_0}\rho). \end{aligned}$$

De esta última expresión para la curvatura media $h(g)$ se concluye que:

$$\begin{aligned}
\langle \langle \pm \phi(x), a \rangle \rangle &= \langle \langle \pm \phi(x), h(g_0)(1, x) + (0, \eta(x)) \rangle \rangle \\
&= -h(g_0)e^{-\rho} + g_0(e^{-\rho} \nabla^{g_0} \rho, \eta(x)) \\
&= -h(g) \\
&= \pm c,
\end{aligned}$$

lo que finaliza la prueba. 

Proposición 3.4.8 El ángulo¹ entre $E(a, \pm c)$ y $\pm \phi(\Omega)$ a lo largo de $\pm \phi(\partial B_r(p))$ es constante.

Demostración. Trabajando en el modelo del hiperboloide, se sabe que un campo normal esta dado por, $N : E(a, \pm c) \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$, definida como

$$N(y) = \frac{a - (\pm c)y}{\sqrt{b^2 - 1}},$$

y un campo normal unitario para $\pm \phi(\Omega)$ es

$$\eta(y) = \pm \phi(y) - e^{\rho(y)}(1, y).$$

Entonces, para $x \in \partial B_r(p)$

$$\begin{aligned}
\langle \langle N(\pm \phi(x)), \eta(x) \rangle \rangle &= \langle \langle \frac{a - c\phi(x)}{\sqrt{b^2 - 1}}, \pm \phi(x) \pm e^{\rho(x)}(1, x) \rangle \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{b^2 - 1}} \langle \langle a, \pm \phi(x) \pm e^{\rho(x)}(1, x) \rangle \rangle \\
&= \frac{\pm c}{\sqrt{b^2 - 1}} + e^{\rho(x)} \langle \langle a, (1, x) \rangle \rangle \\
&= \frac{\pm c}{\sqrt{b^2 - 1}}.
\end{aligned}$$



Para ilustrar lo obtenido en en los dos últimos resultados podemos considerar $\mathbb{S}^2$ la esfera unitaria centrada en el origen de $\mathbb{R}^3$ y $\Omega = B_{\frac{\pi}{2}}(0, 0, 1) \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : 0 < z < \frac{1}{2}\}$, $\mathcal{V}_1$ es el ecuador de la esfera y $\rho = \ln \frac{1}{4(z - \frac{1}{2})^2} + \frac{69}{50}$. Notese que la métrica $e^{2\rho} g_0$ es completa sobre $\Omega \cup \mathcal{V}_1$ y $(\Omega, e^{2\rho} g_0)$ no es compacta ni acotada. Por las proposiciones anteriores bajo la fórmula de representación $-\phi(\mathcal{V}_1)$ esta sobre la hipersuperficie umbilica $E(a, 4e^{-\frac{69}{50}})$, donde $a = (0, 0, 0, 1)$. En la siguiente figura representamos $-\phi(\Omega)$ en color morado y $E(a, 4e^{-\frac{69}{50}})$ en amarillo, vistas en el modelo estereográfico.

¹Ángulo constante es en sentido figurado, se refiere que el producto de los vectores normales de $E(a, \pm c)$ y $\pm \phi(\Omega)$ en la forma bilineal $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ es constante sobre $\pm \phi(\partial B_r(p))$.

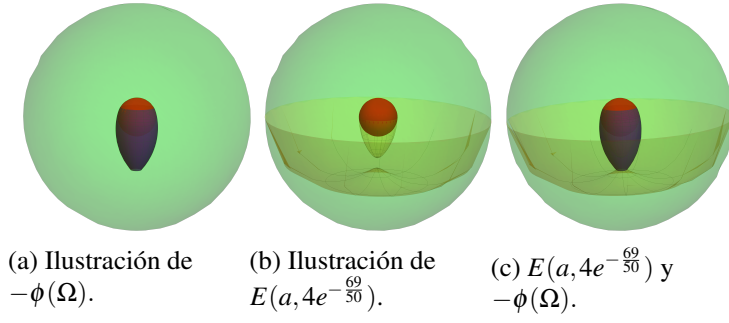
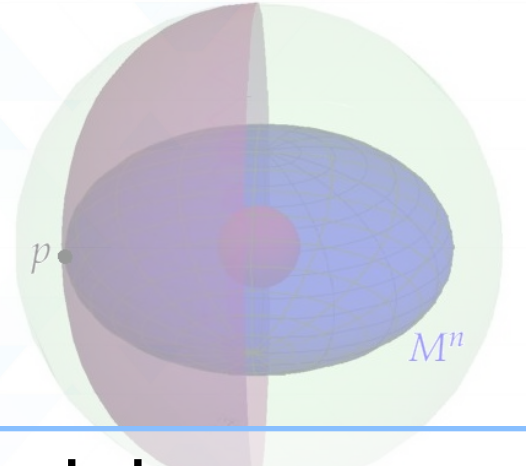


Figura 3.5: Representación de un caso particular de las proposiciones 3.4.7 y 3.4.8.



4. Hipersuperficies propiamente inmersas

El objetivo de este capítulo es estudiar el comportamiento en infinito de las hipersuperficies espaciales no compactas, completas y propiamente encajadas en el espacio de de Sitter, a través del modelo estereográfico; en particular, se probará que estas hipersuperficies espaciales son tangentes a la frontera ideal $\partial\mathcal{E}$. También analizaremos la existencia de una hipersuperficie espacial (conexa) no compacta con aplicación de Gauss-de Sitter inyectiva que alcance las dos componentes de la frontera $\partial\mathcal{E}$. Para este estudio se caracterizarán las inmersiones propias dadas por la fórmula que representación local de hipersuperficies espaciales de $\mathbb{S}_1^{n+1}$ dada por A. Roldan en [Rol21].

4.1 Propiedad de la fórmula de representación

Dados un subdominio abierto y conexo de la esfera $\Omega \subseteq \mathbb{S}^n$ y una función suave $\rho \in C^\infty(\Omega)$, estudiaremos el “comportamiento en infinito” de las inmersiones $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$, dadas por

$$\phi = \pm \left(\frac{e^\rho}{2} (1 - e^{-2\rho} (1 + \|\nabla^{g_0} \rho\|_{g_0}^2)) (1, x) - e^{-\rho} (0, -x + \nabla^{g_0} \rho) \right). \quad (4.1)$$

Más explícitamente, el problema de interés es encontrar condiciones sobre la aplicación ρ tal que las inmersiones dadas en (4.1) definan una inmersión propia de $(\Omega, e^\rho g_0)$ en $(\mathbb{S}_1^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Las correspondientes inmersiones en el modelo estereográfico $\mathcal{E}$ se obtienen realizando la composición con el difeomorfismo $L : \mathbb{S}_1^{n+1} \rightarrow \mathcal{E}$. Se obtiene una orientación hacia el futuro, en el modelo estereográfico, a través de la aplicación $\Phi_+(x) = L(\phi(x)) : \Omega \rightarrow \mathcal{E}$, dada por

$$\Phi_+(x) = \frac{(1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|_{g_0}^2) x + 2\sigma^2 x + 2\sigma \nabla^{g_0} \sigma}{\sqrt{2} \sqrt{2\sigma^2 + (1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|_{g_0}^2)^2 - (1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|_{g_0}^2)}}, \quad (4.2)$$

donde $e^{-\rho} = \sigma$. Análogamente, se obtiene una orientación hacia el pasado

$$\Phi_-(x) = - \frac{(1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|_{g_0}^2) x + 2\sigma^2 x + 2\sigma \nabla^{g_0} \sigma}{\sqrt{2} \sqrt{2\sigma^2 + (1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|_{g_0}^2)^2 + (1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|_{g_0}^2)}}. \quad (4.3)$$

R Estudiaremos solamente el caso en que la orientación de la inmersión apunta hacia el futuro. Esto es debido a que $\Phi_+(U) = -\Phi_-(U)$ y el paso de una orientación a otra se obtiene componiendo con la isometría del modelo estereográfico $\zeta(x) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, donde $\zeta(x) = -x$. Luego, en adelante denotaremos por $\Phi : \Omega \rightarrow \mathcal{E}$ la orientación hacia el futuro, es decir $\Phi(x) := \Phi_+(x)$.

A partir de este punto del trabajo, $\Omega \subset \mathbb{S}^n$ denotará un conjunto abierto y conexo de la esfera $\mathbb{S}^n$. El primer problema que se afrontará consiste en determinar condiciones suficientes sobre la función $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ de tal forma que la inmersión $\Phi : \Omega \rightarrow \mathcal{E}$ determine una hipersuperficie completa propiamente inmersa.

Consideraremos el espacio,

$$\mathcal{F}(\Omega) = \left\{ \sigma \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^+) : \forall x_0 \in \partial\Omega \exists L \in \mathbb{R} \text{ tal que } \lim_{x \rightarrow x_0} |\sigma|_{1,\infty}^2(x) = L \neq 1 \right\},$$

donde $|\sigma|_{1,\infty}^2(x) = \sigma^2(x) + \|\nabla^{g_0} \sigma(x)\|_{g_0}^2$ para $x \in \Omega$.

Definición 4.1.1 Sean X, Y dos espacios topológicos y $\phi : X \rightarrow Y$ una aplicación continua. ϕ se dice propia, si para cada subconjunto compacto $K \subset Y$, el conjunto $\phi^{-1}(K) \subset X$ es compacto en X .

Por lo tanto, estudiar el problema inicial equivale a estudiar condiciones sobre la función $\sigma : \Omega \subseteq \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ con el objetivo de que la aplicación $\Phi : \Omega \rightarrow \mathcal{E}$ sea propia.

Lema 4.1.1 Sea $\phi : \Omega \subset \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$ una hipersuperficie inmersa, completa y no compacta. Entonces la hipersuperficie esta propiamente inmersa si, y solo si, para cada $x_0 \in \partial\Omega$, se tiene $\lim_{x \rightarrow x_0} |\phi_0(x)| = \infty$.

Demostración. Procedamos por contradicción. Sea $x_0 \in \partial\Omega$ y $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \Omega$ una sucesión, que verifica $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ y $|\phi_0(x_n)| < C$ para alguna constante $C > 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere el siguiente conjunto compacto de $\phi(M)$, a saber

$$K = \{x \in \mathbb{S}^{n+1} : |x_0| \leq C\} \cap \phi(M).$$

Dado que ϕ es propia, el conjunto $\phi^{-1}(K)$ es un compacto en Ω que contiene a la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Por lo tanto, $x_0 \in \Omega$, lo que es absurdo, pues $\Omega \cap \partial\Omega = \emptyset$.

Recíprocamente, sea $K \subset \mathbb{S}_1^{n+1}$ un compacto y considere el conjunto cerrado $\phi^{-1}(K) \subset \Omega$. Veamos que dicho conjunto es también acotado. Razonando por absurdo, si $\phi^{-1}(K)$ no es acotado dentro de Ω , entonces

$$d_{\mathbb{S}^n}(\phi^{-1}(K), \partial\Omega) = \inf\{d_{\mathbb{S}^n}(x, x_0) : x_0 \in \partial\Omega \text{ y } x \in \phi^{-1}(K)\} = 0.$$

Luego existe $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ tal que $x_n \rightarrow x_0 \in \partial\Omega$ y $x_n \in \phi^{-1}(K)$, por consiguiente $\phi(x_n) \in K$ lo que es absurdo, pues $\lim_{x \rightarrow x_0} |\phi_0(x)| = \infty$. 

Las dos proposiciones siguientes caracterizan la situación de cuando $\Phi : \Omega \rightarrow \mathcal{E}$ define una hipersuperficie completa y propia, siempre que $\sigma \in \mathcal{F}(\Omega)$.

Proposición 4.1.2 Sea $\sigma \in \mathcal{F}(\Omega)$. Entonces la fórmula de representación Φ asociada a σ es propia si, y solo si, para cada $x_0 \in \partial\Omega$, se tiene $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma(x) = 0$.

Demostración. $[\Rightarrow]$ Supongamos que $\limsup_{x \rightarrow x_0} \sigma(x) = c > 0$ con el ánimo de obtener una contradicción. Considere una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(x_n) = c$. Dado que la inmersión es propia, entonces para cada $x_0 \in \partial\Omega$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} |\phi_0(x_n)| = \infty$, por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e^{\rho(x_n)}}{2} (1 - e^{-2\rho(x_n)} (1 + \|\nabla^{g_0} \rho(x_n)\|_{g_0}^2)) \right| = \infty,$$

igualdad que podemos reescribir en términos de σ , teniendo en cuenta que $\rho = -\ln(\sigma)$, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sigma(x_n)} |1 - \sigma(x_n)^2 (1 + \|\sigma(x_n)^{-1} \nabla^{g_0} \sigma(x_n)\|_{g_0}^2)| = \infty.$$

Así, tomado el inverso multiplicativo se concluye que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(x_n)}{1 - (\sigma(x_n)^2 + \|\nabla^{g_0} \sigma(x_n)\|_{g_0}^2)} = \frac{c}{1 - \lim_{x \rightarrow x_0} (\sigma(x)^2 + \|\nabla^{g_0} \sigma(x)\|_{g_0}^2)} = 0,$$

lo cual es una contradicción ya que $c > 0$.

En conclusión $\limsup_{x \rightarrow x_0} \sigma(x) = 0$, y dado que σ es no negativa, se obtiene que $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma(x) = 0$.

Antes de analizar el argumento recíproco, observe que

Dado que existe $M > 0$, tal que $\|\nabla^{g_0} \sigma(x)\|^2 + \sigma(x)^2 < M$, siempre que $x \in B_\varepsilon(x_0)$, para algún $\varepsilon > 0$, se sigue

$$\frac{M+1}{\sigma(x)} > \frac{1 - \sigma^2(x) - \|\nabla^{g_0} \sigma(x)\|_{g_0}^2}{\sigma(x)} > \frac{-M+1}{\sigma(x)}, \text{ siempre que } x \in B_\varepsilon(x_0). \quad (4.4)$$

$[\Leftarrow]$. **Caso 1:** $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma(x) = 0$ y $0 < M < 1$,

Note que por (4.4) tenemos $\frac{\sigma(x)}{1-M} > \frac{\sigma(x)}{1 - \sigma^2(x) - \|\nabla^{g_0} \sigma(x)\|_{g_0}^2} > 0$, por el teorema de intercalación $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sigma(x)}{1 - \sigma^2(x) - \|\nabla^{g_0} \sigma(x)\|_{g_0}^2} = 0$, lo que inmediatamente implica $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_0(x) = \infty$.

Caso 2: $\lim_{x \rightarrow x_0} \sigma(x) = 0$ y $M > 1$,

Note que por (4.4), se tiene $\frac{\sigma(x)}{M+1} < \frac{\sigma(x)}{1 - \sigma^2(x) - \|\nabla^{g_0} \sigma(x)\|_{g_0}^2} < 0$, por el teorema de intercalación $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sigma(x)}{1 - \sigma^2(x) - \|\nabla^{g_0} \sigma(x)\|_{g_0}^2} = 0$, lo que inmediatamente implica $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi_0(x) = -\infty$.

Todo lo anterior junto con el lema anterior completa la prueba.



Proposición 4.1.3 Sean $\Omega \subset \mathbb{S}^n$ un conjunto abierto y conexo $\sigma \in \mathcal{F}(\Omega)$ una aplicación no negativa, tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\sigma(x)^2 + \|\nabla^{g_0} \sigma(x)\|_{g_0}^2) = \infty, \text{ para algun } x_0 \in \partial\Omega.$$

Entonces Φ es propia.

Demostración. Considere en la fórmula (4.3) $\phi = (\phi_0, \bar{\phi})$ en $\mathbb{S}_1^{n+1}$, basta con ver que $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi_0(x) = -\infty$. En efecto, en términos de la función σ asociada al modelo estereográfico $\mathcal{E}$, se sigue

$$\phi_0(x) = \frac{1}{2\sigma(x)} (1 - \sigma(x)^2 - \|\nabla^{g_0}\sigma(x)\|_{g_0}^2).$$

Se puede encontrar un ángulo agudo $\theta(x)$, para un triángulo rectángulo con catetos de medida $\sigma(x)$, $\|\nabla^{g_0}\sigma(x)\|_{g_0}$ e hipotenusa $r(x) = \sqrt{\sigma(x)^2 + \|\nabla^{g_0}\sigma(x)\|_{g_0}^2}$, observe la figura

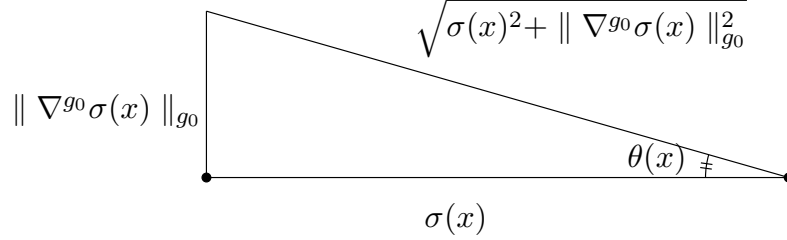


Figura 4.1: Interpretación geométrica del ángulo $\theta(x)$.

Haciendo la sustitución $\sigma(x) = r(x) \cos(\theta(x))$ y $\|\nabla^{g_0}\sigma(x)\|_{g_0} = r(x) \sin(\theta(x))$, donde $\cos(\theta(x)) > 0$, así

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \phi_0(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2r \cos(\theta)} (1 - r^2) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sec(\theta) \left(\frac{1}{r} - r \right) = -\infty.$$

R La conclusión del límite anterior se consigue gracias a que $\sec(\theta(x))$ es mayor a 1.



A continuación, apoyándose en el modelo estereográfico, se analizará el límite al cual se converge en la frontera ideal $\partial \mathcal{E}$ de la hipersuperficie propiamente inmersa y completa $\Phi : \Omega \rightarrow \mathcal{E}$.

Definición 4.1.2 Sea $\Phi : M \rightarrow \mathcal{E}$ una hipersuperficie espacial y propiamente inmersa, definimos su frontera ideal o en infinito, como $\partial \mathcal{E} \cap \Phi(M)$.

La siguiente proposición nos muestra que topológicamente la frontera ideal conserva propiedades analogas a $\partial \Omega$, siempre que $\sigma \in \mathcal{F}(\Omega)$.

Proposición 4.1.4 Sean $\sigma \in \mathcal{F}(\Omega)$. Entonces, $\lim_{x \rightarrow x_0} \Phi(x)$ existe y $\lim_{x \rightarrow x_0} \Phi(x) \in \partial \mathcal{E}$. Y si en alguna vecindad alrededor de x_0 de la forma $B_\delta(x_0) \cap \Omega$ se satisface $\|\nabla^{g_0}\sigma(x)\|_{g_0}^2 < 1$ o $\|\nabla^{g_0}\sigma(x)\|_{g_0}^2 > 1$, bajo las condiciones anteriores sobre $\nabla^{g_0}\sigma(x)$, se sigue respectivamente.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \Phi(x) = (\sqrt{2} + 1)x_0 \text{ o } \lim_{x \rightarrow x_0} \Phi(x) = (\sqrt{2} - 1)x_0.$$

Demostración. Supongamos que existe una vecindad $B_\delta(x_0) \cap \Omega$ tal que si $x \in B_\delta(x_0) \cap \Omega$ entonces $\|\nabla^{g_0}\sigma(x)\|_{g_0}^2 < 1$. Luego para $x \in B_\delta(x_0) \cap \Omega$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left| \Phi(x) - (\sqrt{2} + 1)x_0 \right| &= \left| \frac{(1 - \sigma^2(x) - \|\nabla^{g_0} \sigma(x)\|_{g_0}^2)^2 x + 2\sigma^2 x + 2\sigma \nabla^{g_0} \sigma}{\left(\sqrt{2} \sqrt{2\sigma^2 + (1 - \sigma(x)^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma(x)\|_{g_0}^2)^2} - (1 - \sigma(x)^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma(x)\|_{g_0}^2) \right)^2} - (\sqrt{2} + 1)x_0 \right| \\
&= \left| \frac{x + \frac{2\sigma^2}{(1 - \sigma^2(x) - \|\nabla^{g_0} \sigma(x)\|_{g_0}^2)^2} x + \frac{2\sigma \nabla^{g_0} \sigma}{(1 - \sigma^2(x) - \|\nabla^{g_0} \sigma(x)\|_{g_0}^2)^2}}{\sqrt{2} \sqrt{2 \frac{\sigma^2}{(1 - \sigma^2(x) - \|\nabla^{g_0} \sigma(x)\|_{g_0}^2)^2} + 1} - 1} - (\sqrt{2} + 1)x_0 \right| \\
&\leq \left| \frac{x}{\sqrt{2} \sqrt{2 \frac{\sigma^2}{(1 - \sigma^2(x) - \|\nabla^{g_0} \sigma(x)\|_{g_0}^2)^2} + 1} - 1} - (\sqrt{2} + 1)x_0 \right| + \left| \frac{\frac{2\sigma \nabla^{g_0} \sigma}{(1 - \sigma^2(x) - \|\nabla^{g_0} \sigma(x)\|_{g_0}^2)^2}}{\sqrt{2} \sqrt{2 \frac{\sigma^2}{(1 - \sigma^2(x) - \|\nabla^{g_0} \sigma(x)\|_{g_0}^2)^2} + 1} - 1} \right| \\
&\quad + \left| \frac{\frac{2\sigma^2}{(1 - \sigma^2(x) - \|\nabla^{g_0} \sigma(x)\|_{g_0}^2)^2} x}{\sqrt{2} \sqrt{2 \frac{\sigma^2}{(1 - \sigma^2(x) - \|\nabla^{g_0} \sigma(x)\|_{g_0}^2)^2} + 1} - 1} \right|.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Dado que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sigma(x)^2}{(1 - \sigma^2(x) - \|\nabla^{g_0} \sigma(x)\|_{g_0}^2)} = 0.$$

se sigue de (4.5) $\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \Phi(x) - (\sqrt{2} + 1)x_0 \right| = 0$. Así, hemos probado que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \Phi(x) = (\sqrt{2} + 1)x_0, \text{ siempre que } x \in B_\delta(x_0) \cap \Omega.$$

El caso restante se prueba análogamente, obteniendo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \Phi(x) = (\sqrt{2} - 1)x_0, \text{ siempre que } x \in B_\delta(x_0) \cap \Omega.$$



4.2 Comportamiento en infinito de hipersuperficies espaciales

Resulta natural preguntarse por la existencia de hipersuperficies espaciales, conexas, no compactas que alcancen las dos componentes en infinito del espacio de de Sitter.

Por un simple calculo en el modelo estereográfico, puede verse que los vectores radiales son todos de tiempo. Por lo tanto, si la hipersuperficie es espacial, se debe evitar una componente radial grande en los vectores tangentes. Es natural pensar en una espiral que se acerca a las componentes de la frontera, la espiral se enrolla alrededor de dichas componentes (Ver, Figura 4.2)



Figura 4.2: Una curva espacial conexa con frontera en ambos infinitos de Sitter.

La anterior curva se inmersa en $\mathbb{S}_1^2$ con la expresión $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_1^2$, dada por

$$\alpha(t) = (t, t \sin 3t + \cos 3t, t \cos 3t - \sin 3t)$$

Sin embargo esta curva no es admisible para la fórmula de representación, lo que es una consecuencia de la falta de inyectividad de la aplicación de Gauss-de-Sitter, y esto es observable a simple vista del gráfico anterior. Antes de enunciar el siguiente resultado sea $\Omega \subset \mathbb{S}^n$ un abierto.

Proposición 4.2.1 Sean $\Omega \subset \mathbb{S}^n$, $\sigma \in \mathcal{F}(\Omega)$ y la aplicación definida por la fórmula de representación en el modelo Lorentziano, $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$, es decir

$$\phi = \left(\frac{1 - \sigma^2 - \|\nabla^{g_0} \sigma\|^2}{2\sigma} (1, x) + (0, \sigma x + \nabla^{g_0} \sigma) \right).$$

Sí la anterior aplicación, define una hipersuperficie, conexa, completa, espacial, no compacta, entonces la frontera ideal de dicha hipersuperficie esta contenida en solo una de las dos componentes conexas de la frontera ideal del espacio de de Sitter.

Antes de realizar la prueba de la proposición anterior, probaremos algunos lemas auxiliares.

Lema 4.2.2 Sean $\Omega \subset \mathbb{S}^n$ un conjunto abierto y conexo, $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ una aplicación suave de $\mathcal{F}(\Omega)$ tal que la fórmula de representación asociada Φ_+ define una aplicación propia y $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ una curva tal que escapa de compactos de U . Entonces para cada $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $t \in (\varepsilon - \frac{1}{n_0}, \varepsilon)$ tal que $\langle \nabla \sigma(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle \neq 0$.

Demostración. Dado que $\sigma \in \mathcal{F}(\Omega)$ y $\lim_{t \rightarrow \varepsilon} \Phi_+(\alpha(t)) \in \partial \mathcal{E}$, se garantiza la existencia de $m \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$, tal que

$$|\langle \nabla \sigma(\alpha(t)), \nabla \sigma(\alpha(t)) \rangle - 1| > \delta \text{ siempre que } t > \varepsilon - \frac{1}{n}.$$

Actuando por contradicción, suponga que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para $t \in (\varepsilon - \frac{1}{n}, \varepsilon)$ se tiene $\langle \nabla \sigma(t), \alpha'(t) \rangle = 0$ y $|\nabla \sigma(t)| \neq 1$. Por lo tanto, el teorema fundamental del cálculo garantiza que para cada $\zeta \in (\varepsilon - \frac{1}{n}, \varepsilon)$ existe una constante k , que verifica $\sigma(\alpha(\zeta)) = k$. Tomando el límite cuando $\zeta \rightarrow \varepsilon$, concluimos que $k = 0$. Por consiguiente, $\sigma(\alpha(t)) = 0$ siempre que $t \in (\varepsilon - \frac{1}{n}, \varepsilon)$ lo que implica $\sigma(\zeta) \in \partial \mathcal{E}$, para $\zeta \in (\varepsilon - \frac{1}{n}, \varepsilon)$ lo que es absurdo. 

R Bajo las hipótesis del lema anterior fíjese que existe una sucesión $t_n \rightarrow \varepsilon$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica $\langle \nabla \sigma(\alpha(t_n)), \alpha'(t_n) \rangle \neq 0$.

Demostración. Retomamos la prueba de la proposición 4.2.1. Procedamos por contradicción, considere una curva C de $\mathbb{S}^n$ tal que $\Omega \cap C$ tenga extremos en puntos y y z tales que

$$\lim_{x \rightarrow y} \phi_0(x) = \infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow z} \phi_0(x) = -\infty.$$

Considerando $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{S}^n$ una parametrización con aceleración finita de C . Buscaremos puntos de inflexión de $\phi_0(\alpha(t)) : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$. Calculando, note que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \phi_0(\alpha(t)) &= \frac{(-2\sigma(t)\langle \nabla \sigma(t), \alpha'(t) \rangle - 2\langle d(\nabla \sigma(t))_{\alpha(t)}(\alpha'(t)), \nabla \sigma(t) \rangle) 2\sigma(t)}{4\sigma(t)^2} \\ &\quad - \frac{2\langle \nabla \sigma(t), \alpha'(t) \rangle (1 - \sigma(t)^2 - \|\nabla \sigma(t)\|^2)}{4\sigma(t)^2} \\ &= \frac{-\langle \nabla \sigma(t), \alpha'(t) \rangle (1 + \sigma(t)^2 - \|\nabla \sigma(t)\|^2) - 2\langle d(\nabla \sigma(t))_{\alpha(t)}(\alpha'(t)), \nabla \sigma(t) \rangle \sigma(t)}{2\sigma(t)^2}. \end{aligned}$$

Nos proponemos ahora a estudiar el signo de $\frac{d^2}{dt^2} \phi_0(\alpha(t))$, para ello, llamemos

$$n(t) = -\langle \nabla \sigma(t), \alpha'(t) \rangle (1 + \sigma(t)^2 - \|\nabla \sigma(t)\|^2) - 2\langle d(\nabla \sigma(t))_{\alpha(t)}(\alpha'(t)), \nabla \sigma(t) \rangle \sigma(t),$$

observe que

$$\frac{d^2}{dt^2} \phi_0(\alpha(t)) = \frac{2n'(t)\sigma(t) - 4\langle \nabla \sigma(t), \alpha'(t) \rangle n(t)}{4\sigma^3(t)},$$

dado que $\lim_{t \rightarrow \varepsilon} \sigma(t) = 0$ y las funciones consideradas son acotadas, se sigue en el numerador

$$\lim_{t \rightarrow \varepsilon} 2n'(t)\sigma(t) - 4\langle \nabla \sigma(t), \alpha'(t) \rangle n(t) = -4\langle \nabla \sigma(\varepsilon), \alpha'(\varepsilon) \rangle^2 (1 - \|\nabla \sigma(\varepsilon)\|^2).$$

Nótese que la observación del lema anterior nos permite garantizar la existencia de $t_k \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_0(\alpha(t)) \right)_{t=t_k} > 0.$$

Por otra parte, también análogamente se sostiene para un $t_j \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} \phi_0(\alpha(t)) \right)_{t=t_j} < 0.$$

Por continuidad existe $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tal que

$$\frac{d^2}{dt^2} \phi_0(\alpha(t_0)) = 0.$$

Por lo tanto existen puntos de inflexión de $\phi_0(\alpha(t))$, y debe existir alguno donde tenemos cambio de concavidad, sin pérdida de generalidad sea t_0 dicho punto y $w = \phi(\alpha(t_0))$. Consideremos el plano tangente dado por $T_w \phi(\Omega)$ (Este plano debe existir por ser ϕ una inmersión) por la convexidad la curva $\phi(\alpha(t))$ debe tocar solo en w dicho plano y localmente debe estar en solo una de las dos componentes conexas en las cuales dicho plano divide el espacio, lo cual es absurdo, dado que hay un cambio de concavidad de $\phi_0(\alpha(t))$ en $t = t_0$ y por ello $\phi_0(\alpha(t))$ no puede alcanzar un extremo en $t = t_0$ siendo localmente convexa $\phi(\Omega)$ en w . 

Para ilustrar el resultado anterior consideremos $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$, donde $\Omega = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}^+\} \cap \mathbb{S}^1$. Suponemos que σ es tal que la fórmula de representación es propia y tiene extensión suave $\zeta : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$. Por los resultados anteriores $\zeta(1, 0) = \zeta(0, 1) = 0$. Puede pensarse por ejemplo en la aplicación $\sigma : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\sigma(x, y) = 3xe^{\frac{1}{x^2-1}}$$

Nótese que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \|\nabla \sigma(x,y)\|^2 = 9 \text{ y } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \|\nabla \sigma(x,y)\|^2 = 0.$$

Por los resultados anteriores la aplicación $\Phi : \Omega \rightarrow \mathcal{E}^2$ debe ser propia y escapar a las dos componentes de $\partial \mathcal{E}^2$. Realizando un gráfico, obtenemos.

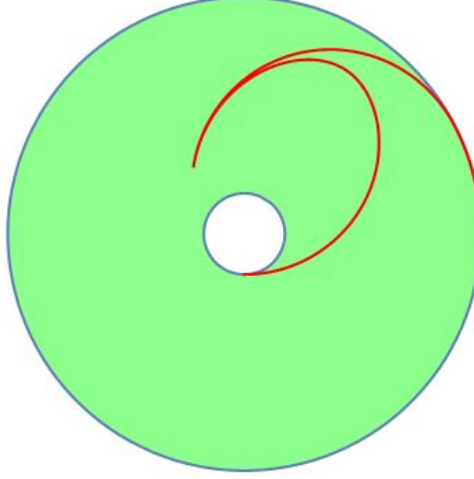


Figura 4.3: Representación de $\Phi(\Omega)$ en el modelo estereográfico.

En el gráfico anterior a pesar de estar en el modelo estereográfico podemos observar un punto donde no existe el plano tangente ni es localmente convexa $\Phi(\Omega)$, dicha singularidad se corresponde con el punto $\phi(\alpha(t_0))$ de la prueba anterior. Probablemente el resultado anterior pueda extenderse a funciones $\sigma \in C^\infty(\Omega)$ aprovechando la densidad de $\mathcal{F}(\Omega)$ para aproximar elementos de $C^\infty(\Omega)$. Podemos construir una sucesión de funciones $(\psi)_{n \in \mathbb{N}}$, donde $\psi_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ que converge a $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$. Por lo tanto la sucesión de funciones $\phi_n : \Omega \rightarrow \mathbb{S}_1^{n+1}$

$$\phi_n = \left(\frac{1 - \psi_n^2 - \|\nabla^{g_0} \psi_n\|^2}{2\psi_n} (1, x) + (0, \psi_n x + \nabla^{g_0} \psi_n) \right),$$

podría intentar ser construida, tal que coincida con $\phi(\Omega)$ siempre que $\phi_0(x) \in [-n, n]$. Por lo tanto, para un n_0 lo suficientemente la prueba de la proposición anterior muestra un punto en el interior de Ω donde se pierde la convexidad. En tal punto, localmente ϕ_n y ϕ coinciden, completando la prueba. Es interesante notar que lo anterior implicaría que no existen hipersuperficies, espaciales conexas, no compactas con aplicación de Gauss De Sitter inyectiva que alcance las dos fronteras ideales de $\mathcal{E}$.

4.3 Tangencia en infinito

El objetivo de esta sección es presentar una noción de tangencia en la frontera ideal del espacio de de Sitter apoyándose en el modelo estereográfico. Se observará que las hipersuperficies espaciales no compactas son tangentes a la frontera ideal. Considere la familia de esferas de $\mathbb{R}^{n+1}$ centradas en el origen de radio R , denotaremos un elemento de esta familia por $\mathbb{S}_R$. Por lo tanto, $\{(\mathbb{S}_R, g_{\mathcal{E}})\}_{R \in (\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)}$ es una familia de subvariedades de la variedad semiriemanniana $(\mathcal{E}, g_{\mathcal{E}})$. Por un simple calculo observamos que $(\mathbb{S}_R, g_{\mathcal{E}})$ es espacial, más aún, la métrica $g_{\mathcal{E}}$ restringida

a cada $\mathbb{S}_R$ es conforme a la métrica euclidiana. Así el plano tangente de $(\mathbb{S}_R, g_{\mathcal{E}})$ en un punto p se puede identificar con el conjunto de los vectores de $T_p \mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^{n+1}$ ortogonales a p en el sentido euclidiano, dicha identificación funciona independientemente de que tan cercano este R de $\sqrt{2} + 1$ o de $\sqrt{2} - 1$. Extrapolaremos la idea anterior para describir la tangencia en cada una de las dos componentes en infinito, a saber $\mathbb{S}_{\sqrt{2}+1}$ y $\mathbb{S}_{\sqrt{2}-1}$.

Definición 4.3.1 Sea $M \subset \mathcal{E}$ una hipersuperficie en el modelo estereográfico no compacta, completa y propiamente inmersa. Decimos que M es tangente a la frontera ideal, si para toda curva reparametrizada por longitud de arco euclidiano ($|\alpha'(t)|_e = 1$), $\alpha : (0, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $\lim_{t \rightarrow \varepsilon} |\alpha(t)|_e = \sqrt{2} + 1$ o $\lim_{t \rightarrow \varepsilon} |\alpha(t)|_e = \sqrt{2} - 1$, se tiene $\lim_{t \rightarrow \varepsilon} \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle = 0$.

Nótese que la definición anterior intuitivamente nos dice que una hipersuperficie es tangente a la frontera ideal, si al acercarnos a la frontera con una curva sobre M la posición y la velocidad de dicha curva son ortogonales en la frontera ideal.

Proposición 4.3.1 Sean $M \subset \mathcal{E}$ una hipersuperficie espacial, conexa no compacta. Entonces M es tangente a la frontera ideal del modelo estereográfico.

Demostración. Sea una curva $\alpha : (0, \varepsilon) \rightarrow M$ con $\lim_{t \rightarrow \varepsilon} |\alpha(t)|_e = \sqrt{2} + 1$ o $\lim_{t \rightarrow \varepsilon} |\alpha(t)|_e = \sqrt{2} - 1$, consideramos la curva parametrizada por longitud de arco, es decir $|\alpha'(t)|_e = 1$. Dado que $\alpha(t)$ es espacial, debe tenerse que

$$g_{\mathcal{E}}(\alpha'(t), \alpha'(t)) = \frac{4}{(-|\alpha(t)|_e^4 + 6|\alpha(t)|_e^2 - 1)} \left(1 - \frac{8\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle^2}{(-|\alpha(t)|_e^4 + 6|\alpha(t)|_e^2 - 1)} \right) > 0.$$

Por lo tanto

$$1 - \frac{8\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle^2}{(-|\alpha(t)|_e^4 + 6|\alpha(t)|_e^2 - 1)} > 0, \text{ para cada } t \in (0, \varepsilon), \quad (4.6)$$

equivalentemente

$$\frac{(-|\alpha(t)|_e^4 + 6|\alpha(t)|_e^2 - 1)}{8} > \langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle^2 \geq 0. \quad (4.7)$$

Observe que

$$\lim_{t \rightarrow \varepsilon} \frac{(-|\alpha(t)|_e^4 + 6|\alpha(t)|_e^2 - 1)}{8} = 0. \quad (4.8)$$

En consecuencia de (4.7) y (4.8) obtenemos

$$\lim_{t \rightarrow \varepsilon} \langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle = 0.$$



Una hipersuperficie espacial no compacta sera visualmente tangente a $\partial \mathcal{E}$.

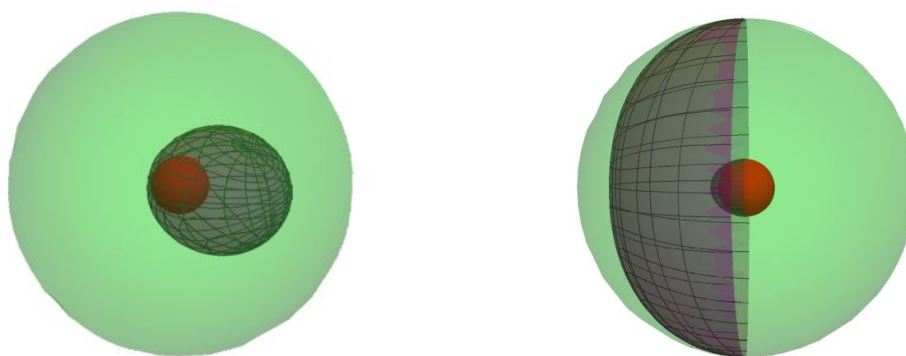
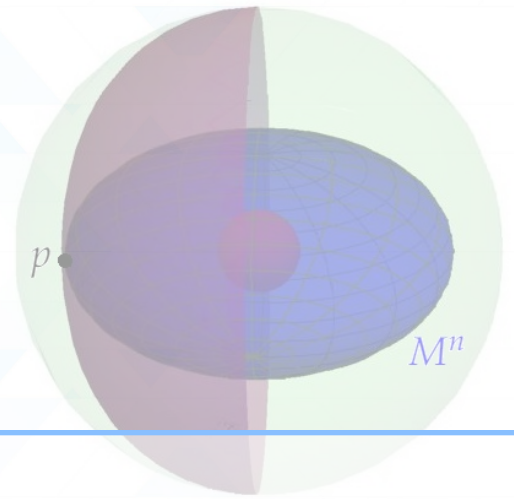


Figura 4.4: Representación de dos hipersuperficies espaciales totalmente umbilicas no compactas con $|H| = 1$ y $|H| > 1$, respectivamente.



Bibliografía

Libros

- [Bar83] O'Neil Barret. *Semi-Riemannian Geometry with Aplications to General Relativity*. Academic Press, 1983.
- [Do 92] Manfredo Do Carmo. *Riemannian geometry*. Birkhäuser, 1992.
- [Do 16] Manfredo Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Courier Dover Publications, 2016 (véase página 7).
- [Lee97] John Lee. *Riemannian Manifolds An Inrodution to Curvature*. Springer, 1997.
- [Mas82] William S Massey. *Introducción a la topologia algebraica*. Reverté, 1982.

Artículos

- [Aku87] Kazuo Akutagawa. «On spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in the de Sitter space». En: *Mathematische Zeitschrift* (1987) (véase página 7).
- [Ale62] A.D. Aleksandrov. «Uniqueness theorems for surfaces in the larges». En: *Amer. Math. Soc* (1962).
- [ABD17] C. P. Auino, M. Batista y H. F. De Lima. «On the umblicity of hypersurfaces in the hyperbolic space». En: *Journal of the Australian Mathematical Society* (2017) (véase página 7).
- [CXD14] Linfen Cao, Guodong Xu y Zhaohui Dai. «A New Characterization of Totally Umbilical Hypersurfaces in de Sitter Space». En: *Advances in Pure Mathematics* (2014).
- [ED19] Jose Espinar y Abanto Dimas. «Escobar type theorems for elliptic fully nonlinear degenerate equations». En: *American Journal of Mathematics* (2019) (véanse páginas 7, 8, 25).
- [EGM09] Jose Espinar, Jose Galvez y Pablo Mira. «Hypersurfaces in $\mathbb{H}^{n+1}$ and conformally invariant equations: The generalized Christoffel and Nirenberg problems». En: *Journal of The European Mathematical Society* (2009) (véanse páginas 7, 8, 24).

- [KY04] Sung-Eun Koh y Myung-Suk Yoo. «A characterization of totally umbilical hypersurfaces in de Sitter space». En: *Journal of Geometry and Physics* (2004).
- [Mon88] Sebastian Montiel. «An Integral Inequality for Compact Spacelike Hypersurfaces in De Sitter Space and Applications to the Case of Constant Mean Curvature». En: *Indiana University Mathematics Journal* (1988) (véanse páginas 7, 25).
- [RM99] Lopez Rafael y Sebastian Montiel. «Existence of constant mean curvature graphs in hyperbolic space». En: *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* (1999) (véase página 7).
- [Ram87] Jayakumar Ramanathan. «Complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in de Sitter space». En: *Indiana University mathematics journal* (1987) (véase página 7).
- [Rol21] Angela Roldán. «Hypersurfaces with prescribed curvatures in the de Sitter space». En: *Revista Matemática Iberoamericana* (2021) (véanse páginas 7, 21-24, 29, 37).