

Integración en un número finito de términos

Elio Eduardo Espejo

Resumen

Con ayuda de tres sencillos criterios clásicos de integrabilidad elemental, se dan varios ejemplos acerca de cómo decidir la imposibilidad de integrar algunas funciones en términos de funciones elementales.

Palabras y frases claves: Cálculo diferencial e integral, integración en un número finito de términos, funciones elementales.

1 Introducción

En los cursos de cálculo diferencial e integral frecuentemente nos encontramos con integrales indefinidas ó antiderivadas tales como $\int e^{x^2} dx$, $\int \frac{\sin x}{x} dx$ o $\int \frac{e^x}{x} dx$ y otras más, las cuales no pueden ser halladas por ninguno de los métodos convencionales de integración. De hecho se puede demostrar que no es posible hallarlas en términos de funciones elementales mediante ningún método especial. En los textos, salvo contadas excepciones, encontramos comentarios que afirman que es posible demostrar la imposibilidad de realizar estas integraciones, pero nunca dan una demostración o al menos una referencia de dónde podemos conseguir estas demostraciones. El propósito de este artículo es mostrar algunas de tales demostraciones. El desarrollo del tema no es completamente riguroso (por ejemplo, no se dará la definición precisa de función elemental, que requiere algunos conocimientos de teoría de cuerpos) ya que el objetivo es desarrollar el tema en forma tal que se pueda exponer en una clase tradicional de cálculo integral. Para quien esté interesado en una exposición mas completa, al final se dan algunas referencias a textos y artículos que son clásicos en la teoría de integración elemental.

Nuestro interés se centrará en *funciones elementales*, que informalmente se pueden definir como las funciones de una variable obtenidas mediante la aplicación reiterada de operaciones algebraicas, exponenciales, logaritmos, funciones trigonométricas y trigonométricas inversas un número finito de veces.

El primer criterio de integrabilidad que expondremos es el *Criterio de Liouville para integración elemental*, demostrado por Joseph Liouville (1809-1882) a quien se considera el fundador de esta materia por sus aportes fundamentales y por ser uno de los investigadores que más trabajó en este problema. La demostración de este criterio se puede encontrar en [10].

2 Criterio de Liouville para integración elemental

Sean $f(z)$ y $g(z)$ funciones racionales de z , $f(z)$ no nula y $g(z)$ no constante. Entonces $\int f(z)e^{g(z)}dz$ es elemental si y sólo si existe una función racional $R(z)$ tal que $f = R' + Rg'$.

Ejemplo 1. e^{z^2} . Supongamos que $\int e^{z^2}dz$ es elemental, y entonces $1 = R' + 2zR$. Tomando $R = \frac{P}{Q}$, donde P y Q son polinomios primos relativos y $Q \neq 0$, queda $Q^2 = QP' - PQ' + 2zPQ$. Reordenando obtenemos

$$Q(Q - P' - 2zP) = -PQ'. \quad (1.1)$$

Si el grado de Q es positivo, entonces $Q = 0$ tiene una raíz. Sea α tal raíz y llamemos su multiplicidad r ($r > 0$). Ya que P y Q son primos relativos, $P(\alpha) \neq 0$. Ahora, α es un cero del lado izquierdo de (1.1) de multiplicidad $\geq r$ pero α es un cero del lado derecho de multiplicidad $r - 1$. Esta contradicción, nos muestra que el grado de Q no puede ser positivo. Si Q es una constante ($\neq 0$) podemos suponer que es la unidad, y de (1.1) obtenemos

$$P' + 2zP = 1 \quad (1.2)$$

Ya que P es un polinomio en z , es claro que el grado de $2zP$ es mayor que el grado de P' , y en consecuencia el grado de $2zP$ es estrictamente positivo. Es decir, el grado del lado izquierdo de (1.2) es mayor que el grado del lado derecho, lo cual es una contradicción. Por lo tanto no existe un polinomio que satisfaga (1.2). Se sigue que ninguna función racional satisface (1.1) y en consecuencia $\int e^{z^2}dz$ no es elemental.

Ejemplo 2. $\frac{e^z}{z}$. Si $\int \frac{e^z}{z}dz$ es elemental, entonces

$$\frac{1}{z} = R' + R \quad (2.1)$$

Tomando $R = \frac{P}{Q}$, donde P y Q son primos relativos, $Q \neq 0$, encontramos

$$Q(Q - zP' - zP) = -zPQ \quad (2.2)$$

Supongamos que el grado de Q es positivo, de modo que $Q = 0$ tiene una raíz. Sea α una de tales raíces y llamemos su multiplicidad r . Si $\alpha \neq 0$, nos encontraremos con la misma contradicción del Ejemplo 1. Por lo cual α debe ser cero y $Q = cz^r$, para algún $c \neq 0$. Reemplazando esta expresión en (2.2) obtenemos $cz^{r+1}(cz^{r-1} - P' - P) = -crz^r P$. De nuevo tenemos una contradicción, pues 0 es un cero del lado izquierdo de multiplicidad $\geq r + 1$, mientras este es un cero del lado derecho de multiplicidad r . Se sigue que Q no puede tener grado positivo, por lo cual Q es una constante que podemos suponer que es la unidad. Así (2.2) se simplifica en $zP' + zP = 1$. Como antes, el grado del lado izquierdo = grado de $(zP) > 0$ = grado del lado derecho. Hemos probado que no existe un polinomio que satisfaga (2.1) y por lo tanto ninguna función racional satisface (2.1). En consecuencia $\int (\frac{e^z}{z}) dz$ no es elemental.

Ejemplo 3. $\frac{1}{\ln z}$. Si $t = \ln z$, entonces $\int (\frac{1}{\ln z}) dz = \int (\frac{e^t}{t}) dt$. Por el Ejemplo 2, la última integral no es elemental.

Ejemplo 4. $\frac{(z^2 + az + b)e^z}{(z-1)^2}$, con a y b constantes. Si $\int \left[\frac{(z^2 + az + b)e^z}{(z-1)^2} \right] dz$ es elemental, entonces por el criterio de Liouville existen polinomios P y Q tales que $\frac{(z^2 + az + b)}{(z-1)^2} = (\frac{P}{Q})' + (\frac{P}{Q})$. Luego

$$(z^2 + az + b)Q^2 = (P'Q - Q'P + PQ)(z-1)^2 \quad (4.1)$$

$$Q(Q(z^2 + az + b) - (z-1)^2 P' - (z-1)^2 P) = -Q'P(z-1)^2 \quad (4.2)$$

Supongamos primero que Q tiene grado positivo y sea α un cero de Q de multiplicidad r . Si $\alpha \neq 1$, α es un cero del lado izquierdo de multiplicidad mayor o igual a r , pero un cero del lado derecho de multiplicidad $r-1$. De esta contradicción deducimos que debemos tener $\alpha = 1$ y $Q = (z-1)^r$, y sustituyendo esta expresión en la igualdad (4.2) encontramos que

$$(z-1)^r [(z-1)^r (z^2 + az + b) - (z-1)^2 P' - (z-1)^2 P] = -r(z-1)^{r+1} P$$

Al ser 1 un cero del lado izquierdo y derecho, las multiplicidades deben ser iguales, y se sigue que $r = 1$; es decir $Q = z-1$. Ahora podemos cancelar $(z-1)^2$ en la última ecuación, obteniendo

$$(z^2 + az + b) - (z-1)P' - (z-1)P = -P,$$

$$(z-1)P' + (z-2)P = z^2 + az + b$$

De esto vemos que P es lineal, $P = cz + d$, quedando que

$$cz - c + cz^2 + dz - 2cz - 2d = z^2 + az + b$$

Igualando coeficientes obtenemos las ecuaciones, $c = 1$, $d - c = a$, $-c - 2d = b$, por lo tanto $b = -2a - 3$.

En conclusión $\int \left[\frac{(z^2 + az + b)e^z}{(z-1)^2} \right] dz$ es elemental si y solo si $b = -2a - 3$, en cuyo caso la integral es $\frac{(z+a+1)e^z}{(z-1)} + C$

Otro conocido criterio de integrabilidad es el *Teorema de Liouville-Hardy*, aunque el que se expondrá es en realidad una extensión hecha por quien escribe este artículo. La demostración será publicada próximamente en la revista *Lecturas Matemáticas*.

3 Teorema de Liouville-Hardy

Sean f y g funciones racionales, entonces $\int f(z) \ln g(z) dz$ es elemental si y sólo si existen una función racional h y una constante M tales que $f = M(g'/g) + h'$.

Ejemplo 5. $\int \frac{\ln(z^n + 1)}{z} dz$, n un entero positivo. Si $\int \frac{\ln(z^n + 1)}{z} dz$ es elemental, entonces existen polinomios P y Q (coprimos) tales que

$$\frac{1}{z} = M \frac{nz^{n-1}}{z^n + 1} + \left(\frac{P}{Q} \right)' = M \frac{nz^{n-1}}{z^n + 1} + \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$$

o lo que es equivalente,

$$Q^2(z^n + 1) = Mnz^nQ^2 + (z^n + 1)z(P'Q - PQ')$$

Reordenando,

$$Q(Q(z^n + 1) - Mnz^nQ - (z^n + 1)zP') = -(z^n + 1)zPQ'. \quad (5.1)$$

Supongamos que Q no es constante y que una de sus raíces α es diferente de cero y de cualquiera de las raíces de $z^n + 1$, y sea m su multiplicidad. Entonces la última igualdad nos lleva a una contradicción, puesto que α es un cero del lado izquierdo de multiplicidad $\geq m$, y un cero del lado derecho de multiplicidad $< m$. Por lo tanto α debe ser o cero o una raíz de $z^n + 1$, y en este caso obtenemos nuevamente una contradicción, ya que α será una raíz del lado izquierdo de (5.1) de multiplicidad $\geq m + 1$ y un cero del lado derecho de multiplicidad $\leq m$. Concluimos que Q

debe ser una constante, la cual podemos suponer igual a 1. La última igualdad se transforma en

$$z^n + 1 - Mnz^{n-1} = (z^n + 1)zP'.$$

Lo que es imposible puesto que $\text{grad}(z^n + 1 - Mnz^{n-1}) < \text{grad}((z^n + 1)zP')$. Por lo tanto no existen los P y Q buscados y $\int \frac{\ln(z^n+1)}{z} dz$ no es elemental para ningún n entero positivo.

Ejemplo 6. $\int z \tan z dz$. Como $\tan z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}$, haciendo el cambio de variable $z = i \ln t$, nuestro problema se reduce al análisis de la integral $-i \int \frac{t^2-1}{t(t^2+1)} \ln t dt$ en la que podemos ignorar la constante $-i$ que multiplica la integral y si ésta es elemental tendremos que para ciertos polinomios P y Q y una constante M ,

$$\frac{t^2-1}{t(t^2+1)} = \frac{M}{t} + \left(\frac{P}{Q}\right)' = \frac{M}{t} + \frac{P'Q - PQ'}{Q^2} \quad (6.1)$$

De donde, $Q^2(t^2-1) = M(t^2+1)Q^2 + t(t^2+1)(P'Q - PQ')$
Reordenando,

$$Q(Q(t^2-1) - M(t^2+1)Q - t(t^2+1)P') = -t(t^2+1)PQ' \quad (6.2)$$

Supongamos que Q no es constante y que $\alpha \neq 0$, i y $-i$ es una raíz de Q y que su multiplicidad es m . La última igualdad nos conduce a una contradicción puesto que α sería una raíz del lado izquierdo de multiplicidad $\geq m$ y un cero del lado derecho de multiplicidad $< m$. Luego $\alpha \in \{0, i, -i\}$. En este caso nuevamente por (6.2) obtenemos una contradicción, pues α es una raíz del lado izquierdo de multiplicidad $\geq m+1$ y una raíz del lado derecho de multiplicidad $< m+1$. Se sigue que Q debe ser una constante, que podemos suponer igual a 1 y la igualdad (6.2) se convierte en

$$(t^2-1) - M(t^2+1) = t(t^2+1)P'$$

Lo cual es imposible puesto que en el lado izquierdo tenemos un polinomio de grado ≤ 2 y en lado derecho un polinomio de grado > 3 . Concluimos que no existen polinomios P y Q que satisfagan (6.2), por lo cual $\int z \tan z dz$ no es elemental.

Ejemplo 7. $\int \frac{\ln z dz}{P(z)}$, sin raíces de multiplicidad > 1 . Si la integral

dada es elemental existen polinomios R y Q (coprimos) tales que,

$$\frac{1}{P} = \frac{M}{z} + \left(\frac{R}{Q}\right)' = \frac{M}{z} + \frac{R'Q - RQ'}{Q^2} = \frac{MQ^2 + z(R'Q - RQ')}{zQ^2},$$

de donde,

$$zQ^2 = (MQ^2 + z(R'Q - RQ'))P$$

Reordenando,

$$Q(zQ - MPQ - zR'P) = -zPRQ' \quad (7.1)$$

Supongamos que Q no es constante, denotemos por α una raíz de Q de multiplicidad m y consideremos los siguientes casos que pueden suceder en (7.1):

1. α es diferente de cero y de cualquier raíz de P , entonces α es un cero del lado izquierdo de multiplicidad $\geq m$ y un cero del miembro derecho de multiplicidad $< m$.
2. α es raíz de P diferente de cero, entonces, α es raíz del miembro izquierdo de (7.1), con multiplicidad $\geq m + 1$ y de multiplicidad $< m + 1$ en el miembro derecho.
3. $\alpha = 0$, en este caso tendremos dos posibilidades: α es raíz de P , en este caso la multiplicidad de α en el miembro izquierdo es $> m + 1$ y en el miembro derecho es $\leq m + 1$; la segunda posibilidad es que α no sea raíz de P , en cuyo caso, la multiplicidad de α en el miembro izquierdo de (7.1) es $> m$ y en el miembro izquierdo la multiplicidad es $\leq m$.

En cualquiera de los casos analizados hemos llegado a una contradicción por lo cual concluimos que Q debe ser una constante que podemos suponer igual a uno y así (7.1) se reduce a,

$$z = P(M + zR') \quad (7.2)$$

Observando el grado de los polinomios que aparecen en cada miembro de igualdad, vemos tenemos tan solo tenemos las dos siguientes posibilidades,

1. $\text{grad}(P) = 0$, en cuyo caso $P = P_0$ es constante y la integral es elemental, por ejemplo, $\int \frac{\ln z}{P_0} dz = \frac{(z \ln z - z)}{P_0}$.

2. $\text{grad}(P) = 1$ y $R' = 0$, en este caso P es de la forma

$$P = az + b$$

siendo $a \neq 0$ y b constantes, remplazando esta expresión en (7.2) queda

$$z = (az + b)M \doteq aMz + bM$$

de donde $aM = 1$ y $bM = 0$ y por lo tanto $b = 0$ y a es una constante arbitraria. Así $P = az$ y la integral en este caso es elemental, por ejemplo, $\int \frac{\ln z}{az} dz = \frac{\ln(\ln z)}{a}$.

Hemos así demostrado que la integral dada es elemental solamente cuando P es constante o $P = az$.

El último criterio de integrabilidad que expondremos es el *Teorema de Chebyshev*, debido a Pafnuti Chebyshev (1821-1894) quien demostró la mayoría de sus teoremas en integración usando fuertemente la teoría de números. La demostración de este teorema se encuentra en Ritt [9], p.37-39. También se puede contactar a Martin Hassner en la dirección electrónica marder@almaden.ibm.com, quien es un investigador en integración elemental que conoce muy bien el trabajo de Chebyshev.

4 Teorema de Chebyshev

Si m , p y n son números racionales y a, b son números reales con $a, b \neq 0$, entonces $\int x^m(a + bx^n)^p dx$ es elemental si y sólo si al menos uno de los números p , $\frac{(m+1)}{n}$ o $\frac{(m+1)}{n} + p$ es entero.

Ejemplo 8. $\int \sin^p x \cos^q x dx$, con p y q números racionales. Haciendo la sustitución $t = \sin x$, obtenemos,

$$\int \sin^p x \cos^q x dx = \int t^p (1 - t^2)^{\frac{q-1}{2}} dt$$

Por el criterio de Chebyshev la última integral es elemental sólo si se cumple al menos una de las siguientes condiciones:

1. $\frac{q-1}{2}$ es entero, es decir si q es un entero impar y p es cualquier racional.
2. $\frac{p+1}{2}$ es entero, o sea si p es un entero impar y q es cualquier racional.
3. $\frac{p+1}{2} + \frac{q-1}{2}$ es entero, o sea cuando $p + q$ sea par.

Un interesante resultado que se obtiene con ayuda del Teorema de Chebyshev es el Teorema de Fermat para polinomios:

Teorema de Fermat para funciones polinómicas *No existen polinomios, $p(t)$, $q(t)$ y $r(t)$, donde $\frac{p}{r}$ y $\frac{q}{r}$ no son constantes y $n > 2$, tales que $[p(t)]^n + [q(t)]^n = [r(t)]^n$.*

Demostración: Es suficiente mostrar que no existen funciones racionales f , g y $n > 2$ tales que $[f(t)]^n + [g(t)]^n = 1$. Si existieran tales funciones racionales $f(t)$ y $g(t)$ entonces $g(t)f'(t)$ sería una función racional y por lo tanto su integral sería elemental. Ahora consideremos

$$\int g(t)f'(t)dt = \int (1 - [f(t)]^n)^{\frac{1}{n}} f'(t)dt = \int (1 - f^n)^{\frac{1}{n}} df.$$

Por el teorema de Chebyshev, la última integral es elemental sólo si $\frac{1}{n}$ o $\frac{2}{n}$ es un entero, lo cual es imposible puesto que $n > 2$

Para terminar, los teoremas que se ejemplificaron son tan sólo una mínima muestra de la teoría existente en integración elemental. En la actualidad se están desarrollando importantes investigaciones en integración finita (y resolución de ecuaciones diferenciales en términos finitos). En la bibliografía que se da se podrá conseguir mayor información al respecto. En opinión del autor de esta nota tal vez las exposiciones más completas sean las que se dan en [1] y [2].

Referencias

- [1] Bronstein, M. *Symbolic Integration I*, Springer, Heidelberg. 1996.
- [2] Davenport, H. *On the integration of algebraic functions*, Lectures Notes in Computer Science 102, Springer-Verlag, Heidelberg. 1981.
- [3] Fitt, A. and Hoare, G. *The closed-form integration of arbitrary function*, Mathematical Gazette (1993), 227-236.
- [4] Geddes, K and Stefanus, L. *On the Risch-Norman Integration Method and its Implementation in MAPLE*. G H Gonnet, editor, Proceedings of the ACM-SIGSAM 1989 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, 212-217. ACM, 1989.
- [5] Marchisotto E. and Zakeri G. *An invitation to integration in finite terms*, College Mathematical Journal (1994), 295-308
- [6] Mead, D. *Integration*. American Mathematical Monthly 68 (196.1) 152-156.

- [7] Paz, Alfonso. *Integral indefinida en términos de un número finito de funciones elementales*, Matemáticas: Enseñanza Universitaria, Marzo, 1984, 30-43.
- [8] R. Risch. *The problem of integration in finite terms*, Transaction of the American Mathematical Society 139 (1969), 167-189.
- [9] Ritt. J.P. *Integration in finite terms: Liouville's Theory of Elementary Methods*, Columbia University Press, New York, 1948.
- [10] Rosenlicht, M. *Integration In Finite Terms*, Amer. Math. Month. 79 (1972) 963-972

Dirección del autor: Elio Eduardo Espejo Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.