

Muestreo compresivo utilizando Orthogonal Matching Pursuit (OMP)

Adriana Patricia Lobato Polo ^a, Rafael Humberto Ruiz Coral^{a*},
Julián Armando Quiroga Sepúlveda^a, Adolfo León Recio Vélez^b.

^a*Departamento Ingeniería Electrónica Universidad Javerina, Cali, Colombia*

^b*Virginia Polytechnic Institute and State University, USA.*

**ruiz.rafa@yahoo.com.*

(Recibido: Abril 22 de 2008- Aceptado: Julio 4 de 2008)

RESUMEN

Muestreo Compresivo es una rama emergente del procesamiento de señales, basada en el hecho de que un número pequeño de proyecciones lineales no adaptativas sobre una señal compresible, contienen suficiente información para reconstruirla y procesarla. En este artículo se presentan los resultados obtenidos al evaluar cinco matrices de medición para la realización de Muestreo Compresivo en un sistema que utiliza el algoritmo Orthogonal Matching Pursuit (OMP), para la recuperación de la señal original. Las matrices de medición están implicadas tanto en el proceso de muestreo-compresión de la señal, como en la reconstrucción de la misma.

PALABRAS CLAVE: Muestreo Compresivo, algoritmo Orthogonal Matching Pursuit, matriz de medición.

Compressed sensing using Orthogonal Matching Pursuit (OMP)

ABSTRACT

Compressive Sensing is an emergent field of signal processing which states that a small number of non-adaptive linear projections over a compressible signal, contain enough information to reconstruct and process it. This paper presents the results of evaluating five measurement matrices for its application to Compressive Sensing, in a system that uses Orthogonal Matching Pursuit (OMP) to reconstruct the original signal. The measurement matrices are those implicated in the compressive sensing process as well as in the reconstruction process of the signal.

KEYWORDS: *Compressed Sensing, Orthogonal Matching Pursuit, measurement matrix.*

1. INTRODUCCIÓN

Muestreo Compresivo (MC) es un enfoque alternativo y optimizado al principio planteado por el teorema de Shanon/Nyquist, el cual permite, potencialmente, el desarrollo de aplicaciones a nivel de hardware y software menos costosas. Utilizando el principio, de MC es posible realizar dos procesos de forma simultánea en la adquisición de la información: sensar y comprimir. La tecnología convencional, en contraste, realiza un proceso de muestreo seguido por uno de compresión.

Una señal dispersa o *sparse* es aquella que sólo presenta pocos valores distintos de cero en el dominio del tiempo o en algún otro dominio. El número de valores no nulos de una señal dispersa se conoce como su nivel de dispersión o *sparsity*. Muchas señales tienen representaciones dispersas en cierto espacio. Una señal perteneciente a un espacio vectorial tiene una representación dispersa, si ésta puede ser expresada como una combinación lineal de pocos vectores de una base de dicho espacio. Por ejemplo, las señales formadas por componentes armónicas son dispersas en bases de Fourier, y las suaves a trozos tienen representaciones wavelets con estructuras dispersas [1, 2, 3.]

La matriz de medición o diccionario permite capturar información de una señal dispersa dada y es utilizada por el algoritmo OMP para la recuperación de dicha señal una vez ha sido comprimida. El hecho de que la matriz de medición presente un pequeño número de filas (vectores de medición) tiene ventajas como mayor compresión de la información y menor tiempo de procesamiento. Por tal motivo, en este artículo se presenta el estudio de diferentes clases de matrices de medición, con el fin de encontrar aquellas que permiten obtener una recuperación adecuada de la señal utilizando un menor número de vectores de medición.

En la Sección 2 se presentan algunos conceptos básicos necesarios para la teoría de MC y se define parte de la notación utilizada. En la Sección 3 se define el problema de recuperación de una señal

que ha sido comprimida bajo el principio de MC y se presenta OMP como solución a dicho problema.

En la Sección 4 se detalla la metodología y las herramientas empleadas para la evaluación de las matrices, entre las cuales están las mediciones estadísticas, el parámetro de coherencia, la función acumulativa de coherencia y la correlación en imágenes. En la Sección 5 se describe cada una de las matrices de medición propuestas. En la Sección 6 se muestran los resultados más relevantes del trabajo y se realiza un análisis de los mismos. En la Sección 7 es llevada a cabo una breve comparación con trabajos precedentes en el área. Finalmente, en la Sección 8 se presentan algunas conclusiones del trabajo realizado.

2. MUESTREO – COMPRESIÓN DE SEÑALES

2.1 Muestreo Compresivo

Según el principio de Muestreo Compresivo, una señal discreta con una representación dispersa en cierta base, puede ser recuperada a partir de un número pequeño de proyecciones lineales de dicha señal sobre una base arbitraria [4].

MC sugiere una nueva forma de adquirir la información que necesita ser convertida de análoga a digital, debido a que los procesos de muestreo y compresión de la señal se realizan simultáneamente [8]. Cuando se pretende aplicar el teorema de *Shannon/Nyquist* a sistemas de radio-frecuencia de amplio ancho de banda se presentan limitaciones de *hardware* para la implementación de una etapa análogo-digital de alta precisión y alta velocidad. Haciendo uso del principio de MC no sería necesario que todas estas muestras pasaran por dicho conversor, sino sólo un pequeño número de observaciones de la señal, lo que reduciría los requerimientos de velocidad del conversor.

2.2 Compresión – muestreo de la señal

Sea $\mathbf{s} \in \mathbf{R}^d$ una señal discreta real de longitud d , representada como un vector columna de d posiciones (1),

$$\mathbf{s} = [s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_d]^T \quad (1)$$

Sea $\Phi = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \dots \varphi_d]$, con $\varphi_i \in \mathbf{R}^N$ para $i = 1, 2, \dots, d$. La matriz Φ es un elemento de $\mathbf{R}^{N \times d}$ y se conoce como matriz de medición. Sus columnas, los vectores φ_i , se denominan átomos, los cuales tienen norma unitaria. Cada una de las N filas de Φ se conoce como vector de medición. El proceso de muestreo-compresión consiste en la obtención del vector $\mathbf{v}$ como la combinación lineal de átomos de Φ dada por:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^d s_i \varphi_i = \Phi \mathbf{s}, \quad (2)$$

donde s_i es el i -ésimo elemento de $\mathbf{s}$.

El vector columna $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^N$ y se conoce como vector de observación. Éste contiene información importante acerca de la señal $\mathbf{s}$.

El tamaño del vector $\mathbf{v}$ resultante, depende de N . A continuación analizamos dos casos de interés. En el primero de ellos, si $N = d$, no existe propiamente compresión de los datos pues $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^d$, es decir, la señal original y el vector $\mathbf{v}$ tienen la misma longitud. En el segundo caso, si $N < d$, la dimensión del vector $\mathbf{v}$ es menor a la dimensión de $\mathbf{s}$ y por tanto, existe compresión de la información. Se puede demostrar que bajo ciertas condiciones de $\mathbf{s}$ y de Φ , la información contenida en $\mathbf{v}$ puede ser suficiente para recuperar de forma aproximada la señal $\mathbf{s}$.

Si $\mathbf{s}$ es una señal m -dispersa, es decir, solamente m de sus elementos son distintos de cero, la ecuación (2) equivale a una combinación lineal de sólo m átomos de Φ , es decir

$$\mathbf{v} = \sum_{s_i \in \sigma} s_i \varphi_i$$

donde $\sigma = \{s_i \in \mathbf{s} : s_i \neq 0\}$ y $|\sigma| = m$.

3. RECUPERACIÓN DE SEÑALES DISPERSAS

Una vez se ha realizado la combinación lineal de átomos de Φ , el objetivo es recuperar la señal original $\mathbf{s}$ a partir del vector de observación $\mathbf{v}$. La recuperación difiere en complejidad dependiendo de N , a continuación se analizan los dos casos mencionados en la Sección 2.

Para el primer caso, si $N=d$ y los átomos de Φ constituyen un conjunto ortonormal (elementos mutuamente ortogonales y con norma unitaria), la señal $\mathbf{s}$ puede ser recuperada como:

$$s_i = \langle \mathbf{v}, \varphi_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, d$$

donde la notación $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica el producto interno en el espacio $\mathbf{R}^d$.

En este caso la representación del vector $\mathbf{v}$ sobre los átomos de Φ permite recuperar de forma unívoca la señal $\mathbf{s}$.

Para el segundo caso y el de mayor interés, en el cual $N < d$, los átomos de Φ no forman un conjunto linealmente independiente y por lo tanto tampoco un conjunto ortogonal. Por tal motivo, la recuperación de la señal no puede ser realizada descomponiendo el vector $\mathbf{v}$ como un conjunto de proyecciones sobre los átomos de Φ .

Uno de los métodos para recuperar la señal $\mathbf{s}$ a partir del vector $\mathbf{v}$ [5], consiste en encontrar la señal $\mathbf{s}$ que minimiza la energía del error entre $\mathbf{v}$ y la combinación lineal de átomos de Φ utilizando $\mathbf{s}$, es decir, resolver el problema de optimización:

$$\min_{\{\hat{\mathbf{s}}\}} \left\| \mathbf{v} - \sum \hat{s}_i \varphi_i \right\|^2 \quad (3)$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclidiana en $\mathbf{R}^N$, definida como la raíz del producto interno y $\mathbf{s}_i$, para $i=1,2,\dots,d$, corresponde al i -ésimo valor de $\mathbf{s}$.

Si la señal $\mathbf{s}$ es m -dispersa se deben identificar los m átomos de Φ que participan en la combinación lineal para formar $\mathbf{v}$. En este caso se debe encontrar la señal $\mathbf{s}$ m -dispersa que minimiza la ecuación (3).

El éxito de la compresión y recuperación de la señal $\mathbf{s}$, depende del balance existente entre los siguientes tres factores:

1. La relación N/d que determina el grado de compresión de la información.
2. La matriz Φ .
3. El nivel de dispersión de la señal $\mathbf{s}$.

Una solución al problema de optimización (3) es el algoritmo Orthogonal Matching Pursuit (OMP).

3.1 Proceso iterativo

OMP es un algoritmo que en cada iteración selecciona la opción óptima a nivel local, dentro de un conjunto de posibles soluciones, esperando encontrar al final la solución óptima global.

El propósito de OMP es realizar una aproximación del vector $\mathbf{v}$ por medio de la selección y combinación de un conjunto de átomos de Φ que minimizan (3) en cada iteración.

La aproximación de $\mathbf{v}$ se construye mediante un proceso iterativo, para lo cual el algoritmo selecciona en cada paso el átomo de Φ mejor correlacionado con el residuo de la señal [9], el cual está definido como la diferencia entre $\mathbf{v}$ y su aproximación parcial, y se denota con la letra $\mathbf{r}$.

Para indicar la iteración correspondiente se utiliza el subíndice t .

Al comienzo del proceso iterativo ($t=0$), el residuo $\mathbf{r}_0$ es igual al vector $\mathbf{v}$. Seguidamente, se busca la máxima proyección de $\mathbf{r}_0$ sobre el conjunto de átomos de la matriz de medición.

Debido a que cada uno de los átomos se encuentra normalizado, el átomo que presenta la mayor proyección es encontrado como

$$j_0 = \arg \max_{j=1,2,\dots,d} \left| \langle \mathbf{r}_0, \Phi_j \rangle \right| \quad (4)$$

$$\lambda_0 = \langle \mathbf{r}_0, \Phi_{j_0} \rangle \quad (5)$$

En (4) se determina la posición j_0 del átomo que proporciona el mayor producto interno, el cual se conoce como átomo escogido Φ_{j_0} . El producto interno máximo dado por Φ_{j_0} y $\mathbf{r}_0$ se almacena en la variable λ_0 .

Posteriormente se procede a calcular el nuevo residuo $\mathbf{r}_1$, como la diferencia entre el residuo anterior y la proyección de éste sobre el átomo seleccionado

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 - \langle \mathbf{r}_0, \Phi_{j_0} \rangle \Phi_{j_0} \quad (6)$$

Claramente Φ_{j_0} es ortogonal a $\mathbf{r}_1$, por lo tanto

$$\|\mathbf{r}_1\|^2 = \|\mathbf{r}_0\|^2 - \left| \langle \mathbf{r}_0, \Phi_{j_0} \rangle \right|^2$$

Para minimizar la norma del nuevo residuo (error) $\|\mathbf{r}_1\|^2$, el algoritmo OMP escoge el átomo Φ_{j_0} que maximiza $\left| \langle \mathbf{r}_0, \Phi_{j_0} \rangle \right|$

Este procedimiento se repite hasta seleccionar m -átomos de Φ . Con el fin de evitar la selección repetida, el átomo escogido en la iteración t , Φ_{j_t} , se ortogonaliza con los átomos escogidos en iteraciones pasadas y que han sido previamente ortogonalizados. Para dicho fin se utiliza el procedimiento de Gram-Schmidt, de acuerdo a

$$\Phi'_{j_t} = \Phi_{j_t} - \sum_{l=0}^{t-1} \frac{\langle \Phi_{j_t}, \Phi'_{j_l} \rangle}{\|\Phi'_{j_l}\|^2} \Phi'_{j_l} \quad (7)$$

donde Φ'_{j_t} es la versión ortogonalizada del átomo escogido en la iteración t .

Con el átomo Φ'_{j_t} se calcula el vector residuo de la iteración t (8)

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{r}_{t-1} - \frac{\langle \mathbf{r}_{t-1}, \boldsymbol{\varphi}'_{j_t} \rangle}{\|\boldsymbol{\varphi}'_{j_t}\|^2} \boldsymbol{\varphi}'_{j_t}, \quad t = 2, \dots, m-1 \quad (8)$$

En otras palabras, la actualización del residuo consiste en suprimir del residuo actual la proyección que tiene éste sobre el átomo escogido ortogonalizado (9).

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{r}_{t-1} - P_{\boldsymbol{\varphi}'_{j_t}} \mathbf{r}_{t-1} \quad (9)$$

Sean J y Λ los conjuntos que almacenan para cada iteración, las posiciones de los átomos escogidos y los máximos productos internos, respectivamente, es decir

$$J = \{j_0, j_1, \dots, j_{m-1}\}$$

$$\Lambda = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}\}$$

En cada una de las iteraciones, se adjuntan elementos al conjunto J y Λ como en (4) y (5). La señal $\mathbf{s}$ se reconstruye al final de las iteraciones como en (10), en donde se observa que la amplitud está dada por los elementos del conjunto Λ cuyas posiciones en el vector $\mathbf{s}$ están determinadas por los elementos del conjunto J . Es decir, la posición j_i en $\mathbf{s}$ contiene la amplitud λ_i .

$$\hat{\mathbf{s}}(J) = \Lambda \quad (10)$$

4. HERRAMIENTAS DE EVALUACIÓN

Se realizó una rutina utilizando MATLAB® con la que se obtuvieron los resultados presentados a continuación. El algoritmo se ejecutó con 1000 señales aleatorias para cada número de vectores de medición N . Las características de la señal $\mathbf{s}$ son:

- Vector de 256 posiciones.
- Amplitud uniformemente distribuida en el intervalo de enteros $[-10, 10]$.
- Niveles de dispersión: 4, 12, 20, 28, 36. que corresponden a los mismos niveles de dispersión empleados en [6].
- Las posiciones no nulas de la señal se encuentra uniformemente distribuidas en el intervalo de enteros $[1, 2, 5, 6]$.

El error de aproximación (e), es una medida de la exactitud entre la señal recuperada y la señal original y se define como $\|\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}\|$ [5].

Definamos el porcentaje de recuperación (PR) de la señal como:

$$\text{PR}(e) = \begin{cases} \left(100 - \frac{100e}{\|\mathbf{s}\|}\right)\% & , \text{ si } 0 \leq e \leq \|\mathbf{s}\| \\ 0\% & , \text{ si } e > \|\mathbf{s}\| \end{cases}$$

El error de aproximación y el porcentaje de recuperación brindan información importante sobre el desempeño del algoritmo, sin embargo utilizamos el segundo tipo de medición, pues éste es independiente de la norma de $\mathbf{s}$. Un PR de 100% implica un error cero, mientras un PR de 0% implica un error mayor o igual a $\|\mathbf{s}\|$.

A continuación se explican las clases de gráficas extraídas de la ejecución del algoritmo OMP para las diferentes matrices de medición:

- Con base en los valores del porcentaje de recuperación de las señales en función de N , se obtuvieron gráficas estadísticas e histogramas tridimensionales.
- Parámetro de coherencia.
- Función acumulativa de coherencia.
- Imágenes e histogramas de la correlación entre átomos.

El parámetro de coherencia, definido en (11), de una matriz de medición refleja la correlación más alta (el peor caso), entre dos átomos [5]. Por eso, entre más alta ésta sea, se espera menor exactitud en la recuperación de la señal.

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \max_{j \neq k} \left| \langle \boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_k \rangle \right| \quad (11)$$

La **Función Acumulativa de Coherencia (FAC)** se calcula como la máxima suma absoluta de los productos internos entre un átomo determinado con n otros átomos [5], de acuerdo a

$$\mu(n) = \max_{|\Lambda|=n} \max_{\Psi} \sum_{\Lambda} |\langle \Psi, \varphi_k \rangle| \quad (12)$$

donde φ_k es un átomo determinado y Ψ es cualquier conjunto de átomos de cardinalidad n , que no contiene a φ_k , escogidos de la matriz de medición Φ .

En contraste con la coherencia, la FAC permite tener una visión de la correlación entre todos los átomos de la matriz de medición. En general, entre más despacio crezca la FAC, mejor van a ser los resultados en la recuperación de señales.

La **correlación** de átomos en imágenes consiste en la visualización (en escala de grises), de la matriz definida en (13), que contiene todos los productos internos entre átomos de Φ .

$$C = \begin{bmatrix} \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle & \dots & \langle \varphi_1, \varphi_d \rangle \\ \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \langle \varphi_d, \varphi_1 \rangle & \dots & & \langle \varphi_d, \varphi_d \rangle \end{bmatrix} \quad (13)$$

5. MATRICES DE MEDICIÓN PROPUESTAS

La matriz aleatoria **Gaussiana**, como su nombre lo indica, contiene números aleatorios con distribución Gaussiana. La matriz se generó a partir de la función *randn* de MATLAB®, con media cero y desviación estándar unitaria.

Para la matriz **Bernoulli**, se implementó un caso particular de esta distribución, conocida con el nombre de distribución de Rademacher, cuya función de densidad de probabilidad es

$$f(k) = \begin{cases} 1/2 & \text{para } k = 1 \\ 1/2 & \text{para } k = -1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Una secuencia **Pseudo Aleatoria** (PN) se genera por medio de un registro de corrimiento de n *Flip-flops* y un circuito lógico (sumador módulo 2), interconectados para formar un circuito de realimentación con múltiples lazos, como se muestra en la Fig. 1.

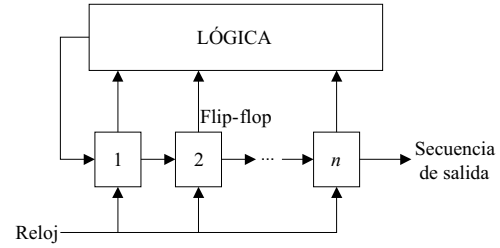


Figura. 1. Diagrama de bloques de un registro de corrimiento realimentado [7].

La secuencia de números Pseudos Aleatorios depende de la semilla (valores iniciales en los *Flip-flops*) y del polinomio generador (determina las conexiones de los *Flip-flops* con el bloque de lógica). La secuencia PN implementada fue de máxima longitud y valores de unos y menos unos.

La matriz **Hadamard** de 2×2 es:

$$M_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de Hadamard de $2^n \times 2^n$ puede ser construida recursivamente:

$$M_n = \begin{bmatrix} M_{n-1} & M_{n-1} \\ M_{n-1} & \overline{M_{n-1}} \end{bmatrix}$$

La matriz **Hadamard Aleatoria**, se construyó a partir de la matriz Hadamard desordenando con distribución aleatoria uniforme sus filas.

La matriz **Sinusoidal** se construyó de la siguiente manera:

$$\varphi_i[n] = \cos(\omega_{i-1}n) \quad , \text{para } 1 \leq i \leq 128$$

$$\varphi_i[n] = \cos(\omega_{i-1}n + \pi/2) \quad , \text{para } 129 \leq i \leq 256$$

donde $\omega_i = (i\pi)/128$ y $n = 1, 2, \dots, N$.

6. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Las gráficas estadísticas realizadas para las matrices Bernoulli, Gaussiana y Pseudo Aleatoria arrojaron resultados muy similares, por consiguiente se analizan conjuntamente en esta Sección y se referirá de ahora en adelante a éstas, como matrices BGP.

6.1 Estadísticas del PR

En la Fig. 2, se ilustra el PR para la matriz Hadamard Aleatoria. Esta matriz arrojó las curvas más cercanas al 100% y aquellas con mayor pendiente para el menor número de vectores de medición N .

Cuando el número de vectores de medición es pequeño el PR es cercano a cero. A medida que se incrementa N la curva del PR crece, presentando un punto de pendiente máxima $N_{\max}[m]$, donde m es el nivel de dispersión de la señal; por ejemplo, $N_{\max}[4] = 16$. A partir de $N_{\max}[m]$ la pendiente de la curva del PR comienza a disminuir. Se encontró que $N_{\max}[m]$ coincide con porcentajes de recuperación en el rango del 25% al 75%. Para cada matriz el número de vectores de medición es dividido en 3 zonas de acuerdo al desempeño del algoritmo:

- **Zona de destrucción:** para la cual el algoritmo en promedio presenta un PR menor al 25%.

- **Zona de transición:** para la cual el algoritmo presenta un PR promedio entre el 25% y 75%.

- **Zona de recuperación:** para la cual el algoritmo presenta un PR promedio superior al 75%.

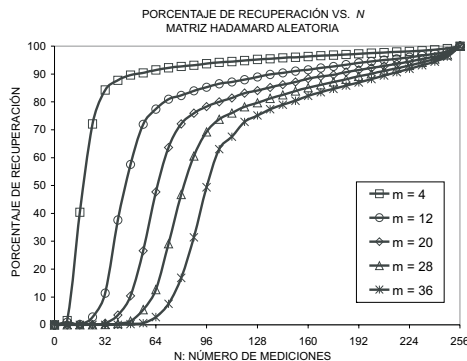


Figura 2. Promedio muestral del PR vs. N para la matriz Hadamard Aleatoria.

Las matrices BGP logran un porcentaje de recuperación superior al 80%, para todos los niveles de dispersión, excepto para $m=36$, con el cual se alcanza un 78%, en el mejor de los casos.

En cuanto a la matriz Sinusoidal se tiene que para los niveles de dispersión de estudio, excepto para $m=4$, el algoritmo OMP requiere muchos vectores de medición para conseguir una buena recuperación de la señal.

En la Figura. 3, se ilustran las gráficas de desviación estándar del PR. En la zona de destrucción se obtiene una mala recuperación para la mayoría de señales, por lo cual se presenta una baja desviación. En la zona de transición el promedio del PR mejora, sin embargo éste presenta una alta varianza que alcanza su máximo en $N_{\max}[m]$, por lo que no se tiene certeza del desempeño del algoritmo. Para señales con pequeños valores de dispersión se presentan campanas de desviación angostas y con picos pronunciados, mientras que para señales con un nivel de dispersión más alto se obtienen resultados con una varianza menor, pero repartida sobre un conjunto más amplio de vectores de medición. La varianza en la zona de recuperación es una función monótonamente decreciente.

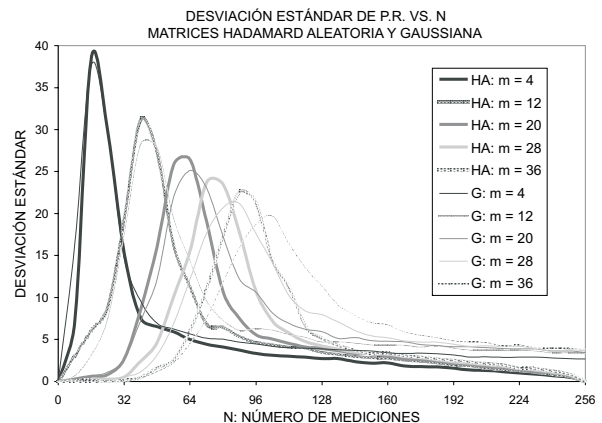


Figura 3. Desviación estándar vs. N para la matrices Hadamard Aleatoria (HA) y Gaussiana (G).

En la Figura 3, se observa que las curvas de la matriz Hadamard Aleatoria decaen más rápidamente que las matrices BGP. También se aprecia que las campanas de la matriz Hadamard Aleatoria son más angostas, lo que indica que la

incertidumbre en la recuperación se concentra en un número menor de vectores de medición.

Para una mejor visualización de cómo se distribuyen los PR para los diferentes valores de N se ilustra en la Fig. 4. un histograma tridimensional de los resultados obtenidos. Se realizaron las siguientes observaciones:

- A medida que aumenta N , las barras son más altas y la prominencia que forman se adelgaza. Lo que ilustra que la desviación estándar de los porcentajes de recuperación, disminuye con el aumento de N .

- Se puede observar que en la zona de transición las barras son extremadamente bajas y dispersas, lo que indica que en esta zona no se tiene certeza de la recuperación de la señal

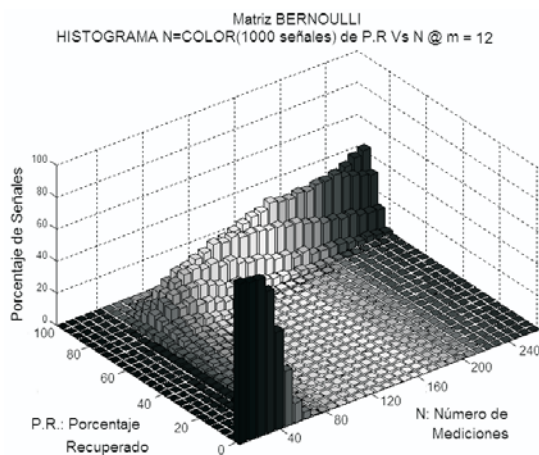


Figura 4. Histograma tridimensional del PR para la matriz Bernoulli. $m = 12$

6.2 Análisis del parámetro de coherencia

La Fig. 4. ilustra las curvas obtenidas del parámetro de coherencia para cada una de las matrices de medición en función del número de vectores de medición. Para las matrices BGP el mínimo valor alcanzado está alrededor de 0,25.

La matriz Hadamard sólo disminuye su valor a partir de 128 vectores de medición, pues para N menor a 128 existen columnas con valores idénticos, las cuales producen que el producto interno máximo siempre corresponda a uno.

La matriz Sinusoidal presenta una coherencia alta con respecto a las otras matrices y se observa que la correlación máxima de los átomos disminuye a partir de $128=N$. Esto se debe a que el parámetro de coherencia está dominado por las frecuencias más bajas, que al evaluar el producto interno para un intervalo menor o igual a 128 puntos, arrojan los peores casos de correlación.

En contraste, se encontró que la matriz Hadamard Aleatoria tiene la curva de coherencia más baja, para cualquier número de vectores de medición.

Existen además puntos donde se intersectan algunas de las curvas, como $200=N$, lo cual indica una mejora en el parámetro de coherencia de la matriz Hadamard y Sinusoidal, respecto a las matrices BGP. Esto es consecuencia de que al tener un número de vectores de medición cercano a 256 los átomos para las dos primeras matrices tienden a formar un conjunto ortogonal.

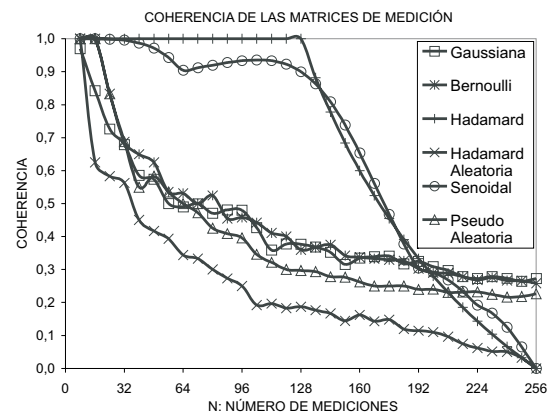


Figura. 5 Coherencia para matrices de estudio.

6.3 Análisis de la Función Acumulativa de Coherencia (FAC)

En la Fig. 6 se compara la función acumulativa de coherencia para las matrices Hadamard Aleatoria y Sinusoidal. Para valores altos de m , la matriz Sinusoidal tiene un crecimiento incluso más lento que la matriz Hadamard Aleatoria. Sin embargo, se puede detallar en la gráfica que para valores pequeños de m , las pendientes de las curvas para las matrices Sinusoidales son mucho mayores que las de las matrices Hadamard Aleatoria.

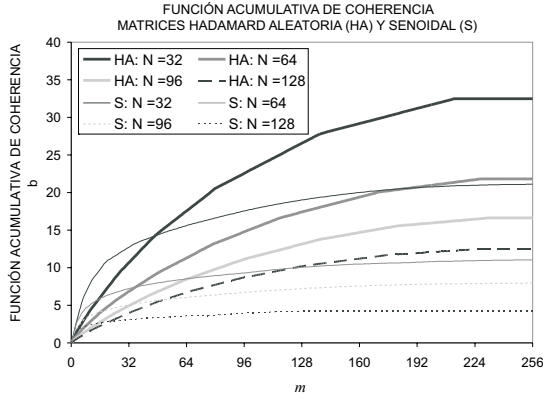


Figura 6. Función Acumulativa de Coherencia para matrices Sinusoidal y Hadamard Aleatoria.

La matriz Hadamard también presenta un marcado crecimiento en la pendiente de cada una de sus curvas para valores pequeños de m . Lo anterior, indica que existen productos internos muy altos, los cuales son perjudiciales para la exactitud de la recuperación de la señal.

6.4 Análisis de las Imágenes de Correlación

La importancia de inspeccionar la correlación entre los átomos en una matriz de medición se ilustra en el siguiente ejemplo. Suponga un conjunto ortogonal de átomos, entonces el producto interno entre el átomo ϕ_1 y el vector de observación $\mathbf{v}$ (valor del residuo en la primera iteración) es encontrado como

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \phi_1 \rangle &= \langle (s_1 \phi_1 + s_2 \phi_2 + s_3 \phi_3 + \dots + s_d \phi_d), \phi_1 \rangle \\ &= \langle s_1 \phi_1, \phi_1 \rangle + \langle s_2 \phi_2, \phi_1 \rangle + \langle s_3 \phi_3, \phi_1 \rangle + \dots + \langle s_d \phi_d, \phi_1 \rangle \\ &= s_1 \langle \phi_1, \phi_1 \rangle + s_2 \langle \phi_2, \phi_1 \rangle + s_3 \langle \phi_3, \phi_1 \rangle + \dots + s_d \langle \phi_d, \phi_1 \rangle \\ &= s_1 \cdot 1 + s_2 \cdot 0 + s_3 \cdot 0 + \dots + s_d \cdot 0 \\ &= s_1 \end{aligned}$$

que corresponde al valor de la señal en la primera posición. Si los átomos no conforman un conjunto ortogonal se presentan productos internos diferentes de cero, los cuales, si se encuentran asociados con valores de $\mathbf{s}$ diferentes de cero, contribuyen una recuperación inexacta en la amplitud de la señal.

Por tal motivo, la exactitud en la amplitud de la señal recuperada depende de:

Grado de correlación entre átomos:

Corresponde a la magnitud del producto interno entre los átomos. Entre más parecidos sean los átomos de la matriz de medición (producto interno cercano a uno), las contribuciones indeseadas que generan los productos internos tendrán mayor peso.

Nivel de dispersión:

A medida que este nivel aumenta, la amplitud del impulso buscado se ve afectada (aumentada o disminuida) por un mayor número de contribuciones indeseadas.

En la Fig. 7 se ilustra la distribución del valor del producto interno entre los átomos para cada una de las matrices de medición propuestas. El objetivo de estos histogramas es servir de soporte a las imágenes de correlación para tener mayor claridad en los resultados que se observan al variar el número de vectores de medición.

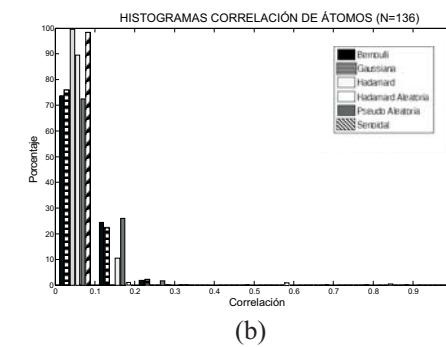
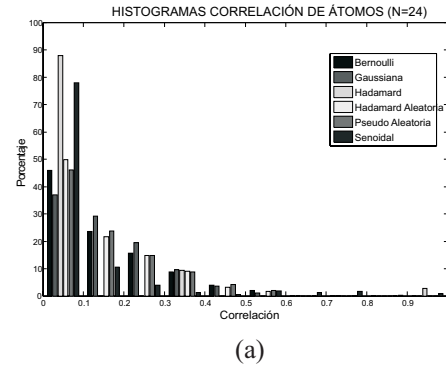


Figura 7. Histogramas de Correlación de átomos (a) $N = 24$ y (b) $N = 136$.

La Fig. 7 (a) corresponde a las matrices con 24 vectores de medición, mientras que la Fig. 7 (b) corresponde a las matrices con 136 vectores de medición. Al incrementar el número de vectores de medición se presenta una concentración mayor de muestras en el intervalo de correlación (0,0.1). No obstante, para $N=136$ persiste un pequeño número de muestras para valores de correlación que superan 0.6 para las matrices Hadamard y Sinusoidal, pese a que se cuenta con un número considerable de vectores de medición, la exactitud de la recuperación se ve afectada por aquellos valores altos de correlación.

En la Fig. 8 se muestra la correlación en imágenes definida en (13), para la matriz Hadamard. Se aprecia la evolución de la imagen, al pasar de $N=24$ a $N=32$, en donde las diagonales de color gris, que están en medio de las diagonales de color blanco, desaparecen indicando que un número mayor de átomos llegan a ser ortogonal.

Para la creación de la matriz de medición Hadamard se suprimen filas de la matriz original Hadamard, lo que da lugar a la aparición de átomos idénticos. En esta Sección se proponen dos ecuaciones que permiten obtener el número de átomos diferentes en la matriz de medición y el número de veces que estos se repiten.

Sea DA el número de átomos diferentes en la matriz de medición Hadamard y Ap el número de veces que aparece el conjunto DA en la matriz de medición Hadamard, entonces Ap puede calcularse de acuerdo a:

$$Ap = 2^{8-x}$$

donde x es la menor potencia de 2 mayor o igual a N . DA es obtenido mediante:

$$DA = \frac{d}{Ap}$$

Por ejemplo para $N=32$, resulta $x=5$, $Ap=8$ y $DA=32$. Lo anterior indica que para una matriz Hadamard con 32 vectores de medición existen únicamente 32 átomos diferentes del total de 256. Cada uno de estos 32 átomos se repite 8 veces en la

matriz. En la Fig. 8 (b) se ilustra este fenómeno, la distancia entre cada una de las diagonales corresponde a 32 píxeles (el número de átomos diferentes). Estas 15 líneas diagonales (recordando que la matriz de correlación es simétrica) ilustran cuáles son las posiciones donde aparece cada una de las réplicas de los átomos. Por ejemplo, para el átomo de la columna 1, existen siete réplicas ubicadas en la columnas 33, 65, 97, 129, 161, 193 y 225.

Otra característica que se debe tener en cuenta, es la ilustrada en la Fig. 8 (a), donde adicionalmente a las diagonales blancas, aparecen 3 diagonales grises entre cada par de éstas. Esto obedece sencillamente a que 24 no corresponde a una potencia de 2, por consiguiente cada uno de los átomos diferentes aumenta su correlación a medida que se disminuye el número de vectores de medición.

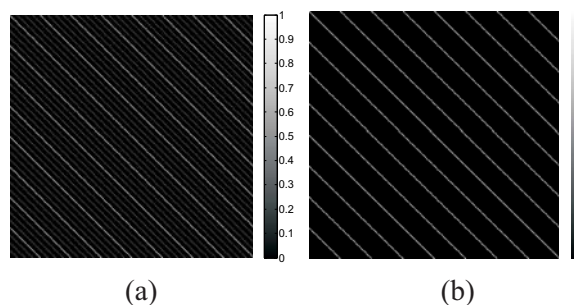


Figura. 8. Correlación en imágenes para la matriz Hadamard (a) $N=24$, (b) $N=32$.

6.5 Obtención del número de vectores de medición

En esta Sección se comparan directamente las matrices de medición con base en los resultados obtenidos del algoritmo OMP. La Fig. 9 permite calcular el mínimo número de vectores de medición N requerido para alcanzar la zona de recuperación, con un nivel de dispersión dado, para cada una de las matrices de medición propuestas.

La mejor curva es aquella que utilice el menor N para obtener un PR igual a 75%. Naturalmente si se escoge un N mayor al indicado en la Fig. 9, el PR será mayor. Se observa que la matriz Hadamard Aleatoria supera a todas las demás, ya

que su curva está por debajo de las otras para todos los niveles de dispersión.

Existen puntos de interés en las gráficas de la Fig. 9 que corresponden a las intersecciones de las diferentes curvas. Estos puntos establecen para qué intervalos en el nivel de dispersión una matriz de medición se desempeña mejor que otra. De esta manera, comparando las curvas de las matrices Sinusoidal, con las de las matrices BGP, se encontró que para valores de m entre 4 y 27 las matrices BGP son mejor opción, mientras que para el intervalo de m comprendido entre 27 y 36, la matriz Sinusoidal las supera. Análogamente se observa una situación similar con la matriz Hadamard en el punto de intersección $m=28$.

Así como la matriz Hadamard Aleatoria superó las expectativas, también se encontró que la matriz Hadamard es la de menor PR, en el intervalo de dispersión entre 4 y 28.

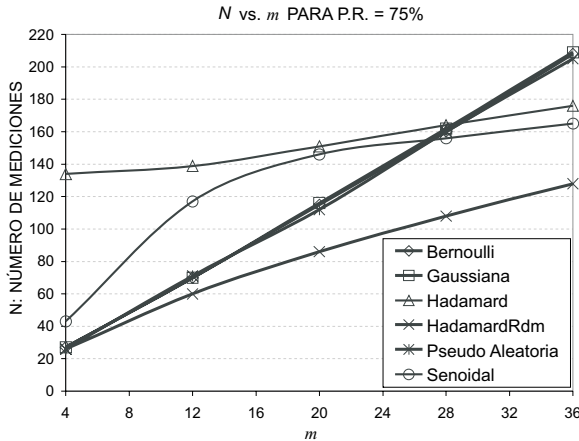


Figura 9. Gráfica de número de mediciones vs. nivel de dispersión, para obtener un PR = 75%.

7. TRABAJOS RELACIONADOS

En distintos trabajos se han introducido diversos arreglos de matrices y metodologías para evaluarlas. En este trabajo se presenta una comparación directa de las matrices, donde se emplearon dos tipos de herramientas de evaluación diferentes, en el sentido de que un grupo de estas son mediciones estadísticas de los resultados que arroja el algoritmo OMP al emplear cada una de las matrices, mientras que el segundo grupo efectúa mediciones directamente sobre las

matrices de medición.

Haciendo referencia al primer grupo, se encuentra que en , los resultados de la evaluación de las matrices Benoulli y Gaussiana con el algoritmo OMP, muestran un comportamiento casi idéntico en la recuperación de la señal, lo cual está en concordancia con los resultados obtenidos en este trabajo. Las diferencias entre ambos trabajos radican en que en [6] se define el porcentaje de señales recuperadas a partir de la recuperación exacta de cada una de las señales, y en el caso de este trabajo se definió una medida (porcentaje de recuperación) que evalúa la recuperación a partir de la norma euclidiana del error.

Para el segundo grupo de herramientas de evaluación, se tomó como referencia principal el artículo de Tropp [5]. Dicho artículo muestra un ejemplo y define una matriz de medición de átomos decadentes definidos así:

$$\varphi_i[n] = 0, \text{ para } 0 \leq n < i$$

$$\varphi_i[n] = \beta^{n-i} \sqrt{1 - \beta^2}, \text{ para } i \leq n$$

escogiendo $\beta < 1$

En el presente trabajo se efectuaron estas mediciones para un grupo de seis matrices. Adicionalmente, se introducen las imágenes de correlación, sus histogramas y los histogramas tridimensionales como herramientas de análisis. Del conjunto de matrices evaluadas, la matriz Hadamard Aleatoria, propuesta en este trabajo, es aquella con la que se obtienen los mejores resultados al recuperar señales dispersas utilizando el algoritmo OMP.

8. CONCLUSIONES

Se encontró la matriz que a partir del menor número de vectores de medición, logró la recuperación más adecuada de la señal. Ésta es la matriz Hadamard Aleatoria, la cual es la mejor opción dentro del conjunto de matrices estudiadas, para ser implementada con el algoritmo OMP.

Pese a que la matriz Pseudo Aleatoria no arrojó los mejores resultados, ésta presenta una ventaja muy

importante: su fácil generación. A partir de una semilla inicial se puede construir siempre la misma secuencia de números aleatorios y por tanto reconstruir idénticamente la matriz. Esto último puede ser aplicado en sistemas de criptografía en los cuales se encripta la información del mensaje por medio del vector de observación y en el receptor se desencripta el mensaje utilizando el algoritmo OMP. Naturalmente los únicos que conocen la semilla y el polinomio generador son el sistema transmisor y el receptor, mas no los escuchas que pueda tener el canal.

Se encontró que las matrices BGP presentan comportamientos casi idénticos al ser implementadas como matrices de medición en el algoritmo OMP. Excluyendo a la matriz Hadamard Aleatoria, se comparó el desempeño de las otras matrices y se encontró que existen dos intervalos en el nivel de dispersión para los cuales se tienen diferentes desempeños de las matrices. Analizando las curvas de las matrices Sinusoidal, Bernoulli, Gaussiana y Pseudo Aleatoria, se encontró que estas tres últimas para valores de m entre 4 y 27 son la mejor opción, mientras que para el intervalo de m comprendido entre 27 y 36, la matriz Sinusoidal las supera.

Entre más bajo sea el parámetro de coherencia, más apropiada es la matriz para ser utilizada en el algoritmo OMP.

En la compresión de los datos utilizando Muestreo Compresivo, existe pérdida de la información que se ve reflejada en el porcentaje de error al recuperar la señal. Dependiendo de la aplicación se deben definir los niveles para una recuperación aceptable de los datos y a partir de estos determinar el nivel de compresión de los mismos.

9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] R. Baraniuk, *Compressive sensing [Lecture Notes]*, IEEE Signal Processing Magazine, Vol. 24, pp. 118-121, 2007.
- [2] C. La, M. Do, *Tree-based Orthogonal Matching Pursuit Algorithm for signal reconstruction*, in IEEE International Conference on Image Processing, pp. 1277-1280, 2006
- [3] M. Wakin, J. Laska, M. Duarte, D. Baron, S. Sarvotham, D. Takhar, K. Kelly, R. Baraniuk, *An architecture for compressive imaging*, IEEE International Conference on Image Processing, pp. 1273-1276, 2006.
- [4] S. Kirolos, J. Laska, M. Wakin, M. Duarte, D. Baron, T. Ragheb, Y. Massoud R. Baraniuk, *Analog-to-Information conversion via random demodulation*, disponible en www.ece.rice.edu/~jnl5066/papers/DCAS2006_randmod.pdf, 2007.
- [5] J. Tropp, *Greed is good: algorithmic results for sparse approximation*, IEEE Trans. Inform. Theory, Vol. 50, pp. 2231-2241, 2004.
- [6] J. Tropp, A. Gilbert, *Signal recovery from random measurements via Orthogonal Matching Pursuit*, disponible en: www.math.lsa.umich.edu/~annacg/papers/TG05-signal-recovery-rev-v2.pdf, 2005.
- [7] S. Haykin, *Sistemas de comunicación*, México: Limusa Wiley, pp. 479-487, 2002.
- [8] E. Candes, *Compressive sampling*, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid, Spain, 2006.
- [9] S. Mallat, Z. Zhang, *Matching Pursuit with time frequency dictionaries*, IEEE Transactions in Signal Processing, December 1993.