



Un acercamiento a estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa las Américas al desarrollo del pensamiento variacional: una experiencia desde fichas de laboratorio de matemáticas

Santiago Enoc Olaya Cariaga
Margarita Rosa Granja Quiñones

Universidad del Valle sede Buenaventura
Facultad de Educación y Pedagogía
Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas
2024



Un acercamiento a estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa las Américas al desarrollo del pensamiento variacional: una experiencia desde fichas de laboratorio de matemáticas

Santiago Enoc Olaya Cariaga
Margarita Rosa Granja Quiñones

Informe final presentado como requisito parcial para optar al título de licenciado en
Educación básica con énfasis en Matemáticas.

Daniel Stiven Gil Grueso
Director Trabajo de Grado

Universidad del Valle sede Buenaventura
Facultad de Educación y Pedagogía
Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

2024

Dedicatoria

Dedicamos nuestra tesis primeramente a Dios, por darnos la fuerza necesaria para culminar esta meta.

A nuestros padres, por todo su amor y por motivarnos a seguir hacia adelante.

A nuestro hijo, para que cada una de nuestras metas alcanzadas le quede como ejemplo.

A todos los profesores por su dedicación y consejos para seguir luchando por esta meta de ser licenciados en educación básica con énfasis en matemáticas.

Agradecimientos

En primer lugar, le agradecemos a dios por permitirnos culminar este proceso.

Asimismo, agradecemos a nuestro director de tesis Daniel Stiven Gil Grueso por la dedicación y apoyo que nos ha brindado.

Gracias a nuestros evaluadores por el tiempo, observaciones y sugerencias para poder terminar esta tesis de la mejor forma.

Gracias a nuestros familiares por estar presentes en todo este proceso.

Gracias a nuestro amigo por el apoyo que nos han dado en todo este proceso.

Resumen

Este trabajo de indagación caracterizó la forma de cómo los estudiantes del grado Quinto de la Institución Educativa las Américas (IEA), se acercan al desarrollo del Pensamiento Variacional a partir de los procesos de generalización planteados por Masson (1985) y que se clasifica por niveles (taxonomía) García (2011), en situaciones del contexto social y matemático. Para esto se desarrolló una metodología, que toma elementos de la Investigación Basada en el Diseño. Esta se desarrolló en cinco momentos: el primero está relacionado con la revisión bibliográfica; el segundo, se relaciona con el diseño de las fichas de Lab-mate; el tercero, con la implementación de las fichas; el cuarto, con el análisis de los resultados y el último momento, con las conclusiones. De ello se obtuvo que los estudiantes, al resolver las situaciones presentadas en las fichas, dejaron ver ciertos rasgos característicos del pensamiento variacional, tales como, detección de regularidades, identificación de patrones numéricos; no se pudo observar el uso de lenguaje simbólico, sin embargo, en algunos casos los educandos lograron aproximarse a procesos de generalización haciendo uso del lenguaje retórico, de manera general, puede ser un proceso que lleve mucho tiempo en algunos estudiantes, sobre todo en los primeros años escolares. **Palabras claves:** Generalización, Laboratorio de Matemáticas, Patrones numéricos, Pensamiento Variacional, Regularidades.

Abstract

This research work characterized the way in which the students of the Fifth grade of the IEA, approach variational thinking from the levels of Generalization (taxonomy) raised by García, in context situations for this a methodology was used, the which takes elements of Design-Based Research. This was developed in five moments: the first is related to the bibliographic review; the second moment is related to the design of the Lab-mate cards; the third, with the implementation of the chips; the fourth, with the analysis of the results and the last moment, with the final conclusions. From this it was obtained that the students, when resolving the situations presented in the cards, revealed certain characteristic features of Variational thinking, such as detection of regularities, identification of numerical patterns; the use of symbolic language could be observed, however, in some cases the students managed to approach generalization processes using rhetorical language, in a general way it was evidenced that presenting a symbolic expression and that it expresses a generality, can be a process It takes a long time for some students, especially in the early school years. **Keywords:** Generalization, Mathematics Laboratory, Numerical Patterns, Variational Thinking, Regularities.

Tabla de Contenido

	Pág.
Introducción	11
Capítulo I	14
Aspectos generales de la investigación	14
1.1 Planteamiento del problema	14
1.2 Objetivos	18
1.2.1 Objetivo general	18
1.2.2 Objetivos	19
1.3 Justificación	19
1.4 Contextualización	21
1.4.1 Descripción de la institución	21
Capítulo II Marco conceptual	23
2.1 Antecedentes	23
2.2 Perspectiva curricular	25
2.2.1 Pensamiento variacional	26
2.2.1.1 El desarrollo del pensamiento variacional en los primeros años de escolaridad	29
2.2.2 La Generalización	31
2.2.2.1 Taxonomías para el proceso de generalizar	32
2.3 Perspectiva didáctica	35
2.3.1 Laboratorio de matemáticas	35
Capítulo III Metodología	38
3.1 Primer momento. Documentación	38
3.2 Segundo momento. Diseño	39
3.2.1 Descripción de las fichas del Lab-Mate	39
3.2.2 Ficha X (la tabla)	43
3.2.3 Ficha Y (mango metro)	45
3.2.4 Análisis a priori.	47
3.3 Tercer momento. Implementación de las fichas de Lab-Mate	48
3.3.1 Categorización de los resultados	50
3.4 Cuarto momento. Análisis de los resultados	51

3.5 Quinto momento. Conclusiones	52
Capítulo IV. Análisis de los resultados	52
4.1 Implementación de la taxonomía	53
4.1.1 Respuestas del ver	54
4.1.1.1 Ejemplo de respuesta uno.	54
4.1.1.2 Ejemplo de respuesta dos.	56
4.1.1.3 Ejemplo de respuesta tres.	57
4.1.1.4 Ejemplo de respuesta cuatro:	58
4.1.2 Respuestas del decir	60
4.1.2.1 Ejemplo de respuesta uno.	60
4.1.2.2 Ejemplo de respuesta dos.	62
4.1.2.3 Ejemplo de respuesta tres.	63
4.1.2.4 Ejemplo de respuesta cuatro.	65
4.1.2.5 Ejemplo de respuesta cinco.	66
4.1.3 Respuestas del registrar	66
4.1.3.1 Ejemplo de respuesta uno	66
4.1.3.2 Ejemplo de respuesta dos	68
4.1.3.3 Ejemplo de respuesta tres	68
4.1.3.4 Ejemplo de respuesta cuatro	69
4.1.3.5 Ejemplo de respuesta cinco	70
4.1.4 Respuestas del Validar	71
Capítulo V. Conclusiones	72
5.1 Conclusiones generales	72
5.2 Algunas reflexiones	75
ANEXOS	80
Anexo 1	80
Anexo 2	83
Anexo 3	84
Anexo 4	87

Índice de tablas

Tabla 1. Taxonomía. Fases en la construcción de una generalización	33
Tabla 4. Categorización de los resultados	50
Tabla 5. Adaptación de la taxonomía para identificar la denominación del nivel de cada estrategia.	53

Índice de tablas

Figura 2. Modelo cara A de la ficha	41
Figura 3. Modelo cara 3 de la ficha	42
Figura 4. Diseño final de la ficha X	43
Figura 5. Diseño final de la ficha Y	46
Figura 6. Sesión 1	49
Figura 7. Sesión 2	49
Figura 8. Ejemplo de respuesta Ver	56
Figura 9. Ejemplo de respuesta Ver	57
Figura 10. Ejemplo de respuesta Ver	58
Figura 11. Ejemplo de respuesta Ver	59
Figura 12. Ejemplo de respuesta Ver	60
Figura 13. Ejemplo de respuesta Ver	61
Figura 14. Ejemplo de respuesta Decir	62
Figura 15. Ejemplo de respuesta Decir	63
Figura 16. Ejemplo de respuesta decir	65
Figura 17. Ejemplo de respuesta Decir	66
Figura 18. Ejemplo de respuesta Registrar	68
Figura 19. Ejemplo de respuesta Registrar	70

Introducción

El siguiente trabajo de investigación es requisito parcial para optar por el título de Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, describe una propuesta relacionada con la caracterización de las estrategias en que los estudiantes del grado quinto de la Institución Educativa Las Américas, se acercan al desarrollo del pensamiento variacional a partir de una experiencia de Fichas De Laboratorio De Matemáticas, teniendo en cuenta estrategias como: el trabajo con patrones, regularidades, etc. Presentadas por el MEN (1998-2006), el proceso de generalización desde la mirada de Mason (1999) y otros autores. En este sentido, la propuesta se organizó de la siguiente forma.

En el primer capítulo, se presentan los aspectos generales de la investigación donde se plantean las dificultades que se encuentran en el desarrollo del Pensamiento Variacional, en la Institución Educativa Las Américas, específicamente en la identificación de la variación y el cambio. A partir de esto se origina la pregunta de investigación. Luego, se formulan los objetivos, en los cuales se presenta lo que se espera con dicha investigación, luego se encuentra la justificación donde se dan argumentos para el sustento de la importancia de este trabajo y por último, una contextualización de la institución de la cual se realizó la investigación.

En el segundo capítulo, se presenta la fundamentación teórica a partir de los antecedentes para la identificación de estrategias utilizadas por los distintos trabajos de investigación. Tales como la estrategia metodológica, El Laboratorio De Matemática, la

idea general de las fichas, la generalización, el trabajo con patrones, regularidades y relaciones entre cantidades o magnitudes. Como estrategia para el desarrollo del pensamiento variacional. Luego se presentan dos perspectivas que, se relacionan entre sí; la primera, se refiere a la caracterización del pensamiento variacional, enfocándose en su desarrollo en los primeros años de escolaridad, desde el estudio de la variación y cambio, la identificación de patrones, regularidades, relaciones entre cantidades y la construcción del razonamiento algebraico; desde la mirada del MEN (1998-2006), Vasco (2002) y Godino (2000). Luego se presentan aspectos propios del proceso de la generalización desde la mirada de Masón (1999), la generalización como introductora al desarrollo de dicho pensamiento y la presentación de la taxonomía planteada por García (2011), para el proceso de generalización. La segunda, se enfatiza en la conceptualización del cómo se trabaja en el Laboratorio De Matemáticas desde la mirada de Gil y Valencia (2019), Arce (1999) y Pabón, Gómez y Sarmiento (2008), para la identificación de la herramienta de trabajo denominado, idea de ficha de Lab-Mate.

En el tercer capítulo, se describe la metodología, en el que se presenta una investigación basada en el diseño, que permite, según (Bakker y van Eerde, 2015) el enfoque requerido para este trabajo. De igual manera se presentan las descripciones de los cinco momentos los cuales son: la documentación, el diseño, implementación, análisis y conclusiones. Por último, se realiza la descripción de las fichas de Lab-Mate, la implementación de las fichas y la caracterización de las estrategias (ver, decir, registra y validar) planteadas por Masson (1985), utilizadas por los estudiantes.

En el cuarto capítulo, se hace el análisis respectivo a cada tipo de resultado, presentando así la descripción de los resultados para luego relacionarlo dentro de un nivel en específico con taxonomía de García (2011).

En el capítulo cinco, se presenta un conjunto de conclusiones en las que se evidencian aspectos del desarrollo de la investigación, en relación con la forma en que los estudiantes lograron un acercamiento al desarrollo del pensamiento variacional, desde el proceso de generalización mediante el trabajo de la identificación de patrones, regularidades y relaciones entre cantidades o magnitudes, teniendo en cuenta el logro de los objetivos propuestos. De igual forma, se describieron algunas recomendaciones para estudios de futuros trabajos de indagación en el campo de la Educación Matemática.

Capítulo I

Aspectos generales de la investigación

En este capítulo primeramente se presentan el planteamiento del problema en el que se describe la identificación del problema en la institución en lo relacionado con el

desarrollo del pensamiento variacional, aquello que permitió plantear la pregunta problema. Luego, se presenta la justificación que alude a los argumentos para presentar la importancia del trabajo y las herramientas a utilizar, los objetivos y por último la contextualización de la institución.

1.1 Planteamiento del problema

En el aprendizaje escolar de las matemáticas es necesario el desarrollo de distintos pensamientos, entre ellos se destaca el pensamiento variacional, vinculado con el reconocimiento, la identificación de la variación y el cambio. Sin embargo, los resultados de algunas investigaciones en Educación Matemática como Rivera y Sánchez (2013) permiten evidenciar que, no se tiene en cuenta el desarrollo del pensamiento variacional desde los primeros años de escolaridad.

Ante esto, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) menciona que, el desarrollo del pensamiento variacional debe de iniciarse desde los primeros años de la educación básica, a partir del estudio de patrones y la identificación de regularidades. No obstante, instituciones educativas del distrito de Buenaventura han tenido dificultades en el desarrollo de dicho pensamiento, específicamente en la Institución Educativa Las Américas (IEA).

La anterior mención se afirma gracias a los resultados de las pruebas de Estado, indicio de ello, es la información presentada en las pruebas saber del grado quinto en los años 2015, 2016 y 2017, en los cuales se logra evidenciar que los estudiantes de la IEA,

han obtenido resultados, que de acuerdo con el ICFES están ubicados en un nivel bajo en la identificación de patrones que es un aspecto fundamental para el desarrollo del pensamiento variacional.

De acuerdo con los resultados de las pruebas saber se logra evidenciar que en el año 2015 el 62% de los estudiantes no lograban identificar patrones, mientras que en el año 2016 esta cifra bajó al 52%, siendo así los resultados un poco mejor que el año anterior, para el año 2017 el 58% de los estudiantes no logran la identificación de patrones, indicando que no se obtiene una estabilidad en este componente, ante esto es importante y necesario un tratamiento didáctico con el propósito de mejorar estos resultados.

Para verificar lo expuesto por el resultado de las pruebas saber, se tienen en cuenta los resultados de una encuesta realizada a las tres profesoras del grado quinto de la IEA. En esta prueba los resultados presentan que las profesoras no tienen formación como docentes en Educación Matemáticas. Por ende, presentan dificultades como la implementación de actividades para el desarrollo de dicho pensamiento y en los diferentes elementos para el desarrollo del pensamiento variacional y el conocimiento del proceso de generalización como estrategia.

Lo antes mencionado, permite evidenciar una dificultad en el desarrollo del pensamiento variacional, esta puede ser generada por varios factores, entre los que se destacan la enseñanza fragmentada de dicho pensamiento como lo menciona el MEN (1998). Para ello es necesario una introducción de dicho pensamiento, según autores como

Masson (1985), Hernández (2014) y el MEN (2006), a partir del reconocimiento de patrones, conjetura de patrones y regularidades siendo estos aspectos característicos de la variación.

Lo anterior, se relaciona con el concepto de generalización, teniendo en cuenta dicho proceso, como parte indispensable para el desarrollo del pensamiento variacional y siendo esta la introductora al álgebra como lo menciona Sessa (2005), quien expone una propuesta para el inicio al desarrollo del pensamiento variacional a partir de la generalización, tomando a esta como una herramienta para lograr la introducción al álgebra. A partir de esto Masson (1985) expresa lo siguiente:

La generalidad es fundamental para el pensamiento matemático y algebraico. La generalización en álgebra es algo primario hacia la abstracción matemática, y puede ser desarrollada a partir del trabajo con patrones o regularidades que favorecen la articulación de la generalización en situaciones cotidianas. Para aprender el lenguaje algebraico, es importante que el alumno tenga algo que comunicar, para ello necesita percibir un patrón (unidad que se repite con regularidad,) y después intentar expresarlo y comunicarlo a alguien. (p. 16)

De acuerdo con Masson (1985), el desarrollo de la variación se debe iniciar desde los primeros años de escolaridad a partir de patrones y regularidad de cualquier tipo, con el fin de que los estudiantes tengan la capacidad de reconocer patrones y analizar situaciones relacionadas con conceptos del pensamiento variacional tales como la variación y cambio,

para poder enfrentarse a las competencias de los grados superiores en los que tradicionalmente se inicia la enseñanza del álgebra.

Ante esto, se debe tener en consideración el papel fundamental del desarrollo del pensamiento variacional en los primeros años de escolaridad para el aprendizaje de las matemáticas, la importancia de iniciar dicho desarrollo desde el reconocimiento de patrones o regularidades y la generalización como la introducción al álgebra. A partir de esto, se logra identificar la necesidad de desarrollar en el estudiante el pensamiento variacional mediante situaciones contextualizadas que permitan evidenciar aspectos característicos de la variación tales como el reconocimiento de patrones, con el fin que los estudiantes logren llegar al proceso de generalización.

El objetivo de esta indagación está orientado para que los estudiantes del grado quinto de la IEA, puedan tener un acercamiento al proceso de generalización a partir de situaciones del contexto mediante las fichas de Lab-Mate, que posibiliten evidenciar aspectos característicos del pensamiento variacional, con el fin de caracterizar las diversas estrategias utilizadas por los estudiantes que den indicios del proceso de generalización. A partir de los planteamientos anteriores se construye la siguiente pregunta como eje fundamental de esta indagación.

¿Qué aspectos característicos del pensamiento variacional se pueden considerar, en el diseño de situaciones en el ámbito de fichas Lab-mate, que posibiliten el acercamiento del estudiante al proceso de generalización?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

Acercar a los estudiantes del grado quinto de la IEA al proceso de generalización, a partir de situaciones del contexto social y matemático. Relacionado con aspectos característicos del pensamiento variacional en el ámbito de fichas de Lab-Mate.

1.2.2 Objetivos

- Identificar situaciones del contexto que propicien aspectos como la variación y el cambio, para el diseño de las fichas de Lab-mate.
- Categorizar las estrategias planteadas por Masson (1985) (Ver, Decir, Registrar y Probar.) utilizadas por los estudiantes, donde se encuentren aspectos propios de la variación (patrones, regularidades, etc.)
- Analizar los resultados obtenidos de la implementación de las fichas del Lab-Mate, mediante los niveles de García (taxonomía), para verificar el acercamiento a los procesos de generalización de los estudiantes.

1.3 Justificación

Abordar la problemática del desarrollo del pensamiento variacional de los estudiantes es importante debido a que permite realizar un acercamiento a espacios como el Laboratorio de Matemática que es un espacio educativo diferente, que permite a los

estudiantes llegar a conceptos matemáticos que pueden ser complejos para ellos. En esta investigación, la idea de Laboratorio de Matemática fue un lugar en el que los estudiantes lograron desarrollar el pensamiento variacional desde el trabajo con patrones e identificación de regularidades. Abordándose mediante las fichas de Lab-Mate dirigidas para que los estudiantes se acerquen al proceso de generalización.

De acuerdo con lo antes mencionado, en la educación matemática se proponen distintos pensamientos que se deben desarrollar desde los primeros años de escolaridad, entre ellos está el pensamiento variacional, tal como el MEN (2006) hace mención del significado de dicho pensamiento para la comprensión de las matemáticas mismas y la importancia de su inicio en los primeros años de escolaridad a partir del reconocimiento de patrones y regularidades de cualquier tipo.

Con respecto a lo manifestado, Masson (1985) menciona que no se debe pensar que el estudio del álgebra debe iniciarse al terminar la lista de contenidos aritméticos, debido que los conocimientos algebraicos como la variación y cambio están inmersos en todos los conocimientos matemáticos. Ahora bien, teniendo en cuenta lo propuesto por Torres y Sánchez (2013) el Pensamiento Algebraico se desarrolla en estrecha relación con el numérico y para ello es necesario romper con los conceptos y acciones de la enseñanza tradicional, es decir, iniciar su estudio desde el reconocimiento de patrones y regularidades.

De acuerdo con lo anterior, el MEN(2006) menciona que para desarrollar el Pensamiento Variacional desde los primeros años de escolaridad es necesario el uso de situaciones problemas relacionadas con el contexto, las cuales permitan al estudiante analizar de qué manera cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras; con el objetivo de que los estudiantes logren un acercamiento al proceso de generalización, tomando así este proceso como el más adecuado para construir un aprendizaje significativo y manejo simbólico mucho antes de llegar al grado octavo. Para ello, Mason (1985) propone cuatro etapas para trabajar la generalización: ver un patrón, decir cuál es el patrón, registrar un patrón y probar la validez de la conjetura.

Esta propuesta de investigación pretende lograr un acercamiento a los estudiantes del grado quinto de la Institución Educativa Las Américas al proceso de generalización a partir de situaciones originadas del contexto en las cuales se evidencia características propias del Pensamiento Variacional tales como la variación y la identificación de patrones, con el fin de caracterizar las distintas estrategias que permitan encontrar evidencia del proceso de generalización a partir de los niveles de García (taxonomía).

1.4 Contextualización

1.4.1 Descripción de la institución

La IEA es una institución educativa ubicada en Buenaventura y cuenta con dos sedes: Carlos Humes y Dignidad. Teniendo en cuenta que para el desarrollo de este trabajo

de investigación se centrará en la sede principal ubicada en el barrio las Américas Cra. 65b #6a26 de la ciudad de Buenaventura, Valle del Cauca.

La institución educativa cuenta con profesores calificados para ejercer la docencia en los niveles de preescolar, educación básica y educación media. Con un enfoque de programa de media técnica en gestión empresarial articulado con el SENA. Bajo la dirección del rector y directores.

Ahora bien, esta institución cuenta con los grados de primaria en la jornada de la tarde, la cual se divide en dos sesiones: la primera sesión consta de tres horas seguido del descanso para dar paso a las siguientes tres horas más para el desarrollo de las clases. Cada grado tiene una docente que se encarga de preparar e impartir las clases de la mayoría de las asignaturas entre la que está matemáticas.

Para el desarrollo de todas las actividades educativas, la institución cuenta con 14 aulas de clase, una sala de profesores, una sala de sistemas, una oficina para el personal administrativo y un espacio mediamente amplio para el descanso.

El grado quinto de primaria de la sede principal cuenta con 23 estudiantes, específicamente 12 niñas y 11 niños, sus edades se ubican en el intervalo entre los 10-14 años. Contando con un salón amplio para el desarrollo de sus actividades y con una profesora que cuenta con el título de licenciatura en ciencias naturales y ambiental.

Capítulo II Marco conceptual

En este capítulo, se presentan algunos trabajos fundamentales para la construcción de este trabajo de indagación. Por consiguiente, se desarrollan los elementos teóricos que son de referencia, tanto para la fundamentación de la problemática, como para la elaboración de la propuesta de trabajo. Esta fundamentación, se organiza en dos perspectivas de análisis: la perspectiva Curricular y la perspectiva Didáctica.

2.1 Antecedentes

En el campo de la investigación sobre el desarrollo del pensamiento variacional en los primeros años de escolaridad, se encuentran diversos trabajos de indagación en los cuales se logran identificar conceptos y metodologías, tales como fichas de laboratorio de matemáticas y la generalización como introductora al álgebra.

El trabajo investigativo realizado por Gil y Valencia (2019) titulado: Un acercamiento al desarrollo del pensamiento variacional desde la perspectiva del isomorfismo de medida: una experiencia en el laboratorio de matemáticas. Dicho trabajo tiene como objetivo Desarrollar una propuesta metodológica, vinculada al laboratorio de matemáticas, en la que se planteen situaciones problemas relacionadas con las estructuras multiplicativas en el caso de Isomorfismo de medida, las cuales permiten un acercamiento al desarrollo del pensamiento Variacional en los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa República de Venezuela. Realizando una intervención en el aula que

en ese caso un Laboratorio de Matemáticas y para el desarrollo de este fue necesario el diseño de fichas.

Obteniendo como resultados un aprendizaje significativo del pensamiento variacional a partir del isomorfismo de medida, logrando así acercar a los estudiantes de dicha institución a conceptos relacionados con el cambio y la variación.

En segundo lugar, el proyecto de investigación de Rivera y Sánchez (2013) titulado: Desarrollo Del Pensamiento Variacional En La Educación Básica Primaria: Generalización De Patrones Numéricos. Dicho trabajo tiene como objetivo aportar elementos conceptuales y procedimentales a la reflexión sobre la iniciación al álgebra escolar, desde el análisis del diseño e implementación de una secuencia didáctica para el grado tercero de la Educación Básica Primaria, que involucra la generalización de patrones numéricos enfocándose en las estructuras multiplicativas. El cual, toma a la generalización de patrones para desarrollar el pensamiento variacional, tal como lo mencionan Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), el acercamiento al razonamiento algebraico, a partir de la generalización de patrones en la Educación Básica Primaria.

En ambas investigaciones se pueden rescatar aspectos relevantes para la construcción de este trabajo investigativo tales como la propuesta metodológica (investigación basada en el diseño) y elaboración de fichas de laboratorio de matemáticas, planteado por Gil y Valencia (2019), para lograr un acercamiento desde lo numérico al

desarrollo del pensamiento variacional y la propuesta planteada por el (MEN,2006) acerca del proceso de generalización como introductora a dicho pensamiento.

Por otra parte, se encuentra el trabajo de Herrera y Gaitán (2013) titulado ejemplificación de las diferentes fases del proceso de generalización en álgebra en tareas resueltas por estudiantes de aritmética de licenciatura en matemáticas, el cual tiene como objetivo identificar las distintas fases de la generalización de patrones y ejemplificar los niveles asociados a cada una de ellas por medio del análisis de un instrumento resuelto por estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, que cursaron Aritmética en el segundo semestre de 2012. En el cual hace mención diversas taxonomías de algunos autores, entre ellas la taxonomía de García (2011), las fases de la generalización planteadas por Mason (1985) y sus niveles.

2.2 Perspectiva curricular

Para el análisis de los elementos de la perspectiva curricular, se toman como referencia. Por un lado, los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006), Sessa (2005), García (2011) y por el otro Mason (1985 y 1999), para la conceptualización de aspectos relevantes para este trabajo de indagación tales como: el pensamiento variacional, el desarrollo del pensamiento variacional en los primeros años de escolaridad, el proceso de generalización y la taxonomía para el proceso de Generalización.

2.2.1 Pensamiento variacional

En el pensamiento variacional, como su nombre lo indica, se presenta el estudio de la noción del cambio y la variación en los distintos contextos, desde lo matemático se relaciona de manera directa con los distintos pensamientos como el geométrico trabajando así desde la identificación de patrones y muy estrechamente con el pensamiento numérico debido a que el pensamiento variacional se centra principalmente de la modelación, establecer relaciones entre las distintas cantidades. Por otro lado, para movilización de este pensamiento se hace uso de los distintos contextos. Los cuales se relacionan los estudiantes, donde se presenten escenarios donde se vea inmersos aspectos como la variación y el cambio, en este sentido el MEN (1998) propone:

El estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas.

El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica. (pág. 73).

Teniendo en cuenta lo anterior, los Estándares Básicos De Competencias En Matemáticas (MEN, 2006), y Los Lineamientos Curriculares De Matemáticas (MEN,1998) establecen, que el pensamiento variacional está estrechamente relacionado con el reconocimiento, la identificación de la variación y cambio en los distintitos escenarios; siendo estos aspectos propios e indispensables para el desarrollo de dicho pensamiento, así como la representación y modelación de diversos sistemas o registros, ya sean gráficos, simbólicos, verbales, icónicos o algebraicos.

Por otra parte, el pensamiento variacional trabaja estrechamente con el estudio del álgebra temprana lo cual permite la construcción en los primeros años de escolaridad algunos aspectos propios de ella tales como: las relaciones de igualdad en sus diversos significados, la incógnita y conceptos de variable etc. Para ello, el pensamiento variacional se desarrolla desde el análisis del qué cambió de forma, aumento o disminución de una serie o valor, números o letras, hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente elemento en la secuencia, tratar de expresar términos oralmente o por escrito, también por medio de distintas representaciones, e intentar formular un procedimiento o fórmula que permita la reproducibilidad en el mismo patrón.

Ahora bien, sabiendo que el pensamiento variacional se fundamenta en el reconocimiento, la identificación de la variación y el cambio en diferentes contextos y su representación o modelación en distintos tipos de registro. Tal como Vasco (2002):

El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionan sus variables internas, de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (Vasco, 2002, p 70).

Teniendo en cuenta la perspectiva de Vasco (2002) acerca de la modelación de patrones que se repiten, para ello, se hace necesario el estudio de la variación y cambio a

partir del reconocimiento, la identificación de patrones y regularidades, desde los primeros años de escolaridad tal como lo menciona el MEN (2006).

En este mismo sentido, en el desarrollo del pensamiento variacional se evidencia la construcción del Razonamiento algebraico que según Godino (2000) implica representar, generalizar y formalizar patrones y regularidades desde cualquier aspecto de las matemáticas (geométrico, numérico, etc.), a medida que se desarrolla el razonamiento algebraico también el estudiante va construyendo de forma significativa el uso de símbolos y el lenguaje. Los cuales, permiten la comunicación.

Para ello, Godino (2000) presenta distintos aspectos del razonamiento algebraico que se pueden desarrollar en los primeros años de escolaridad, los cuales deben de tener en cuenta los docentes en cuestión y son:

1. Los patrones o regularidades existen y aparecen de manera natural en las matemáticas. Pueden ser reconocidos, ampliados, o generalizados. El mismo patrón se puede encontrar en muchas formas diferentes. Los patrones se encuentran en situaciones físicas, geométricas y numéricas.
2. Podemos ser más eficaces al expresar las generalizaciones de patrones y relaciones usando símbolos.
3. Las variables son símbolos que se ponen en lugar de los números o de un cierto rango de números.
4. Las funciones son relaciones o reglas que asocian los elementos de un conjunto con los de otro, de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo uno del segundo conjunto. Se pueden expresar en contextos

reales mediante gráficas, fórmulas, tablas o enunciados. [diagramas sagitales o como una representación mecánica, a saber, cómo máquina] (pág. 10).

2.2.1.1 El desarrollo del pensamiento variacional en los primeros años de escolaridad

Se sugiere que el aprendizaje de las nociones y conceptos algebraicos en los primeros años de escolaridad debido a la necesidad de mejorar el desempeño de los estudiantes de educación secundaria, los cuales son los que se enfrentan con una serie de dificultades causado por la enseñanza asincrónica y fragmentada del pensamiento variacional.

Para ello, el MEN (2006) presenta los estándares curriculares para los primeros años de escolaridad en los cuales, del primer año al tercero se evidencia el estudio del comportamiento de la variación y el cambio a partir de la descripción de las regularidades que se encuentran en los distintos tipos de contexto ya sea matemático o social. Para luego, dentro del cuarto y quinto año presentar el desarrollo de dicho pensamiento desde el reconocimiento de las relaciones entre cantidades, la predicción de patrones y las representaciones en los distintos tipos de registro tales como el simbólico o el natural, etc.

Teniendo en cuenta lo anterior, el MEN (2006), menciona que, el desarrollo del pensamiento variacional se debe iniciar a partir del estudio de regularidades y la detección de los criterios que las rigen, para identificar el patrón que se repite periódicamente. Las

regularidades entendidas como unidades de repetición, se encuentran en sucesiones o secuencias que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos, en un orden fijado. Al reconocer cuál es su parecido y en qué se diferencian los términos de esta secuencia, se desarrolla la capacidad para establecer en qué consiste la repetición de un mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un procedimiento, algoritmo o fórmula. Siendo esto último parte fundamental para el proceso de la generalización.

2.2.2 La Generalización

Los Estándares Básicos De Competencias En Matemáticas (MEN, 2006), proponen el acercamiento al desarrollo del pensamiento variacional, desde la generalización de patrones en la Educación Básica Primaria.

Las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos y las leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números y las figuras involucran la visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras en los cuales se basa el proceso de generalización. Esta es una forma muy apropiada de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar al séptimo y octavo grado. (MEN, 2006. p.67).

Respecto a lo establecido por el MEN (2006) sobre el papel que juega el proceso de generalización para el desarrollo del pensamiento variacional, se logran identificar distintas posturas tales como lo plantea Sessa, (2005) que el generalizar es encontrar

características que unifican, reconocer tipos de objetos y problemas; proponiendo así a la generalización como introductora al álgebra.

Además, Mason (1999) menciona que la generalización es el proceso que permite dar vida a las matemáticas a través del álgebra, cuyo lenguaje expresa cualquier generalidad en matemáticas, de manera que es necesario tener algo que decir y por tanto, es indispensable percibir algún patrón o regularidad, esto significa encontrar lo que es común, para luego tratar de describir lo que se expresa, o dicho en otras palabras comunicarlo a alguien; para lo cual propone cuatro etapas para el estudio de la generalización que son: Ver, Decir, Registrar y Validar.

“Ver”, hace relación a la identificación mental de un patrón o una relación, y con frecuencia esto sucede cuando se logra la identificación de un algo común. “Decir” ya sea a uno mismo o a alguien en particular, es un intento de articular en palabras, esto que se ha reconocido. “Registrar”, es hacer visible el lenguaje, lo cual requiere un movimiento hacia los símbolos y la comunicación escrita (incluyendo los dibujos). “Probar la validez de las fórmulas”, para que una fórmula tenga validez debe probarse de diferentes formas (Mason, 1985. p. 17).

2.2.2.1 Taxonomías para el proceso de generalizar

García (2011), en su trabajo de maestría plantea diferentes niveles al interior de cada una de las cuatro etapas de generalización, de esta manera establece estrategias de nivel que le permiten identificar las rutas que siguen los estudiantes en el proceso de generalizar.

Las distintas fases propuestas por García (2011) y sus respectivos niveles se muestran en la tabla:

Tabla 1. Taxonomía. Fases en la construcción de una generalización

Estra- tegias de nivel	FASES EN LA CONTRUCCIÓN DE UNA GENERALIZACIÓN			
	VER	DECIR	ESCRIBIR	VERIFICAR
I	(OI) Observar la imagen como un todo.	(DIT) Describir características de la imagen como un todo.	Escribir las propiedades comunes entre los casos	
			(EPCP) Escribir con palabras las características de la imagen	
			(EPCM) Escribir con palabras y símbolos las características de la imagen.	
			(EPCS)Escribir con símbolos las características de la imagen.	
II	(AI) Analizar la imagen (Descompone el todo en sus partes)	(DPC) Describir las propiedades comunes entre los casos particulares.	Escribir características de las partes en un todo.	
			(ECPP) Escribir con palabras las propiedades comunes entre los casos particulares	
			(ECPM) Escribir con palabras y símbolos las propiedades comunes entre los casos particulares.	
			(ECPS) Escribir con símbolos las propiedades comunes entre los casos particulares.	
III	Establecer relaciones entre las partes de la imagen	(DRP) Describir la forma en que se relacionan las partes	Escribir la forma en que se relacionan las partes.	
	(ERN) Establecer relaciones necesarias.		(EFRP) Escribir con palabras la forma en que se relacionan las partes.	

	(ERS) Establecer relaciones suficientes		(EFRM) Escribir con palabras y símbolos la forma en que se relacionan las partes. (EFRS) Escribir con símbolos la forma en que se relacionan las partes.	
IV	(CRP) Conjeturar acerca de las relaciones entre las partes de la imagen.	(DCR) Describir la conjetura observada de relaciones entre las partes	Escribir la conjetura observada de las relaciones entre las partes.	(VCTC) Verifica su conjetura construyendo un término cercano.
			(ECOP) Escribir con palabras la conjetura observada de las relaciones entre las partes.	(VCC) Verifica su conjetura haciendo uso de la calculadora.
			(ECOM) Escribir con palabras y símbolos la conjetura observada de las relaciones entre las partes.	(VCM) Verifica su conjetura manualmente.
			(ECOS) Escribir con símbolos la conjetura observada de las relaciones entre las partes.	(NVC) No verifica su conjetura.

Fuente: García (2011)

Rivera y Sánchez (2012) explican detalladamente los niveles realizados por García (2011) y mencionan que:

Organiza la tabla en categorías que se agrupan en cuatro niveles (I, II, III, IV), de acuerdo con las estrategias utilizadas en cada una de las fases de generalización (ver, decir, escribir y verificar); el nivel I se refiere a aquellas estrategias que parten de Ver y Describir la imagen como un todo, en la fase Escribir se escriben las características comunes entre los casos; en el nivel II se ubican aquellas estrategias que se fundamentan en observar que se descompone el todo en sus partes; en el

nivel III se organizan aquellas acciones que se dan cuando, se relacionan las partes del todo entre sí. Como último nivel IV, se conjetura acerca de las relaciones entre las partes (Ver), permitiendo describir la conjetura observada de relaciones entre las partes, escribiendo la conjetura observada de las relaciones entre las partes, en este nivel en particular aparece la fase Verificar, la cual se divide en cuatro subniveles. Fases en la construcción de una generalización. (García, 2011) consecuencia directa de la conjetura que se establece. Esta clasificación, le permite a la autora establecer las rutas de acceso a la generalización (pág.23)

2.3 Perspectiva didáctica

2.3.1 Laboratorio de matemáticas

El Lab-mate es una estrategia pedagógica desarrollada de manera autónomamente en un espacio específico. La cual, permite a los estudiantes descubrir, aplicar, relacionar y construir el conocimiento, mediante el uso de materiales y herramientas. Para ello, se consideran algunas conceptualizaciones como Arce (1999). Menciona que:

El Laboratorio de Matemáticas es una estrategia pedagógica de utilización del material, en la que se encuentra un conjunto de actividades matemáticas para ser desarrolladas autónomamente por los participantes a través del uso de variados materiales, proceso que proporciona un ambiente de aprendizaje en el que se genera la relación entre actividad matemática y material manipulativo,

relación que contribuye a la construcción y fundamentación de pensamiento matemático. (p.2)

Por otra parte, Pabón, Gómez y Sarmiento (2008) expresan que:

El Laboratorio de Matemáticas como una estrategia pedagógica de utilización del material que contribuye a la construcción de pensamiento matemático, al generarse procesos de aprendizaje que involucran una metodología experimental, permitiendo a quien aprende recorrer desde la intuición, pasando por la descripción y definición, hasta llegar al dominio de conceptos matemáticos; retomado así, el proceso que se da de lo concreto a lo abstracto por medio de la acción....Esta estrategia pedagógica proporciona un espacio de comportamiento a los participantes, para asumir procesos o maneras de construir un concepto de una forma gradual y personal de aprendizaje (p.192-193).

El Lab-Mate se origina de una estructura simple y eficaz, en la que se presenta como base de su configuración un elemento, llamado mesa; en ella, se dispone de diferentes tipos de materiales como pueden ser las Fichas, materiales manipulativos, software, elementos para estructurar una secuencia de clase, etc. para que estudiantes enfrenten situaciones que se disponen en la temática de cada mesa. Sin embargo, hay problemas en los cuales es necesario utilizar dos o más mesas para poder llegar a una solución. La

relación entre las mesas logra establecer lo que se denomina una sección del Lab-Mate. (Pabón, Gómez y Sarmiento (2008).

Teniendo en cuenta lo antes mencionado, para el desarrollo del Lab-mate se encuentran las fichas. Para el diseño de las actividades que la conforman se debe considerar que cada una se realiza de manera independiente, aunque todas tiene el mismo objetivo que es el desarrollo del pensamiento variacional y para este caso, el acercamiento al proceso de generalización. y para el desarrollo del diseño de las fichas, se tiene en cuenta lo planteado por Gil y Valencia (2019)

Las fichas tienen la intencionalidad de generar en los estudiantes ciertas competencias en lo referente a los cinco procesos generales de la actividad matemática, en especial los procesos asociados a la resolución de problemas, la comunicación y el razonamiento. (Gil y Valencia 2019, p.57)

Capítulo III Metodología

Para desarrollar este trabajo investigativo se hizo uso de una metodología de tipo cualitativa, la cual toma elementos de la investigación basada en el diseño. De acuerdo con

(Bakker y Van Eerde, 2015). este tipo de estrategias son empleadas para obtener evidencias del efecto de un nuevo programa, currículo, artefacto, material educativo, conjunto de problemas, normas, etc. el cual permite la preparación del diseño o rediseño, la implementación, el análisis y por ultimo las conclusiones de este trabajo.

Esta metodología se desarrolla en cinco momentos: el primero está relacionado con la documentación o revisión bibliográfica. Para la construcción del problema y la conceptualización, las cuales permitieron orientar el trabajo para iniciar la siguiente parte; el segundo momento, está centrado en el diseño de las fichas de Lab-mate; el tercero, con la implementación o experimentación de las fichas de Lab-mate; el cuarto, con el análisis de los resultados y el último momento, con las conclusiones finales.

3.1 Primer momento. Documentación

En este primer momento se realizó la recolección datos y la información acerca del problema planteado e identificado de la IEA. En la recolección de la información se logran identificar distintos aspectos que son fundamentales para la investigación, tales como: la identificación de patrones y regularidades, etc. Dando así, paso a la construcción de marco conceptual, el cual está conformado por los antecedentes y las dos perspectivas (curricular y didáctica), la finalidad de dicho marco es conceptualizar los aspectos fundamentales que se encontraron tales como: el pensamiento variacional y la importancia de su desarrollo en los primeros años de escolaridad, la taxonomía para el proceso de la generalización y por ultimo las fichas de Lab-Mate. Esto permite pasar al siguiente momento.

3.2 Segundo momento. Diseño

En este segundo momento se realizó el diseño y descripción de las fichas de Lab-Mate, teniendo en cuenta el marco conceptual, las recomendaciones y estrategias propuestas por los distintos autores.

En el diseño de las actividades para las fichas de Lab-Mate se realizó la identificación de situaciones del contexto de los estudiantes de la IEA, en las cuales, se logran rescatar aspectos característicos del pensamiento variacional tales como: la variación y el cambio. En segundo lugar, la descripción de las fichas, el cómo está planteada, las actividades obtenidas de las situaciones del contexto y por ultimo las características de dicha ficha.

3.2.1 Descripción de las fichas del Lab-Mate

Las fichas son utilizadas como herramienta para presentar las situaciones a desarrollar por los estudiantes para el acercamiento al desarrollo del pensamiento variacional y para ello se diseñaron dos fichas, las cuales están compuestas por dos caras, las cuales son A y B.

Para su diseño se tuvo como referencia lo realizado por Gil y Valencia (2019), con la finalidad de que cada ficha de Lab-Mate pueda tener la misma estructura como es: márgenes mínimos 2.0 y máximo 2.5 a todos los lados, tipo de letra Times New Román, tamaño de letra mínimo 10 y máximo 12 puntos.

De acuerdo con lo anterior, la cara A se distribuyó de la siguiente manera: principalmente se realiza la presentación de la institución correspondiente (IEA), luego la ficha se divide en tres partes, la primera se distribuye en tres partes una está designada al código de la ficha, la segunda el nombre de la actividad y por último el logo. La segunda está compuesta por dos partes: en primer lugar, la actividad a realizar y en segundo lugar la imagen las cuales se presentan en dos bloques. Y la tercera se distribuye en dos partes, una asignada para los autores y el otro a las bibliografías.

Figura 2. Modelo cara A de la ficha



Institución Educativa Las Américas

CODIGO	NOMBRE DE LA ACTIVIDAD	LOGO
ACTIVIDAD MATEMATICA E IMAGEN		
AUTORES Y AÑO DE PUBLICACION		BIBLIOGRAFIAS

La cara B de la ficha fue diseñada para dar cuenta del soporte de la ficha, la cual está distribuida, de la siguiente manera: la primera parte está dividida en tres bloques, el primero es el código de la ficha, el segundo es el tiempo de trabajo y el último es la forma de trabajo que puede ser TI (trabajo individual) o TE (trabajo en equipo). La segunda parte está dividida en dos bloques el primero es el objetivo de la actividad y el segundo es el material requerido para el desarrollo de la ficha. La tercera parte es la competencia matemática movilizada. La cuarta parte es la estrategia de solución. Y por último el código QR de la ficha de Lab-Mate.

Figura 3. Modelo cara B de la ficha

CODIGO	TIEMPO DE TRABAJO:	FORMA DE TRABAJO:			
		TI		TE	
OBJETIVOS DE LA ACTIVIDAD:		MATERIALES REQUERIDOS:			
CONTENIDO O COMPETENCIA MATEMATICA MOVILIZADA:					



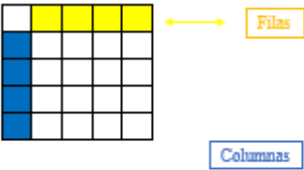
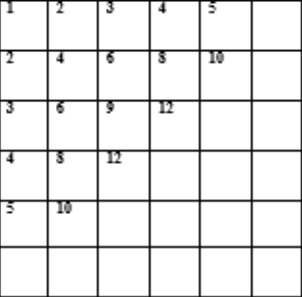
3.2.2 Ficha X (la tabla)

La actividad propuesta para esta ficha se origina del trabajo de investigación de Herrera y Gaitán (2013), el cual plantea una serie de actividades con el fin de poder

identificar estrategias para el proceso de generalización utilizadas por los estudiantes. Una actividad en particular, hacía uso de la idea sobre la tabla pitagórica, siendo esta la actividad utilizada.

Figura SEQ Figura * ARABIC 4. Diseño final de la ficha X


INSTITUCIÓN EDUCATIVA LAS AMÉRICAS

CODIGO 1-Tabla-01	NOMBRE DE LA ACTIVIDAD La Tabla	LOGO  MESA
PITÁGORAS Es una figura extremadamente importante en el desarrollo de las matemáticas, aunque es relativamente poco lo que se conoce de sus logros matemáticos. A diferencia de matemáticos griegos posteriores, de quienes al menos tenemos algunos de los libros que escribieron, de Pitágoras no tenemos ningún escrito, sabemos que fue un Filósofo y matemático griego. Aunque su nombre se halla vinculado al <i>teorema de Pitágoras</i> y la escuela por él fundada dio un importante impulso al desarrollo de las matemáticas en la antigua Grecia, la relevancia de Pitágoras alcanza también el ámbito de la historia de las ideas. El señor Pitágoras ha creado una tabla muy especial y está compuesta por Filas y Columnas, para ayudar a sus estudiantes. Pero para poder terminarla necesita tu ayuda. Para poder ayudar al Señor Pitágoras debes de seguir las siguientes indicaciones: 		1. Completar los espacios en blancos. 2. De acuerdo con la secuencia de la tabla, sumar los número de las filas de la siguiente manera: solo el primero luego el primero con el segundo después el primero con el segundo y el tercero hasta llegar al último. (realizarlo con las filas 2,3 y 4) 3. Escribe las anteriores sumas como multiplicaciones teniendo un factor común. 4. Describe las relaciones entre las sumas y las multiplicaciones.  ¿sabes que cambio?

Esta ficha tiene como eje central la tabla pitagórica, la cual es una forma compacta de representar las tablas de multiplicar, compuesta por dos coordenadas en la primera fila y en la primera columna. El resto de las columnas y filas contiene resultados que al cruzar ambas coordenadas se obtiene el resultado de la multiplicación.

Ahora bien, primeramente, se hace la descripción de la actividad la cual se sitúa en un contexto histórico sobre el quién es Pitágoras y la creación de la tabla pitagórica. Esto con el fin de llevar a los estudiantes a la siguiente parte de la actividad, siendo estas las indicaciones para desarrollar la ficha.

En cuanto a lo anterior, las indicaciones permiten evidenciar las rutas que los estudiantes logran utilizar para desarrollarlas. tales como completar las columnas y filas, de acuerdo con la secuencia de la tabla. Esta tiene el objetivo que los estudiantes hagan uso de la estrategia Ver un patrón o regularidad. La segunda y tercera indicación. La cual es, sumar los números de las filas de la siguiente manera: sólo el primero luego el primero con el segundo después el primero con el segundo y el tercero hasta llegar al último. (realizarlo con las filas 2,3 y 4), etc. Tiene como objetivo, que el estudiante luego de poder Ver pueda describir las características vistas en el punto anterior, describir el comportamiento. Por último, la cuarta indicación tiene como objetivo que el estudiante pueda registrar los resultados obtenido, registrar un patrón.

3.2.3 Ficha Y (mango metro)

La actividad propuesta para esta ficha se origina del trabajo de investigación de Gil y Valencia (2019), los cuales plantean distintas fichas de Lab-mate con el fin de acercar a los estudiantes al desarrollo del pensamiento variacional, haciendo uso de patrones y regularidades.

Figura 5. Diseño final de la ficha Y



INSTITUCIÓN EDUCATIVA LAS AMÉRICAS

CODIGO 1-Mango-01	NOMBRE DE LA ACTIVIDAD Mango Metro	LOGO  MESA																														
Doña Ana vende todo tipo de frutas en tu colegio y entre esas frutas que vende está el mango, pero no el mango entero. Doña Ana lo parte en trozos alargados (Mango Metro) y luego lo pone dentro de las chuspas y cada una la vende en \$500 pesos. Pero Doña Ana se encuentra en un problema y para poder ayudarla debes de seguir las siguientes indicaciones: 1-Si una chuspa de mango cuenta \$500 pesos. Completa la siguiente tabla. 2-¿Cómo puedo saber cuántos chuspas de mango pueden comprar con 3000 pesos? <table border="1" style="margin: 10px auto; width: 150px;"> <thead> <tr> <th>Chuspas de mango</th> <th>Precio</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>500</td></tr> <tr><td>3</td><td></td></tr> <tr><td>4</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>2500</td></tr> <tr><td>7</td><td>3500</td></tr> <tr><td></td><td>5000</td></tr> <tr><td></td><td>8000</td></tr> </tbody> </table>		Chuspas de mango	Precio	1	500	3		4			2500	7	3500		5000		8000	Doña Ana mira su negocio y nota que tiene muchos mangos y para lograr saber cuántas chuspas de mango puede sacar debe de completar la siguiente tabla: ¡¡ayuda a Doña Ana!! ¿Qué cantidad de chuspas de Mango Metro se pueden sacar de un Mango, teniendo en cuenta la información de la tabla? <table border="1" style="margin: 10px auto; width: 150px;"> <thead> <tr> <th>Cantidad de Mangos</th> <th>Chuspas</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td></td><td>9</td></tr> <tr><td>4</td><td>12</td></tr> <tr><td>6</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>24</td></tr> <tr><td></td><td>33</td></tr> </tbody> </table>  ¿sabes que cambio?	Cantidad de Mangos	Chuspas	2	6		9	4	12	6			24		33
Chuspas de mango	Precio																															
1	500																															
3																																
4																																
	2500																															
7	3500																															
	5000																															
	8000																															
Cantidad de Mangos	Chuspas																															
2	6																															
	9																															
4	12																															
6																																
	24																															
	33																															
Daniel G. Santiago O. Margarita G.		Gil y Valencia (2019)																														

Primeramente, en esta ficha se contextualiza la actividad a partir de la situación de compra y venta de mango de doña Ana, la vendedora de frutas del colegio, específicamente el mango metro. Luego se describe la situación para poder al fin darles paso a distintas indicaciones para el desarrollo de la actividad.

La segunda parte de la ficha, la cual está compuesta por las indicaciones tales como: Si una chuspa de mango cuesta \$500 pesos. Completa la siguiente tabla, con el fin que el estudiante pueda ver el patrón o regularidad. ¿Cómo puedo saber cuántas chuspas de mango pueden comprar con 3000 pesos? Etc. Esto con el objetivo de que los estudiantes logran completar la tablas y describir las características vistas, describir el comportamiento de la secuencia y registrar los resultados obtenidos, registrar un patrón.

3.2.4 Análisis a priori.

Dentro de la ficha X se encuentran cuatro distintas indicaciones las cuales los estudiantes deberán realizar, en la primera indicación se espera que los estudiantes logren completar la tabla de manera exitosa y a partir de sus características puedan **ver** lo que es (tabla de multiplicar), luego se encuentra la segunda y tercera indicación. se espera que los estudiantes logren desarrollarla sumando los factores uno por uno para obtener los resultados de dichas sumas para después relacionar los resultados de las sumas con multiplicaciones con un factor común entre ellas, para luego poder pasar a la siguiente indicación la cual pretende que los estudiantes puedan **describir** y **registrar** de manera escrita o verbal relaciones entre las sumas y las multiplicaciones.

Por otro lado, se encuentra la ficha Y, donde se presentan dos tablas las cuales deben completar siguiendo las distintas indicaciones y preguntas, en la primera parte de la ficha se encuentran indicaciones como: si una chuspa de mango cuesta 500 pesos. Completa la siguiente tabla. Luego preguntas como: ¿Cómo puedo saber cuántas chuspas de mangos

pueden comprar con 3000 pesos? Esto con el fin de que los estudiantes logren completar las tablas de manera correcta y logre **ver** la tabla con un todo y puedan identificar las secuencias, **describir y registrar** de manera verbal o escrita las características encontradas en dicha tabla.

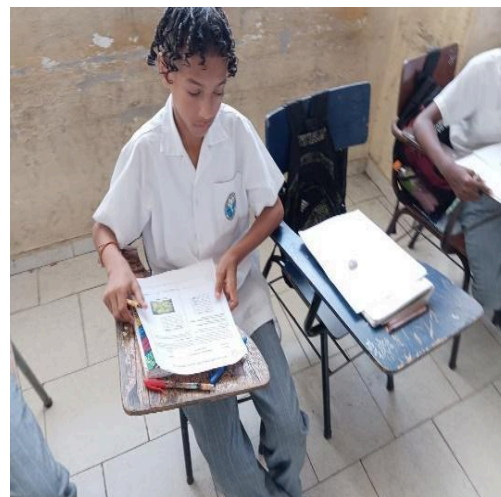
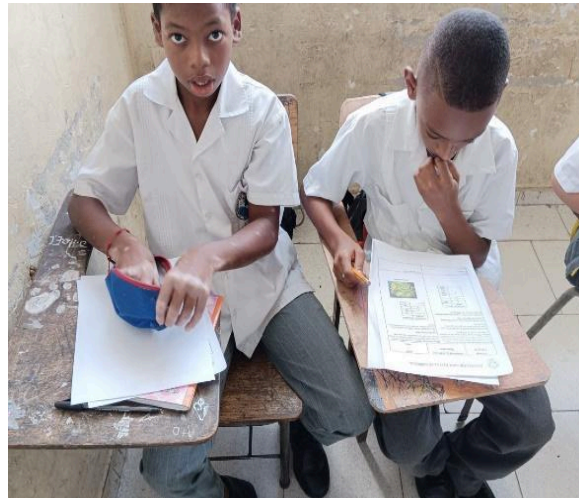
3.3 Tercer momento. Implementación de las fichas de Lab-Mate

En este tercer momento se realizó la implementación. Para ello, se les presentó el diseño final de las fichas de Lab-Mate obtenidas en el segundo momento a los estudiantes del grado quinto de la IEA, la cual se desarrolló en dos sesiones cada una de 90 minutos como se indica en la cara B de la ficha, la primera sesión da lugar el día 31 de octubre y la segunda sesión se realizó el día 1 de noviembre, en ambas sesiones se utilizaron herramientas tecnológicas como el dispositivo móvil para obtener registros fotográficos y el registro de respuestas de forma oral. En cada sesión se realizó una ficha de Lab-mate desarrollándose de manera TE (trabajo en equipo), con la finalidad de que los estudiantes pudieran socializar entre ellos distintas formas de solucionar las indicaciones planteadas en las fichas.

Figura 6. Sesión 1



Figura 7. Sesión 2



3.3.1 Categorización de los resultados

Para la categorización de las estrategias se utilizaron las etapas descritas para el proceso de generalización por Masson (1985): el **ver** la secuencia presentada y las relaciones entre cantidades, el **decir** o **describir** de forma oral o escrita características de la secuencia, patrón y relaciones, **el registrar** de forma oral o escrita el comportamiento de

la secuencia o relaciones entre cantidades y por último el **validar** las fórmulas. En este mismo sentido, se tiene presente que la estrategia validar se presenta según la taxonomía en el nivel cuatro.

Teniendo en cuenta lo anterior, se presenta la siguiente tabla (tabla 4), que permite evidenciar los resultados de los 21 estudiantes del grado quinto de la IEA, con respecto a las diferentes etapas del proceso de generalización definidas por Masson (1985).

Tabla 4. Categorización de los resultados

	Ver		Decir		Registrar		Validar	
	Si	No	Si	No	Si	No	Si	No
Ficha X	16	5	15	6	13	8	0	0
Ficha Y	13	8	10	11	8	13	0	0
%X	76%	24%	71%	29%	61%	39%	0%	0%
%Y	61%	39%	47%	53%	38%	62%	0%	0%

En la tabla anterior se encuentran los resultados durante y después de la implementación de las fichas, estos permitieron evidenciar los primeros análisis frente a la categorización de las estrategias utilizadas por los estudiantes de acuerdo con las etapas definidas por Masson (1985) para identificar procesos de generalización los cuales arrojaron la siguiente información:

En la ficha X (La tabla) el 76% logró ver el patrón, el 71% logró pasar a decir algo sobre el patrón, el 61% logró registrar el patrón y 0% de los estudiantes pudo validar. En la ficha Y (Mango metro) el 61% de los estudiantes lograron ver la secuencia, el 47% logró decir, el 38% pudo registrar la secuencia y por último el 0% logró validar la secuencia.

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos de la categorización, se realizará el planteamiento de los análisis, que describen y presentan los resultados de cada etapa y se ubica cada una en su respectivo nivel de la taxonomía.

3.4 Cuarto momento. Análisis de los resultados

El cuarto momento se desarrolló en dos fases, la primera se relaciona con la identificación de las estrategias utilizadas por los estudiantes, esta se hace a partir de las etapas del proceso de generalización planteadas por Masson (1999) Ver, Decir, Registrar y Validar. Para luego dar paso a la implementación de la taxonomía y desarrollar los análisis respectivos de los resultados obtenidos de la implementación de las fichas de Lab-Mate. Para ello, se utilizó la taxonomía para el proceso de generalización planteada por García (2011), la cual clasifica las etapas de dicho proceso en cuatro niveles, desde ver como un todo, hasta el hacer conjeturas entre relaciones; esto con el fin de caracterizar dichas estrategias utilizadas por los estudiantes y poder realizar las conclusiones finales.

3.5 Quinto momento. Conclusiones

Este momento se realizó a partir del análisis de los resultados finales de la implementación y poder dar paso a las conclusiones.

Capítulo IV. Análisis de los resultados

En este capítulo se presentan los análisis de los resultados obtenidos de la implementación de las fichas de Lab-mate a los estudiantes del grado quinto de la IEA, a partir de la categorización de las estrategias utilizadas por los estudiantes y la implementación de la taxonomía planteada por García (2011) y poder identificar el nivel donde se encuentran los estudiantes.

4.1 Implementación de la taxonomía

Para la implementación de la taxonomía se presentan los resultados de las fichas de Lab-mate, para luego identificar el nivel en el que se encuentra cada respuesta de cada etapa, para ello se relaciona cada nivel con el tipo de respuesta. A continuación, se presentan los resultados de cada etapa del proceso de generalización y la relación con su respectivo nivel según la taxonomía (Tabla 1) planteada por García (2011).

Gracia (2011) plantea la taxonomía para las etapas del proceso de generalización a partir de cuatro niveles de cada estrategia, denominando cada una de ellas como se presenta en la siguiente tabla:

Tabla 5. Adaptación de la taxonomía para identificar la denominación del nivel de cada estrategia.

	ESTRATEGIAS
--	--------------------

NIVEL	VER	DECIR	REGISTRAR	VALIDAR
1	(OI)	(DIT)	(EPCP)	
			(EPCM)	
			(EPCS)	
2	(AI)	(DCP)	(ECPP)	
			(ECPM)	
			(ECPS)	
3	(ERN)	(DRP)	(EFRP)	
	(ERS)		(EFRM)	
			(EFRS)	
4	(CRP)	(DCR)	(ECOP)	(VCTC)
			(ECOM)	(VCC)
				(VCM)
				(NVC)
			(ECOS)	

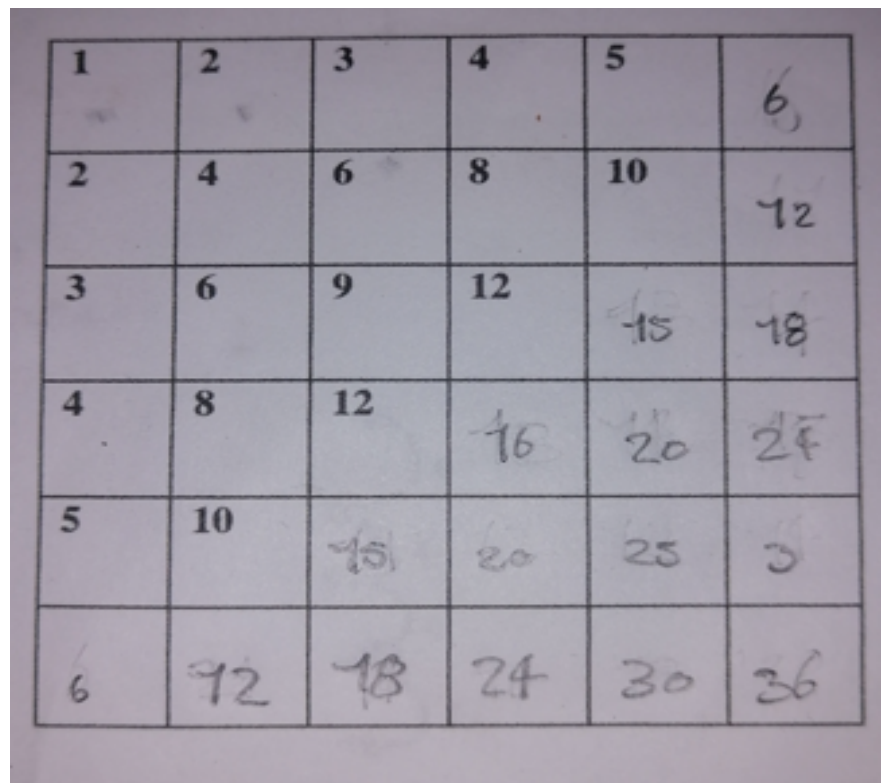
4.1.1 Respuestas del ver

4.1.1.1 Ejemplo de respuesta uno.

En este caso, se presenta en la figura 8, la primera parte de la ficha X, se evidencia que el 76% de los estudiantes logró **ver** todas las características en común, puesto que

completan la tabla e identifican el comportamiento de las secuencias tanto en las columnas como en las filas de forma correcta, por lo tanto, se logra evidenciar que el estudiante ve la tabla de multiplicar.

Figura 8. Ejemplo de respuesta Ver



1	2	3	4	5	6
2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18
4	8	12	16	20	24
5	10	15	20	25	30
6	12	18	24	30	36

Por lo tanto, los estudiantes que lograron completar la tabla de forma correcta, identificando las secuencias que están dentro de las columnas y las filas lograron ver la tabla de multiplicar. Cumpliendo de esta forma las características para pretenderse según la taxonomía en el nivel **(II)** analizar la imagen (descomponer el todo en sus partes).

4.1.1.2 Ejemplo de respuesta dos.

En la figura 9 se presenta parte de la ficha X que es un ejemplo de respuesta en la que el 24% de los estudiantes que logró completar la tabla de forma correcta. Por otro lado, algunos estudiantes lograron completar dos y hasta las tres primeras filas, luego tan solo escriben números sin relación alguna. Debido a eso, no evidenciaron el comportamiento de la secuencia. Por tanto, al no poder utilizar estrategias no se encuentra en ningún nivel.

Figura 9. Ejemplo de respuesta Ver

1	2	3	4	5	6
2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18
4	8	12	14	22	30
5	10	18	16	20	21
6	12	15	24	28	30

4.1.1.3 Ejemplo de respuesta tres.

En este caso, en las figuras 10 y 11 se presenta parte de la ficha Y, en la que se evidencia que el 61% de los estudiantes logró completar la tabla con sus valores correctos, logrando así poder “ver” la secuencia y las relaciones que hay entre las cantidades a partir de su característica.

Figura 10. Ejemplo de respuesta Ver

Chuspas de mango	Precio
1	500
3	1500
4	12000
5	2500
7	3500
10	5000
16	8000

Figura 11. Ejemplo de respuesta Ver

Cantidad de Mangos	Chuspas
2	6
3	9
4	12
6	18
8	24
11	33

Por lo tanto, los estudiantes que lograron cumplir con esta indicación, identificando las características del comportamiento de la secuencia en ambas tablas y las relaciones presentadas de manera correcta, dichos estudiantes cumplen con los aspectos específicos para ubicarse según la taxonomía en el nivel **(AI)** Analizar la imagen (descompone el todo en sus partes).

4.1.1.4 Ejemplo de respuesta cuatro:

En este se caso, se presenta un ejemplo de respuesta en las figuras 12 y 13 en las que el 39% de los estudiantes no lograron completar la tabla de manera correcta. Debido a que algunos estudiantes solo llegan a identificar el comportamiento hasta ciertos puntos de cada tabla debido a que se confunden con las relaciones entre las cantidades que conforman las tablas, por ende, no lograron ver la secuencia y las relaciones entre las cantidades y al no poder utilizar estrategias no se encuentran en ningún nivel.

Figura 12. Ejemplo de respuesta Ver

Cantidad de Mangos	Chuspas
2	6
3	9
4	12
6	2
5	24
6	33

Figura 13. Ejemplo de respuesta Ver

Chuspas de mango	Precio
1	500
3	1.500
4	2.000
5	2500
7	3500
10	5000
11	8000

4.1.2 Respuestas del decir

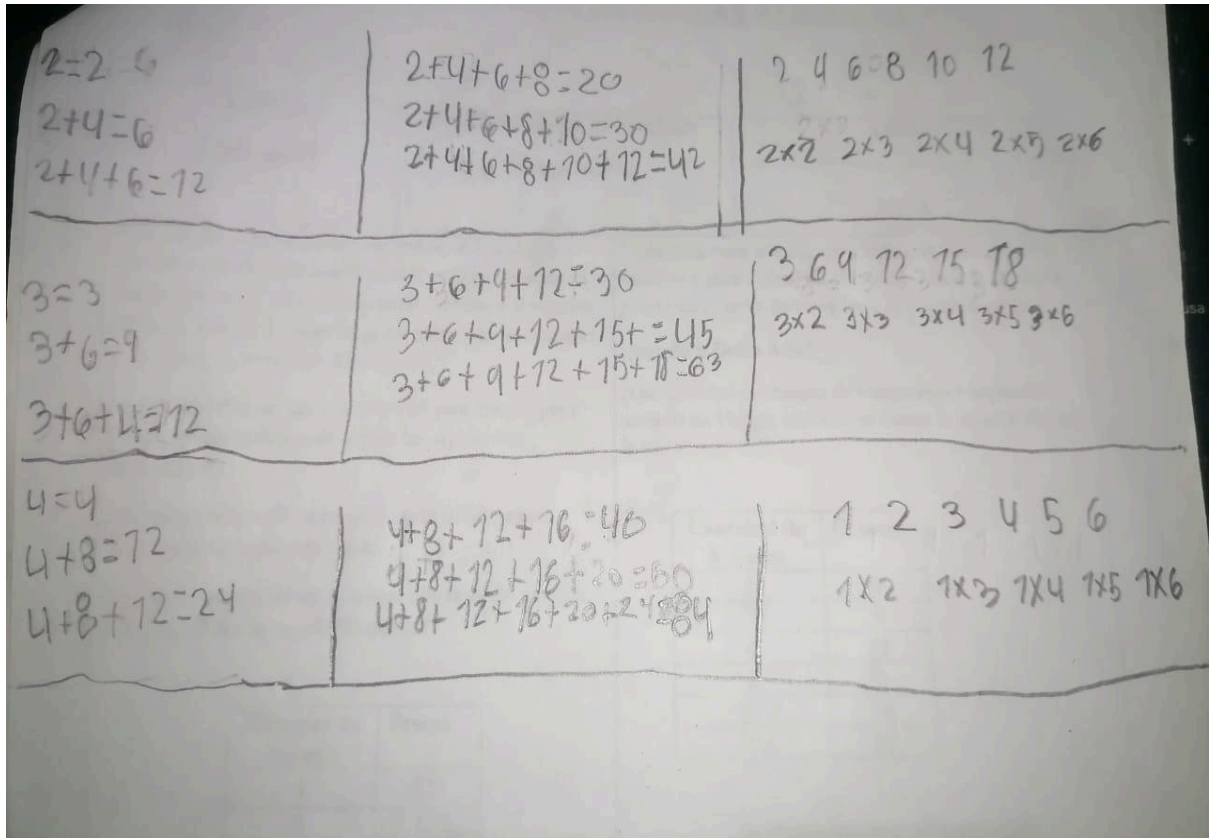
4.1.2.1 Ejemplo de respuesta uno.

En este caso, se presenta en la figura 15, los ejemplos de respuestas de la segunda y la tercera indicación de la ficha X, las cuales al desarrollarse correctamente permitieron que los estudiantes lograran identificar características de las secuencias de la tabla, obteniendo así que el 71% de los estudiantes lograron describir de forma oral y escrita características propias de dicha actividad.

Respuesta estudiante de forma oral:

E: “es una tabla de multiplicar, porque eso que está en los cuadros son como que resultados de multiplicar uno por el otro”

Figura 14. Ejemplo de respuesta Decir



Este tipo de respuestas permiten evidenciar las estrategias utilizadas por los estudiantes quienes al identificar las características hacen uso del ver y luego pasan a la descripción de las características, cómo es el comportamiento de la secuencia y el cómo está conformada. Por lo tanto, los estudiantes que lograron cumplir con esta indicación se ubican según la taxonomía en el nivel de describir características de la imagen como un todo (DIT).

4.1.2.2 Ejemplo de respuesta dos.

Por la dificultad que hay del pasar del ver al describir y por el no cumplimiento de la actividad anterior en la que no lograron completar la tabla de forma correcta el 29% de los estudiantes no hicieron uso de esta estrategia decir, algunos estudiantes al no completar la tabla de forma correcta no realizaron las indicaciones siguientes y el resto tan solo pasaron por alto las indicaciones y no las realizaron. Algunos otros casos particulares completaron la tabla, pero solo tuvieron en cuenta el último número de cada columna para completarla. Para evidencia de ello se presenta un ejemplo en la figura 15.

Figura 15. Ejemplo de respuesta Decir

1	2	3	4	5	6
2	4	6	8	10	11
3	6	9	12	12	13
4	8	12	14	15	16
5	10	13	14	15	16
6	7	8	9	10	11

Al realizarlo de esta forma tuvieron dificultades debido a que solo tomaron en cuenta la secuencia de la primera fila y la primera columna, por ende, no logran identificar el

comportamiento de la secuencia, debido a eso no pueden describir sus características. Por lo tanto, al utilizar estrategias no se encuentra en ningún nivel de la taxonomía.

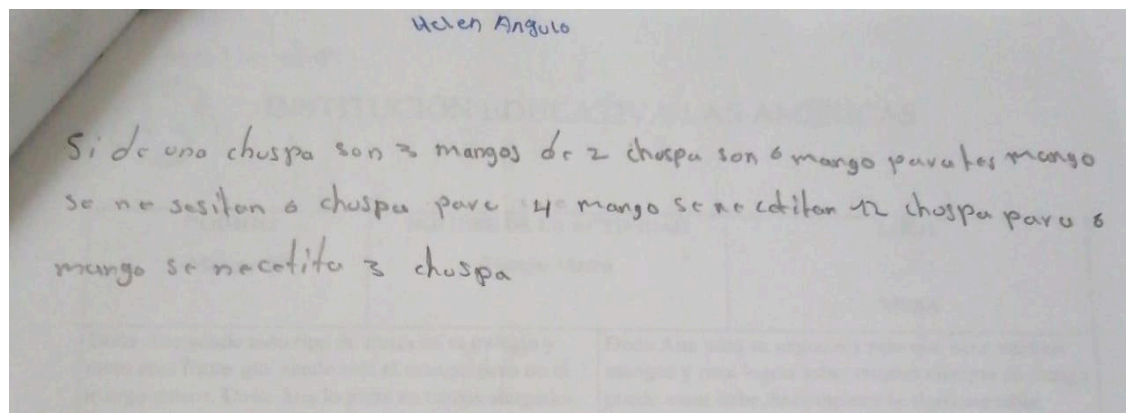
4.1.2.3 Ejemplo de respuesta tres.

En el desarrollo de la ficha Y el 71% de los estudiantes lograron pasar de **ver** el comportamiento de la tabla a **describir** propiedades como: el comportamiento de la secuencia y las relaciones presentadas entre las cantidades. Realizando dicha descripción de forma oral y de forma escrita, como se muestra en la figura 16.

Respuesta de un estudiante de forma oral:

E: “es fácil!!, yo vi que, si con 500 pesos me compro uno entonces, entonces si voy a comprar tres necesito 500 y 500 serian 1500. La otra es creo que es parecida porque si me dan dos mangos y de ahí saco 6 chuspas yo creo que si me da una solo saco la mitad así mismo hice el resto de la tabla.”

Figura 16. Ejemplo de respuesta decir



Este tipo de respuesta hace mención al comportamiento de las tablas (secuencia), esto lo hace a partir de la etapa anterior en la que el estudiante logró ver las características de la tabla logrando así la descripción de las relaciones en ambas tablas. Teniendo en cuenta las respuestas obtenidas por los estudiantes en lo relacionado con decir y los niveles presentados en la taxonomía estos estudiantes se ubican en el nivel de describir las propiedades comunes entre los casos particulares (**DPC**)

4.1.2.4 Ejemplo de respuesta cuatro.

Dentro del 71% de los resultados de decir, se evidencian respuestas de forma oral que describen el comportamiento de la tabla (figura 17), a partir de la identificación de la relación principal, utilizando la división. Ejemplo:

Respuesta de forma oral:

E1: “profe! Yo la pude hacer porque me di cuenta, si dos me salen seis chuspas de mango, entonces yo creo que la mitad de dos es uno y la mitad de seis es tres, entonces yo creo que un mango son tres chuspas”.

Figura 17. Ejemplo de respuesta Decir

Cantidad de Mangos	Chuspas
2	6
3	9
4	12
6	18
8	24
11	33

En este caso, los estudiantes logran describir de forma oral características propias del comportamiento de la tabla como la relación entre ambas cantidades. Por lo tanto, el nivel que se encuentran según la taxonomía es de describir características de la imagen como un todo (**DIT**).

4.1.2.5 Ejemplo de respuesta cinco.

En los resultados de la ficha Y, se encuentran casos particulares en los que los estudiantes tuvieron distintas dificultades lo que ocasionó que el 29% de los estudiantes no logaran utilizar esta estrategia, algunas de las dificultades fueron: el no poder ver la tabla como un todo debido a que no completaron la tabla según sus relaciones y secuencia. Por esto no pudieron describir las características de la tabla, o como en algunos casos particulares tan solo no alcanzaron a desarrollar la actividad en el tiempo estipulado y optaron por escribir números sin ningún tipo de relación.

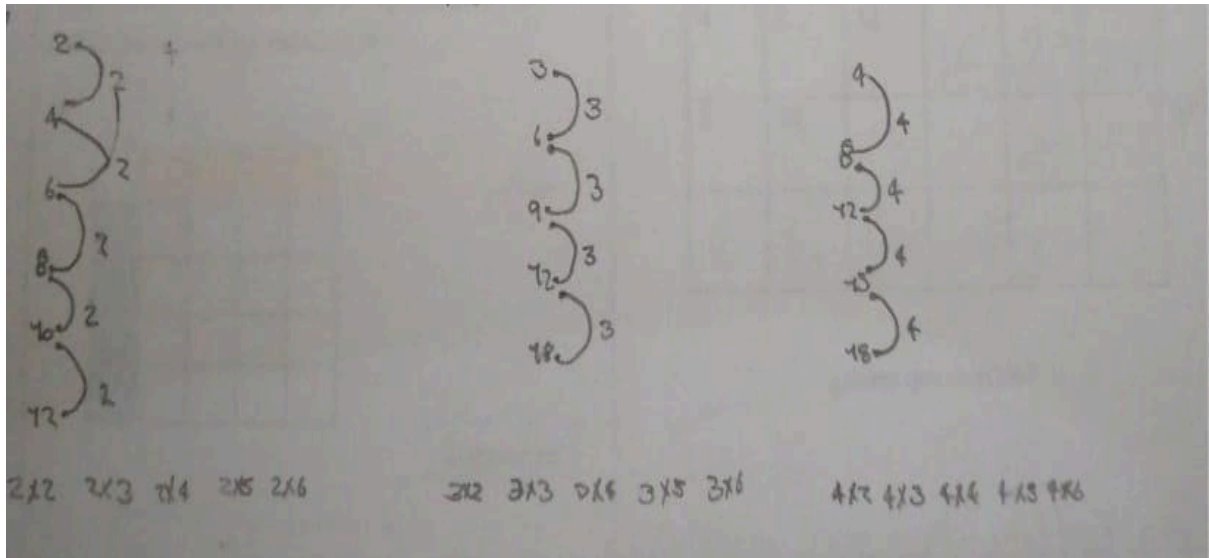
Teniendo en cuenta lo antes mencionado, dicho porcentaje de estudiantes no hizo uso de las estrategias como el ver y describir. Por lo tanto, no se encuentran en ningún nivel de la taxonomía.

4.1.3 Respuestas del registrar

4.1.3.1 Ejemplo de respuesta uno

En este punto solo el 61% de los estudiantes lograron presentar lo descrito por ellos de forma oral o escrita a partir de las características de la imagen, al hacer una especie de registro que permitió evidenciar aspectos esenciales del comportamiento de la secuencia y registrarlo de tal forma, como se muestra en la figura 18, se evidencia un ejemplo de respuesta de los estudiantes.

Figura 18. Ejemplo de respuesta Registrar



En este tipo de respuestas los estudiantes tratan de registrar el comportamiento de la secuencia y las relaciones que ellos logran identificar. Para ello, los estudiantes hacen uso de lo visto y lo descrito anteriormente partiendo del registro de lo identificado haciendo uso de números y símbolos que son aspectos característicos de la etapa de registrar. Por lo tanto, este tipo de respuestas cumple con lo esperado y se ubican según la taxonomía en el nivel de escribir con palabras y símbolos las características de la imagen (**EPCM**).

4.1.3.2 Ejemplo de respuesta dos

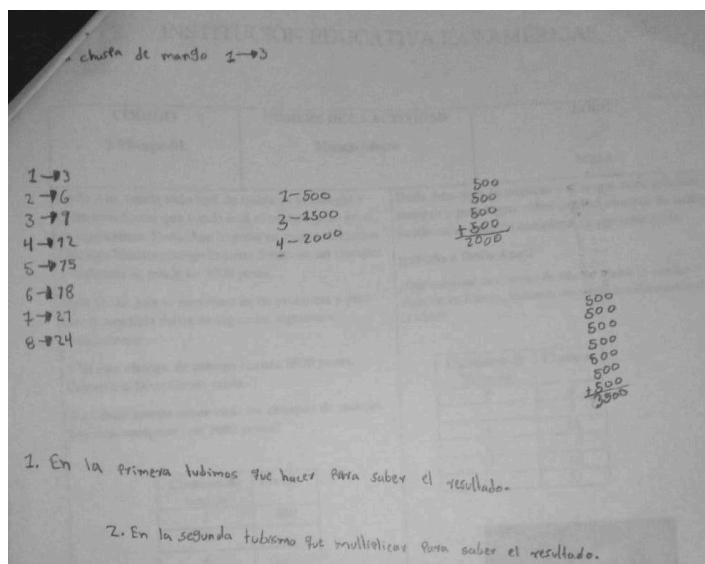
Para este punto de la actividad de la ficha X el 39% de los estudiantes decidieron pasar por alto esta estrategia, aquello fue causado por la falta de desarrollo de las indicaciones anteriores y por la no comprensión de las mismas que permitían que los estudiantes pudieran hacer uso de las estrategias para el proceso de generalización. Esto es

causado por la dificultad de lectura que tienen distintos estudiantes. Por lo tanto, al no usarla no se encuentran en ningún nivel de la taxonomía.

4.1.3.3 Ejemplo de respuesta tres

Del 61% de los estudiantes que lograron pasar a registrar, se identificaron respuestas de este tipo (figura19), donde se evidencia que los estudiantes pasaron de decir características propias del comportamiento de la relación entre cantidades de forma oral a hacer una especie de registro de dichas características. Obteniendo los resultados mediante la suma de las cantidades para poder ver los valores que corresponden en cada parte de la tabla. También logran registrar el comportamiento de la regularidad como una Relación uno a uno.

Figura 19. Ejemplo de respuesta Registrar



Este tipo de respuesta permite evidenciar que los estudiantes logran registrar de forma escrita, usando símbolos y números, el comportamiento de la relación uno a uno. Estos casos se ubican según la taxonomía en el nivel de escribir con símbolos las características de la imagen (EPCS)

4.1.3.4 Ejemplo de respuesta cuatro

En el desarrollo de la ficha Y el 38% de los estudiantes lograron hacer uso de la estrategia de registrar. Para ello, los estudiantes lo hicieron de forma oral expresando así aspectos esenciales del comportamiento en la tabla y cómo se logró identificar la secuencia. Para evidencia de ello se presenta un ejemplo de respuesta de los estudiantes.

Ejemplo de respuesta de forma oral:

E: “para tres chuspas solo necesito un mango, por eso le dije profe. Si yo tengo un mango puedo partirlo y tener tres chuspas.”

La segunda respuesta era una explicación que le daba un estudiante a su compañero de grupo.

E: “los precios de las chuspas de mango van de cuantos compres”

Para este punto de la ficha solo dicho porcentaje de los estudiantes logró registrar propiedades de las relaciones y por ende el comportamiento que tiene la secuencia, al expresar los registros de forma oral los estudiantes pasan del describir aspectos de la secuencia a registrar propiedades de ella como por ejemplo que una cantidad depende de la otra.

Por lo tanto, este tipo de respuesta se ubican según la taxonomía en el nivel describir con palabras las propiedades comunes entre los casos particulares (ECPP)

4.1.3.5 Ejemplo de respuesta cinco

Para este punto de la actividad de la ficha Y el 62% de los estudiantes decidieron pasar por alto esta estrategia, aquello fue causado por la falta de desarrollo de las indicaciones anteriores y por la no comprensión de las mismas que permitieron que los estudiantes pudieran hacer uso de las estrategias para el proceso de generalización. Esto es causado por la dificultad de lectura que tienen algunos estudiantes. Por lo tanto, al no usarla no se encuentran en ningún nivel de la taxonomía.

4.1.4 Respuestas del Validar

Como se estableció en el marco conceptual Mason (1985) define la estrategia de probar la validez de las fórmulas como la etapa en la que se validan las fórmulas establecidas y para ello se realizan pruebas de diferentes formas.

Teniendo en cuenta la complejidad que se encuentra en esta estrategia García (2011) plantea en su taxonomía de las etapas del proceso de generalización, que la estrategia validar se encuentra solo en el nivel cuatro, debido que en este nivel parte de las conjeturas que los estudiantes logran ver, describir y registrar. A partir de esto, se evidencia la ausencia de respuestas de validación en el desarrollo de las fichas.

Capítulo V. Conclusiones

En este capítulo se presentan algunas conclusiones generales y reflexiones relacionadas con el acercamiento al desarrollo del pensamiento variacional, por medio de las fichas de Lab-Mate, mediante el trabajo con patrones, regularidades y relaciones entre cantidades, con el fin de promover el proceso de generalización, específicamente en estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Las Américas.

5.1 Conclusiones generales

En relación con el primer objetivo específico de este trabajo que aludía a la identificación de situaciones del contexto que propiciaran el desarrollo de conceptos como la variación y el cambio, se lograron identificar situaciones del contexto matemático y social de los estudiantes como la venta de frutas dentro del colegio y las secuencias o patrones que están naturalmente dentro de las matemáticas que presentaron aspectos propios de la variación y el cambio como: la identificación de patrones, regularidades, relaciones entre cantidades y la generalización. Tomando como referencia el MEN (1998-2006) en lo relacionado con cómo se debe iniciar el desarrollo del pensamiento variacional en los primeros años de escolaridad y sus distintas estrategias se pudo realizar el diseño de dos fichas de Lab-Mate.

Además, el uso de las fichas de Lab-Mate permitió que los estudiantes interactuaran entre sí, con el fin de desarrollar actividades a partir de sus conocimientos previos y la socialización de sus estrategias. Logrando así un ambiente de aprendizaje para la construcción del pensamiento variacional

Así mismo, con relación al segundo objetivo específico, el cual hace referencia a la categorización de los resultados de la implementación de las fichas. A partir de las estrategias planteadas por Mason (1985) Ver, Decir, Registrar y validar. La categorización de los resultados de la implementación se realizó a partir de las estrategias para el proceso de generalización. Para la presentación de dicha categorización se planteó una tabla que

expresa los resultados obtenidos y el porcentaje de los estudiantes que logró hacer uso de cada una de las estrategias.

En relación con el tercer objetivo específico, que hace referencia al análisis respectivo de los resultados obtenido en la categorización de cada estrategia utilizada por los estudiantes, para luego relacionarlo con su respectivo nivel de la taxonomía planteada por García (2011). Se logró la caracterización de las formas de cómo se acercaron los estudiantes al desarrollo del pensamiento variacional mediante el proceso de generalización, esto a partir de la identificación y el análisis de las estrategias utilizadas por los estudiantes para el desarrollo de las actividades planteadas en las fichas.

Se logró identificar que la mayoría de los estudiantes desarrollaron las tres primeras etapas que plantea Mason (1985) ver, decir y registrar, con cierto grado de dificultad iniciando con la fase ver, a partir de la identificación de la secuencia o la relación, luego describiendo la secuencia de forma escrita u oral y, por último, registrar la secuencia de forma oral utilizando el lenguaje natural o numérico.

Los estudiantes que lograron desarrollar las primeras tres etapas para el proceso de generalización se ubicaron dentro de los niveles uno y dos de la taxonomía. A partir de esto se logra evidenciar la ausencia del nivel tres y cuatro esto debido a la exigencia que estos presentan. Por otro lado, también se evidencia la ausencia de la validación asunto causado por el nivel de dificultad en que se encuentra, por eso García (2011) ubica la etapa validar en el nivel cuatro.

Por último, las fichas de Lab-Mate por sí solas no fueron completamente óptimas para el completo desarrollo del pensamiento variacional en los primeros años de escolaridad, pero sí suficientes para que los estudiantes del grado quinto tuvieran un acercamiento a la variación, logrando así analizar el cambio en una secuencia y la identificación de relaciones uno a uno siendo esto aspectos propios del estudio del proceso de generalización.

5.2 Algunas reflexiones

En esta parte del trabajo, se presentan algunas reflexiones obtenidas del desarrollo del mismo con el fin de aportar a los futuros diseños e interesados en el desarrollo del pensamiento variacional en los primeros años de escolaridad.

Para el diseño de las fichas de Lab-Mate se debe tener en consideración el contexto al que los estudiantes están expuestos, la estructura de la ficha debe brindar un espacio de aprendizaje significativo con el fin de que no se pierdan registros del desarrollo del pensamiento a trabajar.

La implementación de estrategias pedagógicas diferentes como lo es el Lab-Mate, logra un impacto en los estudiantes obteniendo así resultados un poco mejores, en el desarrollo de los pensamientos matemáticas, teniendo en cuenta, que este tipo de espacios permiten que los estudiantes socialices distintos tipos de rutas para el desarrollo de las actividades, permite un aprendizaje autónomo en los estudiantes y crea un ambiente de

aprendizaje. Por ello, se sugiere que se sigan utilizando distintas estrategias pedagógicas para la enseñanza de las matemáticas desde los primeros años de escolaridad.

Por último, el diseño de las actividades se puede presentar en distintos tipos de representaciones con el fin de movilizar el pensamiento a trabajar. En este caso se utilizó el registro tabular, con el fin de que los estudiantes lograran completar las tablas de forma correcta y pudieran evidenciar el comportamiento de la secuencia y las relaciones. En este mismo sentido, se recomienda diseñar las actividades que involucren secuencia representadas por imágenes y figuras geométricas, debido a que los estudiantes se inclinan más por lo que logran visualizar.

Referencias

Arce, J., Pérez, C. y Rengifo, F. (1999). Laboratorio e matemáticas educación básica (LMEB_UV) proyecto de la universidad del valle, instituto de educación y pedagogía, grupo de educación matemática (GEM). Cali.

García, S. (2011). Rutas de acceso a la generalización como estrategia de resolución de problemas utilizadas por estudiantes de 13 años. Tesis de Maestría. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Gil Grueso, D. S., & Valencia González, J. (2019). Un acercamiento al desarrollo del pensamiento variacional desde la perspectiva del isomorfismo de medida: una experiencia en el laboratorio de matemáticas (Doctoral dissertation).

Godino, J, Font, V (2000). Razonamiento Algebraico y su Didáctica para maestros. Univerdad de Granada. Tomado <http://ddm.ugr.es/personal/jdgodino/manual/ralgebraico.pdf>

Hernández García, K. L., & Tapiero Castellanos, K. J. (2014). Desarrollo del razonamiento algebraico a partir de la generalización de patrones gráficos-icónicos en estudiantes de educación básica primaria.

Herrera Vargas, L. J., & Gaitán Gaitán, L. A. (2013). Ejemplificación de las diferentes fases del proceso de generalización en álgebra en tareas resueltas por estudiantes de aritmética de Licenciatura en Matemáticas.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1999). Rutas y raíces hacia el Álgebra. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Mason, J., A. Graham, D. D. Pimm y N. Gower (1985), *Routes of Roots of Alge-Bra*, Gran Bretaña, The Open University Press.

MEN (1998) *Lineamientos curriculares de Matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional. Santafé de Bogotá.

MEN (2006) *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. En MEN, *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanía*. (Primera ed., págs. 46 - 94). Bogotá, Colombia: Revolucion Educativa, Colombia Aprende.

Pabón, O. A., Gómez, D. M., y Sarmiento, E. (2008). *El laboratorio de matemáticas*.

Rivera Muñoz, E., & Sánchez Chaverra, L. F. *Desarrollo del pensamiento variacional en la educación básica primaria: generalización de patrones numéricos [recurso electrónico]* (Doctoral dissertation).

Sessa, C. (2005). Una entrada al álgebra a través de la generalización. *Iniciación al estudio didáctico del álgebra: Orígenes y perspectivas*, 67-126.

Torres, L. A., & Sánchez, L. F. (2013). *Generalización de patrones numéricos en el desarrollo del pensamiento variacional en la educación primaria*.

Vasco, C. (2002), *El pensamiento variacional y la modelación matemática*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia. 1-14.

ANEXOS

Anexo 1

Resultado de la encuesta aplicada a las tres profesoras de los grados quinto de la institución)

Cual es su formación? (Lic. en-Normalista-otro)

3 respuestas

Licenciada en naturales

Licenciada en lenguaje

Lic. ciencias naturales y educación ambiental

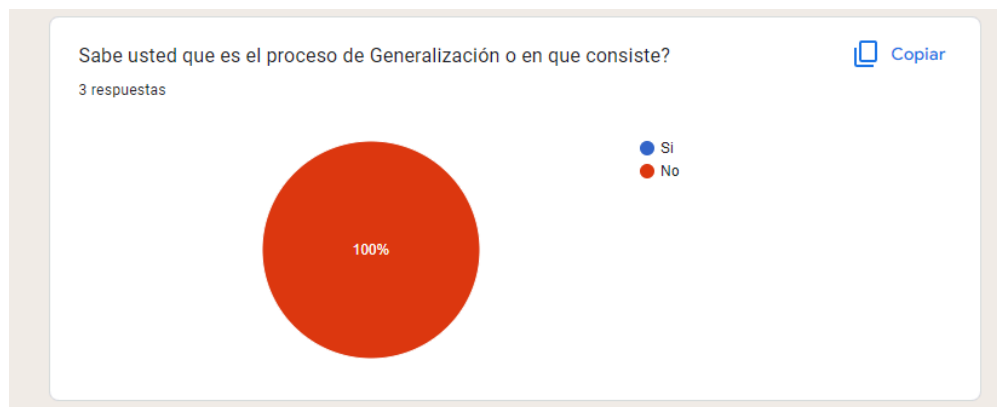
En que area se siente mas a fin?

3 respuestas

Lenguaje y naturales

Humanidades y sociales

ciencias naturales



Enseñas Matemáticas? (si su respuesta es SI, responder las siguientes)

 Copiar

3 respuestas

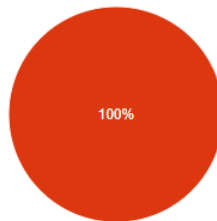


● SI
● NO

Sabe que para el ministerio de educación es necesario que se movilice el proceso de Generalización?

 Copiar

3 respuestas



● SI
● NO

Enseñas Matemáticas? (si su respuesta es SI, responder las siguientes)

 Copiar

3 respuestas



● SI
● NO

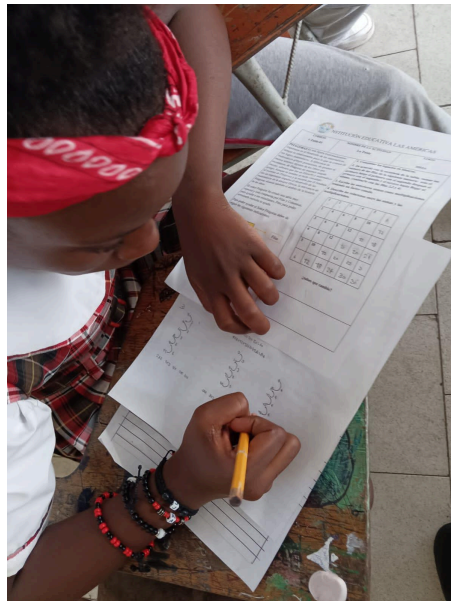
Anexo 2

Estudiantes del grado quinto en la implementación



Anexo 3

Ficha X aplicada



INSTITUCIÓN EDUCATIVA LAS AMÉRICAS

CODIGO	NOMBRE DE LA ACTIVIDAD	LOGO
1-Tabla-01	La Tabla	MESA

PIAGORAS Es una figura extremadamente importante en el desarrollo de las matemáticas, aunque es relativamente poco lo que se conoce de sus logros matemáticos. A diferencia de matemáticos griegos posteriores, de quienes al menos tenemos algunos de los libros que escribieron, de Piágoras no tenemos ningún escrito, sabemos que fue un Filósofo y matemático griego. Aunque su nombre se halla vinculado al *teorema de Piágoras* y la escuela por él fundada dio un importante impulso al desarrollo de las matemáticas en la antigua Grecia, la relevancia de Piágoras alcanza también el ámbito de la historia de las ideas.

El señor Piágoras ha creado una tabla muy especial y está compuesta por Filas y Columnas, para ayudar a sus estudiantes. Pero para poder terminarla necesita tu ayuda.

Para poder ayudar al Señor Piágoras debes de seguir las siguientes indicaciones:

1. Completar los espacios en blancos.
2. De acuerdo con la secuencia de la tabla, sumar los números de las filas de la siguiente manera: solo el primero luego el primero con el segundo después el primero con el segundo y el tercero hasta llegar al último. (realizarlo con las filas 2,3 y 4)
3. Escribe las anteriores sumas como multiplicaciones teniendo un factor común.
4. Describe las relaciones entre las sumas y las multiplicaciones.

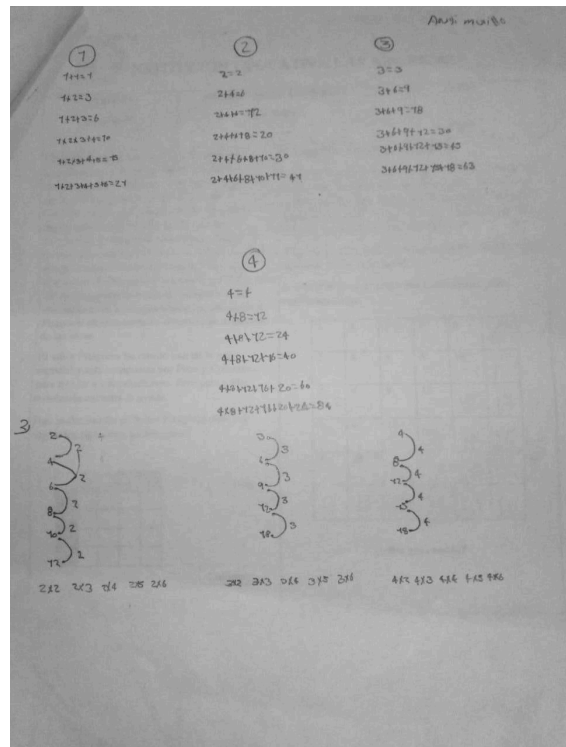
¿sabes que cambio?

1	2	3	4	5	6
2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18
4	8	12	16	20	24
5	10	15	20	25	30
6	12	18	24	30	36

Diagrama de la Tabla:

Filas

Columnas



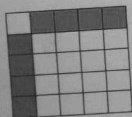

INSTITUCIÓN EDUCATIVA LAS AMÉRICAS

CODIGO	NOMBRE DE LA ACTIVIDAD	LOGO
1-Tabla-01	La Tabla	MESA

PITAGORAS Es una figura extremadamente importante en el desarrollo de las matemáticas, aunque es relativamente poco lo que se conoce de sus logros matemáticos. A diferencia de matemáticos griegos posteriores, de quienes al menos tenemos algunos de los libros que escribieron, de Pitágoras no tenemos ningún escrito, sabemos que fue un Filósofo y matemático griego. Aunque su nombre se halla vinculado al *teorema de Pitágoras* y la escuela por él fundada dio un importante impulso al desarrollo de las matemáticas en la antigua Grecia, la relevancia de Pitágoras alcanza también el ámbito de la historia de las ideas.

El señor Pitágoras ha creado una tabla muy especial y está compuesta por Filas y Columnas, para ayudar a sus estudiantes. Pero para poder terminarla necesita tu ayuda.

Para poder ayudar al Señor Pitágoras debes de seguir las siguientes indicaciones:



→ Filas

→ Columnas

1. Completar los espacios en blancos.
2. De acuerdo con la secuencia de la tabla, sumar los números de las filas de la siguiente manera: solo el primero luego el primero con el segundo después el primero con el segundo y el tercero hasta llegar al último. (realizarlo con las filas 2,3 y 4)
3. Escribe las anteriores sumas como multiplicación teniendo un factor común.
4. Describe las relaciones entre las sumas y las multiplicaciones.

1	2	3	4	5	6
2	4	6	8	10	11
3	6	9	12	12	13
4	8	12	14	15	16
5	10	13	14	15	16
6	11	13	14	15	16

¿sabes que cambio?

The image shows handwritten mathematical work on a grid background, organized into four numbered sections:

1
 $1 = 1$
 $1 + 2 = 3$
 $1 + 2 + 3 = 6$
 $1 + 2 + 3 + 4 = 10$
 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

2
 $2 = 2$
 $2 + 4 = 8$
 $2 + 4 + 6 = 12$
 $2 + 4 + 6 + 8 = 20$
 $2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$

3
 $3 = 3$
 $3 + 6 = 9$
 $3 + 6 + 9 = 18$
 $3 + 6 + 9 + 12 = 30$
 $3 + 6 + 9 + 12 + 15 = 45$
 $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 = 63$

4
 $4 = 4$
 $4 + 8 = 12$
 $4 + 8 + 12 = 24$
 $4 + 8 + 12 + 16 = 40$

Anexo 4

Ficha Y aplicada





INSTITUCIÓN EDUCATIVA LAS AMÉRICAS

CODIGO	NOMBRE DE LA ACTIVIDAD	LOGO
1-Mango-01	Mango Metro	MESA

Doña Ana vende todo tipo de frutas en tu colegio y entre esas frutas que vende está el mango, pero no el mango entero. Doña Ana lo parte en trozos alargados (Mango Metro) y luego lo pone dentro de las chuspas y cada una la vende en \$500 pesos.

Pero Doña Ana se encuentra en un problema y para poder ayudarla debes de seguir las siguientes indicaciones:

1-Si una chuspa de mango cuenta \$500 pesos. Completa la siguiente tabla.

2-¿Cómo puedo saber cuántos chuspas de mango pueden comprar con 3000 pesos?

Chuspas de mango	Precio
1	500
3	1500
4	2000
5	2500
7	3500
10	5000
16	8000

Doña Ana mira su negocio y nota que tiene muchos mangos y para lograr saber cuántas chuspas de mango puede sacar debe de completar la siguiente tabla:

¡¡ayuda a Doña Ana!!

¿Qué cantidad de chuspas de Mango Metro se pueden sacar de un Mango, teniendo en cuenta la información de la tabla?

Cantidad de Mangos	Chuspas
2	6
3	9
4	12
6	18
8	24
11	33



