



**DIFICULTADES Y ERRORES QUE PRESENTAN ESTUDIANTES DE GRADO
NOVENO AL RESOLVER SITUACIONES PROBLEMA QUE INVOLUCRAN LA
MEDIA ARITMÉTICA**

Deisy Paola Chocué Zapata

Stephany Paz Joyas

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemática

2018



**DIFICULTADES Y ERRORES QUE PRESENTAN ESTUDIANTES DE GRADO
NOVENO AL RESOLVER SITUACIONES PROBLEMA QUE INVOLUCRAN LA
MEDIA ARITMÉTICA**

Deisy Paola Chocué Zapata

Código: 201358907.

Stephany Paz Joyas

Código: 201358853

Trabajo de grado para optar por el título de Licenciado en Educación Básica Con Énfasis en
Matemáticas

Director

Mag. Steev Romero Agredo

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemática

2018

DEDICATORIA

A mis padres Luz Mary Zapata & Diego Jairo Chocué, por ser el pilar principal en todo lo que soy, en mi educación, tanto académica, como de la vida y por su apoyo incondicional a lo largo del tiempo.

A mis hijos Jean Pool & Cesar Steven, que son mi mayor motivación, los causantes de mi anhelo de salir adelante, progresar y culminar con éxito esta carrera.

A mi esposo Cesar Mendoza, por su amor, por creer en mí y porque siempre me apoyaste. Amor gracias por darme una carrera para mi futuro, todo esto te lo debo a ti.

Deisy Paola Chocué Zapata

A mis padres Luis Fernando Velasco & Darlin Joyas, quienes son la motivación constante que me impulsa a ser una persona de bien y alcanzar grandes éxitos en mi carrera, gracias por su paciencia, comprensión, apoyo incondicional y dedicación que me dan, permitió que lograra obtener un peldaño más en mi vida profesional.

Stephany Paz Joyas

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradecer a Dios por habernos permitido terminar nuestra carrera universitaria y por brindarnos fortaleza día a día para enfrentar las dificultades que se presentaban.

A nuestro Director de trabajo de grado, Mg. Steev Romero Agredo por ofrecernos sus valiosos conocimientos y su experiencia profesional. Además, de animarnos y alentarnos en cada una de las fases de nuestro trabajo de grado.

A la institución educativa “Francisco José de Caldas” por brindarnos el espacio para realizar nuestro trabajo de investigación, especialmente al profesor de matemáticas Jaime Duque Perdomo por la disposición que tuvo al brindarnos su colaboración y espacio con el grado noveno.

A los docentes de la universidad del Valle que guiaron nuestro proceso académico quienes nos brindaron su apoyo y compartieron sus conocimientos y experiencias para enriquecer nuestra formación.

TABLA DE CONTENIDO

INDICE DE TABLAS.....	VII
INDICE DE FIGURAS.....	VIII
RESUMEN	1
INTRODUCCIÓN	2
CAPÍTULO I.....	4
ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN	4
1.1. DECLARACIÓN DEL PROBLEMA	4
1.2. PLANTEAMIENTO DE LOS OBJETIVOS.....	7
1.2.1. <i>Objetivo general</i>	7
1.2.2. <i>Objetivos específicos</i>	7
1.3. JUSTIFICACIÓN	8
1.4. ANTECEDENTES.....	12
CAPITULO II.....	17
MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA	17
2.1. PERSPECTIVA MATEMÁTICA	17
2.1.1. <i>Aspectos históricos relacionados con la media aritmética.</i>	17
2.1.2. <i>La media aritmética</i>	19
2.2. PERSPECTIVA DIDÁCTICA	23
2.2.1. <i>Relación resolución de problemas, dificultades y errores</i>	23
2.2.2. <i>Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas</i>	26
2.2.3. <i>Errores en el aprendizaje de las matemáticas.</i>	29
2.3. PERSPECTIVA CURRICULAR	32
2.3.1. <i>Los lineamientos curriculares y la estadística.</i>	32
2.3.2. <i>Estándares básicos de competencia en matemáticas grados octavo y noveno.</i>	35
2.3.3. <i>Marco contextual</i>	37
CAPITULO III.....	39
METODOLOGÍA.....	39
3.1. ESTUDIO TEÓRICO	39
3.2. PLANIFICACIÓN.....	40
3.2.1. <i>Tipo de investigación.</i>	40
3.2.2. <i>Diseño de instrumentos.</i>	42
3.2.3. <i>Caracterización de la población.</i>	48
3.2.4. <i>Puesta en acto en el aula</i>	48
3.3 RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	48
3.3.1 <i>Categorización de análisis y nomenclatura de instrumentos</i>	49
3.3.2 <i>Recolección y análisis de resultados.</i>	52

CAPITULO IV: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	82
REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS	87
ANEXOS	90

INDICE DE TABLAS

Tabla 1 Autores de las fases del proceso de resolución de problemas	24
Tabla 2 Relación de resolución de problemas con dificultades Schoenfeld (1992)	25
Tabla 3 Objetivos de los ítems de la prueba	44
Tabla 4 Nomenclatura de las dificultades y errores	49
Tabla 5 Nomenclatura de evidencias	51
Tabla 6 Errores relacionados con la dificultad A.....	53
Tabla 7 Clasificación de errores asociados a la dificultad A	56
Tabla 8 Errores relacionados con la dificultad B.....	59
Tabla 9 Clasificación de errores asociados a la dificultad B	65
Tabla 10 Emociones pregunta 1 a la 6 entrevista.....	70
Tabla 11 Emociones pregunta 1 a la 5 encuesta	76
Tabla 12 Clasificación de errores asociados a la dificultad C	80

INDICE DE FIGURAS

Figura 1: la media como centro de gravedad. Tomado de Behar & Yepes (2007).....	21
Figura 2: Coherencia Horizontal y vertical. Estándares de competencia en Matemáticas.	36
Figura 3: Fases de estudio	39

RESUMEN

En este trabajo de investigación se analizan y se categorizan las dificultades y los errores que surgen cuando los estudiantes se enfrentan situaciones problema que involucran el uso de la media aritmética para su resolución.

Para realizar este análisis se consideró como referente teórico la clasificación de las dificultades realizada por Socas (1997) y la taxonomía de los errores por Radatz (1979). Los cuales brindaron las herramientas necesarias para el análisis del objeto de estudio media aritmética. Posterior a esto, se elaboró una prueba escrita con 7 ítems que se aplicó a estudiantes de Educación Básica Secundaria, específicamente grado noveno (9°), de la Institución Educativa Francisco José de Caldas ubicada en Santander de Quilichao – Cauca Colombia, para luego analizar sus respuestas y evidenciar qué errores se manifiestan con respecto al objeto matemático en mención y poder conocer las dificultades que se presentan a la luz de los errores encontrados. Entre los más importantes se encuentran los debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, en este aspecto se centraron gran parte de los errores en los estudiantes, debido a la complejidad que genera en los estudiantes la media aritmética.

La metodología empleada fue cualitativa, estudio de casos y se complementó con alguna información de carácter cuantitativo, especialmente al presentar los resúmenes de los resultados en términos relativos (porcentajes).

Cabe resaltar, que esta investigación pretende en uno de sus objetivos proponer recomendaciones con base en los resultados obtenidos, para contribuir a la disminución de dificultades y errores.

Palabras claves: Media aritmética, error, dificultad, estadística, situaciones problema.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se encuentra ubicado en el marco de la línea de investigación *Didáctica de las Matemáticas* del programa de Licenciatura en educación básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad del Valle, el estudio abarca el análisis de las dificultades y errores que los estudiantes manifiestan alrededor del objeto matemático media aritmética en la resolución de situaciones problema. Es por esto, que el objetivo general del trabajo está enmarcado en el análisis de esas dificultades y errores para así poder aportar recomendaciones a los docentes de matemáticas, que contribuyan a su disminución.

Hay que tener en cuenta que la motivación que se tuvo para la realización de este trabajo investigativo, surge a raíz de la importancia en la interpretación de la media aritmética en situaciones de la vida cotidiana, pues un buen aprendizaje de este objeto matemático genera en el estudiante distintas herramientas para un futuro en las diferentes actividades que realizará en su formación profesional.

Por tanto, se proponen tres capítulos para el desarrollo de este trabajo: en el primer capítulo se presentan los aspectos generales que enmarcan el trabajo, como lo son, el planteamiento del problema, la justificación, los objetivos y los antecedentes, en donde se abordan las propuestas de investigaciones de la media aritmética, sus propiedades e interpretación

En el segundo capítulo se aluden algunos referentes teóricos donde se identifican varias dimensiones que permiten fundamentar el trabajo: La dimensión matemática corresponde a aspectos históricos relacionados con la media aritmética, la definición de este objeto matemático, así como las propiedades que la estructuran; la dimensión didáctica expone la resolución de problemas desde el Ministerio de Educación Nacional MEN (1998), también se tiene en cuenta las caracterizaciones y clasificaciones que hace Martin Socas &

Radatz Hendrik sobre las dificultades y los errores; le sigue la dimensión curricular que tiene como fin presentar los Lineamientos Curriculares de matemáticas, los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas para la sustentación del grado donde se aplicará la prueba escrita y por último, se presenta el marco contextual de la institución educativa en donde se desarrolló el trabajo de campo.

El tercer capítulo, comprende las fases de estudio, que tiene en cuenta la metodología, la población, el tipo de investigación, rediseño de la prueba, los instrumentos de análisis utilizados para la realización del trabajo y el análisis de los resultados obtenidos. Así como las conclusiones y recomendaciones del trabajo. Por último, la bibliografía usada en el trabajo y los anexos.

CAPÍTULO I

ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

En el siguiente apartado se presentan los aspectos generales que enmarcan este trabajo de investigación. En primer lugar, se presenta la problemática, que aborda las dificultades y errores que se manifiestan en el aprendizaje de la media aritmética, seguido por el objetivo general y los objetivos específicos, la justificación sobre la pertinencia de este trabajo y por último, algunos antecedentes donde se citan fuentes académicas relacionadas con el desarrollo de esta propuesta, que proporcionan aspectos importantes para el desarrollo teórico y práctico de este trabajo.

1.1. Declaración del problema

En los últimos tiempos la enseñanza de la estadística ha tenido interés dentro de la educación matemática, debido al creciente desarrollo de ésta como ciencia, como aporte a la investigación, aspectos técnicos y la vida profesional, ya que le permite al ciudadano interpretar y tomar decisiones basadas en la información obtenida de su entorno, también colabora en la obtención y comprensión de datos requeridos de un contexto, por tanto, se considera un motor del desarrollo.

Es por ello, que la estadística ha sido incorporada en los currículos de educación primaria y secundaria, con el fin de que los estudiantes adquieran los conocimientos necesarios y comprendan las representaciones de los datos para poder producir información estadística, resolver problemas y tomar decisiones adecuadas a partir de la información recibida.

Se procura entonces, fomentar la estadística encaminada a que los estudiantes sean capaces de leer y organizar datos, sepan interpretarlos en función del contexto de origen, sean

críticos con la información obtenida y estén familiarizados con los objetos estadísticos, sobre todo con las medidas de tendencia central, las cuales son esenciales para la teoría y la práctica de la estadística; por tanto, su comprensión es fundamental para el progreso del estudiante en el tema. En particular el papel de la media en el método estadístico es relevante pues constituye la base para la comprensión de conceptos más avanzados (Distribuciones, media muestral, medidas de dispersión, entre otras).

En el aprendizaje de la media aritmética surgen diversas dificultades que se manifiestan en forma de errores en los estudiantes, que pueden ser derivados de la enseñanza del objeto matemático como tal. Dicho en otras palabras, Cobo (2004) menciona que en los libros de texto de secundaria, se da mucha más relevancia al cálculo de la media aritmética y a las definiciones que al estudio de sus propiedades, no obstante esto permite que los estudiantes consigan manejar los procedimientos y algoritmos de la media aritmética, pero pueden no alcanzar una comprensión completa de este objeto matemático, sus posibilidades de uso, las ventajas sobre otras medidas de posición central, y la resolución de situaciones problema.

Es así, como los estudios de los errores se manifiestan en las representaciones, procedimientos, cálculo y propiedades de la media aritmética, los cuales son asignados erróneamente por los estudiantes a este objeto matemático estadístico y ello los lleva al fallo en la resolución de problemas.

Con respecto a lo mencionado, específicamente a las propiedades de la media aritmética, los estudiantes que comienzan a estudiarla por primera vez, ya conocen ciertas operaciones aritméticas como la suma y la multiplicación, e inconscientemente aplican a la operación de "promediar" algunas propiedades aritméticas, las cuales no se cumplen en el caso del promedio.

Como afirma Mevarech (citado por Batanero, Godino & otros 1994) en su

investigación los estudiantes suelen creer que un grupo algebraico se constituye con un conjunto de números y la operación media aritmética, satisfaciendo así los cuatro axiomas: *asociatividad, clausura, elemento neutro y elemento inverso*. Obteniendo que un gran porcentaje de estudiantes universitarios atribuían alguna de estas propiedades a la media aritmética. Por ejemplo, se percibe que, aunque los estudiantes piensan que la media tiene la propiedad asociativa, al momento de calcularla de un conjunto de datos, lo dividen en partes realizando primero la media de cada una de las partes para después promediar el resultado obtenido. Se puede verificar en general, que esta propiedad no es válida, se calcula primero la media de cinco números diferentes y luego se promedia los cuatro primeros y realiza la media aritmética del valor obtenido con el último elemento. Del mismo modo, no se tiene en cuenta el cero en el cálculo de la media, como si fuese un elemento neutro, o bien, se piensa que la media debe ser un elemento del mismo conjunto numérico del que se toman los datos.

De acuerdo con lo anterior, esas investigaciones pueden tomarse como objetos de estudio para realizar futuros aportes al campo de la estadística, tal como lo menciona Del Puerto, Minnaard, & Seminara (2007) donde afirman que el estudio de los errores cometidos por los estudiantes en el proceso de aprendizaje no solo ofrece una rica información acerca de cómo se construye el conocimiento matemático sino, que conforma una excelente herramienta con el fin de mejorar los resultados.

De acuerdo a lo anterior, el problema a tratar surgió a lo largo de nuestra carrera universitaria donde se pudo observar que al presentarse un concepto matemático mediante situaciones problema resulta más complejo que por medio de un algoritmo, al realizar una revisión documental se encontraron dificultades y errores que presentan los estudiantes cuando se resuelven situaciones problema que requieran el uso de la media aritmética. Sin embargo no hay una clasificación de estos.

Por esta razón, la idea de este trabajo se centró en poder aplicar situaciones problema que involucren la media aritmética y poder desarrollar una clasificación y análisis de dichos errores y dificultades que presentan los estudiantes al abordar este tipo de problemas matemáticos. En este sentido, este trabajo presenta la problemática de investigación mediante la siguiente pregunta: **¿Qué tipo de dificultades y errores se presentan al resolver situaciones problema que involucren la media aritmética, por estudiantes de grado noveno de la institución educativa Francisco José de Caldas?**

1.2. Planteamiento de los objetivos

1.2.1. Objetivo general

Analizar las dificultades y errores presentados por estudiantes de grado noveno de la institución Francisco José de Caldas, cuando resuelven situaciones problema que involucren la media aritmética.

1.2.2. Objetivos específicos

- Evidenciar dificultades y errores que presentan estudiantes de grado noveno, a través de un estudio de casos cuando se enfrentan a situaciones problema que requieren el uso de la media aritmética para su resolución.
- Clasificar las dificultades y errores encontrados en los resultados de los estudiantes al resolver la prueba, teniendo en cuenta las caracterizaciones y clasificaciones realizadas por Socas y Radatz.
- Proponer recomendaciones con base en los resultados obtenidos, para

contribuir a la disminución de dificultades y errores.

1.3. Justificación

Es importante la enseñanza de la estadística en el aula de clases, debido a la importancia ampliamente reconocida en la formación general de los ciudadanos, según Holmes (1980) es favorable la formación en estadística desde la primaria, argumentando que la estadística es una parte absoluta de la formación deseable para todo ciudadano, quienes requieren la capacidad tanto de interpretar cómo de leer gráficos, tablas y otros datos cuantitativos que con regularidad emergen en los medios informativos.

De la misma manera, el estudio de la estadística impulsa a entender los diferentes temas del currículo, pues se concibe transversal tanto en la educación obligatoria como en la posterior a ella, donde con reiteración aparecen referentes alusivos como gráficos, distribuciones, resúmenes u otros conceptos estadísticos. Esto ha impulsado, que hoy en día, la estadística se haya integrado, de forma generalizada al currículo de Matemáticas desde la enseñanza primaria hasta distintas especialidades universitarias (Batanero C, 2000).

Puede argumentarse aún más, siguiendo la línea de Batanero donde indica que países desarrollados han elaborado proyectos curriculares en el campo de la estadística, por ejemplo, los elaborados en Reino Unido para *School Council Project on Statistical Education* (1957-1981) y el *quantitative literacy project* (1985-1998) y *data driven mathematics* (1996-2000) en Estados Unidos.

Indicadores como los trabajos hechos por IASE (International Association for Statistical Education), el congreso ICOTS (International Conference on Teaching

Statistics), sociedades como, la ASA (American Statistical Association), AERA (American Educational Research Association), y demás sociedades demuestran el interés vertiginoso hacia la enseñanza de la estadística.

Asimismo, la existencia de revistas especializadas en el tema lo confirman: La revista *Teaching Statistics* de Inglaterra, con más de 20 años orientando a los docentes de estadística, también *Induzioni* y *Stochastik in der Schule* revista de educación estadística a nivel universitario.

Por otro lado, en Colombia, con la publicación estatal de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, el Ministerio de Educación Nacional MEN (1998) realizó la introducción de la estadística en el currículo de matemáticas, logrando que este documento sea una directriz para las instituciones educativas y docentes en el proceso de elaboración de los proyectos educativos institucionales y sus correspondientes planes de estudio por ciclos, niveles y áreas, además de constituirse en un referente que apoya y orienta esta labor conjuntamente con los aportes que han adquirido las instituciones y los docentes de su experiencia, formación e investigación.

También, una contribución indiscutible de este documento está en indicar que la ciencia, la cultura y la manera de entender la realidad, requiere a su vez, del desarrollo del pensamiento aleatorio, alcanzado mediante el tratamiento y análisis de datos, el uso de modelos y comprensión de conceptos como frecuencias, arreglos, muestras, combinaciones, *medidas de tendencia central*, medidas de dispersión, entre otros.

A su vez, en la medida que los estudiantes avanzan en los grados de escolaridad de la educación básica y media, la complejidad conceptual de los conocimientos que adquieren, no solo se evidencian en aspectos formales de la matemática, que pueden expresar verbalmente o por escrito, sino también en el tipo de procesos generales de la

actividad Matemática que ellos pueden realizar. Es decir, que a medida que los estudiantes vayan adquiriendo mejores comprensiones conceptuales, van a estar en la capacidad de poder desarrollar procesos de mayor complejidad y van a poder confrontar el tratamiento de situaciones de mayor nivel de abstracción (MEN, 2006).

En consonancia con el MEN (2006) se ha tomado para la realización de este trabajo el grado noveno, dado que en este nivel los estudiantes deberían contar con conocimientos, habilidades y experiencias sobre el objeto matemático media aritmética, desde su uso e interpretación hasta la resolución y formulación de problemas.

El siguiente apartado abarca la importancia de la enseñanza estadística y los objetos matemáticos que la fundamentan. Parte de estos objetos lo conforman las medidas de tendencia central, según Mayen (2009) a partir de la formulación de un problema de investigación, se obtienen una información sintetizada en unos datos, a los que se les realiza un tratamiento informático para obtener su tabulación y sus representaciones gráficas. Seguidamente, se realiza el cálculo de una lista de valores (estadísticos), que nos permite una información esencial del conjunto de datos que estamos analizando.

Estos estadísticos o medidas de tendencia central en primera instancia: la media, la moda y la mediana, que proporcionan una síntesis de un conjunto de datos con un valor representativo, facilitan una comprensión de cómo se distribuyen esos datos y en muchos casos, permite construir modelos teóricos y explicativos de dichas distribuciones.

En este orden de ideas, las medidas de tendencia central son la base para la adquisición de otros objetos matemáticos elementales que hacen parte del aprendizaje de esta ciencia, comenzando por la variable estadística (y variable aleatoria) Batanero (citado por Mayén, 2009).

De manera más puntual, la media aritmética (también llamada promedio aritmético o valor promedio, y en teoría de la probabilidad, como valor esperado o esperanza matemática) se considera la principal medida o dato de referencia puesto que, en primera instancia cumple con algunas características fundamentales, las cuales se sintetizan así:

La Objetividad (siempre se debe llegar al mismo resultado numérico), la Exhaustividad (se deben utilizar todos los datos), el Significado concreto (su interpretación debe ser sencilla e inmediata), Sencillez de cálculo (debe utilizar relaciones simples entre los datos), y la Fortaleza matemática (debe estar dotado de propiedades matemáticas). (Calot, 1988, p. 55-56)

En segunda instancia, la media aritmética es uno de los parámetros que define las diversas distribuciones de probabilidad, como la normal, binomial, poisson, exponencial, entre otras. Es por ello, que es importante comprender la media y sus propiedades, porque permite seleccionar la distribución específica a utilizar al momento de resolver un problema.

Además, el uso de la media aritmética puede dar solución a diversas situaciones problema de la vida diaria en diferentes áreas, por ejemplo en la medicina, analizar el peso de acuerdo a la estatura, la tasa de natalidad, el porcentaje de niños con sobrepeso, etc., en la economía, los costos o el índice de precio, analizar la tasa de empleo y desempleo, las tasas de crecimiento de las diferentes actividades de entidades bancarias, etc., en la ciencia, el cambio climático, la inteligencia animal, la genética, etc., en la agricultura, analizar la producción de cultivos, el rendimiento de la superficie, etc.,.

Por todo lo anterior, en estadística las medidas de tendencia central han sido objeto de estudio de diversas investigaciones, como las de Arias, Clavijo, & Torres (2012); Díaz (2014) que han arrojado la existencia de dificultades en todos los niveles de escolaridad

mencionadas en los antecedentes del presente trabajo. Lo que hace necesario que se realicen más estudios en el campo de la enseñanza y aprendizaje de la Estadística, y en particular en situaciones que impliquen el uso de la media aritmética.

1.4. Antecedentes

Considerables investigaciones se han interesado en describir los errores y dificultades que presentan los estudiantes de primaria y secundaria en cuanto a la media aritmética y a otras medidas de tendencia central, pues diversos autores como Batanero & Díaz, (2011); Behar & Yepes (2007); Batanero, Estepa & Godino (1991) han puntualizado hallazgos significativos, tanto a nivel conceptual como algorítmico. En este sentido, se presentan a continuación los aportes más relevantes de algunos trabajos realizados, que son de interés y sustentan este trabajo de investigación.

A nivel general, encontramos diversas investigaciones concernientes a aspectos computacionales de la media aritmética, se destaca la de Pollasek, Lima & Well (1981) que realiza un estudio elaborado con estudiantes universitarios, en el que se encontraron errores tanto en el cálculo de la media ponderada como en el cálculo proveniente de una tabla de frecuencias; resultados semejantes son alcanzados por Li & Shen (1992) con estudiantes de secundaria.

Algunos de estos errores resultan de una aplicación rutinaria del algoritmo de cálculo de la media, por lo que Cai (1995) especifica cómo la mayoría de estudiantes de 12-13 años no usan de forma comprensiva el algoritmo en el momento que se les pide encontrar un valor desconocido de un conjunto pequeño de datos para conseguir un valor medio ($\bar{x}$) dado.

En el caso de los errores en situaciones donde se debe calcular la media ponderada, como por ejemplo: “Hay 10 personas en un ascensor, 4 mujeres y 6 hombres. El peso medio de las mujeres es de 100 libras. Y el de los hombres de 180. ¿Cuál es el peso medio de las 10 personas del ascensor?” (Pollasek, Lima & Well 1981) Tanto el cálculo de la media ponderada como la elección de los pesos son de difícil identificación por los estudiantes, dado que, cuando los datos son agrupados en intervalos, los estudiantes omiten con frecuencia que cada uno de esos grupos debería ponderarse de forma diferente al calcular la media (Li & Shen 1992).

En cuanto a investigaciones concernientes a la comprensión de aspectos computacionales de la media aritmética, refiriéndose a computacional, como el conocimiento de las reglas de cálculo de la media aritmética, por parte de los estudiantes, que no necesariamente implica una comprensión real de los conceptos estadísticos (Batanero, 2001). Se destacan los trabajos de Strauss & Bichler (1988) donde se estudió el desarrollo de la comprensión de propiedades de la media aritmética en niños entre 8 y 14 años, precisando para cada propiedad diferentes tareas, evaluando su comprensión y modificando el tipo de datos (continuos o discretos), de modo similar, el medio de representación sea verbal, numérica o concreta, concluyendo que no se evidenciaron efectos significativos en relación al tipo de datos o medio de representación utilizado.

También, se rescatan investigaciones como las de Mokros & Russell (1995) con estudiantes de primaria, que analizan la idea de valor representante de los datos, trabajada por Campbell (1974); Goodchild (1988) donde se observa que, la media es un valor *típico* o *representativo* de los datos, se tiende a ubicar en la mitad del recorrido de la distribución, propiedad que sólo se satisface para distribuciones simétricas, (La simetría de una distribución de frecuencias hace referencia al grado en que valores de la variable, equidistantes a un valor que se considere centro de la distribución, poseen frecuencias

similares). Sin embargo, cuando la distribución es asimétrica la media se desplaza hacia uno de los extremos y la moda o la mediana serían un valor más representativo del conjunto de datos que la misma media. Del mismo modo, indican utilizar distintos contextos y representaciones en la enseñanza de un objeto matemático.

León & Zawojewski (1991) desarrollaron entrevistas a estudiantes entre los 8 y 14 años y analizan el efecto de la edad en la comprensión de las propiedades de la media aritmética. No solo encontraron una considerable influencia de la edad relativa a la comprensión de la media, sino que también observaron que la contextualización de las tareas permite su resolución. No obstante, propiedades, tales como que la media es un valor típico de los valores promediados o que hay que tener en cuenta los valores nulos en el cálculo de la media, siguieron siendo muy abstractas para una importante cantidad de estudiantes de 14 años.

Además de todo lo anterior, se consideran las investigaciones en relación a la comprensión de las representaciones de la media aritmética. La terminología con que se nombran los objetos matemáticos tienen un significado preciso, sin embargo, este no siempre corresponde con el designado al término en el lenguaje coloquial.

Los significados erróneos asignados por los estudiantes a la palabra “media” se han organizado en cuatro categorías. En primer lugar se tiene el valor más frecuente (en realidad esto sería una confusión con la palabra moda), en segundo se tiene el valor razonable (significado coloquial del término), en tercero está el “punto medio” (confusión con la mediana) y cuarto “algoritmo” (significado condicionado, donde la media solo se ve como el cálculo de un algoritmo). (Russell & Mokros, 1991, p.13)

Por otro lado, se retoma la investigación a nivel más específico realizada en el trabajo de especialización de Arias & Silva (2012) acerca de errores de comprensión y ejecución de algoritmos, donde se evidencia en menor medida en estudiantes de grado

octavo. Sin embargo, los errores en comparación de distribuciones, lenguaje y argumentación, son bastante notorios, dado que la prueba se diseñó teniendo en cuenta problemas con el contexto.

Con respecto al error asociado en consideración de la media aritmética como representante de los datos, se mostró con los resultados de la anterior investigación, que de los estudiantes que respondieron los ítems, el 54% consideran otras medidas que representen al conjunto de datos, esto es un aspecto positivo en cuanto que la media aritmética no es siempre el representante de los datos.

Los trabajos mencionados contribuyeron a la presente investigación con un acercamiento al estudio de la media aritmética, puesto que, permiten identificar algunos problemas que se han venido presentando en relación a su utilidad, a la comprensión de sus propiedades y respectivas representaciones. Es de resaltar que aunque se dan a conocer diferentes dificultades y errores que surgen en los estudiantes a la hora de solucionar problemas que requieren el uso de este objeto matemático, no se hace una clasificación de dichos errores y dificultades, aspecto relevante del estudio de los errores en matemáticas en el proceso de aprendizaje, en cuanto que permite al docente descubrir cuáles son las dificultades que subyacen a dichos errores y a partir de ellas establecer estrategias que propicien su superación, Rico (1995).

Además, Rico (1995) plantea visualizar los errores desde cuatro enfoques diferentes: clasificación de errores, tratamiento curricular de los errores, formación del profesorado con respecto a los errores que presentan los estudiantes y estudios de carácter técnico que implementan una determinada clase de análisis de los errores. Estos estudios se consideran como una herramienta para evidenciar el estado del conocimiento de los estudiantes e indispensables para retroalimentar el proceso de enseñanza y aprendizaje de

los mismos, con el fin de mejorar los resultados, la relevancia de este trabajo tendrá en cuenta el primer enfoque presentado por Rico para el estudio de los errores.

Es de anotar, que los trabajos antes expuestos dan una mirada a las distintas formas de desarrollar una prueba escrita con el fin de observar errores y dificultades que presentan los estudiantes, brindándonos así una perspectiva con la cual podemos basarnos en la elaboración de nuestra prueba escrita y en la deducción de los posibles métodos y estrategias utilizados por los estudiantes.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA

En este capítulo se presentan los fundamentos que sustentan el trabajo de investigación, realizado a partir de tres perspectivas diferentes: matemática, didáctica y curricular. La primera tiene que ver con la génesis, desarrollo, estructura y fundamentación matemática de la media aritmética; la didáctica, pone en manifiesto investigaciones como las de Radatz (1979) & Socas (1997) que se tendrán en cuenta para el análisis de las dificultades y errores en el marco de la resolución de problemas; y por último la perspectiva curricular donde se exponen los aspectos que vinculan la media aritmética y la resolución de problemas en relación a lo establecido en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas propuestos para grado noveno en el nivel de básica secundaria.

2.1. Perspectiva matemática

Esta perspectiva presenta aspectos de carácter histórico acerca de la estadística en los últimos años, enfatizando en las medidas de tendencia central, específicamente, la media aritmética. Así mismo, se presenta un acercamiento al objeto matemático media aritmética y sus propiedades, tomando como referencia los libros: “*Estadística descriptiva e inferencial*” de Vargas, A. (1995) y “*Estadística un enfoque descriptivo*” de Behar, R. & Yepes, M. (2007)

2.1.1. Aspectos históricos relacionados con la media aritmética. Desde periodos antiguos y en la prehistoria clásica, la necesidad social de poder saber lo que se tenía o lo que se hacía, fomentó la concepción de registros de información que paulatinamente lograron un grado de sofisticación y desarrollo que facilitaron el origen a métodos y técnicas para la obtención, la

sistematización y análisis de datos, que sentaron las bases de lo que hoy conocemos como estadística.

A mediados del siglo XIX, aparece el astrónomo Adolfo Quetelet como principal impulsador del movimiento estadístico. De acuerdo con Doval (2004) hasta ese momento la estadística sólo se usaba para mostrar “estabilidades”, como la cantidad de juicios, las diferentes clases de crímenes, la cuantificación de las enfermedades etc. Es así, como Quetelet pensó en la utilización de la estadística no como un funcionario sino como un hombre de ciencia, como un astrónomo que buscaría en las características físicas y de la conducta de sus conciudadanos, regularidades dignas de los astros que medía en su observatorio.

Además, Quetelet no sólo conocía muy bien la “ley de errores” desarrollada a principios del siglo XIX, porque la aplicaba en su campo de estudio que eran las mediciones astronómicas. La representación gráfica de dicha ley es la ya discutida “curva acampanada” de la llamada “distribución normal” o “distribución de Gauss” alrededor de la media.

También aplicó la misma curva de distribución gaussiana de errores a fenómenos biológicos y sociales, en donde habría de mirar la falta de uniformidad en algunas variables humanas sociales específicamente con el mismo instrumento, pero con una visión distinta. Allá donde la idea del promedio era un concepto que indicaba una magnitud física, acá se traducía en un ente ideal en la medida de lo humano. Si la media en la distribución de las observaciones astronómicas era la verdadera magnitud de una distancia, en lo humano los datos hablarían de manifestaciones más o menos enmascaradas de una especie de ideal que representaría a cada grupo humano. Su teoría del hombre medio la concebía precisamente a partir de esta traslación.

Sin embargo, para Quetelet el “hombre medio” o el “hombre tipo” hablaba de las características de un pueblo o de una nación como tipo racial, en virtud de una serie de

características y aptitudes, desde las antropométricas (talla, peso, etc.), las demográficas (morbilidad, tasas de fallecimiento, etc.) hasta las de comportamiento social (delitos, suicidios, duración de matrimonios, etc.); todo esto sería posible a partir del conocimiento de la correspondiente ley de los errores que a la fecha, es conocida como la distribución Normal (Doval, 2004).

Actualmente y gracias a que en casi todo lo que realiza el ser humano existen elementos de incertidumbre y dado que el manejo adecuado de la información está relacionado directamente con el problema de la toma de decisiones, la estadística se ha convertido en un campo efectivo para describir con mayor exactitud valores de datos socioeconómicos, políticos, psicológicos, biológicos, entre otras ramas del conocimiento, y sirve como herramienta para relacionar y analizar dichos datos. Todo lo que tiene que ver con la recolección, procesamiento, análisis e interpretación de datos numéricos pertenece al dominio de la estadística, pero los procesos que desarrolla, han pasado de centrar su interés en la recolección de datos y su presentación en tablas y gráficas, a la interpretación y análisis de dicha información.

2.1.2. La media aritmética. Según Vargas (1995) el valor de tendencia central de mayor interés es la media aritmética (o simplemente media), que representaremos por $\bar{x}$.

Aunque se trata de un mismo objeto matemático, debido a las peculiaridades de su cálculo, se tratarán por separado el caso discreto del caso continuo, distinguiendo también, según estén dados los datos: agrupados (frecuencias absolutas distintas a la unidad) o sin agrupar (frecuencias absolutas iguales a 1).

Definición en el caso discreto

- *Media aritmética para datos agrupados.* Sea X una variable estadística

discreta que toma los valores $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_k$ con frecuencias absolutas $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ respectivamente. se define la media aritmética como el valor:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i n_i}{N} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{N}$$

- *Media aritmética para datos sin agrupar.* En el caso particular de que cada uno de los K valores de la variable estadística aparezca una sola vez ($n_1 = n_2 = n_3 = \dots = n_k = 1$), como caso particular del anterior, la expresión de la media aritmética adopta la forma

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{N}$$

Propiedades de la media aritmética

1. La suma de las desviaciones de los datos con respecto a la media es cero. Se define la desviación al dato x_i con respecto al valor “a” como:

$$d_i = x_i - a$$

Así que la propiedad puede escribirse como:

$$\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}) = 0$$

$$\text{En efecto: } \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}) n_i = \sum_{i=1}^k x_i n_i - \sum_{i=1}^k \bar{x} n_i = N\bar{x} - N\bar{x} = 0$$

La media, por tanto, compensa las sumas de las desviaciones positivas y negativas. Por ello, se afirma que la media proporciona la localización de la distribución.

Si quisiéramos visualizar esta propiedad a partir de una distribución expresada en términos de su función densidad:

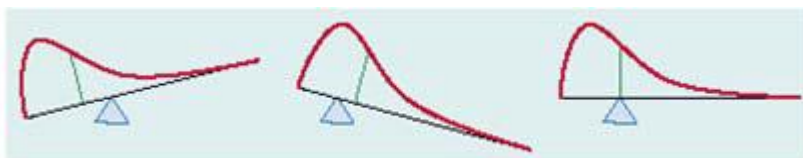


Figura 1: la media como centro de gravedad. Tomado de Behar & Yepes (2007).

La interpretación física nos dice que si justo donde se ubica la media aritmética se colocara un punto de apoyo y se colgara de los puntos donde se ubican los datos, el mismo peso en cada uno, entonces el sistema quedaría en equilibrio.

2. La media de los cuadrados de las desviaciones de los datos con respecto a un valor "a" es mínima, cuando $a = \bar{x}$. Es decir:

$$f(a) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2}{n} \text{ Tiene su mínimo en } a = \bar{x}$$

3. Si una serie de datos está formada por la repetición de un mismo dato, la media aritmética es ese dato constante. es decir, si $x_i = k$, para todo i, entonces $\bar{x} = k$

$$\text{Veamos: } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n k}{n} = \frac{nk}{n} = k$$

4. La media aritmética del producto de una constante por una variable es igual al producto de la constante por la media de la variable. Es decir, si $y_i = ax_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$; entonces $\bar{y} = a\bar{x}$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n ax_i}{n} = a \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = a\bar{x}$$

5. Si a todos los valores de una muestra se le suma una misma constante, entonces la media de la muestra queda aumentada en dicha constante.

Veamos

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i + k)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i n_i + k n_i)}{n} = \frac{\sum x_i n_i + \sum k n_i}{n} = \frac{\sum x_i n_i}{n} + \frac{\sum k n_i}{n} \\ &= \frac{\sum x_i n_i}{n} + \frac{kn}{n} = \frac{\sum x_i n_i}{n} + k \end{aligned}$$

Como $\frac{\sum x_i n_i}{n} = \bar{x}$ si sustituimos tendremos $\bar{y} = \bar{x} + k$

6. Si $Z_i = ax_i + by_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$; donde a, b son constantes, entonces

$$\bar{Z} = a\bar{x} + b\bar{y}. \text{ Veamos } \bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (ax_i + by_i)}{n} = a \frac{\sum x_i}{n} + b \frac{\sum y_i}{n} = a\bar{x} + b\bar{y}$$

7. Si en un conjunto de valores se pueden obtener dos o más subconjuntos disjuntos, la media aritmética del conjunto $\bar{x}$ se relaciona con la media aritmética de cada uno de los subconjuntos disjuntos de la siguiente forma:

$$\bar{x} = \frac{f_1 \bar{x}_1 + f_2 \bar{x}_2 + \dots + f_n \bar{x}_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n}.$$

8. Si una muestra de n elementos, se divide en k submuestras excluyentes y exhaustivas, que tienen $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ elementos $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \dots + n_k = n$, con promedios $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \dots, \bar{x}_k$ respectivamente, entonces el promedio de la muestra global estará dado por:

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + \dots + n_k \bar{x}_k}{n} \text{ Es decir, } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \bar{x}_i}{n}$$

9. La media, mediana y moda coinciden sólo si, la distribución es simétrica.

IMPORTANTE: Hay que tener en cuenta que la media aritmética es muy sensible a los valores extremos, es decir, a valores numéricos muy diferentes, (tanto por lo grande, o pequeño que sean), al resto de la muestra.

Media aritmética ponderada. Es la media aritmética que se utiliza cuando a cada valor de la variable (x_i) se le otorga una ponderación o peso distinto de la frecuencia o repetición. Para poder calcularla se tendrá que tener en cuenta las ponderaciones de cada uno de los valores que tenga la variable.

Se la suele representar como: $\bar{x}_w = \frac{\sum x_i w_i n_i}{\sum w_i n_i}$

Siendo w_i la ponderación de la variable x_i y $\sum w_i$ la suma de todas las ponderaciones.

2.2. Perspectiva didáctica

En esta sección se presentan elementos teóricos relacionados con aspectos didácticos afines a la media aritmética. Para empezar, se tienen en cuenta la resolución de situaciones problema. Para terminar, se hace énfasis a la teoría propuesta por Socas (1997) en su tesis doctoral sobre las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. También, para el estudio de los errores se tendrá en cuenta la investigación realizada por Radatz (1979).

2.2.1. Relación resolución de problemas, dificultades y errores. La resolución de problemas ha sido objeto de interés tanto en la práctica educativa en general como en el campo de la educación matemática, tal como lo confirman los informes internacionales propuestos en “Principio y Estándares para la Educación Matemática” del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003) y el informe Cockcroft (1985). Además, de documentos a nivel nacional como los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (2006).

Ahora bien, para relacionar la resolución de problemas con las dificultades, el presente trabajo plantea mostrar la estructura de la resolución de problemas y cómo en esta se

manifiestan las diversas dificultades (asociados a la complejidad de los objetos matemáticos, asociados a los procesos de pensamiento matemático y asociadas a las actitudes afectivas y emocionales), además entendiendo los errores con origen en las dificultades estos pueden aparecer en cualquiera de las fases que se proponen.

Para reconocer las primordiales características de la resolución de un problema matemático en el aula, Polya (1945) propone cuatro fases en la que se desarrolla la resolución de problemas; comprensión o interpretación del problema, planificación, ejecución del plan y supervisión, estas fases se han mantenido y algunos autores han renombrado pero han conservado una estrecha relación, en este sentido Schoenfeld (1992), presenta una caracterización o categorización de las fases que determinan el éxito o fracaso en los procesos de resolución de problemas.

Tabla 1

Autores de las fases del proceso de resolución de problemas

	Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4
Polya (1945)	Comprender el problema	Concebir un plan	Ejecutar del plan	Examinar la solución obtenida
Schoenfeld (1979)	Analizar y comprender un problema	Diseñar y planificar una solución	Explorar soluciones	Verificar la solución
Bransford & stein (1984)	Identificación del problema	exploración	actuación	Observación y evaluación
Mayer (1986)	Representación del problema	planificación	Ejecución	Verificación
Maza (1991)	Análisis del problema	planificación	ejecución	Generalización

A partir de los diversos procesos que forman parte de cada fase, y según las categorías propuestas para las dificultades, se logran evidenciar elementos concurrentes, de manera que se presenta la siguiente relación:

- Los elementos que hacen parte de las dificultades asociados a la complejidad de los objetos matemáticos se manifiestan en la fase uno y dos.
- Los elementos que hacen parte de las dificultades asociados a los procesos de pensamiento matemático se manifiestan en la fase tres.
- Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales que se reflejan en todas las fases.

Por consiguiente, en la **Tabla 2** se expone lo antes mencionado de la siguiente manera.

Tabla 2

Relación de resolución de problemas con dificultades Schoenfeld (1992)

Fase 1		
Dificultades asociadas a las actitudes	Conocimiento que incluye definiciones, hechos, fórmulas, algoritmos y conceptos fundamentales asociados con un dominio matemático particular o tema.	Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos
	Fase	
	Estrategias cognitivas o heurísticas que involucran formas de representar y explorar los problemas con la intención de comprender los enunciados y plantear estrategias de solución. Algunos ejemplos de estas estrategias son dibujar un diagrama, buscar un problema análogo, establecer sub-metas, descomponer el problema en casos simples.	
	Fase 3	

afectivas y emocionales	Las estrategias metas cognitivas que involucran conocimiento acerca del funcionamiento cognitivo propio del individuo (¿Qué necesito? ¿Cómo utilizo ese conocimiento?) Y estrategias de monitoreo y control del propio proceso cognitivo (¿Qué estoy haciendo? ¿Por qué lo hago? ¿A dónde voy?).	Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático
Fase 4		
	Las creencias y componentes afectivos que caracterizan la conceptualización del individuo acerca de las matemáticas y la resolución de problemas, y la actitud y disposición a involucrarse en actividades matemáticas. Esta fase se ve reflejada en todo el proceso de interpretación y resolución de problemas	

2.2.2. Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Es necesario recalcar como punto de inicio la estrecha relación entre errores, obstáculos y dificultades planteada por Socas (1997) pues alude que “Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores” (p.125).

Se infiere la idea de dependencia entre dichos conceptos para no seguir utilizándolos como semejantes en los distintos contextos y así poder distinguirlos, caracterizarlos y comprenderlos de la mejor manera.

“Las dificultades que se dan en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas son de naturaleza diferente y se pueden abordar, desde perspectivas distintas” (Socas, 1997, p.126). De manera que éstas vienen a ser el producto de una conexión de elementos intramatemáticos

(objetos, procesos de pensamiento) y extramatemáticos (procesos de cognición, actitudes). La clasificación que establece este autor de las dificultades agrupa su naturaleza (origen) en cinco categorías, de las cuales se tomarán tres como referencia del trabajo:

Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las matemáticas. Surgen por la forma en cómo se comunican los objetos matemáticos, es decir, la combinación del lenguaje matemático con el lenguaje natural, que pueden generar dificultades al usar palabras propias de las matemáticas o, a causa del empleo de términos comunes para hacer alusión a conceptos matemáticos, los cuales son poco frecuentes en la cotidianidad del estudiante por lo que genera una dificultad.

- *Interpretación de los signos matemáticos a partir del lenguaje común, asociación de conceptos matemáticos al lenguaje común.* Esta categoría está relacionada a los conflictos asociados a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos, es decir las palabras como raíz, potencia, producto, matriz, primo, factor, diferencial, integral, semejante, índice, función, etc., tienen significados diferentes en matemática y en el lenguaje común, de modo que el uso de estas palabras puede producir dificultades a causa de la confusión semántica implicada.
- *Palabras específicamente matemáticas, que por ser poco familiares son mal entendidas.* Esta categoría se relaciona con las palabras propias del lenguaje matemático, por ejemplo, hipotenusa, paralelogramo, coeficiente, isósceles, divisor, múltiplo, etc., que por ser poco usuales y habitualmente en el lenguaje común, suelen presentar al estudiante dificultades, al encontrarse con ellas únicamente en el lenguaje matemático.
- *Dudar entre las palabras de igual significado en el lenguaje habitual y matemático.*

Esta categoría está relacionada con las palabras de igual significado en lenguaje común y en lenguaje matemático, aquí el estudiante puede pensar que palabras en lenguaje común toman diferente significado cuando se aplican en matemáticas.

- *Dificultad en la interpretación del problema reflejados en una representación.* Esta categoría se relaciona con la interpretación de una situación problema cuando se presenta en tabla, figura, diagrama etc...

Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático. Están asociadas en la naturaleza de la lógica matemática, es decir, siempre ha existido en relación a los aspectos deductivos formales un temor, y ha producido que las demostraciones formales hayan sido excluidas de los currículos de matemáticas de secundaria en algunas instituciones.

- *Dificultad de establecer una deducción lógica (conjeturas, ejemplos contraejemplos, etc.).* Las dificultades que se constituyen a través de las rupturas del pensamiento matemático, es decir, que están asociadas a resolver problemas en un proceso lógico-matemático, hacer representaciones adecuadas del problema y crear estrategias de solución.
- *Dificultad asociada a lógica Social (asociar situaciones habituales con conceptos matemáticos).* Esta categoría está relacionada con que el sentido de la palabra está en función del contexto en que se enuncia, cuando se proponen problemas donde se busca que el interés matemático sea el planteamiento de una ecuación, pero a veces el contexto es socialmente ilógico.

Por ejemplo, en un problema de proporcionalidad, tres panaderos producen 100 donas en una hora. Si se tuvieran 5 panaderos ¿Cuántas donas producirán?

En esta situación no es razonable aplicar la proporcionalidad debido a que sabemos que el trabajo en equipo no genera un trabajo proporcional al número de personas, si no al ritmo de cada una de ellas.

- *Rupturas que se dan en relación con los modos de pensamiento matemático.* Se relacionan con las rupturas implícitas en los modos de pensamiento matemático. Los saberes matemáticos anteriores producen modelos implícitos para resolver los problemas matemáticos. En ocasiones estos modelos pueden ser adecuados, sin embargo, en otro momento se presentan como dificultad para el saber nuevo.
- *Expresar y aplicar un teorema o ecuación incorrecta por los elementos que toma de la representación o simplemente el teorema no es el indicado para resolver el ejercicio.*

Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas. En estas investigaciones la coacción afectiva comprende: la ansiedad, el miedo, entre otras actitudes negativas, produciendo obstrucciones de origen afectivo que actúan como resistencia a la actividad matemática del estudiante. Teniendo en cuenta la investigación de Gómez (2002).

2.2.3. Errores en el aprendizaje de las matemáticas. Los errores han sido una inquietud permanente para el docente. Regularmente en el proceso de construir conocimientos matemáticos se manifiestan errores, de ahí que, dicho proceso será responsable de obtener criterios de diagnóstico, corrección y superación a través de actividades que fomenten o impulsen el ejercicio de criticar las propias producciones de los estudiantes. Sin embargo, lo que más preocupa es la persistencia y abundancia de algunos de ellos.

Ciertamente los errores contribuyen en el aprendizaje de los diversos contenidos matemáticos y es indispensable que los docentes los reconozcan y se responsabilicen de la necesidad de superarlos con el objetivo de lograr un óptimo aprendizaje. Su análisis proporciona al docente una amplia información acerca de cómo se construye el conocimiento matemático, y constituye una magnífica herramienta para absolver el estado de conocimiento de los estudiantes, indispensable en el momento de realimentar el proceso de enseñanza y aprendizaje (Rico, 1995).

La importancia que como docentes se atribuye al error y en la manera en que se trabaja con él interviene en el aprendizaje y rendimiento académico de los estudiantes. Si se desean aprendizajes significativos, es primordial el conocimiento y el tratamiento del contenido en conjunto, docentes y estudiantes.

En este apartado se presenta el análisis de algunas concepciones sobre el error, antes, es necesario mencionar que los errores, se han manifestado como fallas, y en muy pocas situaciones se les da la oportunidad de ser un paso para avanzar o corregir (Engler, Gregorini, Müller, Vrancken & Hecklein, 2004) Sin embargo, tal como lo afirman Brousseau, Davis & Werner (citados por Rico, 1995) “los errores son, con frecuencia, el resultado de un procedimiento sistemático que tiene alguna imperfección; pero el procedimiento imperfecto lo utiliza el estudiante de modo consistente y con confianza. En estos casos, los errores muestran un patrón consistente” (p.8).

Los patrones comunes a que se someten los errores, la frecuencia con que aparecen y los propios errores cometidos por los estudiantes, son algunos de los principios que proporcionan la forma de entender los procesos mentales, es decir, los procesos no visibles, y donde solo es posible hacer conjeturas sobre su ocurrencia mediante manifestaciones indirectas. Además, estos elementos permiten inferir sobre las estructuras en que se van organizando los conocimientos.

Es por la regularidad con que aparecen ciertos errores, lo que ha posibilitado realizar clasificaciones de los mismos. Las categorías no son divisiones estáticas, y suelen coincidir unas con otras dado que es inusual que un error se deba a una única causa, sin embargo, permiten postular (o generar hipótesis) de las probables razones para su aparición, y conducir, al mismo tiempo, en el diseño, elaboración y aplicación de actividades para mejorar.

La idea de llevar a cabo cuestionarios o pruebas diagnósticas para la detección de errores, y la posterior clasificación con base en algunas categorizaciones vigentes, es una metodología que posibilita el “escaneo” del estado del conocimiento del estudiante y se convierte en una excelente ayuda al momento de reorganizar la práctica pedagógica.

Por ello, se analizan los errores que cometen estudiantes y se realiza una clasificación de los mismos a la luz de la taxonomía que ofrece Radatz (1979) a partir del procesamiento de la información, donde se establecen categorías generales así:

- ***Errores debidos a dificultades de lenguaje.*** Indica que el aprendizaje de conceptos, símbolos y vocabulario matemáticos es para muchos estudiantes un problema similar al aprendizaje. Estos errores son producto del mal uso de los símbolos y términos matemáticos, debido a su incorrecto aprendizaje.
- ***Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.*** Se refiere a la inclusión de todas las deficiencias de conocimiento sobre contenidos y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Este tipo de errores se originan por deficiencias en el uso de conceptos, contenidos y procedimientos para las tareas matemáticas.
- ***Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.*** La experiencia sobre problemas similares anteriores puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información. Los estudiantes siguen desarrollando operaciones

cognitivas incluso cuando las condiciones elementales de tareas matemáticas puestas en juego se hayan modificado. Permanecen en la mente aspectos del contenido o del proceso de solución, cohibiendo el procesamiento de nueva información. Este tipo de errores traen consigo cinco subtipos:

- Errores por perseverancia, en los que predominan elementos singulares de una tarea o problema.
- Errores de asociación, que incluyen interacciones incorrectas entre elementos singulares.
- Errores de interferencia, en los que operaciones o conceptos diferentes interfieren con otros.
- Errores de asimilación, en los que una audición incorrecta produce faltas en la lectura o escritura.
- Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas, en las que se puede identificar el efecto de una impresión errónea obtenida de un conjunto de ejercicios o problemas de aplicación.

2.3. Perspectiva curricular

En este apartado se toman como referencia los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) para abordar aspectos curriculares relacionados con la estadística en Colombia, y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) para sustentar la resolución de problemas mediante el uso de la media aritmética en grado noveno.

2.3.1. Los lineamientos curriculares y la estadística. En el campo de la educación matemática, la tendencia por la enseñanza de la estadística, como ya se había mencionado, hace que numerosas personas la utilicen, y que países como Inglaterra tuvieran la iniciativa de incluir en sus currículos la enseñanza de esta. Colombia no es la excepción, con relación a

la inclusión de la estadística en presencia del pensamiento aleatorio para comprender fenómenos de la vida cotidiana y de otras ciencias, es de suma importancia que este saber se encuentre desarrollado.

Mediante el desarrollo del pensamiento aleatorio los estudiantes serán capaces de formular y resolver preguntas utilizando la recolección de datos, aprendiendo a coleccionar, organizar datos y prepararlos para actividades como: formular preguntas que puedan resolverse a través del análisis de datos, seleccionar y utilizar métodos estadísticos apropiados para analizar datos, desarrollar, evaluar inferencias y predicciones basadas en datos y por último, entender y aplicar los conceptos básicos de probabilidad.

En consecuencia, según el MEN (2006) el desarrollo del pensamiento aleatorio “les permitirá interpretar, analizar y utilizar los resultados que se publiquen en periódicos y revistas, que se presenten en la televisión o que aparezcan en pantalla o en hojas impresas como productos de los distintos programas de análisis de datos” (pág.65).

De lo anterior, se puede deducir que la finalidad del MEN (1998) luego de mencionarse la necesidad que tiene la sociedad, de desarrollar la capacidad de interpretar la diversa información que se presenta en el medio, es establecer que en la educación colombiana se incorporen temáticas de la estadística y del pensamiento aleatorio, debe integrar la construcción de modelos de fenómenos físicos y del desarrollo de estrategias como las de simulación de experimentos y de conteos. También han de estar presentes la comparación y evaluación de diferentes formas de aproximación a los problemas, con el objeto de monitorear posibles concepciones y representaciones erradas. De esta manera el desarrollo del pensamiento aleatorio significa resolución de problemas.

Es así, como la actividad de resolver problemas según el MEN (1998) ha sido considerado como parte esencial en el aprendizaje de las matemáticas, puesto que, acercar al estudiante a las matemáticas por medio de situaciones problema, procedentes de la vida

diaria, es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo. Dado que, la resolución de problemas permite que los estudiantes adquieran confianza, desarrollen una mente inquisitiva y perseverante, aumenten su capacidad de comunicarse matemáticamente y su capacidad para utilizar procesos de pensamiento de más alto nivel.

Además, el MEN (1998) refiriéndose a la aplicación de los problemas acota que:

Tradicionalmente los alumnos aprenden matemáticas formales y abstractas, descontextualizadas, y luego aplican sus conocimientos a la resolución de problemas presentados en un contexto. Con frecuencia “estos problemas de aplicación” se dejan para el final de una unidad o para el final del programa, razón por la cual se suele omitir por falta de tiempo. (p.24)

Los problemas no se deben aplicar únicamente después del proceso de aprendizaje, sino que estos deben de emplearse como contexto dentro del cual tiene lugar el aprendizaje, puesto, que éste tiene lugar en todas las fases del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, tales como, la fase de aplicación, de exploración y desarrollo, donde los alumnos descubren el mundo de las matemáticas.

Schoenfeld citado en Juidías & Rodríguez (2007), plantea que una actividad es considerada como un verdadero problema cuando requiere que: a) El estudiante se interese o se involucre en la obtención de la solución; b) El estudiante no tenga medios matemáticos de fácil acceso para alcanzar la solución. Es decir, un problema va más allá de la mera utilización estandarizada y rutinaria de ejercicios, algoritmos o formulas. Esta es una de las características que permiten distinguir un problema de un mero ejercicio de aplicación.

Ahora bien, en consonancia con el MEN (1998) este trabajo se inscribe en el desarrollo de conocimientos básicos que tienen que ver con el Pensamiento aleatorio y sistema de datos, puesto que hace referencia a la interpretación y evaluación crítica del mundo físico a través de la búsqueda, recolección, representación y análisis de datos. Así

mismo el trabajo se enfoca en el proceso general de la resolución y planteamiento de problemas en el cual se le da la oportunidad al estudiante de crear estrategias para resolver problemas, encontrar, validar sus resultados e interpretar razonablemente, a partir de situaciones problema que involucran la media aritmética. Cabe rescatar que no se deja de lado los otros procesos generales ya que también se involucran en la actividad matemática. Por último, el contexto está representado en situaciones problema y ambientes que rodean al estudiante, en el cual se tienen en cuenta situaciones de las mismas matemáticas, sin dejar de lado la de la vida diaria y de otras ciencias. Es a partir del contexto donde se busca que el estudiante encuentre significados a conocimientos matemáticos.

2.3.2. Estándares básicos de competencia en matemáticas grados octavo y noveno. El MEN (2006) organizó los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas de acuerdo con los cinco tipos de pensamiento matemático: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional, y sus sistemas: sistemas numéricos, geométricos, de medidas, de datos y algebraicos-analíticos respectivamente. Sin embargo, también involucran los procesos generales que reflejan los conceptos y procedimientos matemáticos tales como: el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Y se refieren a los contextos en los cuales se pueden alcanzar los niveles de competencia elegidos para cada conjunto de grados.

Los estándares se distribuyen en cinco conjuntos de grados (primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a undécimo) para dar mayor flexibilidad a la distribución de las actividades dentro del tiempo escolar y para apoyar al docente en la organización de ambientes y situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo (MEN, 2006, P.76).

En cuanto a la formulación, tratamiento y resolución de problemas, promovidos por una situación problema, permiten desplegar una actitud mental insistente e indagadora, desarrollar una serie de estrategias para resolverlos, encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de ellos, modificar condiciones y originar otros problemas (MEN, 2006). En este sentido se ve la necesidad de plantear situaciones que posibiliten el desarrollo de estrategias de solución de diferentes actividades contextualizadas o no, las cuales permitan un cambio de actitud en la medida de resolver completamente un problema, obteniendo resultados más significativos.

En el siguiente esquema aparece la relación de algunos estándares articulados con el estudio de la media aritmética en el grado noveno. Para objeto de este trabajo se hace referencia a la coherencia horizontal y vertical, del pensamiento aleatorio y sistema de datos con los estándares de otros pensamientos y de él mismo.

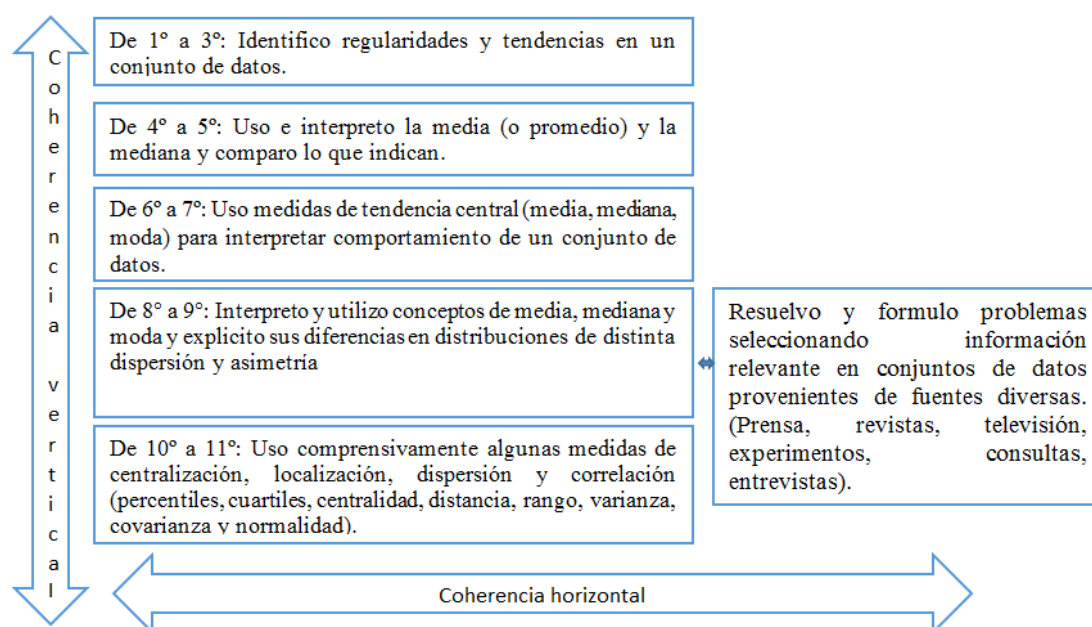


Figura 2: Coherencia Horizontal y vertical. Estándares de competencia en Matemáticas.

2.3.3. Marco contextual

La Institución Educativa Francisco José de Caldas está localizada en el municipio de Santander de Quilichao, ubicado en el sector norte del departamento del Cauca, a 97 km norte de Popayán y a 45 km del sur de Cali; por Resolución No 0566 de marzo de 2003 es reconocida con el nombre que actualmente se identifica. A la fecha, la Institución cumple 104 años al servicio de la comunidad Quilichagueña, años transcurridos con tesón y disciplina en búsqueda del mejoramiento académico y formativo de nuevas generaciones, con perfil de seres integrales actos para contribuir en el desarrollo de la sociedad colombiana. Además, se han entregado promociones de bachilleres Académicos quienes han obtenido un buen desempeño en las Pruebas de Estado ICFES.

La sede principal está ubicada en el barrio centenario calle 11 n° 11-57, cuenta con los niveles, media y básica secundaria; la otra sede está ubicada en el mismo barrio en la carrera 12 n° 9-84 10, cuenta con niveles de preescolar y básica primaria.

La Institución Educativa contribuye en la formación de un nuevo ciudadano que tenga saber, claridad en el saber y en el saber hacer, que sea ético, cuyo desempeño contribuya a la construcción de una sociedad más tolerante, justa, equitativa, pluralista, y donde se respeta la diferencia. En cuanto a su visión, la institución busca ser reconocida como una institución con excelente oferta educativa, de dinámica innovadora en los diferentes procesos pedagógicos cuyos egresados impacten de manera positiva en nuestra sociedad ya sea en el campo educativo o laboral.

A su vez, la institución cuenta con proyectos institucionales: proyectos pedagógicos como las olimpiadas de las ciencias del saber, simulacro Icfes, proyectos ambientales escolares (PRAES), proyecto lector que incluye actividades como: olimpiadas del lenguaje, goce de leer, cuento al patio, festival escolar de lectura y escritura, el periódico “sueños y

pensamientos”; y proyectos deportivos que buscan mejorar la convivencia, entre los integrantes de la comunidad educativa a través de actividades como: juegos deportivo interclases (voleibol, fútbol y baloncesto), salida institucional de integración de estudiantes : ciclo paseo, caminata ecológica, salida de docentes, administrativos y directivos. Además, de actividades sociales como celebración de efemérides y cumpleaños. Las actividades antes mencionadas se tendrán en cuenta en la elaboración de la prueba debido a que los problemas están directamente relacionados con el contexto del estudiante.

CAPITULO III

METODOLOGÍA

A continuación, se describe la metodología que se emplea para llevar a cabo la recolección de la información que evidencia lo concerniente a las dificultades y errores presentados por los estudiantes de grado noveno pertenecientes a la Institución Francisco José de Caldas, en relación a la resolución de situaciones problema que involucran el uso de la media aritmética y el correspondiente análisis de los mismos a la luz de las teorías propuestas por Socas (1997) & Radatz (1979) respectivamente. Para esto se propone el siguiente esquema, que da cuenta de forma detallada cada fase de estudio.

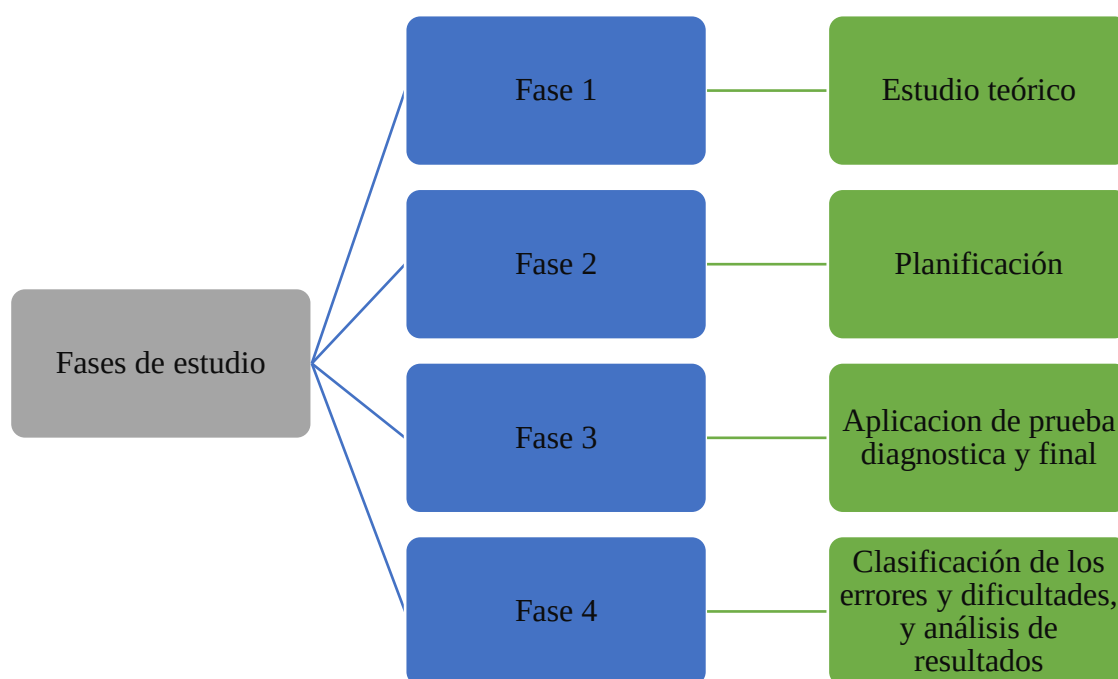


Figura 3: Fases de estudio

3.1. Estudio teórico

Esta investigación corresponde a un estudio de tipo cualitativo y estudio de casos, se caracteriza por el análisis y la categorización de las dificultades y errores presentados por los

estudiantes al ser enfrentados a situaciones problema correspondiente a la media aritmética. Para este propósito se realizó una revisión documental, qué han señalado diversos autores en investigaciones afines al aprendizaje del objeto matemático en cuestión: media aritmética. Con esta búsqueda se han determinado las dificultades y los errores más frecuentes; como también los problemas, situaciones o ejercicios que permitieron manifestar y sistematizar dichas dificultades y errores, así mismo la identificación de las estrategias erróneas que solían utilizar los estudiantes (escritas y verbales), la clasificación de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas propuesta por Socas (1997) y la taxonomía de los errores propuesta por Radatz (1979) con lo cual se construyó el marco de referencia presentado en apartados anteriores.

3.2. Planificación

En esta fase se tuvo en cuenta cuatro aspectos: el primer aspecto describe el tipo de investigación que se empleará en este caso, en el segundo, detalla el rediseño de instrumentos para llevar a cabo la investigación, de tipo cualitativo y estudio de casos, el tercero, describe la población atendida por la investigación y el cuarto aspecto está relacionado con los instrumentos que se llevarán al aula, es decir, la manera de ejecutar las pruebas diagnóstica y final.

3.2.1. Tipo de investigación. Puesto que la presente investigación tiene como finalidad la identificación y análisis de las dificultades y errores por parte de los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones problema que involucran el uso de la media aritmética en su resolución, esta problemática será abordada a través de un estudio de casos con la implementación de una prueba, que se enmarca en el campo cualitativo. Todo esto con el propósito de reflexionar críticamente sobre las prácticas de los estudiantes.

Tipo cualitativo. Se basa en descripciones detalladas de situaciones, eventos, personas, interacciones y comportamientos que son observables. Incorporando lo que los participantes dicen, sus experiencias, actitudes, creencias, pensamientos y reflexiones, tal como son expresadas por ellos mismos y no como un individuo que los describe (Díaz, Mendoza & Porras, 2011). Es por ello que se tomará este referente para la investigación, puesto que queremos detallar los errores y dificultades que presentan los estudiantes al resolver una prueba escrita, lo cual se detalla más adelante en el rediseño del instrumento.

Estudio de casos. Según Gómez, Gil & García (1996) el estudio de casos es considerado una estrategia metodológica para el diseño de una investigación, que implica un proceso de indagación que se caracteriza por el examen detallado, comprehensivo, sistemático y en profundidad del caso objeto de interés. Un caso puede ser una persona, una organización, un programa de enseñanza, una colección o un acontecimiento particular; en nuestro caso un grupo de estudiantes.

Para elaborar un estudio de casos se debe tener en cuenta ciertos elementos:

- *El problema y su contexto:* contextualizar el problema, en este caso vamos a tomar situaciones problema referentes al contexto de los estudiantes.
- *La unidad que vamos a analizar:* Puede ser una persona una familia, un grupo social, escuelas, un conjunto de relaciones o procesos, o el grupo de estudiantes de una clase de estadística de grado noveno el cual se tomó como unidad para analizar.
- *El tipo de estudio de caso:* este estudio de caso se comprende como un medio, es decir, un recurso secundario para el desarrollo posterior de otra metodología de investigación. y de tipo descriptivo en donde se busca dar cuenta de una situación

problemática en términos de una lógica centrada en un análisis primario del sujeto/objeto de estudio.

3.2.2. Diseño de instrumentos. Para el desarrollo de esta investigación se utilizó un instrumento de tal manera que la puesta en escena en el aula lograra evidenciar el objetivo general de esta investigación, se parte de la idea de una prueba escrita, ya que la revisión de la literatura así lo sugiere, pues facilita el análisis exhaustivo de los imaginarios, procesos, nociones y demás parámetros que poseen los estudiantes alrededor de un objeto o concepto en particular.

En palabras de Ministerio de Educación Pública (2011), una prueba es un instrumento de medición con el fin de que el estudiante demuestre la adquisición de un aprendizaje cognoscitivo, el dominio de una destreza o el desarrollo progresivo de una habilidad. Debido a su naturaleza, se requiere respuesta escrita por parte del estudiante.

La prueba escrita (ver anexo A) comprendió dos partes: la parte administrativa y la parte técnica, en la primera, se concibieron los datos que permitieron identificar las instrucciones generales de la prueba, por ejemplo: nombre de la institución, asignatura, docente, duración entre otros. La segunda, presentó los ítems con su respectivo nombre e indicaciones específicas. Un ítem es una pregunta que, en conjunto con otras, dan forma a una prueba, pueden ser de distintos tipos y clases de acuerdo con lo que se pretende medir:

- **Ítems objetivos.** Aquellos que el estudiante selecciona marcando una respuesta a elegir entre varias opciones dadas, o bien completando una respuesta, tales como: selección única, respuesta corta, correspondencia e identificación.
- **Ítems de desarrollo.** Se utilizan para la medición de procesos y productos de aprendizaje que no se pueden medir con ítems objetivos. Consiste en el planteamiento de una situación que el docente propone y el estudiante debe contestar

o resolver en forma amplia, para esto debe organizar sus propios conocimientos, seleccionar lo más importante que le permita exponer datos, métodos y conceptos, de forma organizada, lógica, coherente y relacionada. Los ítems de desarrollo son: respuesta restringida, resolución de problemas, resolución de casos y ensayo.

Cabe señalar, que para el rediseño de esta prueba se tuvo en cuenta los ítems de desarrollo, construcción y aplicación. Es necesario recalcar, que para lograr un instrumento bien terminado, se rediseñó una prueba diagnóstica tomada de Cobo, B. (2003); que fue implementada a estudiantes universitarios de décimo semestre de Licenciatura en Matemáticas como piloto y posteriormente a estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Niño Jesús de Praga ubicada en la misma localidad, con el fin de evaluar su pertinencia y calidad en el contenido, además de observar posibles errores de forma como redacción, comprensión de los ítems y la necesidad de la presencia del docente al resolver la prueba.

Para el rediseño de la prueba se elaboró la tabla 3, registrando cada ítem o enunciado de la pregunta, los objetivos de los mismos, la respuesta esperada (lo que se espera que el estudiante responda), error asociado (asignación de propiedades y comprensión de la media aritmética, ante una respuesta por parte del estudiante que lleve a diferentes consideraciones de este objeto matemático) e indicador del error (posibles respuestas que señalan el error asociado).

Además, se aplicó una entrevista y encuesta dirigida a describir las actitudes afectivas y emocionales que presentan los estudiantes frente a la estadística y si por esta razón ellos incurrir en errores que se relacionen con esta dificultad.

Tabla 3*Objetivos de los ítems de la prueba*

Ítems	Pregunta	Respuesta esperada	Error asociado	Indicador del error
1	¿Cuál es el valor esperado de respuestas para los siguientes grados durante las 7 rondas del concurso?	El estudiante suma todas las respuestas hechas por los grados 6°, 8° y 10° (pues son los grados que se piten en la tabla) y divide por el total de rondas a las que participó.	Asignación de la propiedad del elemento neutro	Admite las NP (no participó) como cero respuestas; suma las 7 rondas y las divide entre siete. Suma las rondas y las divide entre la cantidad de rondas en las que participo.
2	Si la coordinadora del concurso desea conocer un valor estimado o aproximado de respuestas de la Institución durante las 7 rondas, y así obtener el desempeño de esta. ¿Cuál procedimiento deberá seguir para obtener dicho valor?, ¿cuál es el número de respuestas aproximadas que se contestaron?, ¿Qué significa ese resultado?	El estudiante suma todas las rondas presentadas en la tabla (la de todos los grados) y las divide por la cantidad de las rondas participadas.	Asignación de la propiedad asociativa a la media aritmética (promedio de promedios)	Aplica el procedimiento de la media aritmética al conjunto de las medias halladas en el primer ítem. Halla el promedio de promedios de respuestas por ronda.

3	La coordinadora del concurso decide entregar premios a los tres estudiantes que tuvieron mejor rendimiento en las siete primeras rondas. Si para la coordinadora el rendimiento hace referencia al valor estimado de notas en las siete rondas.	¿Cuál es el rendimiento de cada estudiante durante las siete rondas? ¿A qué hace referencia el valor que encontraste para el rendimiento de Nicole? ¿A qué hace referencia el valor que encontraste para el rendimiento de Carlos?	El estudiante suma las notas en las siete rondas y divide esta suma entre el número de rondas. Terminando, argumenta este valor como el promedio de respuestas.	Asignación propiedad Clausurativa de la media aritmética. Error de lenguaje; confusión entre la media y la moda.	Recurre al redondeo de la media a cifras enteras para que esta “tenga sentido dentro del contexto” Se calcula el promedio de notas de Nicole, pero se argumenta este como el valor que más se repite.
4	La coordinadora ha decidido posponer la premiación con la intención de tener en cuenta una octava ronda, ¿se verá perjudicado el rendimiento del que consideraste como el mejor estudiante, si en la última ronda no obtuvo nota (cero)? Justifica.	Se tiene en cuenta el valor “0” como un dato, que aunque no cuenta para la suma, cuenta para la cantidad de datos por la cual se divide dicha suma.	No consideración de la alteración de la media aritmética ante el aumento en la cantidad de datos	Promedia los datos correspondientes a las siete primeras rondas admitiendo que el no calificar en la octava ronda, equivale a un valor “nulo” en el cálculo de la media aritmética. Promedia los datos, sin considerar el aumento en la cantidad de estos.	

5	Partiendo que Salomé en las siete primeras rondas obtuvo un rendimiento promedio en su calificación de 7 por ronda, ¿cuál debería ser su nota en la octava ronda, para que su rendimiento no se modifique, y cómo lo hiciste?	El estudiante tomará el mismo valor de la media como la nota que se debe obtener en la octava ronda.	No consideración de la media como valor esperado.	Hace una reversión algorítmica con el procedimiento de la media aritmética
6	Si durante una octava y novena ronda, Salomé no obtiene nota de desempeño y se debiera dar un número que representara el desempeño por cada ronda, ¿cuál será la nota representativa que obtuvo por ronda esta estudiante teniendo en cuenta los resultados en las siete primeras rondas?	El estudiante argumenta que la nota de desempeño en las dos últimas rondas está fuera de las notas que frecuentemente obtiene Salomé, por lo que la media aritmética no da un valor representativo de la nota de Salomé en las nueve rondas.	Selección persistente de la media como representante de los datos.	Como las notas de las rondas 8 y 9 son cero, entonces estos valores no tienen algún efecto sobre el resultado promedio del rendimiento de Salomé, por lo que la media aritmética es un valor representativo. Se promedian las notas que obtuvo Salomé en las 9 rondas y se divide por 9, el resultado es el valor representativo de notas de Salomé, distintamente del valor de los datos. Se suman la cantidad de respuestas y se dividen entre tres.
7	Acorde con la tabla anterior, entonces en promedio Santiago obtuvo ____ puntos por ronda. ¿Describe cómo encontraste el resultado?	El estudiante tiene en cuenta la cantidad de respuestas de cada valor que hizo Santiago y utiliza el algoritmo de la media ponderada o escribe por extensión cada	Cálculo de la media ponderada sin considerar las frecuencias	Se suman los valores de las respuestas y se divide por tres (que corresponden a la cantidad de datos que visualizan de acuerdo a que solo hay tres categorías).

uno de los datos y
utiliza el algoritmo de
la media aritmética.

3.2.3. Caracterización de la población. Para el presente estudio se escogió de forma aleatoria a 36 estudiantes de grado noveno, cuyas edades oscilan entre los 13 y 15 años, igualmente al azar se escogieron 3 estudiantes para la entrevista y a los demás se les aplicó la encuesta.

3.2.4. Puesta en acto en el aula. La prueba rediseñada se implementó a estudiantes de grado noveno y se desarrolló en un primer momento de manera individual con el propósito de certificar la diversidad de pensamientos de los estudiantes, de modo que no se vean afectados por otros estudiantes con menor o mayor dificultad. En un segundo momento se realizó la prueba de forma grupal con el objetivo de implementar la metodología de resolución de problemas. Las modificaciones que se hicieron a la prueba después de su primera implementación posibilitaron que no se realizara intervención, tanto del docente a cargo, como de las investigadoras.

Dentro de las instrucciones iniciales, se indicó a los estudiantes el uso de la calculadora para aligerar los resultados, no obstante, los procedimientos fueron registrados en la guía que se les entregó con el fin de obtener un registro escrito para su posterior análisis. Además, no se entregaron hojas adicionales para resultados, la guía con los ítems tuvo suficiente espacio para que el estudiante lo resolviera, de esta manera evitamos el ingreso de hojas que pudieran complicar su análisis debido a la incorrecta organización de los ítems o la pérdida de hojas adjuntas.

3.3 Resultados y análisis de resultados

Durante el proceso de investigación se observaron diversos errores y dificultades que presentaron los estudiantes cuando resolvieron la prueba. Para poder realizar el análisis de los resultados obtenidos se diseñaron las categorías de análisis tomadas específicamente de la taxonomía de los errores propuesta por Radatz (1979) relacionadas con el procesamiento

de la información, lo planteado por Socas (1997) asociadas con el lenguaje y los procesos de pensamiento matemático y lo relacionada con actitudes afectivas y emocionales propuesto por Gómez (2002).

3.3.1 Categorización de análisis y nomenclatura de instrumentos. En la **Tabla 4** se presentan estas categorías propuestas por 3 tipos de dificultades (A, B, C), a estas se les asignan unos elementos que hacen parte de cada categoría (a, b, c, d) y 3 tipos de errores (1, 2, 3), igualmente se le asignan unos elementos que hacen parte de estos (i, ii, iii, iv, v).

Tabla 4
Nomenclatura de las dificultades y errores

		Categoría	Nomenclatur a
Dif i c u l t a d e s	Dificultades asociadas a la complejidad (Comprensión y comunicación) de los objetos matemáticos	Interpretación de los signos matemáticos a partir del lenguaje común, asociación de conceptos matemáticos al lenguaje común.	Aa
		Palabras específicamente matemáticas, que por ser poco familiares son mal entendidas.	Ab
		Dudar entre las palabras de igual significado en el lenguaje habitual y matemático.	Ac
		Dificultad en la interpretación del problema reflejados en una representación.	Ad
	Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático	Dificultad de establecer una deducción lógica (conjeturas, ejemplos contraejemplos, etc.)	Ba
			Bb
		Dificultad asociada a lógica Social (asociar situaciones habituales con objetos matemáticos).	Bc
		Rupturas que se dan en relación con los modos de pensamiento matemático.	
		Expresar y aplicar un teorema o ecuación	Bd

	incorrecta por los elementos que toma de la representación o simplemente el teorema no es el indicado para resolver el ejercicio.	
Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas	La relación con experiencias pasadas en las matemáticas que producen rechazo a los problemas matemáticos.	Ca
	Las emociones que se desarrollan en los procesos de resolución de un problema matemático que impiden el buen desarrollo o la finalización de la situación problema.	Cb
	La actitud que desarrolla el profesor de matemáticas hacia sus estudiantes que produce rechazo a la situación problema.	Cc
	Las emociones que se desarrollan al tratar de solucionar un problema en grupo que impiden los acuerdos de solución y producen rechazo a desarrollar el problema.	Cd
Errores debidos a dificultades de lenguaje	Plantea una ecuación que no corresponde con el enunciado de un problema estadístico.	1i
	Toma mal un dato estadístico en la solución de un problema.	1ii
	Plantea una solución a un problema estadístico que no corresponde con el enunciado del mismo.	1iii

Errores

Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos	Realiza operaciones y usa notaciones de la media aritmética de forma deficiente	2i
	Al obtener un resultado en diferentes operaciones no determina la pertinencia del mismo.	2ii
	Utiliza en forma adecuada un algoritmo para la solución, pero no llega a su solución.	2iii
	Usa inadecuadamente y no interpreta una definición estadística asociada al objeto media aritmética	2iv
Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento	Asignación de propiedades: asociativa, Clausurativa y elemento neutro	3i

Para referirnos a las evidencias escritas, videos y entrevista se plantea el tipo de nomenclatura descrito en la **Tabla 5** que facilita la constatación de la información.

Tabla 5
Nomenclatura de evidencias

Instrumento	Ejemplo	Nomenclatura
Prueba escrita	Situación problema 1	(S1)
Video	Video 1 en el minuto 0:12 hasta el minuto 0:35	(V1, T 0:12-0:35)
Entrevista	Entrevista 2	(EN2)
	No corresponde con ninguna categoría	NC

3.3.2 Recolección y análisis de resultados. A partir de los errores encontrados y con el objetivo de sustentarlos, se realizó un análisis más amplio frente a las pruebas escritas y algunos videos que se tomaron en el momento que los estudiantes desarrollaron la prueba, la **Tabla 6** muestra la evidencia del error cometido, una breve explicación y la categoría de dificultad que justifica el tipo de error.

Errores encontrados en la prueba relacionados con las dificultades asociadas a la complejidad del objeto matemático.

Tabla 6

Errores relacionados con la dificultad A

Numero de evidencia	Error presentado por el estudiante	Categoría de dificultad que lo justifica
1	Corresponde S3 Categoría del error 1iii A) Nicol tuvo una calificación del 35 % de un total del 100%. El rendimiento de Nicol podría ser un rendimiento malo, es malo B) Carlos tuvo un 54% de un 100%. Se podría decir que Carlos tuvo un desempeño medio a la prueba y alto comparándolo con Nicol	El error aquí, se debe a que el estudiante asume que cuando se refiere al valor del rendimiento es lo mismo que hablar del valor porcentual. Aa
2	Corresponde S2 Categoría del error 1i R/ Para saber el valor aproximado de respuestas de la Institución durante las 7 rondas se deben sumar los resultados de cada una de las grupos. $52 + 60 + 44 + 81 + 69 + 47 = 353$ total de respuestas aproximadas. * Si da un valor representativo, pero no sería correcto porque en las pruebas individuales el total de preguntas es de 140. $140 \times 6 = 840$ total de preguntas	El error aquí presente se debe a la asociación de valor aproximado con el valor total de respuestas. El estudiante asume que cuando se refiere a valor estimado o aproximado de respuestas es lo mismo que hablar de valor total de respuestas. Ab
	Corresponde S1 Categoría del error 2iv	Como se evidencia en la Ab

3

Grado 10°	Procedimiento	Que significado tiene el resultado
69	Sumo el resultado de cada ronda: 69 17 + 9 + NP + 17 + 8 + NP + 18	Es un resultado promedio porque está muy cerca de la mitad del total de preguntas: 140

imagen el estudiante entiende el promedio como: valor que está cerca a la mitad del total de respuestas, desconociendo la relación que hay entre el número de respuestas y el número de rondas

Corresponde S7

Categoría del error 2i

4

Acorde con la tabla anterior, entonces en promedio Santiago obtuvo 9 puntos por ronda. ¿Describe cómo encontraste el resultado?

R// sume la cantidad que me da luego lo dividi entre 7. que fue el valor de las respuestas correctas.

Como se evidencia en la imagen el estudiante asume que el promedio en puntos de Santiago se obtiene realizando el algoritmo de la media aritmética, sin tener en cuenta la ponderación de los datos.

Ab

Corresponde S1

Categoría del error 3iii

5

Grado 8°	Procedimiento	Que significado tiene el resultado
44/140 la media es 6.28	4 + 13 + 13 + 3 + 11 = 44 y 2 NP $\frac{44}{2} = 6.28$	El 44 es el valor estimado de los datos que tuvieron. El NP es igual a 0

Como se evidencia en la imagen el estudiante asume el valor estimado como la suma de todos los datos y los NP como ceros, no haciéndolos parte de la suma, pero sí de la división.

Ab

6

Corresponde S2

Categoría del error 2i

el procedimiento es sumar el total de preguntas que contestaron bien, cada grado.

Se evidencia que el estudiante asume que el valor estimado de respuestas durante las siete rondas, es lo mismo que el total de preguntas contestadas de cada grado.

Ab

Corresponde S7

Categoría del error 2i

$$1 = 2 \times 21 = 42$$

$$2 = 3 \times 19 = 57$$

$$3 = 5 \times 23 = 115$$

$$42 + 57 + 115 = \frac{214}{3} = 71,33$$

R/. Pues yo los sume los resultados y los dividi por el puntaje que se le da a las preguntas según el grado de dificultad.

7

EJEMPLO: $1+1+1 = \frac{3}{3} = 1$

Como se evidencia en la imagen el estudiante no interpreta la representación tabular del promedio de puntos de Santiago, pues divide los datos entre tres que son los grados de dificultad sin tener en cuenta el puntaje promedio por ronda.

Ad

En la **tabla 7** se organizan los errores evidenciados en las pruebas escritas y videos en el proceso de resolución de problemas, asociando errores que tiene la misma naturaleza relacionados con la complejidad del objeto matemático.

Tabla 7
Clasificación de errores asociados a la dificultad A

Número de Evidencia	Error	Categoría	Cantidad de estudiantes	Valor porcentual
2 y 6	Errores debidos a dificultades de lenguaje	Ab	21	58,3%
3 y 4	Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.	Ab	10	27,7 %
5	Errores debidos a la asignación de propiedades: elemento neutro y asociatividad en la media aritmética.	Ab	16	44,4%
7	Error al representar los datos del problema.	Ad	4	11,1%

De acuerdo a las evidencias encontradas, se pudo observar en los errores presentados para la dificultad A, que ninguno de los estudiantes incurrió en el error de tipo Ac, se especula que los estudiantes por haber tenido un acercamiento con términos de la estadística, fue usual que distinguieran palabras que tienen el mismo significado en el lenguaje habitual y en el matemático. Sin embargo, 3 estudiantes incurrieron en el error de tipo Aa asociando términos estadísticos al lenguaje habitual (ver evidencia 1).

Así mismo, en Ab se pudo observar que la gran mayoría cometen errores de este tipo debido a, que confunden o desconocen el significado de términos estadísticos, en las evidencias 2, 3, 5 y 6 se percibe que los estudiantes tienen una gran confusión al hablar de

valor estimado y valor total de respuestas, entendiendo el valor estimado como algo semejante al número total de respuestas durante las siete rondas.

Mientras tanto, en la evidencia 4 los estudiantes no tienen confusión o asociación con otro termino sino, que desconocen totalmente el objeto matemático estadístico puesto en juego, en este caso la media ponderada, donde se les pregunta a los estudiantes por el promedio de puntos de Santiago (ver anexo 1); el estudiante considera el peso de cada uno de los datos, pero, al momento de calcular el promedio se olvida de hacer la división por la cantidad de rondas (siete). Es así, que se realiza como promedio la suma de los datos y se dividen entre la suma de frecuencias, es decir, hay una errónea lectura de la variable y un mal procedimiento.

De manera que, se evidencia un argumento que posibilito observar el procedimiento por el cual se encontró la respuesta, siendo esta errada, pues no corresponde a la respuesta esperada, entonces una gran de estudiantes presentan este error al resolver situaciones que requieran el uso del algoritmo de la media ponderada, puesto que no presentan un procedimiento o argumento verbal o en la misma medida se presentan casos en los que los estudiantes no contestan el ítem; ya sea por desconocimiento de la media ponderada, confusión entre las dos medias, falta de comprensión gráfico y verbal etc.

Posteriormente, en la evidencia 5 el error coincide a la asignación de valor nulo “0” a los datos no numéricos de la tabla, al momento de solicitar el promedio de respuestas de cada grado, a pesar de hacer mala asignación de NP como cero respuestas, este valor es tomado en cuenta tanto en el numerador como en el denominador en el algoritmo de la media aritmética, por lo que no estaría representando un valor nulo para los estudiantes. Ahora bien, se observa que los estudiantes presentan un error en cuanto a la cantidad de datos que usan para realizar el promedio, no hay coherencia entre los datos sumados y la cantidad de datos que cuenta para tomarla como divisor.

Con respecto a, la categoría Ad que consiste en los errores relacionados con la interpretación errónea del problema y/o en una representación, se encontraron errores comunes como se describen a continuación:

Como lo muestra la evidencia 7, los estudiantes presentan errores en la interpretación de la representación del problema: los estudiantes hacen una lectura errónea de la variable a tener en cuenta y se realiza el promedio considerando como variable las frecuencias registradas en la tabla, es decir, se suman las tres frecuencias y se divide por el número de sumandos.

Más aun, en la evidencia 5 vemos que los estudiantes realizan una interpretación y análisis incorrecta de los datos en la tabla, por tanto, los valores que se obtienen por promedio no son los correctos, dado que se asigna la propiedad del elemento neutro a la media aritmética.

En conclusión, la categoría Ab fue la que se presentó con mayor frecuencia en la población objeto de estudio, debido a que la mayoría de errores encontrados en la prueba se ubican en esta dificultad, siendo los errores debidos a dificultades de lenguaje los presentados con mayor frecuencia en un 58,3%.

Errores encontrados en la prueba relacionados con las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático

Tabla 8

Errores relacionados con la dificultad B

Número de evidencia	Error presentado por el estudiante	Categoría de dificultad que lo justifica
1	Corresponde S2 Categoría del error 1ii Sumas los resultados de todos los grados las 7 rondas = 353 y dividirlo por las 140 preguntas $\frac{353}{140} = 2.52$	Los estudiantes al calcular el valor estimado de respuestas de la institución durante las siete rondas, tiene en cuenta los datos para la suma pero al dividirlo toma datos arbitrarios que no ayudan en la solución del problema. Ba
2	Corresponde S2 Categoría del error 2iii Para durante las 7 rondas la institución obtuvo un promedio de 353 puntos, se suman todos los resultados de los grados y de las rondas, si sería un valor representativo, la suma sería como un total de 353. $\frac{353}{38} = 9.28$ se suman todos los grados y se divide por 38 por que es el número de rondas que participan.	Como se ve en la imagen el estudiante al calcular el promedio de respuestas por ronda cometen un error aritmético cuando suman todos los datos registrados en la tabla y le restan los datos en los que no participo, obteniendo como resultado 38 como número de rondas participadas. Ba

Corresponde
S2

Categoría del error 3i

3

media: $52 + 60 + 44 + 81 + 69 + 47 = \frac{353}{7} =$
2158,83

Justificación: Para la media la hallé sumando los resultados de cada grado y dividiéndolo por el número de grados.

Como se observa en la imagen los estudiantes asignan la propiedad asociativa a la media aritmética, y a partir de esto se evidencian errores en el cálculo de la media asumiendo el número de rondas.

Ba

Corresponde
S4

Categoría del error 3i

4

U
si porque si los demás estudiantes sacan 10 y el suca 0, aunque tenga el mayor puntaje hasta ahora si carlos saca 10 y lo supera.

Como se ve en la imagen, los estudiantes argumentan su respuesta mediante la comparación de las notas que pueden lograr sus compañeros, sin tener en cuenta la alteración de la media ante el aumento en la cantidad de datos.

Ba

5

Corresponde

Categoría del error 3i

Como se evidencia, los estudiantes

S5

que su rendimiento no se modifique, y como lo hizo.

se debe sumar por 0 porque cero 0 más 7 da como resultado 7.

asumen como módulo de la media aritmética el valor "0", el cual no modificaría los resultados de la media aritmética.

Ba

Corresponde
S3

Categoría del error 3i

6

9	7	9	53 = 8
5	8	7	44 = 7
8	7	6	54 = 8
10	8	9	63 = 9
5	6	5	35 = 5
3	6	8	24 = 3

Como se presenta, el procedimiento realizado por los estudiantes es correcto, sin embargo el error radica en que no consideran como válidos los resultados decimales de la media aritmética y procede al redondeo de los mismos, por lo que llegan a conclusiones sobre la igualdad de la media para dos compañeros, dado que tienen calificación diferente.

Ba

Corresponde
S7

Categoría del error 2i

7

0	63
10	

Acorde con la tabla anterior, entonces en promedio Santiago obtuvo 6.3 puntos por ronda. ¿Describe cómo encontraste el resultado?

$$63 \div 10 = 6.3$$

Como lo evidencia la imagen, los estudiantes presentan errores al resolver la media ponderada, puesto que suman la cantidad de respuestas y lo dividen entre la suma de los valores de grado de dificultad.

Bc

	Corresponde S7	Categoría del error 1i	Como lo muestra la imagen, los estudiantes para obtener el promedio de puntos de Santiago no tienen en cuenta el peso de los datos. Además, en uno de los procedimientos aritméticos asume que la suma de $9+10+9+8+10+8+9=68$	Bc
8	Santiago dificultad hubiera tenido en la 4 y 6 ronda son los valores más bajos $9+10+9+8+10+8+9=68$ $68 \times 2 = 136$ $136 \div 21 = 6.4$ Suma los resultados de la ronda 4 x por grado de dificultad Suma el valor multiplicado lo divide por la cantidad de dificultades			

	Corresponde S1	Categoría del error 1i	El error evidenciado en esta imagen corresponde a que los estudiantes desarrollan un procedimiento que no da solución al problema.	Bc			
9	<table><tr><th>Procedimiento</th><th>Que significado tiene el resultado</th></tr><tr><td> suma = 52 $20 \times 7 = 140$ $140 + 52 = 192$ $192 \div 2 = 96$ </td><td> $= 96$ </td></tr></table>		Procedimiento	Que significado tiene el resultado	suma = 52 $20 \times 7 = 140$ $140 + 52 = 192$ $192 \div 2 = 96$	$= 96$	
Procedimiento	Que significado tiene el resultado						
suma = 52 $20 \times 7 = 140$ $140 + 52 = 192$ $192 \div 2 = 96$	$= 96$						

	Corresponde S6	Categoría del error 2i	Los estudiantes presentan el error al momento de realizar el procedimiento de la media para obtener la nota representativa, asumiendo que $56/7=7$.	Bc
10	LA NOTA REPRESENTATIVA QUE OBTUVO POR RONDA ESTE ESTUDIANTE TENIENDO EN CUENTA LOS RESULTADOS EN LAS SIETE PRIMERAS RONDAS ES 7 POR QUE $\frac{49}{7} = 7$ Y $\frac{56}{7} = 8$.			

11	Corresponde S1	Categoría del error 2i	Error presentando en la imagen se
----	----------------	------------------------	-----------------------------------

	Grado 8°	Procedimiento	Que significado tiene el resultado		
	44	$4+13+13+3+11$	que obtuvo en mayor puntaje que el de sexto.	debe a que el estudiante no realiza correctamente el procedimiento aritmético que permite calcular la media, asumiendo que el promedio de respuestas se obtiene sumando solamente los datos.	Bc
12	Corresponde S6 que su rendimiento no se modifique, y como lo muestra:	Categoría del error 2ii Su nota en la 8va ronda de ser 7 Por que Si sumamos $49+7$ me da 56 y es un múltiplo de 7 Por lo cual tiene 7ma y dividiendo $56 \div 7$ me da 7 igual que $49 \div 7 = 7$		Como lo muestra la evidencia, el procedimiento utilizado por el estudiante puede ser válido en cuanto a la consideración de la media aritmética como operación, sin embargo se toma como error debido a que no hay interpretación de la media como un valor esperado para resultados futuros.	Bc
13	Corresponde S7 ronda. ¿Describe cómo encontraste el resultado?	Categoría del error 2iv Sume la cantidad que me da la tabla y me da 63 luego sumo $2+3+5=7$ y divido $63/7=9$.		En esta imagen se puede evidenciar que el estudiante realiza incorrectamente los procedimientos aritméticos, al calcular el promedio ponderado. Además, asume que $2+3+5=7$.	Bc

	Corresponde S7	Categoría del error 2iii	Como se observa en la imagen, los estudiantes establecen la ecuación de manera correcta de la media aritmética, sin embargo, para este ítem se requiere el uso de la media ponderada, el error se evidencia en no considerar el valor de respuestas correctas según el grado de dificultad.	
14	Suma la cantidad= 63 y lo divide por el número de rondas = 7			Bd
	Corresponde S3	Categoría del error 3i		
15	$\frac{60}{7} = 8.57$ $= 9$ Se suma $14 + 1 + 12 + 8 + 13 + 5 + 7 = 60$ $\frac{60}{7} = 8.57$ $= 9$ El resultado es la suma de los puntos obtenidos en cada ronda, dividido por el número de rondas		El error evidenciado en la imagen, es que los estudiantes asignan la propiedad clausurativa a la media aritmética.	Bd

En la **tabla 9** se organizan los errores evidenciados en las pruebas escritas y videos en el proceso de resolución de problemas, asociando errores que tiene la misma naturaleza relacionados con los procesos de pensamiento matemático.

Tabla 9
Clasificación de errores asociados a la dificultad B

Número de Evidencia	Error	Categoría	Cantidad de estudiantes	Valor porcentual
1	Errores debidos a dificultades de lenguaje, al extraer datos estadísticos a la solución del problema.	Ba	7	19,4%
2	Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.	Ba	26	72,2%
3,4,5,6	Errores debidos a la asignación de propiedades: elemento neutro, clausuratividad y asociatividad a la media aritmética.	Ba	17	47,2%
7,10, 11,12 y 13	Errores procedimentales en el cálculo de la media aritmética y la media ponderada.	Bc	34	94,4%
8,9	Errores de tipo aritmético en la operación suma.	Bc	13	36,1%
14	Errores procedimentales a partir de una representación.	Bd	24	66,6%
15	Error al extraer datos de la representación ubicándolos en el algoritmo de la media ponderada.	Bd	34	94,4%

Para esta dificultad se manifestaron errores relacionados a los procesos de pensamiento matemático, teniendo en consideración la teoría en que se apoyan las dificultades, según la tabla anterior se puede afirmar que los estudiantes no inciden en errores de tipo Bb vinculados a la lógica social, esto puede deberse a que al interpretar la situación, simplemente rastrean los elementos necesarios para solucionarlos, pero, sin llegar a una interpretación crítica de los datos presentados en la situación problema, no se indagan sobre la pertinencia de los datos a espacios reales.

Para la categoría Ba se manifestaron errores relacionados con la deducción lógica, de estos se pueden caracterizar los errores al sustentar alguna propiedad que no se cumple para la media aritmética, por ejemplo en la evidencia 3, 4, 5 y 6 los estudiantes a través de su argumentación y los conocimientos previos asumen propiedades incorrectas al decir “debería ser cero porque todo número sumado por cero da como resultado el mismo” y “sumar todos los datos y dividirlo entre 7 que es el número de rondas” dichas aseveraciones que realizan los estudiantes se relacionan con la forma de realizar un proceso de deducción lógica frente a la situación problema, haciéndose evidente en varios casos deducciones equivocadas para seguir en la solución del problema, este tipo de error puede deberse a los conocimientos previos que tiene el estudiante en las propiedades de la suma.

Otros tipos de errores manifestados en esta categoría son los relacionados con errores al establecer datos, conjeturas o procedimientos erróneos, en las evidencias 2, 7, 10 los estudiantes argumentan su respuesta o realizan procedimientos con elementos que no les brinda la situación problema o en ocasiones son propuestos arbitrariamente, con la intención de completar los datos que les exige el algoritmo.

Para la categoría Bc tenemos los errores relacionados con procedimientos, algoritmos de carácter aritmético y algebraico y los relacionados con la media aritmética, este tipo de errores identificados en la tabla anterior se presentan de la siguiente manera:

Errores procedimentales en el cálculo de la media aritmética y la media ponderada, este tipo de errores se presentan en los estudiantes cuando resuelven la situación problema (1 y 7) de la prueba, mostrando errores en los resultados de los promedios de respuestas por ronda y en el promedio en puntos que debían hallar según la indicación de la situación problema, tal como se evidenció en el análisis de la dificultad A.

En otras evidencias errores debidos a la asignación de propiedades: elemento neutro, clausuratividad y asociatividad a la media aritmética. En la evidencia 3 los estudiantes suman los promedios obtenidos para la situación problema 1 y los divide en la cantidad de sumandos (grados), este procedimiento indica la asignación de la propiedad asociativa a la media aritmética, propiedad que solo se cumple cuando la cantidad de elementos en el conjunto es un número no primo, y cada subconjunto tienen igual cantidad de elementos, error reportado frecuentemente en las investigaciones.

En la evidencia 15, los estudiantes realizan de forma correcta el procedimiento para calcular el promedio de repuestas por ronda de cada grado, pero el error radica en que el estudiante no considera como válidos los resultados decimales de la media aritmética y procede al redondeo de los mismos, por lo que llega a conclusiones sobre la igualdad de la media para dos grados, dado que tienen cantidad diferentes de respuestas, haciéndose notoria la asignación de la propiedad Clausurativa a la media aritmética.

Otros errores evidenciados son los que se manifiestan en la evidencia 4, los estudiantes presentan argumentos que se consideran como incorrectos ya que no hay una consideración del rendimiento del mejor estudiante en función de sus propios resultados,

sino que lo argumenta partiendo de lo que pueden lograr sus compañeros para superarlo. En otro caso no se considera una alteración en el rendimiento del estudiante, pues asegura que el no obtener nota no influenciaría en el promedio. En esta respuesta se evidencia que el estudiante asume el valor “0” como valor nulo (error), el cual no tienen efecto alguno sobre el promedio de notas del mejor estudiante del colegio.

Otro tipo de error se relaciona con la comprensión de la media aritmética y es la no consideración de la media aritmética como un valor esperado. En la evidencia 12 Se hace recurrencia a la reversión algorítmica de la media aritmética agregando el dato “7” en la suma del numerador, y dividiendo dicha suma por la cantidad total de datos (8). Debido que 7 es el promedio de notas de Salomé en las primeras siete rondas, el procedimiento puede ser válido en cuanto a la consideración de la media aritmética como operación, sin embargo, en este caso es tomado como error pues no hay una interpretación de ésta como un valor esperado para resultados futuros (esperanza matemática). En otro caso, se afirma que Salomé no debe hacer cesta alguna debido a que este valor de dato “0” no afectaría el promedio de notas hasta la octava ronda. El error presente aquí es que se asume como módulo de la media aritmética el valor “0”, el cual no modificaría los resultados de la media aritmética.

Para la categoría Bd tenemos errores relacionados con la forma en que se utiliza el algoritmo para calcular la media ponderada a partir de una representación o del mismo enunciado de la situación problema, también se puede evidenciar el mal uso de dicho algoritmo con errores en la forma de presentarla, al momento de ubicar los datos en la expresión o al momento de hacer la correspondencia de los elementos de la fórmula con los datos que brinda el problema.

En un primer caso, en la evidencia 13 se puede observar los errores que cometen los estudiantes al realizar el reemplazo en algoritmo para calcular la media ponderada, por

ejemplo, el reemplazo incorrecto ubicando la suma de valor de las respuestas como el denominador del algoritmo de la media aritmética, además, suma incorrectamente, por dicha razón es evidente el error al realizar el procedimiento.

En un segundo caso, un error en el que cayeron varios estudiantes, se observa en las evidencias 13 y 14, al momento de extraer los datos de la representación (tabla) y ubicarlos en el algoritmo. Por ejemplo, el hecho de que la representación muestre los datos, pero el estudiante no extrae los datos correspondientes al algoritmo conlleva a un error de este tipo.

Por último, los errores que cometen con más frecuencia los estudiantes, son aquellos en la expresión del algoritmo que permite hallar la media ponderada probablemente debido a no recordarlo bien o errores al expresarlo por la inmediatez de la respuesta, por ejemplo, en las evidencias 13, 14 y 8. Muestra el algoritmo con correspondencias incorrectas que involucran principalmente la correspondencia de datos y frecuencias en el cálculo de la media ponderada.

Errores encontrados en la prueba relacionados con las dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas

En la **Tabla 10** se organizan los errores evidenciados en las pruebas escritas y videos en el proceso de resolución de problemas, asociando errores que tiene la misma naturaleza relacionados con las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Tabla 10

Emociones pregunta 1 a la 6 entrevista

	Numero de evidencia	Emociones	Evidencia	Análisis	Frecuencia	Categoría
¿Qué emociones has experimentado en el momento que se te propuso el problema antes de resolverlo?	1	Adrenalina, amor y rabia	Correspondiente (V1,T 0:17-0:47) Saraí: “como una adrenalina, tratando de hallar el resultado, uno muchas veces siente el amor por los números y pues con este tipo de problemas uno pone a trabajar la mente y puede trabajar todo, uno digamos experimenta muchas cosas, muchas emociones y a veces una tristeza porque no te da y sobre todo rabia porque no te da entonces da rabia porque por más que trates de hacer el procedimiento no te da”	La estudiante manifiesta que siente emoción de adrenalina, amor por resolver el problema dicha emoción que actúa como factor de interés por resolver el problema y rabia de llegar a un punto de no entender a donde se quiere llegar y abandonarlo.	2	Ca
	2	Susto	Correspondiente (V2,T 0:11-0:25) Gabriela: “pues me ásaró porque digamos hay cosas que no entiendo, entonces me preocupa hacer las cosas mal pues siempre me esmero por hacer las cosas bien me entiende, entonces pues me da como susto no poder hacer las cosas bien”	La estudiante argumenta que siente susto a la hora de resolver situaciones problema, lo cual conllevaría a poder presentar errores debido al desconocimiento del objeto matemático que se trabajaba en la situación.	3	Cb
	3	Emoción y		El estudiante argumenta que siente		Cb

2. ¿Qué emociones has experimentado en el momento que has tratado de dar solución a las situaciones problema?

	adrenalina	Correspondiente (V3, T 0:4-0:14) Sebastián: “emoción porque no se sabe el grado de dificultad del problema y adrenalina también”	emoción y adrenalina a la hora de resolver situaciones problema, esto se debe al nivel de interpretación que deben utilizar para llegar a conjeturas, representaciones procedimientos y argumentos válidos.	2	
4	Angustia	Correspondiente (V1, T 0:49-1:10) Saraí: “eee angustia, eee, rabia”	El estudiante siente angustia por no solucionar la situación problema. Esta conducta está asociada a una reducción en el nivel de atención, a la interrupción en la recolección de información desde la memoria y a una mínima eficiencia en el razonamiento.	3	Cb
5	Pánico	Correspondiente (V2, T 0:31-0:47) Gabriela: “pues yo digo que eso, no sé cómo de pánico o en algunas preguntas uno se siente segura entonces uno se siente feliz porque se sabe la respuesta”	La estudiante manifiesta que siente pánico. El pánico o miedo es una reacción que configura la ansiedad, causando bloqueo e inseguridad, puede provocar en el estudiante el rechazo a la actividad y por ende abandonarla.	1	Cb
6	Inseguridad	Correspondiente (V3, T 0:22-0:32) Sebastián: “inseguridad porque uno no sabe si esta bueno o esta malo”	El estudiante establece que la inseguridad como emoción que se produce al realizar una situación problema puede generar	1	Cb

3. Durante los intentos por resolver la situación problema ¿te has afanado por lograr una solución excelente? Sí, no ¿por qué?	7	felicidad	Correspondiente (V1, T 0:49-1:12) Saraí: “felicidad cuando no has hecho absolutamente nada y se resuelve, por fin dio a la primera”	procedimientos incorrectos o dudosos cuando se está abordando la prueba. La estudiante afirma tener un emoción de felicidad, al momento de resolver una situación problema que desde un lapso de tiempo está tratando de dar solución	2	NC
			Correspondiente (V1, T 1:19-1:30) Saraí: “sí, porque uno trata de hacer las cosas lo mejor posible y pues en este caso pues ir paso a paso porque por una confusión se puede dañar todo el problema ”		1	
			Correspondiente (V3, T 0:42-0:51) Sebastián: “sí, porque uno tiene que ser específico porque en las matemáticas todo es preciso”		2	NC
			Correspondiente (V1, T 1:43-1:59) Saraí: “pues, como son puntos de vista totalmente diferentes, entonces hay cosas por lo menos que yo no sabía cómo empezar	La estudiante da a entender que le gusta intercambiar ideas de solución con sus compañeros,	2	NC
4. ¿tus reacciones al escuchar las explicaciones de tus compañeros/as?	9	Búsqueda de acuerdo				

		a resolverlos y pues desde su punto de vista ayudan a resolver el problema”	puesto esto le facilita poder resolver el problema.		
10	Aceptación	Correspondiente (V2, T 1:19-1:59) Gabriela: “pues yo muchas veces me quedo callada como somos varias personas pues todos pensamos diferente , entonces algunos piensan hallar las cosas de una manera y otro de otra manera, entonces para ponerse de acuerdo tantas personas es muy difícil, entonces yo me estreso, entonces escucho y hago lo que ellos opinan ”	La estudiante indica quedarse callada por no poder ofrecer ayuda para resolver el problema, creando así en el estudiante rechazo frente a problemas matemáticos ya que piensa que su punto de vista no aportaría a la solución del problema.	1	NC
11	Conflicto	Correspondiente (V3, T 0:59-1:13) Sebastián: “pues problemas eee hay que tener en cuenta las ideas de los otros compañeros”	El estudiante expresa que el conflicto que se genera en un grupo de trabajo al resolver el problema es debido a las ideas diversas de cada uno, lo que puede generar diferentes respuestas o procedimientos que confronten lo que piensa cada estudiante.	1	Cc
12	Están relacionadas con las experiencias pasadas	Correspondiente (V1, T 2:09-2:22) Saraí: “si, algo así porque desde que a uno le enseñan a resolver problemas pues esa persona tiene su forma de cómo resolver problemas ”	El estudiante indica que las reacciones o emociones que tiene frente al problema y a su resolución están condicionadas por los aprendizajes y conocimientos	1	Cd

en matemáticas.	Correspondiente (V2, T 2:02-2:11) Gabriela: “ay sí, porque por lo menos este año en matemáticas no me ha ido muy bien entonces me da mucho susto” “A uno no le han enseñado la media, resolviendo este tipo de problemas”	previos antes desarrollados, es decir que es gracias a lo que conocen surgen las reacciones. Además del rendimiento académico en matemáticas.	2 Cd
------------------------	--	--	-------------

6. ¿Tus emociones cambian cuando ya te involucras en el problema? Sí, no ¿Por qué?	14		Correspondiente (V1, T 2:28-2:40) Saraí: “sí, después de que uno se concentra eeee uno se logra meterse en el problema y todo ya cambia ”	Los estudiantes afirman que las emociones cambian en el momento que se concentran, es decir el momento que en que está adquiriendo el conocimiento al momento donde debe reflejar lo aprendido en la resolución problemas, y que esto conlleva a que las emociones cambien y estén relacionadas con los resultados obtenidos.	3	Ca
	15	Si cambian las emociones	Correspondiente (V2, T 2:16-2:33) Gabriela: “pues yo creo que sí, porque digamos cuando uno no entiende pero cuando uno ya lee más despacio y eso, entonces uno se siente más seguro uno mismo y se relaja un poquito y pues ya comprende más el problema y pues ya lo puede resolver bien ”		2	Ca

Encuesta acerca de los afectos y emociones

Tabla 11

Emociones pregunta 1 a la 5 encuesta

Numero de evidencia	Emociones	Evidencia	Frecuencia	Categoría
1. ¿Qué emociones has experimentado en el momento que se te propuso el problema antes de resolverlo?				
16	Confusión	“confusión porque no me acordaba de los temas”(E,)	10	Cd
17	Ansiedad	“ De no saber si podría resolver el problema”	2	Ca
18	Nervios	“nervios porque me olvido fácilmente de las cosas, pero cuando leía me fueron dando las respuestas”	11	Cb
19	Intriga	“De pesar si era muy difícil el problema”	5	Ca
20	Normal	“Me sentí normal, porque era temas que ya había visto”	7	NC
21	Malgenio	“me dio malgenio porque vi todos esos datos y no sabía qué hacer”	3	Cb

22	Estrés	“estrés de saber cómo resolverlo”	2	Cb
23	Temor	“temor de no saber si estaba bien o mal”	2	Ca
2. ¿Qué emociones has experimentado en el momento que has tratado de dar solución a las situaciones problema?				
24	Felicidad	“felicidad de que me estaba dando lo que quería que me diera”	5	NC
25	Estrés	“estrés de no saber cómo hacer la 7”	7	Cb
26	Duda	“duda porque no sabía si me había quedado bien o mal”	2	Ca
27	Frustración	“sentí mucha frustración porque no sabía cómo resolver la 7”	4	Ca
Numero de evidencia	Respuesta	Evidencia	Frecuencia	Categoría
3. Durante los intentos por resolver la situación problema ¿te has afanado por lograr una solución excelente? Sí, no ¿por qué?				
28	Si	“si porque uno tiene que hacer las cosas bien y además eran muchas preguntas y quería hacerlo todo”	27	NC
29	No	“no, porque pensé que no alcanzaba el tiempo y no las leía con atención y las respondí a la loca”	9	

4. ¿Piensas que tus reacciones iniciales hacia la situación problema están condicionadas por tus experiencias pasadas con las matemáticas o con la resolución de problemas? ¿Por qué?

30		“Si, porque los temas ya los habíamos visto”	10	Cd
31	Si	“Si, porque el periodo pasado nos habían enseñado la media”	8	Cd
32		“Si, porque aunque nos habían enseñado la media, no lo habían enseñado mediante la resolución de problemas o por lo menos eran ejercicios de calcular la media dándonos unos datos y ya”	18	Cd

5. ¿Tus emociones cambian cuando ya te involucras en el problema? Sí, no ¿Por qué?

33		“si, porque cuando uno ya se mete bien en el problema y logra entenderlo, si tenía rabia o algo así ahora le da mucha felicidad que por fin pudo”	12	Ca
34	Si	“Si, porque ya la mente se abre y entiende más, así todo cambia totalmente”	9	Ca
35		“si, porque cuando ya de tanto leerlo y lo entiendo, me dan ganas de terminarlo y todo cambia, me da muchas ganas y alegría de hacerlo”	6	Ca

En la **Tabla 12** se organizan los errores evidenciados en la encuesta y entrevista, mostrando y asociando las emociones y actitudes afectivas que conlleva a que se presenten errores al trabajar una situación problema.

Tabla 12
Clasificación de errores asociados a la dificultad C

Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales				
Numero de evidencia	Motivos por los que se pueden generar errores	Categoría	cantidad de estudiantes	Valor porcentual
1, 17, 19, 23, 26 y 27	Sentir emociones de ansiedad, pánico, frustración, no deja resolver el problema.	Ca	17	47,2%
14, 15, 33, 34 y 35	Se cometen errores cuando cambian las emociones.	Ca	32	89%
2, 18,21,22	Por nuevas emociones al intentar resolver el problema, confusión, nervios y rabia.	Cb	19	53%
3, 4 y 25	Por estrés, temor, rabia al no poder hacer el ejercicio.	Cb	12	33,3%
6	Por inseguridad del resultado	Cb	1	3%
5 y 11	Por estrés, duda generando conflicto en el desarrollo de la prueba.	Cc	2	5,5%
12, 13, 16, 30, 31 y 32	Por experiencias pasadas en matemáticas	Cd	29	80,5%

A través de la exposición y el estudio ejecutado para esta dificultad, centrando el interés en las cuatro categorías, se ha puesto en evidencia las relaciones entre los procesos afectivos y cognitivos en situaciones problema intentando describir las causas y consecuencias de la

interacción emocional que tiene el estudiante en las diferentes fases de la resolución de problemas.

Comenzando en las evidencias de estos estudiantes, se han enunciado perspectivas relevantes para comprender las emociones y posibles motivos por los cuales se cometen errores al resolver una situación problema.

Por consiguiente se tienen las emociones que nacen al enfrentarse al problema matemático (Ca), un grupo de estudiantes manifiesta que la complejidad y mala interpretación de la situación problema puede confundir, estresar e indisponer, a los estudiantes para desarrollar la prueba correctamente, por lo que se pueden presentar errores en el desarrollo de la situación problema, que se vinculan con las emociones surgidas por los procesos de resolución de problemas de tipo (Cb), instante en el que estudiantes pueden exponer ideas, procedimientos, ejemplos, pero manifiestan inseguridad y/o miedo en el momento de validar los procedimientos realizados.

Lo que se evidencia en las entrevistas y encuestas es que los estudiantes toman en consideración que las emociones generadas en el trabajo grupal (Cc) tiene su origen en el desconocimiento matemático de algunos estudiantes, no sentirse en la capacidad de exponer sus ideas o sea que al desarrollar un problema matemático hay diversidad de ideas, entrando en conflicto en la decisión de cuál es la más acertada. Finalmente la mayoría de estudiantes afirman que las emociones presentadas en las fases de resolución de problemas están directamente relacionadas con sus experiencias matemáticas y que por dicha razón es que se presentan errores en las situaciones problema.

CAPITULO IV: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Cuando se inició el trabajo se formularon los objetivos de estudio, en los cuales se pretendía analizar y clasificar los errores y las dificultades que presentan los estudiantes cuando resuelven situaciones problema que involucran el uso de la media aritmética, para ello, se diseñaron no solo categorías en las que se podían enmarcar los errores y dificultades sino situaciones problema que los abarcaran, por eso creemos que en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes la resolución de problemas es parte esencial. Sabemos que esta actividad incrementa considerablemente la dificultad de las matemáticas, y por consiguiente requiere un mayor esfuerzo por parte del estudiante, asimismo esta metodología propicia que los estudiantes presenten un mayor número de errores, y permite identificar más dificultades y errores que en otra metodología, sin embargo, creemos que lejos de ser algo que estropee los procesos de enseñanza y aprendizaje, es una metodología que realmente enriquece los procesos educativos, así, esos errores se pueden convertir en fortalezas logrando un verdadero aprendizaje en los estudiantes.

Al realizar el rediseño del instrumento que posibilitó identificar el tipo de dificultades y errores que surgirían en los estudiantes la idea inicial era elaborar un solo instrumento y aplicarlo de manera individual para recolectar los datos. En el momento de realizar la prueba diagnóstica, se vio la necesidad de elaborar el instrumento con la posibilidad de trabajar en grupos para implementar la metodología de resolución de problemas.

Cuando los estudiantes resolvían la prueba se reconocieron grandes dificultades al momento de calcular la media ponderada, principalmente cuando deben usar datos para remplazarlos en el algoritmo. También, en el primer ítem se omitió la palabra media aritmética con el fin de que los estudiantes reconocieran la media como un valor esperado o representativo

de los datos. Además, cabe mencionar que no hubo intervención de las investigadoras en la solución de la prueba, puesto que se quiera observar la interpretación individual de los estudiantes.

Los errores encontrados en las pruebas enfocadas en la resolución de situaciones problema, permitieron identificar los posibles orígenes, como se pudo observar en el análisis de resultados, existen errores de tipo aritmético, algebraico y geométrico, con lo cual concluimos, que los errores presentados en la estadística, especialmente en problemas de la media aritmética, tienen una estrecha relación con la aritmética, la geometría y el álgebra, ya que los conocimientos y destrezas que tengan los estudiantes en éstas, facilita/obstaculiza un mejor entendimiento en objetos matemáticos relacionados con la estadística.

A través de este trabajo se precisaron las categorías trazadas con ayuda de los referentes teóricos; las tipo A, B y C: Con estas categorías se pudo reconocer diferencias sustanciales en los tipos de errores que pueden cometer los estudiantes, esto es, que en ocasiones como maestros pensamos que los estudiantes presentan una dificultad o cometen un error solo por falta de conocimiento, no se piensa por ejemplo: ¿Cuál es la dificultad de los objetos matemáticos que tratamos para los estudiantes? ¿Qué procesos de pensamiento matemático se pueden generar en los estudiantes? o solamente darse cuenta de las actitudes o emociones que pueden estar sintiendo los estudiantes al enfrentarse a una situación problema o en general hacia las matemáticas.

De acuerdo al análisis realizado en la dificultad asociada a las actitudes afectivas y emocionales, se pretende hacer evidente que en la práctica educativa, para nuestro caso en la actividad matemática, el desarrollo de la dimensión emocional es un factor muy esencial en los estudiantes en el momento de enfrentarse a una situación problema, debido a que los estudiantes

sustentan que la variedad de errores se presentan por las actitudes, reacciones y emociones al abordar un problema matemático, de igual forma, considerar las experiencias pasadas en las matemáticas como elemento fundamental en la presencia de dichos errores, detalles que como maestros se olvidan y que deben tenerse presentes a la hora de analizar dónde se originan los errores y no solo pensar en el objeto matemático.

Algunos errores de los estudiantes pueden deberse a dificultades en el manejo del lenguaje matemático, esto se demuestra en las dificultades de comprensión de los problemas, la falta de comprensión semántica de las situaciones lleva generalmente a errores, debido a las diferencias entre el lenguaje natural y el lenguaje formal.

Otros errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, en este aspecto se centraron gran parte de los errores de los estudiantes, debido a la complejidad que genera en los estudiantes la media aritmética. Además, se incluyen en este tipo de errores, la dificultad en el manejo de algoritmos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficiente de símbolos y conceptos necesarios. Parece que el origen de estos errores, es necesario situarlo en la inexistencia de una ruptura en la idea de las propiedades de la suma y producto que tiene el estudiante, pues traslada estas propiedades a la media aritmética; por lo tanto y en efecto sería pertinente presentar situaciones en las que las propiedades de la suma y producto se muestren ineficaces, para solucionar situaciones que sugieran la necesidad de construir un nuevo conocimiento estadístico; de este modo, los estudiantes asociarán las propiedades de la suma y producto a los usos y características propias del contexto en el que aparecen y, en consecuencia, ampliarán su idea de estas propiedades a otros contextos diferentes.

Este trabajo puede contribuir a docentes en formación de matemáticas o en ejercicio al análisis de sus prácticas educativas ya que les brinda una categorización de los posibles errores y dificultades que pueden cometer los estudiantes a la hora de resolver situaciones problema que involucran la media aritmética, de esta manera se busca crear una base que muestre los diferentes orígenes de estos, además que aporte al diseño de actividades que ayuden a superar dichos errores y dificultades.

En el diseño de actividades académicas, específicamente en la enseñanza de la estadística, se necesita de su aplicabilidad en un ambiente real con el fin de que los estudiantes recolecten sus propios datos, y, luego de analizarlos, asocien sus aplicaciones con el contexto que ellos mismos construyen. La interdisciplinariedad de los proyectos y/o ejemplos de clase generan que se aplique con ganas el trabajo estadístico por parte de los estudiantes.

No obstante, cabe acentuar que, en las apreciaciones o toma de determinaciones, la experiencia personal no es del todo fiable y puede conducir a confusión puesto que, algunas situaciones de la vida real sólo pueden ser entendidas a partir del análisis de los datos recogidos en forma adecuada. En este proceso la media aritmética es muy usada, sin embargo, en ocasiones no se tiene en cuenta que ante la concurrencia de datos extremos la media deja de ser un buen representante del comportamiento medio de la variable siendo necesario entonces su cálculo con exclusión de parte de la información o la utilización de otros estadísticos de tendencia central.

Es necesario ahondar en los objetos matemáticos respecto a medidas de tendencia central, sus propiedades y la discriminación en el uso de las media, mediana y moda (reconocer cuándo es más significativo o pertinente usar cierta medida tendencia central). El uso adecuado de los algoritmos de cálculo por sí solo no basta, y se hace ineficaz, pues se hace necesario saber interpretar y tener, al menos, el conocimiento básico de su uso en la estadística descriptiva.

Con el fin de ampliar los resultados obtenidos en esta investigación, se presenta y comparte con pares académicos a nivel internacional en el 11 n° Congreso Internacional de Educación Superior obteniendo buenas apreciaciones del auditorio, Además de despertar interés en docentes de matemáticas presentes por el marco teórico que fundamenta el trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Arias, C., Clavijo, M., & Torres, J. (2012). La enseñanza de la estadística en la formación de ciudadanos críticos. En G. Obando, *Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (págs. 79-85). Medellín: Sello Editorial U.
- Arias, O. & Silva, M. (2012). *Errores presentados por estudiantes de grado octavo en torno a problemas que requieren el uso de la media aritmética*. (Tesis de postgrado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.
- Batanero, C. & Díaz, L. (2011). *Estadística con proyectos*. Granada: Departamento de (VRANCKEN, 2004)Didáctica de la Matemática.
- Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de tendencia central. *UNO* (25), 45-58.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Grupo de investigación en educación estadística. ISBN 84-699-4295-6.
- Batanero, C., Estepa, A., & Godino, J. (1991). Análisis exploratorio de datos. Sus posibilidades en la enseñanza secundaria. *Suma*, 9, 25-31.
- Batanero, C., Godino, J., Vallecillos, A., Green, D., & Holmes, P., (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 4(25), 527-547.
- Behar, R. & Yepes, M. (2007). *Estadística. Un enfoque descriptivo*. Universidad del Valle. Cali, Colombia.
- Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm: students' understanding of the arithmetic average concept. *Proceeding of the 19th PME conference Universidad Federal de Pernambuco*, 3, 145-151.
- Calot, G. (1988). *Curso de estadística descriptiva*. Madrid (España): Paraninfo S.A.
- Campbell, S. K. (1974). *Flaws and fallacies in statistical thinking*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Casajús, A. (2005). La resolución de problemas aritmético-verbales por alumnos con Déficit de Atención con Hiperactividad (TDAH) (tesis doctoral). Universidad de Barcelona, Barcelona, España.
- Cobo, B. (2003). Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Cobo, B., & Batanero, C. (2004). Significados de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(1), 5-18.

- Cockcroft, W. (1985). *Las matemáticas si cuentan informe Cockcroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Del Puerto, S., & Minnaard, C. Y. (2007). Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en Estadística Descriptiva. *Revista Iberoamericana de Educación*, 3(43), 1-8.
- Díaz, L. (2014). *Un estudio empírico de los gráficos estadísticos en libros de texto de Educación primera española*. (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Granada, España.
- Díaz, S., Mendoza, V., & Porras, C. (2011). Una guía para la elaboración de estudios de caso. *Revista Electrónica en América Latina Especializada en Comunicación*. (75), p.5-7.
- Doval, H. C. (2004). El “hombre tipo” de Quetelet. *Revista argentina de cardiología*, 72(3), 240-241.
- Gómez, C. (2002). Afecto y aprendizaje matemático: Causas y consecuencias de la interacción emocional. En J. Carrillo *Reflexiones sobre el pasado, presente y futuro de las Matemáticas*. (pp. 197-227). Huelva: Universidad de Huelva.
- Gómez, G., Gil, J., & García, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Archidona: Aljibe.
- Goodchild, S. (1988). School pupils’ understanding of average. *Teaching Statistics*, 3(10), 77-81.
- Holmes, P. (1980). Teaching Statistics. *Slough: Foulsham Educational*, 11 - 16.
- Juidías, J., & Rodríguez, I. (2007). Dificultades de aprendizaje e intervención psicopedagógica en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación*, 342, 257-286.
- León, M., & Zawojewski, R. (1991). Use of the arithmetic mean: an investigation of four properties Issues and preliminary results. En D. (Vere-Jones (Ed.), *Proceeding of the third International Conference on Teaching Statistics*. Voorburg, 302-306
- Li, K., & Shen, S. (1992). Students’ weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics*, 1 (14), 2-8.
- Mayén, S. (2009). *Comprensión de las medidas de tendencia central por estudiantes mexicanos de Educación Secundaria y Bachillerato*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Santa Fe de Bogotá, Colombia.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Santa Fe de Bogotá, Colombia.
- Ministerio de Educación Pública (2011). *prueba escrita*. San José .MEP
- Mokros, J. & Russell, S. (1995). Children’s concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education* (26), 20-39.

- NCTM (2003). Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Pollasek, A., Lima, S., & Well, A. (1981). Concept or Computation: students' understanding of the mean. *Educational studies in Mathematics*, 12, 191-204.
- Polya, G. (1945). *How to solve it. A new aspect of mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.
- Radatz, H. (1979). Error Analysis in the Mathematics Education. *Journal of Research in Mathematics Education*, 9, 163-172.
- Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, & L. & Rico, *Educación Matemática*. México: Iberoamericana.
- Gómez, R., Gil, J., & García, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Archidona: Ediciones Aljibe.
- Russell, S. & Mokros, J. (1991). What's typical?: Children's ideas about average. En D. V.-J. (Ed.) (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics*, 307-313. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Schoenfeld, A. H. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics*. NY: Macmillan: Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.
- Socas, M. (1997). "Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico, & y. otros, *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (págs. 125-154). Barcelona: Horsori.
- Strauss, S., & Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1(19), 64-80.
- Vargas, A. (1995). *Estadística descriptiva e inferencial* (ilustrada, reimpressa ed.). (U. d.-L. Mancha, Ed.)
- Vrancken, S., Muller, D., Hecklein, M., Gregorini, M., & Engler, A (2004). *Los Errores en el Aprendizaje de Matemática*. Universidad Nacional del Litoral. Facultad de Ciencias Agrarias. Buenos Aires. Argentina.: Boletín de la Sociedad Argentina de Educación Matemática

ANEXOS

Anexo A. PRUEBA PARA ESTUDIANTES

Colegio: Institución Educativa Francisco José de Caldas

Asignatura: Estadística

Grado: noveno 9°

Duración: 60 minutos

INSTRUCCIONES:

1. Lee con atención cada pregunta antes de contestar.
2. No dejes sin contestar ninguna pregunta, utiliza lápiz y calculadora para resolver.

ALCANZA UNA ESTRELLA

Cada año en la Institución Francisco Jose de Caldas se celebra la olimpiada nombrada “Alcanza una estrella”, donde se eligen 4 estudiantes por grupo que representan cada grado (6°, 7°, 8°, 9°, 10° y 11°); a los cuales se les realizan 20 preguntas por ronda. En la siguiente tabla se registró el número de preguntas contestadas por ronda que alcanzaron los grupos en un tiempo establecido.



**NP: No participó
en la ronda, por
tanto no cuenta.**

Grado	Ronda 1	Ronda 2	Ronda 3	Ronda 4	Ronda 5	Ronda 6	Ronda 7
6°	13	1	0	12	7	9	10
7°	14	1	12	8	13	5	7
8°	4	NP	13	13	NP	3	11
9°	15	15	15	6	9	16	5
10°	17	9	NP	17	8	NP	18
11°	4	13	NP	0	12	15	3

1. ¿Cuál es el valor esperado de respuestas para los siguientes grados durante las 7 rondas del concurso?

Grado 6° _____	Procedimiento	Que significado tiene el resultado
Grado 8° _____	Procedimiento	Que significado tiene el resultado
Grado 10° _____	Procedimiento	Que significado tiene el resultado

2. Si la coordinadora del concurso desea conocer un valor estimado o aproximado de respuestas para los grados 6°, 8° y 10° durante las 7 rondas. ¿Cuál procedimiento deberá seguir para obtener dicho valor?, ¿cuál es el número de respuestas estimadas que se contestaron? ¿qué significa ese resultado?
3. Después de realizar el concurso dentro de la institución, se realiza el concurso intercolegiados con la participación de 6 estudiantes de los diferentes colegios, uno por cada grado. La puntuación se registró a partir de sus respuestas dando como notas de desempeño (calificación) a cada estudiante durante las siete rondas lo que se presenta a continuación.

Calificación en escala de 0 a 10	Ronda 1	Ronda 2	Ronda 3	Ronda 4	Ronda 5	Ronda 6	Ronda 7
María	10	0	8	10	9	7	9
Salomé	8	6	5	10	5	8	7
Carlos	6	9	10	8	8	7	6
Santiago	9	10	9	8	10	8	9
Nicole	5	5	4	5	5	6	5
Laura	0	0	4	3	3	6	8

La coordinadora del concurso decide entregar premios a los tres estudiantes que tuvieron mejor rendimiento en las siete primeras rondas. Si para la coordinadora el rendimiento hace referencia al valor estimado de notas en las siete rondas. ¿Cuál es el rendimiento de cada estudiante durante las siete rondas?

- a. ¿A qué hace referencia el valor que encontraste para el rendimiento de Nicole?
- b. ¿A qué hace referencia el valor que encontraste para el rendimiento de Carlos?

4. La coordinadora ha decidido posponer la premiación con la intención de tener en cuenta una octava ronda, ¿se verá perjudicado el rendimiento del que consideraste como el mejor estudiante, si en la última ronda no obtuvo nota (cero)? Justifica.
5. Partiendo que Salomé en las siete primeras rondas obtuvo un rendimiento promedio en su calificación de 7 por onda, ¿cuál debería ser su nota en la octava ronda, para que su rendimiento no se modifique, y cómo lo hiciste?
6. Si durante una octava y novena ronda, Salomé no obtiene nota de desempeño y se debiera dar un número que representará el desempeño por ronda, ¿cuál será la nota representativa que obtuvo por ronda esta estudiante teniendo en cuenta los resultados en las siete primeras rondas?
7. La coordinadora desea calcular el puntaje obtenido por ronda de Santiago al transcurrir todas las rondas, para esto debe tener en consideración que el puntaje de las siete rondas dependen del grado de dificultad y la cantidad de respuestas correctas, es decir, por cada pregunta buena se da el doble, triple o quíntuple de puntos.

Valor de las respuestas correctas (según el grado de dificultad)	Cantidad
2	21
3	19
5	23

Acorde con la tabla anterior, entonces en promedio Santiago obtuvo_____ puntos por ronda. ¿Describe cómo encontraste el resultado?

Anexo B. Entrevista

<https://drive.google.com/open?id=16A4IkslzKbF9gEF3WUChrP-S86R1M5wB>