



**UN ESTUDIO SOBRE LOS NÚMEROS REALES DE BACHMANN
DESDE EL ANÁLISIS INTERVALAR Y SU APOORTE A LA
FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.**

HARVY SANTIAGO PEÑA SOTO

Código: 201424933

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
SANTIAGO DE CALI**

2018



**UN ESTUDIO SOBRE LOS NUMEROS REALES DE BACHMANN
DESDE EL ANÁLISIS INTERVALAR Y SU APOORTE A LA
FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.**

HARVY SANTIAGO PEÑA SOTO

Código: 201424933

**Trabajo de grado para optar por el título de Licenciado en Matemáticas y
Física**

DIRECTOR DEL TRABAJO DE GRADO:

Guillermo Ortiz Rico

Docente del Departamento de Matemáticas

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
SANTIAGO DE CALI**

2018

AGRADECIMIENTOS

A Dios, primeramente, por brindarme la salud y los recursos para estudiar; por la bendición de poder ser formado y la adquisición de todo el conocimiento acumulado para mi desarrollo personal y profesional.

A mi madre, por ser el mayor impulso para lograr mis metas, por su apoyo, comprensión, por el esfuerzo colocado para permitirme llevar a cabo mis sueños.

A mi asesor de trabajo de grado Guillermo Ortiz Rico, por el tiempo brindado, la paciencia y exigencia, por su apoyo continuo y la motivación para llevar a cabo este trabajo.

A mis evaluadores por sus comentarios pertinentes y sugerencias para mejorar mi trabajo.

A mis compañeros de carrera, y especialmente a los amigos que conocí en y fuera de ella; por sus aportes, compañía y la fraternidad vivida.

A los docentes que conocí durante mi formación en la Universidad, ya que cada uno dejó en mi un aporte para seguir creciendo.

A la Universidad del Valle, por la oportunidad de formarme como licenciado en matemáticas y física; brindándome un espacio para crecer no solo conceptualmente, sino de manera cultural y social.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN	1
CAPÍTULO I	2
1. PRELIMINARES	2
1.1. ANTECEDENTES	6
1.2. MARCO TEÓRICO.	11
CAPÍTULO II	21
2. HECHOS HISTÓRICOS RELEVANTES.....	21
2.1. Algunos hechos del uso de número real a través del tiempo.	21
2.2. Los números reales en Dedekind: Cortaduras.	24
CAPÍTULO III.....	29
3. ARITMÉTICA DE INTERVALOS NUMÉRICOS.....	29
3.1. Presentación del número real de Bachmann.....	32
3.1.1. Primera parte de la conferencia: Presentación de la problemática.	33
3.1.2. Segunda parte de la conferencia: Generalidad de la problemática.	37
3.1.3. Tercera parte de la conferencia: Método de acercamiento	38
3.1.4. Cuarta parte de la conferencia: Definición de número real.	41
3.1.5. Quinta parte de la conferencia: Operaciones con números reales.....	44
3.1.6. Sexta parte de la conferencia: Orden en los números reales.	47
3.1.7. Séptima parte de la conferencia: Inversos multiplicativos.	48
3.1.8. Octava parte de la conferencia: Propiedades adicionales.....	49
CAPÍTULO IV.....	50
4. RECONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES DE BACHMANN A TRAVÉS DEL ANÁLISIS INTERVALAR.	50
4.1. Estudio de la familia de pares ordenados del gráfico de $fx = ax + b$	54
4.2. Estudio de la familia de pares ordenados del gráfico de funciones cuadráticas, exponenciales, racionales con respecto a funciones de la forma $fx = ax + b$	59
CAPÍTULO V	70
5. REFLEXIONES FINALES.....	70
6. REFERENCIAS	76

RESUMEN

El presente trabajo de grado, realizado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas y Física, tiene como punto de salida una insuficiencia presentada por Paul Bachmann (1892) sobre el conjunto de los números racionales, para solucionar determinadas tareas aritméticas. Este aspecto, se ve reflejado en el trabajo con cierto tipo de ecuaciones cuadráticas que no tienen solución en tal conjunto numérico. El trabajo de Bachmann no solamente se restringe a mostrar tales carencias, sino que el autor busca precisar una definición del número real, a través de un sistema aritmético conformado por intervalos encajados. Es por ello, que nuestro objetivo principal es abordar la significación que le atribuye a tal concepto, desde una perspectiva histórico – epistemológica, con el fin de realizar una reconstrucción que acerque a los educandos y docentes en ejercicio de matemáticas en educación media, a la naturaleza del número real, y resalte la importancia de la historia de las matemáticas como fundamento disciplinar en su quehacer académico. Para ello, utilizamos el *análisis intervalar*, teoría desarrollada por Moore (1966), como un puente para realizar esa reconstrucción, y analizar desde un paradigma descriptivo, cómo el concepto de número real involucra las nociones de límite, convergencia y continuidad; donde por medio de la especificación de ciertos parámetros, podemos visualizar geométricamente en un plano racional, cómo se comportan las clases de sucesiones de intervalos encajados de la recta real. Y de esta manera, generar determinadas curvas por medio de esas clases, que nos permitan acercarnos tanto como se desee a un punto real en el plano racional, las cuales, no deben ser necesariamente regulares en su comportamiento; sino que conforman infinitas formas de aproximación. Para esto, mostraremos que las rectas, son una gran opción para representar los números reales bajo esta teoría. Este trabajo fue realizado gracias a una profundización en el enfoque didáctico que utiliza Bachmann, por medio de una traducción libre que realicé de su obra en alemán, que me permitió ver cómo relaciona conceptos que modernamente ya conocemos, y mostrar que realmente su idea no verifica al número real como objeto matemático. Aspecto que es realmente fructífero para este estudio.

Palabras claves: Número real, análisis intervalar, intervalos encajados, límite, convergencia, continuidad, sucesiones de Cauchy, historia de las matemáticas, funciones algebraicas y trascendentes.

CAPÍTULO I

1. PRELIMINARES

Actualmente, en el siglo XXI, el interés de la educación matemática para plantear estrategias de distinta naturaleza, con el propósito de fortalecer la práctica de enseñanza y aprendizaje en las clases de matemáticas, crece exponencialmente. La formación de estudiantes competentes en matemáticas, cada vez exige nuevas ideas para estudiar un determinado concepto matemático, aportando a un manejo conceptual idóneo de los estudiantes, desarrollado a través de cada grado de escolaridad, que lo prepare para afrontar sus estudios de educación superior. Como resultado de esa necesidad, nace la iniciativa de plantear un panorama que ilustre el concepto de número real, a partir de elementos teóricos que corresponden a un grado de estudio universitario, que le permita a un docente de matemáticas o un educando en el área, adquirir una visualización más detallada de las características del conjunto de los números reales como objeto matemático.

Comúnmente, en los estudios matemáticos desarrollados en educación básica y secundaria en Colombia, conceptualizar el sistema de los números reales conlleva a una descripción del significado de número natural, entero, racional e irracional, por medio de una presentación axiomática, acompañada de ejemplos numéricos específicos, del sistema numérico correspondiente a cada uno; concretando que el conjunto de números reales se determina por medio de la unión del conjunto $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$.

El presente trabajo de grado, enmarcado en la línea de investigación de Historia y Epistemología de las Matemáticas, del programa académico de Licenciatura en Matemáticas y Física de la Universidad del Valle; dirigido a educandos en el área de la educación matemática y docentes en ejercicio del área de conocimiento, pretende brindar una herramienta conceptual al docente de matemáticas, para que en su ejercicio de práctica escolar con respecto al concepto de número real, tenga en cuenta la perspectiva histórica en su estudio; para que se logre un entendimiento de dicha noción. De esta manera: *“El objetivo inmediato no sería tanto enfrentar directamente al estudiante con las propiedades algebraicas de este sistema en tanto cuerpo ordenado arquimediano y completo. Más bien*

se trataría de permitirle, a través de experiencias didácticas diseñadas con un uso adecuado de la historia; que tome conciencia de las condiciones históricas y epistemológicas que posibilitaron la constitución de los números reales como objeto matemático” (Arboleda, 2011, pág. 24).

Con lo anterior, no se pretende proponer una forma de mostrar esas propiedades que menciona Arboleda, ni de satisfacer una enseñanza insuficiente en la escuela, sino que, se quiere brindar elementos que posibiliten de mejor manera un acercamiento al concepto de número real haciendo uso de la historia. Para ello, planteamos la pregunta: **¿Qué elementos conceptuales significativos aporta una construcción de los números reales, fundamentada en el análisis intervalar¹, en la comprensión de ese concepto, en relación con la formación de docentes en matemáticas de educación media?**

Para dar respuesta a la anterior pregunta, se busca caracterizar a los números reales por medio de una reconstrucción moderna de los planteamientos realizados por un matemático alemán llamado Paul Bachmann (1837-1920), en su obra *“Conferencias sobre la naturaleza de los números irracionales²” (1892)*; en la cual, en su primera conferencia *“Definición de los números irracionales³”* plantea una forma de aproximarse al concepto de número irracional, a través de sucesiones racionales de carácter ascendente y descendente, que se interceptan en una constante común, llamada valor límite.

El estudio teórico sobre Bachmann (1892), fue realizado sobre su obra original, redactada en alemán; la cual, fue traducida libremente y esquematizada por el autor del presente trabajo de grado (Harvy S. Peña), en un tiempo aproximadamente de dos meses de consulta de terminología y unificación del documento en cuestión; el cual fue perfilado conforme avanzaba la investigación general del trabajo. Tal proceso, se presenta en el capítulo III de este trabajo, mostrando a detalle los aspectos conceptuales que aborda Bachmann en su presentación didáctica del concepto de número real.

¹ Conjunto de conceptos y técnicas que se basan en el tratamiento de intervalos de números reales como un nuevo tipo de números.

² Traducción libre de Harvy S. Peña. del título original de la obra de Paul Bachmann en alemán: *“Vorlesungen Über Die Natur Der Irrationalzahlen” (1892).*

³ Traducción libre de Harvy S. Peña. del título original de la primera conferencia en alemán: *“Definition der Irrationalzahlen” (1892).*

Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas en Colombia, le atribuyen al concepto de número real una importancia tal que, sus competencias generales con respecto al pensamiento numérico están centradas en su totalidad a tal noción. Sin embargo, uno de los Estándares se enuncia como sigue: *“Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos.”* (MEN, 2006). Es decir, que curricularmente, hay una aceptación de que para un estudiante de educación media, es relevante reconocer que los números racionales son incompletos, pero más aún, que es importante establecer maneras para explicitar esa característica. Es por ello, que con respecto al pensamiento matemático, nuestra propuesta de trabajo manifiesta un esfuerzo de articular representaciones geométricas, numéricas y algebraicas de los números reales, para contextualizar su significado en diferentes sistemas de representación. Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) indican que:

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas plantean el desarrollo de los procesos curriculares y la organización de actividades centradas en la comprensión del uso y de los significados de los números y de la numeración; la comprensión del sentido y significado de las operaciones y de las relaciones entre números, y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación. Dichos planteamientos se enriquecen si, además, se propone trabajar con las magnitudes, las cantidades y sus medidas como base para dar significado y comprender mejor los procesos generales relativos al pensamiento numérico y para ligarlo con el pensamiento métrico. (Pg. 58)

Sin embargo, el pensamiento numérico no es el único que se ve influenciado positivamente por un aporte de este tipo, sino que, el pensamiento métrico también tiene participación para el entendimiento de las representaciones de los números reales que entran en juego. Con respecto al pensamiento métrico, los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) para el ciclo de décimo a undécimo grado, indican que:

... es importante destacar que la estimación de las medidas de las cantidades y la apreciación de los rangos entre los cuales puedan ubicarse esas medidas trascienden el tratamiento exclusivamente numérico de los sistemas de medidas y señalan la estimación como puente de relaciones entre las matemáticas, las demás ciencias y el mundo de la vida cotidiana, en contextos en los que no se requiere establecer una medida numérica exacta. (Pg. 63)

Lo anterior ilustra, que un tratamiento de estimaciones de medidas por rangos, es un conocimiento que es transversal a otras áreas de conocimiento además de las Matemáticas; es por ello, que es importante que el estudiante articule procesos de medición de este tipo, para dar solución a diferentes problemas referentes a análisis de datos, en ciencias como la física y la estadística.

En el diseño metodológico del presente trabajo, se considera un estudio diacrónico⁴, en el cual se contempla la manera como se ha consolidado el concepto de número real como objeto matemático, y a su vez, como un objeto de enseñanza que se ha incluido en la formación matemática que hoy en día se brinda en las instituciones educativas en Colombia. Tal estudio, integra la perspectiva histórico – epistemológica, de manera que permite ver como el contexto socio cultural ha sido participe de diversos procesos que permiten el surgimiento de los números reales como objetos de las matemáticas, constituyéndose como un elemento sumamente importante para el desarrollo teórico de múltiples campos, tales como la trigonometría, la geometría, el álgebra, el cálculo diferencial e integral, etc.

Inicialmente, en el capítulo II se realizará un breve abordaje histórico que recopile sucesos específicos en el descubrimiento de los números reales, en respuesta a las necesidades que el ser humano ha ido supliendo gracias a la integración del pensamiento matemático en sus actividades. En segundo lugar, en el capítulo III, se estudia el significado de número que atribuyó Bachmann (1892) utilizando la aritmética de intervalos, para solucionar un problema de aproximación a un valor irracional.

En tercer lugar, en el capítulo IV, se realizará una reconstrucción moderna del planteamiento de Bachmann (1892), que es una propuesta desde la perspectiva histórica y epistemológica, que puede acercar a los educandos en educación matemática y docentes en ejercicio, al estudio del concepto de número real. Finalizando en el capítulo V, con las reflexiones finales sobre la reconstrucción elaborada, y las conclusiones que se concretan por medio de nuestro estudio.

⁴ Entendido como el estudio de un hecho u objeto a través del tiempo; describiendo las características o los cambios de tales hechos, de forma cronológica.

1.1. ANTECEDENTES

A lo largo de la historia, múltiples autores han aportado de manera relevante al estudio del concepto de número real; dentro de ellos se destaca la participación de Georg Cantor (1845 - 1918), Richard Dedekind (1831 - 1916), Charles Méray (1835-1911), entre otros; los cuales, han permitido indagar en la amplitud que poseen los números reales como objeto matemático. Sin embargo, podríamos afirmar que, para estudiar los números reales, podemos aproximarnos utilizando teorías como el análisis intervalar⁵.

Han surgido intelectos que han utilizado el análisis intervalar para mostrar cómo los números reales ayudan a resolver múltiples problemas matemáticos, siendo uno de ellos, la resolución de ecuaciones algebraicas de primer, segundo, tercer y en general, n – grado. En este marco conceptual, ubicamos a Simón Stevin de Brujas (1548 – 1620), ingeniero flamenco del siglo XVI, que por medio de un acercamiento teórico, logró una ruptura de la concepción griega, que conllevó a una formulación moderna de lo que se enmarca en el concepto de número, vinculado a magnitudes discretas y continuas (Waldegg, 1996).

Simón Stevin es un autor con una participación importante en el desarrollo del concepto de número real, debido a que como mencioné, él irrumpe con la tradición griega, permitiendo la unificación de la rigurosidad y el practicismo del concepto. Esto está vinculado a lo que menciona (Epple, 2003), sobre que, durante el siglo XVIII y parte del siglo XIX, muchos científicos concuerdan con la idea de que las matemáticas eran la "ciencia de la cantidad". Se entendió que esta ciencia consistía en el estudio geométrico o algebraico de números y magnitudes continuas, tales como longitudes y pesos, o sus contrapartes "abstractas". Durante el siglo XIX, esta imagen de las matemáticas cambió profundamente, y uno puede razonablemente llamar a este cambio: el fin del paradigma de la ciencia de la cantidad.

(Epple, 2003) expresa que al construir nuevas entidades matemáticas que ya no podían encasillarse bajo la noción tradicional de cantidad, estos desarrollos explotaron la extensión del concepto de número real. Este autor presenta un bosquejo bastante aproximado de la transición altamente compleja del concepto tradicional de cantidad a las definiciones

⁵ Conjunto de conceptos y técnicas que se basan en el tratamiento de intervalos de números reales como un nuevo tipo de números.

axiomáticas de números reales y conjuntos. Esta transición estuvo conectada con un cambio significativo en los puntos de vista filosóficos sobre la naturaleza de las matemáticas.

Alrededor del año 1581, Stevin se instaló en el norte de los Países Bajos, específicamente en Holanda, en donde el clima intelectual parece haber coincidido con él. Durante los años 1582 al 1586 aparecieron diversas obras de su autoría, como sus *Tables of interest*, su *Problemata Geometrica*, su *Tenth*, su *L' Arithmétique* y una *Pratique d' Arithmétique*; y adicional a ello, también tres libros de mecánica, que también contiene pensamientos matemáticos creativos. Estas son las producciones intelectuales que principalmente han influenciado positivamente al establecimiento de la posición de Stevin en la historia de las matemáticas.

Sus ideas teóricas las plasmó en su obra *L' Arithmétique* y en un manuscrito geométrico, del cual solo se publicó una parte. En *L' Arithmétique* se ilustró el álgebra de Stevin, relacionadas a otras obras sobre mecánica, que incluían varias aplicaciones del cálculo de infinitesimales. Todo lo anterior, manifiesta en gran medida, el trabajo que desempeñó Stevin en los años 1582 a 1586, considerada como una producción intelectual original de la mayoría de las características de las matemáticas de su época.

El principal mérito de *L' Arithmétique* de Stevin, es la forma organizada en que discute y presenta planteamientos con respecto a las operaciones con números racionales, irracionales y algebraicos; articulados a un abordaje procedimental de la teoría de ecuaciones de primero, segundo, tercero y cuarto grados.

En su *Appendice Algébrique* Stevin afirma que, después de la publicación de *L' Arithmétique*, logró formular una regla general para resolver todas las ecuaciones con cualquier grado de aproximación. Como ejemplificación de ello, en el documento se plasma el tratamiento de la ecuación $x^3 = 300x + 33915024$, con el fin de encontrar una raíz (valor numérico de la ecuación), que satisfaga la igualdad. Este tratamiento tiene como método principal el acercamiento progresivo a la raíz buscada, tal que, por medio de un proceso de asignación de valores, encontramos que para encontrar una primera aproximación para x , al reemplazar $x = 1$, $x = 10$ y $x = 100$, el valor de x^3 es menor que el de $300x + 33915024$; sin embargo, para $x = 1000$ la desigualdad dicha anteriormente, es invertida. Por lo tanto, el resultado del primer acercamiento, es que $100 < x < 1000$.

Para obtener un intervalo de aproximación más preciso, se le asignan valores que cumplan con la desigualdad mencionada, teniendo en cuenta ahora $x = 100, 200, 300$ y 400 , obteniendo como resultado que $300 < x < 400$. Finalmente, se trabaja con valores que estén restringidos por esta condición, tales como $x = 310, 320$ y 330 encontrando que $320 < x < 330$. Finalmente, si a x le asociamos valores como $x = 321, 322, 323$ y 324 , hallaremos como solución de nuestro problema, que $x = 324$ al ser reemplazado en la ecuación algebraica, indica que ambos lados de la ecuación son iguales, de modo que $x = 324$ es la raíz.

Una formulación metodológica similar a la descrita por Simon Stevin, es presentada por el matemático alemán llamado Paul Bachmann (1837-1920), que generó producciones significativas en el área de la teoría de números. Este autor, comenzó a estudiar matemáticas en la Universidad de Berlín, en el otoño de 1855, como parte de la Facultad de Filosofía. En 1856 fue a la Universidad de Göttingen para continuar estudiando cursos de Lejeune Dirichlet, (1805 - 1859), matemático alemán, que habría abandonado Berlín recientemente, para suceder al gabinete de Gauss en Göttingen, y al cual se le atribuye el significado moderno del concepto de función. En Göttingen, Bachmann entabló una amistad íntima con Dedekind (1831-1916), matemático alemán que previamente había obtenido su doctorado bajo la supervisión de Gauss.

Paul Bachmann, en su libro *“Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen”* (Conferencias sobre la naturaleza de los números irracionales) en 1892, articula diez conferencias, en las cuales realiza un aporte significativo en el área de la teoría de números, con respecto a la caracterización de los números irracionales. En su primera conferencia, el autor pretende establecer a una definición de los números irracionales, teniendo como base aquellas irregularidades a las cuales el conjunto de los números racionales no puede dar respuesta. Esta primera conferencia, denominada por Bachmann como *“Definition der Irrationalzahlen”* (Definición de los números irracionales), se compone de ocho secciones temáticas, en las cuales, el autor plantea inicialmente las tareas aritméticas a las cuales los números racionales no pueden dar respuesta; como por ejemplo, la asignación de un valor a la incógnita x para satisfacer la ecuación: $(1) z^2 = 13$, obtenida a partir de la necesidad de hallar el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos con valores dos y tres.

Sin embargo, Bachmann plantea un método para aproximarse al resultado que estamos buscando, pese a que no esté incluido en el conjunto de los números racionales: Acercamiento por sucesiones de números racionales. Suponiendo que el número z (el cual satisface la ecuación (1)), podemos “rodearla” o incluirla en un intervalo de números racionales que lo contengan, esto es, en ejemplificación, que $z^2 = 13$ se encuentra en $[3^2, 4^2] = [9, 16]$. De esta manera, Bachmann indica, que podemos establecer dos sucesiones de números racionales, una creciente y otra decreciente, que se aproximen progresivamente al valor z que buscamos; y a través de ese conjunto de pares de valores que configuran intervalos encajados, podemos definir el concepto de número.

La definición de número que el autor explicita en la primera conferencia es:

“Las dos sucesiones de números que convergen entre sí⁶ determinan entre sí un número o le corresponden un número z . Pero no utilizamos el concepto de frontera para ayudarnos a presentarlo, sino que lo resumimos formalmente, en concordancia con Heine, como el símbolo numérico:

$$z = \left\{ \begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, & \dots & a_i & \dots \\ b_1, & b_2, & b_3, & \dots & b_i & \dots \end{matrix} \right\} = \left(\begin{matrix} a_i \\ b_i \end{matrix} \right)$$

Con el fin de conectar este concepto más general de los números con la noción habitual de los números racionales, afirmamos además que, siempre que haya un número racional z , que siempre permanece entre a_i, b_i ; puede entenderse como el límite común de ambas sucesiones, este número debe ser entendido por el símbolo indicado” (Bachmann, 1892).

En una cercanía temporal a la realización del presente trabajo, consideramos como antecedente, a la investigación que realizó Adriana Moreno (2017), la cual desarrolló como su propuesta para optar al título de Magíster en Educación con Énfasis en Educación Matemática. En este trabajo, la autora toma como punto de partida la problemática que surge con la representación y aproximación a las propiedades de los números reales en la educación media, proponiendo alternativas para que éstas no estén alejadas o desarticuladas de las presentaciones formales propuestas en la Educación Superior.

⁶ Hace alusión al hecho, de que la sucesión creciente a_i y la sucesión decreciente b_i , convergen ambas al mismo número, sea racional o no, de acuerdo a la naturaleza de ellas.

El esquema del trabajo de (Moreno, 2017) se moviliza en tres instancias esencialmente. En primer lugar, la autora realiza un estudio histórico, que caracterice el significado y la construcción que se dio entre los siglos V a.C y XIX d.C, de tal forma que también pueda indicar el origen y el proceso de formación de la teoría intervalar. Posteriormente, en segundo lugar, la autora realiza una descripción teórica con respecto a las construcciones elaboradas por Cantor (1845 – 1918), Bachmann (1837-1920), e Ittay Weiss sobre los números reales. De este apartado, es relevante mencionar que la autora explicita la importancia que tiene la construcción de Bachmann (eje principal del presente trabajo), debido a que, como indica Moreno en su trabajo, tal elaboración *“permite constatar matemáticamente la construcción de los números reales a partir de intervalos encajados de racionales”*.

En su trabajo, Moreno diseña un conjunto de actividades, desde una perspectiva histórico - matemático, con la finalidad de que los estudiantes por medio de ellas, tengan un acercamiento intuitivo a los planteamientos matemáticos de mayor rigurosidad, como por ejemplo la construcción de Bachmann, quien define a los números reales como límites de sucesiones de intervalos encajonados, o también como las de Cantor y Weiss. Sin embargo, estas elaboraciones también requieren de unos conocimientos previos para su entendimiento, por lo que su exposición a estudiantes de educación media, no es tan sencilla. En consecuencia, la autora emplea el análisis intervalar, como el conector entre tales trabajos históricos matemáticos (representaciones de los números reales) y lo que desea lograr en los estudiantes.

De las conclusiones de la investigación realizada por (Moreno, 2017), es relevante resaltar dos, las cuales permiten visualizar de forma más sinóptica, porque tal investigación se constituye como un antecedente; en primer lugar, consideramos el siguiente:

La aproximación histórica y epistemológica evidencia que la evolución de la noción de número real como objeto matemático se tardó alrededor de veintiún siglos, lo que implica una reflexión acerca de su introducción en el aula, pues si bien no es posible que un estudiante de educación media pueda definir qué es un número real y entender sus propiedades de completez y estructura algebraica formalmente, la historia nos muestra el camino de su evolución para que en el mismo sentido en el aula y en este periodo de escolaridad se puede ir ganando intuiciones que estén relacionados con los conceptos formales como lo son la sucesión, el límite y el intervalo encajonado. (p. 170).

Este resultado constata de manera general, la forma como la perspectiva histórica y epistemológica, que explicaremos en el apartado del marco teórico, es un buen camino para aproximarnos al número real como un objeto matemático, y su significancia para la formación de docentes en matemáticas; vislumbrando que su constitución matemáticamente, no correspondió a un período de tiempo corto, sino que necesitó, como menciona Moreno, alrededor de veintiún siglos. Lo que aporta una reflexión de tipo didáctico, para el docente, como orientador del proceso de enseñanza en el aula. Adicional a ello, (Moreno, 2017) indica como otra conclusión de su investigación:

La construcción propuesta por Bachmann permite constatar que es posible hacer una construcción formal y rigurosa de los números reales a partir de sucesiones de intervalos encajonados en el mismo orden en que lo ha hecho Cantor a través de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy y Dedekind a través de cortaduras. (p. 171).

Lo anterior ilustra la importancia que tiene nuestra problemática, teniendo como eje principal la construcción realizada por Bachmann de los números reales. Aunque los conceptos que se requieren para estudiar de forma más completa tal construcción, como los mencionados por Moreno, no son manejados totalmente por un estudiante en educación media; la construcción en sí es un acercamiento muy potente para la comprensión de la naturaleza de la noción de número real, ya que, por medio de ella, así como con Cantor y Dedekind, podemos entender al número real como un objeto matemático.

1.2. MARCO TEÓRICO.

1.2.1. Perspectiva histórica y epistemológica.

La dimensión histórica y epistemológica, permite vislumbrar aquellas dificultades y circunstancias que están inscritas en el proceso de concepción de un objeto matemático. Tal objeto, a través del tiempo, se ha ido formando gracias al acercamiento que hace el hombre a su significado, gracias a las características que identifica y relaciona de forma de lógica, y que genera un proceso de análisis, que posteriormente, permitiría la aprehensión del objeto matemático como objeto de conocimiento y de enseñanza. Esta dimensión, expone las maneras como el número real, se ha ido constituyendo históricamente, no de forma inmediata, sino que, ha sido construido progresivamente gracias al trabajo de distintos

autores, y que nos proporcionará la información suficiente para concebir el conjunto de los números reales como un objeto matemático y de enseñanza. En este sentido, esta perspectiva será clave para vislumbrar dos aspectos: De qué manera la Historia de las Matemáticas, como un área de conocimiento que sigue acrecentando sus aportes, fortalece la formación de profesores en Matemáticas. Y segundo, en qué aporta esta perspectiva a la enseñanza del concepto de número real. Así, a continuación, describimos los autores que utilizaremos como fundamento para articular esta perspectiva en el presente trabajo de grado.

1.2.1.1. La perspectiva histórica y epistemológica como parte de la formación de profesores.

Una de las ponencias que centran su atención en la participación que tiene la historia de las matemáticas en la formación de profesores de secundaria, es expuesta por (Hodgson, 2012), quien pretende estudiar esa participación, relacionada específicamente con el curriculum escolar de matemáticas, a través de la articulación de aspectos culturales e históricos que impactan no solo en un contexto escolar, sino también universitario. Su ponencia analiza estos espacios educativos, en los que la historia de las matemáticas puede aportar positivamente en múltiples aspectos, con respecto al proseguimiento de ella para mejorar la formación de profesores en matemáticas.

Como uno de los sustentos más valiosos de este autor, encontramos la idea de que las matemáticas, son una herencia de la humanidad, la cual está relacionada con las diferentes exigencias o carencias que han ido surgiendo a través del tiempo, y por las cuales, las matemáticas han sido adaptadas para dar respuesta a ellas. Es por eso que (Hodgson, 2012) busca incentivar a los profesores de matemáticas, a que integren una dimensión epistemológica en el acto educativo, para vislumbrar aspectos del pasado y actuales, que permitan a los estudiantes conectarse mejor con el constructo que representan las matemáticas como disciplina, y a su vez con su razón de ser en la civilización.

(Hodgson, 2012) explicita una característica que se le atribuye comúnmente al profesor, y es el ser un “poseedor de cultura”, o bien, como lo llama, un intérprete y crítico de ella. Y claramente, esta idea no es alejada de la realidad, debido a que la sociedad ha cedido al profesor el lugar de conocedor total de un área de conocimiento, y su imagen corresponde a la de un experto de ella. Sin embargo, entender la esencia de un objeto matemático no solo

implica saber comunicarlo, ni tampoco saber una forma de presentación axiomática o formal de ella, debido a que epistemológicamente un objeto matemático posee una historia, y a su vez, una naturaleza que ha sido constituida a través del tiempo. Decir que un profesor es experto en matemáticas, es una premisa que lleva consigo una serie de juicios valorativos sobre el conocimiento que posee de los tópicos matemáticos en sí. Esto reafirma la idea de que las matemáticas son un producto terminado, y que ha sido descubierto y estipulado totalmente, lo cual limita la visión que tienen los estudiantes e individuos en general, sobre la naturaleza misma de las matemáticas.

Es importante que los docentes en matemáticas, reconozcan que los objetos matemáticos tuvieron una génesis, que ciertamente arroja información muy valiosa sobre el objeto mismo. Además de ello, esa génesis puede motivar a los estudiantes, a que existieron motivaciones sustanciales que hicieron que el hombre diera tanta importancia a un campo como el de las matemáticas. Sin embargo, el docente debe seleccionar qué aspectos históricos son relevantes para la formación de sus estudiantes, debido a que está dirigida a un público específico, e incluye motivaciones didácticas para su inclusión en la clase. Sin embargo, lo importante es no perder de vista cómo se desenvuelven las corrientes filosóficas y concepciones sobre las matemáticas, en distintas instancias del tiempo, de tal manera que permita apreciar una evolución.

Una producción intelectual que nos ilustra sobre la forma de proceder en este tipo de estudios, desde la perspectiva histórica y epistemológica, es realizado por (Anacona, 2003). Su artículo, reviste tres formas de estudiar el trabajo histórico, en las cuales indica que cada una aporta características y singularidades teóricas con respecto a la introspección educativa. Además de ello, muestra cómo la Historia de las Matemáticas impacta en la Educación Matemática, en donde considera dos dimensiones o paradigmas, una relacionada con la formación de docentes y la otra con los procesos de aprendizaje.

Como menciona (Anacona, 2003): *“En los estudios histórico - epistemológicos juega un papel esencial, el análisis del proceso de construcción teórica de un concepto. Sin embargo, éste se realiza teniendo siempre en cuenta el contexto particular de producción teórica”*. Esto es, un señalamiento que, a nuestro presente trabajo, cobra una importancia en el estudio

de la construcción que realizó Bachmann de los números reales, especialmente en los factores que se fue acoplando durante el proceso, y qué lo impulsó para ello.

Por lo tanto, una manera de describir la perspectiva histórica – epistemológica, a la cual se inscribe el desarrollo de este trabajo de grado, es como lo indica (Anaconda, 2003): *“En los estudios realizados con la Historia y enseñanza de las matemáticas se analizan aspectos, conceptos o métodos históricos que pueden incidir, directa o indirectamente, en las reflexiones sobre la enseñanza o el aprendizaje de las matemáticas”*. Y es evidente que el estudio del conjunto de los números reales, bajo este paradigma, nos permite hacer un aporte significativo a la comprensión y el conocimiento de la caracterización general de tal objeto matemático.

1.4.2. Los números reales.

1.4.2.1. Los números reales como objeto matemático

Atribuir existencia a los números reales como objeto matemático, es una acción que requiere un sustento teórico importante que lo verifique. No solamente por medio de argumentaciones de tipo filosófico, sino del mismo campo en el que pertenece dicho concepto. Para dar sentido a este planteamiento, estudiaremos las ideas que brinda (Arbeláez & Gálvez, 2011) en un capítulo que ellos denominan como la constitución de $\mathbb{R}$ como objeto matemático, el cual se desarrolla por medio del estudio del trabajo de Richard Dedekind (1831 – 1916). Indicando por medio de ello, algunos aspectos que son omitidos en el estudio del concepto de número real en el aula de clase de matemáticas en la etapa escolar.

¿Qué significa atribuir existencia a los números reales? Uno de los dilemas cuando estudiamos los números reales en la etapa escolar, es que previamente todos los involucrados en el contexto educativo, hemos tenido interacción directa o indirecta con la noción de contar, la cual creemos que es suficiente para dar significado a lo que llamamos número. El estudiante dota al número un sentido de practicismo, propio de la actividad que ha desarrollado por medio de sus actividades cotidianas, tales como el manejo monetario de una cantidad de dinero, el conteo de un conjunto de cosas como juguetes, la medida de la altura de una persona e incluso de su peso, y así con bastantes ejemplos ilustrativos. Sin embargo, implícitamente ocurre es una relación que establecemos entre la realidad en la que nos

desembocamos, con ese sistema amplio al cual pertenece los números reales. Específicamente, con un dominio que nos brinda un valor numérico en esos procesos de conteo, medición u organización.

Lo anterior nos coloca en una situación para reflexionar sobre qué significado le atribuimos al número, debido a que le hemos brindado un sentido operatorio y práctico. Es importante clarificar la distinción que hay entre el calificativo de “existencia” que se le asigna a una entidad que surge, por un medio operatorio, en el proceso de resolución de una situación problemática específica, y el estatus de existencia asignado a un objeto que surge en el ámbito de una teoría axiomática (Arbeláez & Gálvez, 2011).

El reconocer la participación de un objeto matemático en las actividades que desempeñamos e incluso en la forma como analizamos generalmente, no garantiza que exista propiamente. De hecho, un número no es un objeto tangible, en el sentido de que no podemos manipularlo físicamente; sin embargo, ello no implica que no exista. Lo que se pretende con esta idea, es indicar que la existencia del número no es ontológicamente igual a la de otro objeto al cual sí podemos acceder por medio de nuestros sentidos. Es por ello, que a través de una construcción axiomática del concepto de número real, se garantiza matemáticamente su existencia. Esto es, perteneciente a un sistema teórico en la cual, si es permitido la manipulación de aquello que llamamos número, de manera que podemos operarlo, transformarlo y generar otros elementos de su naturaleza, y podemos generar otros objetos matemáticos.

Con el fin de caracterizar al conjunto de los números reales como objeto matemático, puede estudiarse con detenimiento el planteamiento que realiza Georg Cantor (1845 – 1918) y Richard Dedekind (1831 – 1916) con respecto a su construcción de los números reales. Donde algunos autores, han realizado revisiones históricas detalladas, como por ejemplo (Arbeláez & Gálvez, 2011), o también, la presentación matemática que hace (Calderón, 2014) en su trabajo de grado, realizado para optar al título de Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales. Este último autor, en su trabajo, realiza una exploración histórica de la construcción formal, es decir, en el sentido estricto y riguroso matemáticamente, del concepto de número real, especialmente desde Richard Dedekind, el cual definió los números reales por medio de cortaduras, y Georg Cantor, el cual definió tal

conjunto a partir de sucesiones de Cauchy. Todo esto, con la finalidad de elaborar una propuesta de tipo didáctica, que les facilite a los estudiantes de grado once de educación media, hacer una distinción de los números racionales e irracionales. Por lo tanto, este estudio expone alternativas históricas sobre una construcción de los números reales.

Con respecto a esto, (Ortiz & Valencia, 2010) muestran que hay una estrecha relación entre las axiomáticas de Hilbert y Dedekind a cercanías del año 1900. Este aspecto está registrado en la obra de Sieg-Schlimm, quienes examinan impetuosamente a Corry y a Ferreirós; debido a que el primero, estima a Dedekind como un matemático no moderno, que no contribuye al estructuralismo; mientras que el segundo, estima a Dedekind como un lógico no moderno. Sin embargo, esta crítica, muestra la significancia que Dedekind tuvo en el establecimiento de los fundamentos de las matemáticas.

(Ortiz & Valencia, 2010) muestran que Hilbert recopila, en sus obras de las axiomáticas sobre los números reales y la geometría, la concepción principal de la categoricidad de Dedekind y del pensamiento filosófico del período en el que se desenvuelve. En donde tal concepción, ocupa un papel importante en la génesis del método axiomático, y que conforma un pilar relevante hacia el trabajo de estructuras en matemáticas. Con respecto a ello, ocurre algo particular con el sistema axiomático de Hilbert para los reales; él comienza con un “sistema” de “cosas”, y formula axiomáticamente las relaciones y operaciones entre tales elementos, colocando inmersa la condición de carácter conjuntista, del axioma de completez. Similarmente, Dedekind prosigue determinando estructuras tales como cuerpos numéricos (1871), el cuerpo ordenado y completo de los reales (1872) o la estructura de los naturales (1888).

(Ortiz & Valencia, 2010) consideran que la escogencia de Hilbert de utilizar una formulación conjuntista en la clase de los objetos (la estructura) de todos los cuerpos arquimedianos totalmente ordenados, es una resolución encaminada al estructuralismo, fundamentada por la “buena definición” de los objetos. Debido a que, pese a reconocer las paradojas conjuntistas, al acceder a trabajar con colecciones arbitrarias, se induce a especificar la estructura (la “buena definición” de la clase de todos los objetos), y por medio del método axiomático, plantear en ella los números reales como el objeto final.

Así, (Ortiz & Valencia, 2010) identifican que el contexto del período, aportaba una táctica para “solucionar” la cuestión de la existencia en las estructuras abstractas. De forma singular, asociado a los números reales, suerte que es usada por Hilbert en su formulación axiomática a través de la estructura de los cuerpos arquimedianos totalmente ordenados y completos. Lo que (Ortiz & Valencia, 2010) opinan, es que se garantizaba un grado de precisión en el planteamiento de Hilbert, pese a los baches en la teoría de conjuntos; ya que se introdujo en la estructura de los cuerpos arquimedianos totalmente ordenados, con una permisión para establecer la existencia de los números reales con un carácter maximal. Esta perspectiva de Hilbert, es la que los autores llaman como “estructuralismo pragmático”, el cual se conserva en múltiples asociaciones matemáticas actuales, y fue el que influenció fuertemente el progreso de la matemática estructuralista del siglo XX.

1.4.2.2. Algunas dificultades históricas en la construcción del concepto de número real.

El concepto de número real, tiene sus raíces en tiempos muy remotos, en los cuales se fue construyendo progresivamente su significado con la ayuda de distintos personajes que han participado en su definición, aunque no en un período de tiempo corto. Este concepto, relevante para el desarrollo de la matemática en general, articula conjuntamente lo que (Recalde, 2011) indica como las actividades de medir, contar y ordenar. Mencionando que las tres están conectadas de manera muy estrecha, de manera que si una de las tres no está presente, la conexión de las restantes carecería de sentido.

Nuestro interés en los antecedentes históricos del concepto de número real, no es hacer una introspección exhaustiva de ellos, debido a que la información completa es muy amplia; sino que, se pretende hacer explícito la importancia que han tenido las contribuciones de distintas culturas y a su vez diferentes autores, en el surgimiento del concepto de número real.

Un hecho importante sobre esto, se puede observar en la teoría de la razón y la teoría de números de Euclides, la cual (Recalde, 2011) describe por medio de las definiciones y proposiciones, que Euclides registró en sus correspondientes producciones intelectuales. Esta sección fundamenta de qué manera la conmensurabilidad está relacionada con aquello que

posteriormente se estipularía como los números racionales, y de qué forma la irracionalidad está relacionada con la inconmensurabilidad.

En relación a esto, (Guacaneme, 2016) indica que su proyecto de investigación, se ubica en un ambiente que se enfoca en la función de la Historia de las Matemáticas en la configuración del saber del docente de Matemáticas. Tomando como salida ese ambiente, formula la historia de la razón y la proporción, como elemento de estudio por medio de la Historia de las Matemáticas, e inmersa en ella, la historia de la teoría euclidiana de la razón y la proporción presentada en el Libro V de *Elementos* de Euclides. De esta forma, se analiza esta teoría, para plantear una perspectiva de esta. Adicionalmente, investiga a manera de reseña, los documentos que tratan sobre la historia de la razón y proporción; con los cuales se identifican seis centros de estudio (teorías pre-euclidianas, teoría euclidiana, la proporción en la época helenística, las traducciones árabes y latinas, las adaptaciones de la teoría en la Baja Edad Media y el Renacimiento, y la influencia de la teoría de la proporción en la construcción de los reales).

1.4.3. Análisis intervalar.

El análisis intervalar, es una teoría que se constituye como nuestro puente principal para acercarnos al concepto de número real. Un fundamento que se caracteriza principalmente por el practicismo que ha sido empleado para diferentes procedimientos de tipo algebraico y aritmético, tal como lo evidencian los trabajos de (Stevin, 1625) y (Bachmann, 1892). Sin embargo, estos dos autores solo han sido parte de la contribución global que ha emergido a lo largo del desarrollo de esta teoría, ya que, el análisis intervalar no es partidaria originalmente del campo educativo, sino que ha sido un método desarrollado por ingenieros para responder a determinados problemas matemáticos. Para ello, consideramos principalmente el trabajo realizado por (Moore, 1966), en donde como él indica, el nombre de su libro: *Análisis intervalar*, se refiere a un conjunto de conceptos y técnicas que se basan en el tratamiento de intervalos de números reales como un nuevo tipo de números, representados por un par de números reales, que corresponden a los puntos extremos izquierdos y derechos de tales intervalos. Tales puntos, los denominamos mínimo y supremo

del conjunto de valores que contiene ese intervalo (de ser cerrado), o bien, dos elementos pertenecientes al conjunto de cotas superiores e inferiores de tal intervalo.

Los números racionales comúnmente han sido representados como pares de números enteros de la forma: $\mathbb{Q}: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, donde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ así como los números complejos son representados como pares de números reales, de la forma: $\mathbb{C}: \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, es por ello, que las operaciones aritméticas, son procedimientos que involucran pares de pares. Así, un par especialmente equivale a un número de la forma como tradicionalmente lo representamos (Moore, 1966).

Lo anterior, nos permite definir lo que es un intervalo numérico. Esta noción hace referencia a un par ordenado de número reales $[a, b]$, de tal manera que $a \leq b$ y $a, b \in \mathbb{R}$. De esta manera, (Moore, 1966) asocia al intervalo $[a, a]$ equivalente al número real a .

Un intervalo numérico es una forma de presentar a todos los valores reales que, se encuentran entre a y b . Esto es, que si $x \in [a, b] \leftrightarrow a \leq x \leq b$.

La anterior presentación, trabaja específicamente con intervalos cerrados, es decir, que tiene ínfimo y supremo. Sin embargo, nuestro interés en el presente trabajo, corresponde a hacer una reconstrucción moderna del planteamiento que realiza (Bachmann, 1892), y el cual no trabaja con esa clase de intervalos, sino que lo hace con intervalos netamente racionales, es decir, donde $a, b \in \mathbb{Q}$. Además de ello, este autor trabaja con intervalos abiertos, lo cual presenta dos limitaciones frente todo el esquema conceptual que define (Moore, 1966).

Sin embargo, y pese a estas diferencias, que matemáticamente son muy importantes. La forma como Moore, desarrolla su teoría del análisis intervalar, nos enriquece en un aspecto clave, y es la representación geométrica de esos intervalos cerrados que él trata como números en sí. Estas técnicas que describe, son procedimientos que permiten obtener de forma inmediata, con ayuda de la programación y los avances tecnológicos, los límites superiores e inferiores que permiten dar solución a determinados problemas. El significado de un problema, no es solamente un valor cuantitativo aislado de contexto, sino que epistemológicamente tiene una repercusión en el área del conocimiento en el cual se desenvuelve el problema.

Un caso para ejemplificar el uso del análisis intervalar, aunque no de forma explícita como teoría, es la demostración del teorema del valor intermedio que realizó Cauchy en su *Curso de Análisis* de 1821, presentada en (Arbeláez & Gálvez, 2011). En la cual esencialmente se esboza una demostración a través de acotaciones o aproximaciones a un valor intermedio en un intervalo cerrado $[A, B]$, de una función continua en él y que cumple $f(A) < 0$ Y $f(B) > 0$.

- i) Se divide $[A, B]$ en m partes iguales. Así mismo como las correspondientes ordenadas de tales divisiones. En donde, si por convención $h = B - A$, tenemos:

$$A, A + \frac{h}{m}, \dots, A + \frac{(m-1)h}{m}$$

$$f(A), f\left(A + \frac{h}{m}\right), \dots, f\left(A + \frac{(m-1)h}{m}\right)$$

- ii) Según la hipótesis planteada, en el intervalo $[A, B]$ deben haber dos valores sucesivos con signos opuestos, los cuales denomina A_1 y B_1 .
- iii) El procedimiento i) se repite, pero teniendo en cuenta ahora el intervalo $[A_1, B_1]$. Y se prosigue de la misma manera para obtener un mejor acercamiento al valor C tal que $f(C) = 0$, por medio de las sucesiones:

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$$

$$B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$$

- iv) La sucesión que describe A_n es creciente, mientras que la que describe B_n es decreciente. Cauchy indica que estas sucesiones convergen a un valor real C , y por medio de la continuidad de la función, afirma que la sucesión que describen los valores de las ordenas para cada elemento de las sucesiones descritas anteriormente, convergen a $f(C)$, y al ser de signos opuestos, entonces $f(C) = 0$.

Un aspecto relevante de esta demostración que se especificó anteriormente, es que Cauchy señala que el proceso es indefinido, ya que si no fuera de esta manera, encontraría el valor C que cumple tal condición (Arbeláez & Gálvez, 2011). Y justamente un proceso de este tipo, es el que desarrolla Bachmann para definir aquello que denomina como número, y es que

implica un tratamiento de aquellos acercamientos infinitos por intervalos, que justamente Cauchy emplea. Cada vez más, aquellos intervalos que provienen de $[A, B]$, “encierran” o “encajan” cada vez más, para hallar un valor, el cual no se puntualiza en ninguna instancia. Es por ello, que podemos visualizar este procedimiento como una forma de acotar un valor específico, y estimar un rango de variación para él.

En consecuencia, el análisis intervalar será utilizado en la reconstrucción moderna del planteamiento de Bachmann con respecto a su definición de número real, lo cual nos exige relacionarlo desde la perspectiva histórica – epistemológica explicada con anterioridad, y la naturaleza de objeto matemático que posee el conjunto de números reales, con la formación de docentes en matemáticas.

CAPÍTULO II

2. HECHOS HISTÓRICOS RELEVANTES

2.1. Algunos hechos del uso de número real a través del tiempo.

En esta sección, nos ocupa principalmente, realizar un abordaje histórico reducido, sobre ciertas precisiones del concepto de número en diferentes épocas y localizaciones. Con el fin de aportar, a la naturaleza de la investigación que se desarrollará a lo largo de los capítulos posteriores. Esto es, mostrar que el concepto de número real, posee muchos antecedentes para la construcción de la noción moderna que tenemos, y que ha atravesado una evolución significativa con el tiempo.

La información recogida a continuación, constituye una síntesis o resumen, de la información presentada en *Numbers*⁷ (1991)

⁷ Autores: Ebbinghaus, H.-D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Neukirch, J., Prestel, A., Remmert, R.

Egipcios. Los primeros documentos se remontan a las primeras civilizaciones en el valle del Nilo, Éufrates y Tigris. Los jeroglíficos para los números 10 000, 100 000 y 1 000 000 se encuentra en una maza del Rey Narmer, de la primera dinastía egipcia (cerca de 3000 AC).

1	10	100	1000
↓	↓	↓	↓
10 000	100 000	1 000 000	
↓	↓	↓	

Babilonios. Los babilonios usaban símbolos cuneiformes en tabletas de arcilla. Estos se basaron en una rotación de posición mixta decimal y sexagesimal. Ellos, demuestran ser aritméticos y algebraicos de gran talento. Desarrollaron tablas sofisticadas para usar en cálculos que involucran multiplicaciones y divisiones, y para resolver ecuaciones cuadráticas y cúbicas.

for 0.64

Griegos. El sistema numérico de los griegos era decádico, aunque no posicional. El sistema anterior usaba símbolos individuales para los pasos decádicos, que eran las letras iniciales de las palabras correspondientes para los números correspondientes.

El sistema posterior de representar números por letras (aproximadamente 450 AC) se usó en textos matemáticos. Comprende las 24 letras del alfabeto griego estándar con tres símbolos adicionales de la tradición oriental.

Junto a una aritmética con números representados por símbolos, uno puede encontrar desde una etapa temprana una representación de números por contadores (como las cuentas de un ábaco,

↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	5	10	50	100	500
×	×	×	×		
1000	5000	10 000	50 000		

1 – 9	$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta$
10 – 90	$\iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \varsigma$
100 – 900	$\rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \chi, \psi, \omega, \eta$
1000 – 9000	$\alpha, \beta, \dots$

10 000 M

		○ ○ ○
	○ ○	● ● ○
○	● ○	● ● ○
1	1 + 3	1 + 3 + 5

guijarros, etc.), que fue un medio por el cual se descubrieron los teoremas aritméticos.

Los pitagóricos se interesaron principalmente en la importancia filosófica de los números. En su filosofía, el universo entero se caracterizaba por los números y sus relaciones, y así surgió el problema de definir en términos generales qué era un número. Los griegos así consideraron como números, solo los números naturales excluyendo la unidad; las fracciones se trataron como relaciones de números y números irracionales como relaciones entre magnitudes inconmensurables en geometría.

Práctica aritmética indo árabe. Entre 300 AC y 600 DC la notación decimal posicional actual con 0 y sus propios símbolos particulares 1,..., 9, nació en la India, presumiblemente bajo la influencia de los Babilonios. Así, por ejemplo, de las formas primitivas -, =, surgieron al principio los símbolos , que eventualmente se convirtieron en 1, 2. La notación india fue asumida por los árabes, no menos por sus astrónomos. Los indios tenían signos de números positivos y negativos.

Tiempos modernos. Las prácticas aritméticas indo arabinas se diseminaron por todo el mundo occidental mediante los libros de texto aritméticos de los siglos XIII al XVI (por ejemplo, los de Leonardo de Pisa, Riese, Stifel) y posibilitaron los éxitos posteriores de los matemáticos italianos del Renacimiento (tales como Del Ferro, Cardan y Ferrari) en la solución de ecuaciones algebraicas. En la nueva álgebra del Renacimiento, el cero y los números negativos adquirieron una nueva función ya que permitieron asimilar varios tipos de ecuaciones bajo una categoría. Desde el momento de Descartes las ecuaciones se han escrito en la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

Aunque los matemáticos, desde el comienzo de su ciencia, operaron con números y descubrieron teoremas acerca de los números, no fue sino hasta el siglo XIX que dieron definiciones matemáticamente útiles del concepto de número. No fue sino hasta después de que Dedekind y Cantor (y otros) definieron los números reales por medio de conjuntos de números racionales (ver Capítulo 2) que las definiciones clásicas de los números naturales en términos de lógica y teoría de conjuntos siguieron.

2.2. Los números reales en Dedekind: Cortaduras.

Uno de los hechos que impulsaron el formalismo a la hora de hablar del conjunto de los números reales, fue dado por Julius Wilhem Richard Dedekind (1831 – 1916), un matemático alemán, que por medio de cortaduras, definió tal conjunto. Su estudio, inspirado en la búsqueda de la caracterización de la continuidad en los números reales, tiene como objeto principal, el concepto de cortadura, que se define como sigue:

Definición (Arbeláez & Gálvez, 2011): Una cortadura (A_1, A_2) sobre los números racionales $\mathbb{Q}$ es una partición de este conjunto en dos clases A_1 y A_2 con la siguiente propiedad: Para todo $a \in A_1$ y para todo $b \in A_2$ se cumple $a < b$.

Dedekind indicaba, que cada número racional, divide la recta por medio de una cortadura, que permite obtener dos subconjuntos α y β , de tal manera que, el primer conjunto α , para los cuales el racional es mayor para todos sus elementos, es el supremo del conjunto; y el segundo conjunto β , tal que ese racional es menor a todos los elementos que pertenecen a él, es decir, su ínfimo. Lo que indica que es necesaria esta separación, ya que es una característica propia de la definición de cortadura. Sin embargo, debemos precisar, que si el supremo o ínfimo no se determinan por un número racional, debemos afirmar que la cortadura es irracional.

De manera conjuntista, podemos pensar que la colección arbitraria de todas las cortaduras que pueden ser elaboradas, constituyen los números reales. De esta manera, podemos afirmar que los reales de Dedekind están dados por la siguiente definición: *“El conjunto de los números reales de Dedekind está constituido por la colección de todas las cortaduras que puedan ser formadas”*.

Una analogía, para acercarse a la idea anterior, la tenemos con la siguiente ilustración de (Calderón, 2014):

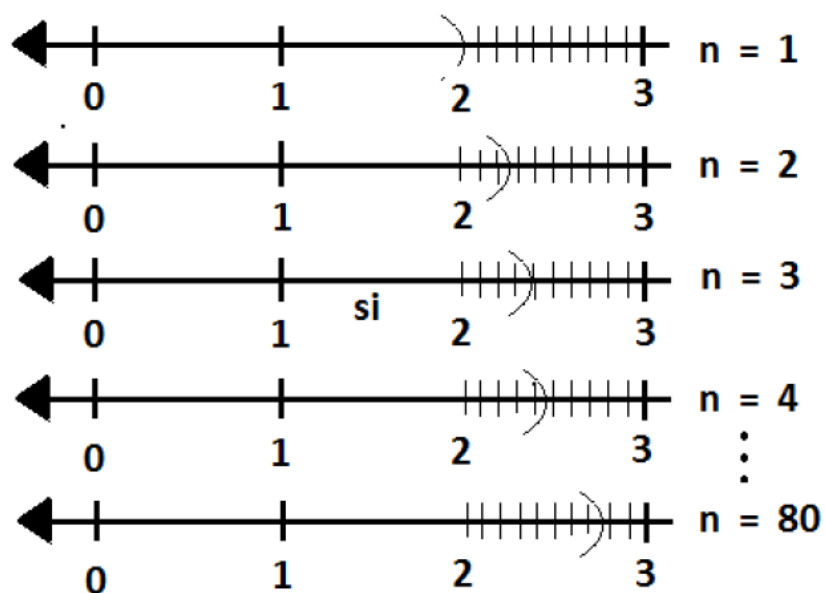


Figura 6. Cortadura producida por el número e . De Calderón (2013). *Diferentes construcciones del número real*. Recuperado de <http://www.bdigital.unal.edu.co/46409/1/01186491.2014.pdf>

Esencialmente, la anterior figura muestra las cortaduras formadas por los racionales estrictamente menores que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ con n natural. Es interesante ver, que la unión de todas esas cortaduras, conlleva al número e , pese a que este es un número irracional. Este tipo de detalles, permite enlazar la teoría de Dedekind con el axioma del supremo, que es fundamental para la definición de los números irracionales en análisis matemático. En este caso, el número e , actúa como el límite cuando $n \rightarrow \infty$ de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Lo cual, puede interpretarse como la unión de las cortaduras formadas por $\left(-\infty, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$, lo cual, conformaría una colección que representa al número e . Así mismo, considerando el caso de $\sqrt{3}$, en donde la unión arbitraria de todas las cortaduras formadas por los racionales $r < \sqrt{3}$, dadas por los intervalos $(-\infty, r)$, conforman la representación de $\sqrt{3}$, la cual se muestra en el índice 2 de los ejemplos mostrados al comienzo de esta sección.

¿Y de qué manera esta construcción establece un objeto matemático? Pues bien, Dedekind por medio de esta presentación, evidencia la existencia matemática de lo que llamamos los números reales, por medio de una axiomática que verifica el cumplimiento de las propiedades que lo definen como cortadura propiamente; y que más aún, son demostrables.

Y es que justamente, así como en una presentación aritmética, podemos establecer un orden entre las cortaduras de Dedekind, sus operaciones, y demás aspectos específicos del conjunto de los reales. Solamente, con intención de mostrar esto, se menciona a continuación la presentación de la relación de orden entre cortaduras, dada por (Calderón, 2014): “Sean C_1 y C_2 cortaduras; $C_1 < C_2$ si existe un racional q tal que $q \in C_2$ y q no está en C_1 ”.

2.3. Los números generales de H. E. Heine (1821–1881)

Paul Bachmann (1837 – 1920) en la presentación de su definición de número, menciona a Heine como una incorporación a la coherencia del planteamiento que realiza. Articulado incluso como referente en la definición propia de su trabajo.

(Bachmann, 1892) menciona, que la noción general de número de Heine cumple con un requisito concreto, y es la presentación del número racional como un caso especial de los términos numéricos extendidos; es decir, articular los números racionales como una particularidad de una generalidad numérica que caracteriza su sistema teórico.

En (Sinkevich, 2014) y (Sinkevich, 2015) se enlazan los aportes que múltiples autores, en épocas muy cercanas entre sí, han desarrollado con respecto al concepto de número real. Uno de ellos, es el de Edward Heine, quien en 1872⁸, propuso un concepto basado en sucesiones fundamentales (convergentes) de Cantor; es en este mismo año, que Cantor desarrolla una de las primeras contribuciones suyas en la teoría de conjuntos⁹, en el que (Sinkevich, 2015) menciona que introdujo la noción de un punto límite, y que definió sus sucesiones fundamentales de la siguiente manera¹⁰:

⁸ A través de su obra *Die Elemente der Functionenlehr*.

⁹ A través de su obra *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen // Math. Ann., Bd.5, 123-132*.

¹⁰ La definición indicada corresponde a una traducción libre de Harvy S. Peña, autor del presente trabajo de grado, del fragmento de (Sinkevich, 2015) citado.

"Cuando me refiero a un valor numérico en general, esto sucede para el caso particular de una sucesión infinita de números racionales $a_1, a_2, \dots, a_n$ con la propiedad de que la diferencia $a_{n-m} - a_n$ se hace infinitamente pequeña al aumentar n , y sin importar cuán grande o pequeño sea el número positivo m , para un ϵ seleccionado arbitrariamente (positivo racional), existe un número n_1 con la propiedad que $|a_{n-m} - a_n| < \epsilon$ si $n \geq n_1$ y m es un entero positivo cualquiera [Cantor, 1872, pág. 123-124]" (Pg. 11)

Esta definición, es la que conocemos comúnmente como **Sucesiones de Cauchy**. Lo que nos brinda un elemento conceptual importante en la construcción del concepto de número real de Bachmann; y nos permite observar con generalidad la naturaleza de número que quiere presentar, debido a que su complejidad no es tan reducida, como se podría pensar por la didáctica con que presenta sus ideas. Es por ello, que el fundamento de Heine & Cantor en conjunto, para Bachmann (1892), le brinda los elementos de convergencia y continuidad en la recta real.

2.4. Algunas referencias históricas de los Intervalos anidados.

Como se muestra en *Numbers*¹¹ (1991), la idea de ajustar intervalos, uno dentro de otro, para formar los llamados nido de intervalos, es antigua y se encuentra sobre todo en las matemáticas aplicadas en relación con el cálculo de valores aproximados. Según los autores de *Numbers*, fue Stevin cuando alrededor del año 1594 usó la técnica de cálculo con decimales y definió un número real mediante anidamientos específicos.

En *Numbers*, se presentan las siguientes puntualizaciones de esta teoría:

- i. En el siglo XIX, se utilizaron intervalos anidados para probar algunos de los teoremas centrales del análisis. Un intento de definir números reales por ciertas sucesiones de intervalos para probar el criterio de convergencia de Cauchy se remonta a Bolzano.

¹¹ **Autores:** Ebbinghaus, H.-D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Neukirch, J., Prestel, A., Remmert, R.

- ii. Weierstrass utiliza el anidamiento de intervalos para probar su teorema sobre los puntos límite (el teorema de que un conjunto infinito acotado tiene un punto límite).
- iii. Bachmann (Leipzig, 1892) introduce números reales mediante el uso sistemático de intervalos anidados.

Otro aspecto importante, explicitado en *Numbers*, es que la introducción de números reales mediante intervalos anidados está motivada por la siguiente situación: “Consideramos una sucesión de intervalos $I_1, I_2, \dots, I_n$, de tal manera que en la línea aritmética continua (o eje real), cada una está contenida dentro de la que la precede, y además, la longitud de I_n , (intervalo n -ésimo), tiende a cero a medida que n aumenta.” En el caso particular de intervalos decimales, la longitud de I_n es 10^{-n} , y los puntos finales de I_n son múltiplos enteros de 10^{-n} . Requerimos que, para cada sucesión de intervalos anidados, exista uno y solo un punto en el eje real, que esté contenido en todos los intervalos de la sucesión:

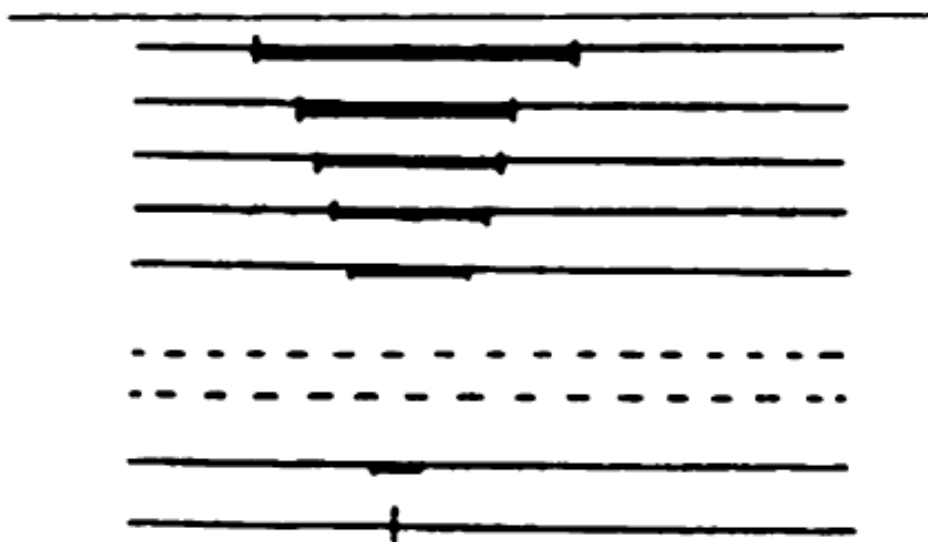


Figura 7. Ilustración de la anidación de intervalos. De Ebbinghaus, H.-D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Neukirch, J., Prestel, A., Remmert, R. (1991). *Graduate texts in Mathematics, readings in Mathematics: Numbers*.

CAPÍTULO III.

3. ARITMÉTICA DE INTERVALOS NUMÉRICOS.

En esta sección nos interesa introducir la notación que utilizaremos para reconstruir el planteamiento que realiza Bachmann con respecto a qué es un número real. Por lo tanto, la motivación es establecer una forma de representación de determinados conceptos matemáticos, que serán claves posteriormente. De esta manera, a continuación, se presentan ciertas definiciones, que nos ayudarán a precisar de forma más clara, los significados que necesitamos, y adicionalmente, nos aportan una organización de ellos.

DEFINICIÓN 1: Sean dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $a \leq b$. Llamamos intervalos numéricos, al conjunto de valores reales que se encuentran entre a y b . Esto es, si $x \in \mathbb{R}$ y x pertenece al intervalo I dado por a y b , es equivalente a afirmar que $a \leq x \leq b$.

La anterior definición, permiten indicar que $\forall x \in \mathbb{R}$, existe un intervalo numérico $I: x \in I$. Y con ello, que existen dos valores reales que lo conforman. Tal definición, que evidentemente es la correspondiente a un intervalo cerrado en los números reales, vislumbra aspectos importantes que van direccionamiento la idea de trabajar con intervalos, y de establecer una aritmética con ellos. Una de esas ideas, está enmarcada en el tratamiento aritmético que se hace con los números decimales infinitos, ya sea que pertenezcan al conjunto de los números racionales o irracionales. Ejemplifiquemos este caso:

Consideremos el número $\sqrt{5}$, actualmente conocemos que es un número irracional, que así como otros, aparecen frecuentemente en problemas relacionados a soluciones de ecuaciones algebraicas, o en otros escenarios de la matemática. Sin embargo, encontramos que operar con él, es hacerlo implícitamente con cada cifra que constituye su valor numérico. En ese procedimiento, en la búsqueda de una solución o resultado preciso¹² para un problema, se realizan aproximaciones del número. En este sentido, operar con una aproximación de $\sqrt{5}$ no es equivalente a operar con el número propiamente; sino que se está realizando una estimación de él.

¹² Referido a una solución exacta, es decir, sin incertidumbre alguna.

Si queremos ubicar a $\sqrt{5}$ en un intervalo I , existen infinitas formas de realizarlo, pero miremos uno específico: Como $\sqrt{5} \approx 2,2360679 \dots$ sabemos que $2 \leq \sqrt{5} \leq 3$, esto es, por la definición 1, $\sqrt{5} \in [2,3]$.

Sin embargo, podemos acercarnos más a $\sqrt{5}$, considerando valores como 2.2; 2.23; 2.236;... para aquellos $a \leq \sqrt{5}$; y valor como 2.9; 2.8; 2.7;... para aquellos $b \geq \sqrt{5}$.

Así,

$$\begin{aligned} 2,2 &\leq \sqrt{5} \leq 2,9 \\ 2,23 &\leq \sqrt{5} \leq 2,8 \\ 2,236 &\leq \sqrt{5} \leq 2,7 \\ 2,23606 &\leq \sqrt{5} \leq 2,6 \\ &\dots \\ 2,230679 &\leq \sqrt{5} \leq 2,3 \\ &\dots \end{aligned}$$

Como vemos, la estimación de $\sqrt{5}$ mejora conforme avanzamos en ese proceso de “encajonamiento”, es decir, de reducción de la longitud o densidad del intervalo que lo contiene.

DEFINICIÓN 2: Denominamos intervalos numéricos encajados o simplemente intervalos encajados, a aquellos intervalos que están definidos en $\mathbb{R}$, tales que, siendo $I = [a, b]$, $J = [c, d]$, decimos que $I \subset J$ si $\forall x \in [a, b] \rightarrow x \in [c, d]$, esto es: $c \leq a \leq x \leq b \leq d$.

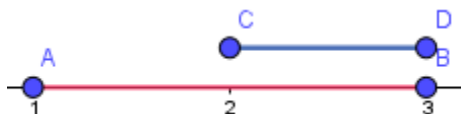
En este sentido, podemos afirmar que $[2,3] \subset [1,4]$, e incluso $[2,3] \subset [1,3]$ y $[2,3] \subset [2,4]$.

A continuación, se ilustra los tres casos mencionados:

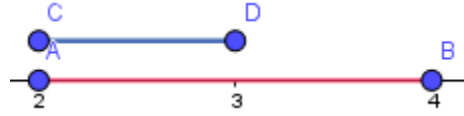
i) $[2,3] \subset [1,4]$



ii) $[2,3] \subset [1,3]$



$$\text{iii)} \quad [2,3] \subset [2,4].$$



En cambio, si comparamos los intervalos $[2,3]$ y $[4,5]$, vemos que, aunque $2 \leq 4$ y $3 \leq 5$, no ocurre que $\forall x \in [2,3] \rightarrow x \in [4,5]$, por ser conjuntos disjuntos, como se ilustra a continuación:



DEFINICIÓN 3 (Familia de intervalos encajados en $\mathbb{R}$):

Si para cada k natural, suponemos que existe un intervalo I_k , de la forma $I_k = [a, b]$; $a, b \in \mathbb{R}$. Tal que $\dots \subseteq I_{k+2} \subseteq I_{k+1} \subseteq I_k$. Decimos que el conjunto τ , definido como:

$$\tau = \{I_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

es una familia de intervalos encajados en $\mathbb{R}$.

Esta tercera definición, será relevante para nuestra reconstrucción de $\mathbb{R}$ planteada por Bachmann.

DEFINICIÓN 4 (Generalidad de las operaciones en τ): Esencialmente, sean dos intervalos $I, J \in \tau$, tal que $I = [a, b]$, $J = [c, d]$. Definimos las operaciones aritméticas en τ como sigue:

- i) $I + J = [a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$
- ii) $I - J = [a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$
- iii) $I * J = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$
- iv) Si $0 \notin [c, d]$, $\rightarrow \frac{[a, b]}{[c, d]} = [a, b] * \left[\frac{1}{d}, \frac{1}{c}\right]$
- v) $\alpha I = [\alpha a, \alpha b]$; $\alpha \in \mathbb{R}$

3.1. Presentación del número real de Bachmann

Definir número real como objeto matemático, no es solamente atribuir su esencia por la participación de la noción intuitiva de él en determinados contextos, tales como el acto de contar u ordenar, en los cuales el número real, especialmente el conjunto de los números racionales, funcionan como etiquetas para comparar elementos, caracterizar colectivos de elementos, o simplemente, para delimitar cantidades asociados a ellos. Asociar existencia al número real, implica la constitución de un sistema axiomático, que le dé sentido al concepto matemáticamente, y de ahí, si atribuirle una aplicación o practicismo en los contextos que mencionamos anteriormente. La existencia es demostrable, fuera de ser un axioma, y también es verificable, en el sentido de que, incluido en un sistema teórico matemático, debe poder ser obtenido como resultado de los planteamientos iniciales que basan el sistema en su fundamentación.

Paul Bachmann, en su presentación intuitiva de lo que comprende como un número real, está alejado rotundamente de ese tipo de planteamiento axiomático que se mencionó. Su explicación, dividida en ocho partes, trae consigo un planteamiento didáctico¹³ y más asequible a un público en general, sobre el acercamiento al concepto de número real, a través del tratamiento de intervalos anidados o encajados, de números racionales, que permitan un rango de estimación, o de forma más precisa, un rango de ubicación de cada número real por medio de dichos intervalos.

En la presente sección, nuestro interés es realizar un estudio descriptivo de las ocho partes que componen su conferencia “*Definición de los números irracionales*”¹⁴, en la cual, utiliza para su presentación del concepto de número real, la noción de sucesión racional, en ese sentido de acercamiento creciente y decreciente, que constituye el rango de ubicación de tal número. Y adicional a ello, define las operaciones aritméticas con números reales. Es por ello, que cabe resaltar que la exposición de las ocho partes del capítulo, se hará reflexionando conceptualmente, en la medida de la teoría que hasta la actualidad se ha construido sobre los

¹³ Explicar a qué se hace referencia con esto.

¹⁴ Traducción libre de Harvy S. Peña. del título original de la primera conferencia en alemán: “*Definition der Irrationalzahlen*” (1892).

conceptos inmersos en la presentación original del autor, de tal forma que entendamos sus ideas con una profundidad suficiente, para re plantear sus ideas en el capítulo siguiente.

3.1.1. Primera parte de la conferencia: Presentación de la problemática.

Bachmann inicia la conferencia, mencionando que el punto de partida de la aritmética, son los números enteros positivos, los cuales constituyen una sucesión, que él denomina como “*sucesión natural*”, la cual es dada por $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$, y que dado esa idea, podemos afirmar que parte del concepto de conteo al cual comúnmente asociamos los números naturales desde una edad temprana de interacción con ellos; y que parte de esa interacción se debe a la necesidad de resolver determinadas tareas que requieren estimación de cantidades, tales como el conteo de una cantidad de dinero, medir la altura de una persona, reconocer el espacio que ocupa un objeto, y múltiples actividades más, en las cuales el número toma una importancia inmensa.

Sin embargo, Bachmann menciona que el conjunto de los números naturales no son suficientes para solucionar todas las *tareas aritméticas*¹⁵. En este sentido, cabe resaltar esa denominación específica que el autor utiliza, debido a que esas tareas, hacen referencia a aquellas que inciden en una generalización matemática de la situación resuelta, es decir, el número participa no solo en la medida de resolver un problema, sino que también permite caracterizar el problema que resuelve. Es por ello, que podemos afirmar, que el autor se refería a contextos donde se requería trabajar con los opuestos de los enteros positivos, debido a que no todas las operaciones estaban definidas en el conjunto de los números naturales.

Pese a ello, el autor menciona que tampoco considerar todo el conjunto de los números enteros, es suficiente, debido a que existen huecos en dicho conjunto. Esta es una aseveración que podemos direccionar al axioma el inverso multiplicativo, debido a que, en el conjunto de los números enteros, tal valor inverso no existe para los números enteros distintos de ± 1 . Y por supuesto, en el acto de comparar dos números enteros, y en otro tipo de tareas aritméticas, el mismo conjunto queda limitado para la resolución de ellas. Es por ello, que surge la

¹⁵ Traducción del término *arithmetischen aufgaben*. Párrafo 2, Pg. 1 de la conferencia.

necesidad de ampliar el conjunto y formular el de los números racionales, la cual el autor plantea como una correspondencia de dos números enteros, o en general, una relación entre ellos.

Esta parte es una manera de presentar una linealidad en la manera cómo surge el conjunto de los números racionales, a partir de un proceso de completar los huecos que los conjuntos previos a él (naturales y enteros) tenían. Tal presentación, a diferencia de Dedekind y Cantor, no es axiomática ni es formal (lo cual estudiaremos más adelante), y es por ello que, como introducción al trabajo de plantear la irracionalidad, es una manera simple de generar la idea de número racional, como un concepto intuitivo, lo cual normalmente encontramos que es una tendencia en la etapa escolar.

Bachmann realiza la siguiente consideración: Teniendo en cuenta la ecuación, donde D es un número positivo:

$$x^2 = D \quad (1)$$

Podemos afirmar que si (1) tiene una raíz racional, ésta puede ser entera, es decir, $x = n$ y en consecuencia, D es equivalente a n^2 . Sin embargo, si tal raíz es un número fraccionario $x = \frac{p}{q}$, tal que $(p, q) = 1$, tenemos que $\frac{p^2}{q^2} = D$, y así:

$$p^2 = Dq^2 \quad (2)$$

Y contradice el supuesto de que $(p, q) = 1$, debido a *que cada primo en la descomposición de q debería estar en aquella de p* , lo cual el autor menciona que está apoyado en el *principio aritmético de la divisibilidad de enteros*.¹⁶ De esta manera, el autor concluye que si D no es el cuadrado de un entero, no existe un número racional que satisfaga (1).

En esta parte, Bachmann realiza un trabajo de carácter algebraico, el cual, trasladado al presente trabajo, se realiza una descripción de los pasos que se considera, no fueron expuestos en el trabajo original, y que pueden dificultar el entendimiento del paso de una expresión a

¹⁶ Fragmento traducido con ayuda del docente Manuel Villegas, miembro del departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Santiago de Cali.

otra. Además de ello, se pretende organizar la verificación que el autor intenta desarrollar, haciéndolo más secuencial (en el sentido del encadenamiento de los pasos).

Inicialmente, se considera la expresión:

$$x^2 - Dy^2 \quad (3)$$

La cuál denomina como forma cuadrada, o bien, podemos entenderla como fórmula cuadrada. Bachmann indica que *ella misma tiene la propiedad fundamental de que al multiplicarse con una expresión de la misma forma, ella vuelve a aparecer*¹⁷, es decir que (3) cumple la siguiente identidad:

$$(x^2 - Dy^2) \cdot (x'^2 - Dy'^2) = (xx' - Dyy')^2 - D \cdot (xy' - x'y)^2 \quad (4)$$

Si colocamos la condición ahora que D no es un número cuadrado¹⁸, pero pese a ello, podemos hallar un número racional cuyo cuadrado es igual a D ; adicional a ello, consideremos que tales enteros son positivos, esto es:

$$\frac{p^2}{q^2} = D \quad (5)$$

Y consecuentemente,

$$p^2 - Dq^2 = 0 \quad (6)$$

Una idea que es clave en el desarrollo que plantea el autor, es que de todas las parejas (p, q) que pueden ser formadas en el sistema, se tomará aquella en la cual q sea el valor más pequeño, lo que intuitivamente indica que no existe valor q' menor a q en el sistema.

Seguido a ello, se elige un un entero positivo k tal que:

$$k^2 < D < (k + 1)^2 \quad (7)$$

¹⁷ Fragmento traducido con ayuda del docente Manuel Villegas, miembro del departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Santiago de Cali.

¹⁸ Por especificar

En donde, utilizando la expresión (5), obtenemos que:

$$k^2 < \frac{p^2}{q^2} < (k+1)^2$$

Y en consecuencia:

$$k^2 q^2 < p^2 < (k+1)^2 q^2$$

Y por ende:

$$kq < p < (k+1)q \quad (8)$$

De la desigualdad (8) tenemos que: $kq < p < p^2$, es decir, $0 < p^2 - kq$. Por la expresión (6) tenemos que:

$$0 < Dq^2 - kq = q(Dq - k)$$

Lo que implica que:

$$0 < Dq - k$$

Finalmente, si consideramos las siguientes equivalencias:

$$x = p, y = q, x' = k, y' = 1$$

Reemplazando en (4), tenemos que:

$$(p^2 - Dq^2) \cdot (k^2 - D) = (pk - Dq)^2 - D \cdot (p - qk)^2,$$

Si además de ello, consideramos, a partir de (8), que $p - kq = q'$, y $Dq - pk = p'$ tal que:

$$p'^2 - Dq'^2 = 0$$

Encontramos un q' tal que $q' < q$, lo cual contradice el supuesto, estipulado la escogencia del par (p, q) en el sistema.

3.1.2. Segunda parte de la conferencia: Generalidad de la problemática.

Bachmann en la segunda parte, pretende únicamente mostrar la generalidad de la primera, con respecto a las ecuaciones algebraicas de orden arbitrario, como es:

$$(4) \quad a_0 X^m + a_1 X^{m-1} + a_2 X^{m-2} + \dots + a_m = 0$$

Particularmente, el autor se interesa en el caso donde los coeficientes de la ecuación son valores racionales, en donde el máximo valor, asociado a a_0 , es igual a 1. Así:

$$(5) \quad X^m + A_1 X^{m-1} + A_2 X^{m-2} + \dots + A_m = 0$$

Consecuentemente:

$$X^m = -(A_1 X^{m-1} + A_2 X^{m-2} + \dots + A_m)$$

Bachmann introduce una noción que esencialmente rodea la de solución de tal ecuación general, y es la de *número algebraico*. Tal noción la describe como “*La raíz de cualquier ecuación de ese tipo, la llamaremos como número algebraico, y sí, todos los coeficientes son enteros, se denomina número algebraico entero*”¹⁹. En este sentido, sea X una solución de la anterior ecuación, tal que X es racional y es de la forma $\frac{p}{q}$, tal que $(p, q) = 1$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^m = -(A_1 \left(\frac{p}{q}\right)^{m-1} + A_2 \left(\frac{p}{q}\right)^{m-2} + \dots + A_m)$$

Y en consecuencia,

$$p^m = -q^m(A_m + \dots + A_1 \left(\frac{p}{q}\right)^{m-1} + A_2 \left(\frac{p}{q}\right)^{m-2})$$

Finalmente:

$$p^m = -q^m(A_m q^{m-1} + \dots + A_2 p^{m-1})$$

¹⁹ Fragmento traducido de forma libre, por Harvy S. Peña, autor del presente trabajo de grado.

Donde el resultado anterior, explicitado por Bachmann es que, p^m es igual a un múltiplo de q , y así p podría dividirse por cualquier factor primo contenido en q , lo que contradice la suposición acerca de $(p, q) = 1$. A excepción, de que $q = 1$, y eso implique que $x = p$ un número entero. De lo anterior concluimos al mismo tiempo que, una ecuación del tipo (10) con coeficientes enteros, que no tiene una raíz entera, tampoco puede tener una raíz racional. (Bachmann, 1892).

3.1.3. Tercera parte de la conferencia: Método de acercamiento a un irracional.

Las ecuaciones descritas anteriormente, de acuerdo a Bachmann, vislumbran la insuficiencia del conjunto de los números racionales, y la necesidad de la aparición de nuevos números que funcionen como solución de ellas, o bien, de otras situaciones que exigen la existencia de ellos. Es por ello, que en esta parte el autor se enfoca en mostrar la manera como una solución para un problema concreto, puede ser estimada a través de su método de acercamiento, que a simple vista puede parecer sencillo, pero que tiene una trascendencia muy importante para la comprensión del concepto de número real. Es por ello, que para nuestro presente estudio, miraremos a detalle los aspectos que caracterizan este planteamiento:

Sea un triángulo rectángulo $\triangle ABC$, tal que la medida de sus catetos adyacente y opuesto, con respecto a un ángulo específico, son tres y dos respectivamente.

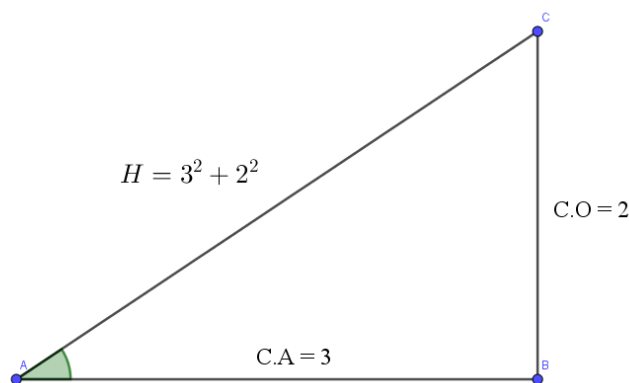


Figura 8. Triángulo rectángulo descrito en el enunciado.

El cálculo de su hipotenusa, se realiza utilizando el teorema de Pitágoras, en la cual: $h^2 = C.O^2 + C.A^2$. De esta manera, $h^2 = 3^2 + 4^2 = 13$.

Se puede probar que, en el conjunto de los números racionales, no existe un valor numérico que satisfaga la ecuación:

$$(6) \ h^2 = 13$$

Aunque el valor h que satisface (1), matemáticamente es una cantidad definida, ya que es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, y está representada por la ecuación; en el conjunto de los racionales, su valor no siempre puede ser precisado de forma exacta. Y es importante detallar en este sentido, que pese a que identificamos que el valor existe, no es suficiente para atribuirle una connotación de objeto matemático. Bachmann considera que para que haya una justificación científica válida, debe haber una forma de demostrar la definición de tal número de una forma coherente, y asociado a la naturaleza del concepto en cuestión. Sin embargo, observaremos a continuación, que esa idea no es formal en el sentido de demostrar, o atribuir existencia matemáticamente (en un sistema axiomático verificable).

Dicho lo anterior, evidenciamos que el problema nos exige amplificar nuestro dominio numérico, para precisar una solución. Sin embargo, Bachmann explicó un método para estimar el rango en donde se encuentra la solución de la ecuación (1).

Sea $h^2 = 13$, de tal manera que $0^2 \leq h^2 \leq 6^2$, esto es, $h^2 \in [0,36]$, así mismo, $h^2 \in [4,25]$ ya que $2^2 \leq h^2 \leq 5^2$, y $h^2 \in [9,16]$ ya que $3^2 \leq h^2 \leq 4^2$. Como vemos, puedo delimitar los intervalos de números enteros para “*aproximarme*” (en la idea de reducir la longitud del intervalo) cada vez más al valor que deseo. Lo que implica que, puedo establecer intervalos cerrados cada vez menos distantes entre sus extremos, de tal manera que pueda estimar uno que esté cada vez más cerca de 13, como lo indica la **Figura 9**:

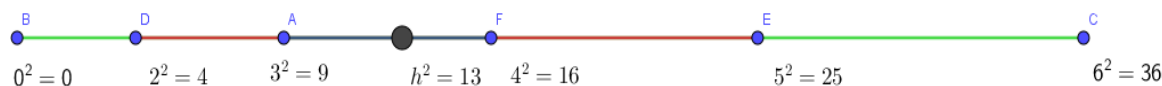


Figura 9. Intervalos $[0,36]$ – *color verde*, $[4,25]$ – *color rojo* y $[9,16]$ – *color azul*.

Visualizados como segmentos, que disminuyen su longitud a medida que se aproximan a $h^2 = 13$.

En este sentido, los intervalos definidos anteriormente tienen un punto en común, que llamamos $h^2 = 13$. Si nos trasladamos ahora, al conjunto de los números racionales, observamos que el acercamiento es mucho mayor:

Si manejamos intervalos, en donde su regularidad se da en términos de $\frac{1}{n}$, es decir, me acerco a 13 por medio de $13 \pm \frac{4}{n}$, encontramos dos sucesiones que se aproximan a él:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} 9, & 11, & 11.6, & 12, & \dots & \\ 17, & 15, & 14.3, & 14, & \dots & \end{array} \right\}$$

Es relevante mencionar, que la sucesión que se describe en la primera fila es creciente, mientras que la segunda, es decreciente. Este acercamiento, se asocia directamente al concepto que conocemos como *Límites laterales*, los cuales nos indican la tendencia de la sucesión hacia ese valor h^2 .

Otra forma de visualizar este acercamiento, es indicando el valor h^2 como el centro de una circunferencia, y tomando los valores de las sucesiones, como radios de circunferencias, que organizadas de menor a mayor radio (de menor a mayor distancia al centro), tenemos una visualización en términos de entornos, hacia el valor buscado. Este tipo de planteamiento, no está descrito originalmente por Bachmann. Sin embargo, es una herramienta muy potente para ver, como esa idea de él se puede movilizar de diferentes maneras, y ver (sin detallar exhaustivamente en eso) como existen aspectos topológicos en su planteamiento.

Estas nociones, que aún no son demasiado formales, nos permiten indicar que la solución de (11), hace parte de un conjunto infinito de intervalos que lo contienen, o como hemos denominado en nuestro planteamiento inicial del capítulo, una *familia de intervalos*, que a diferencia de como (Moore, 1966) considera, no son cerrados.

Dicho de otra forma, h^2 se constituye como el punto de acercamiento común, o la intersección arbitraria, de todos los intervalos abiertos, que convergen a ese valor.

Una forma de observar numéricamente el acercamiento descrito por Bachmann, es analizar la diferencia entre los valores que componen las sucesiones que tienden a ese valor común.

Trasladándonos a $\mathbb{R}^2$, considerando el acercamiento al punto $x^2 = 3$, en la parábola $y = x^2$, obtenemos:

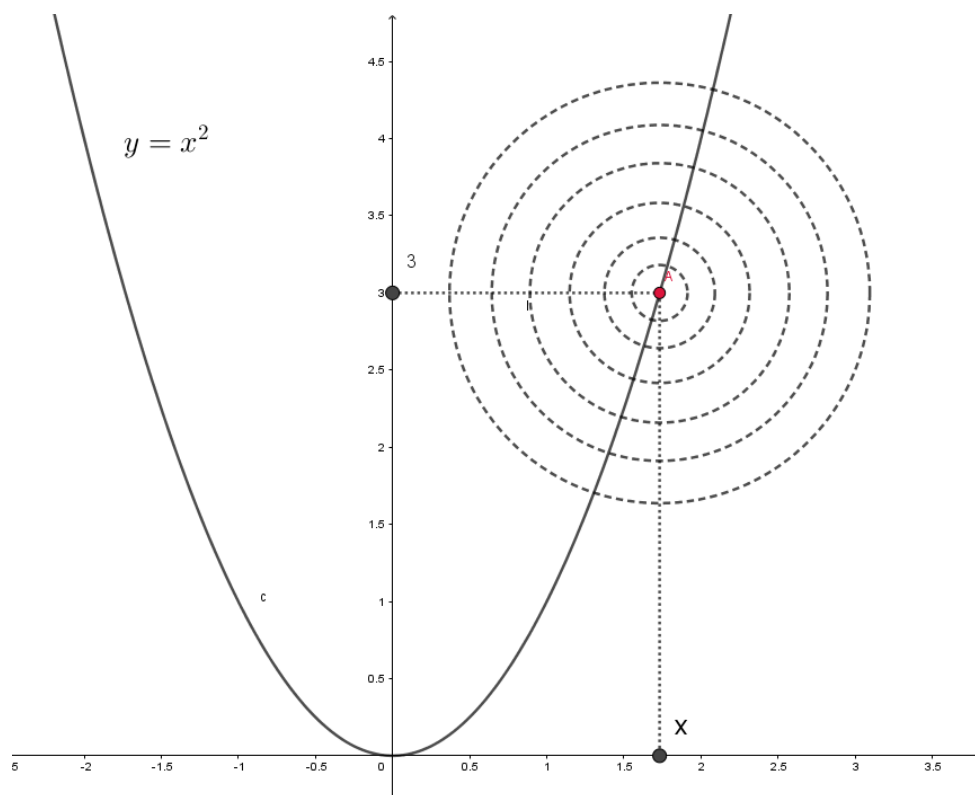


Figura 10. Entornos próximos al punto $(x, 3)$ en la función $y = x^2$.

La **Figura 10**, nos permite ilustrar la tendencia de la función al punto que deseamos especificar. Es decir, si nos centramos en el punto x (eje de las abscisas), vemos que $\lim_{n \rightarrow x^+} n^2 = \lim_{n \rightarrow x^-} n^2 = 3$, indicando que para un acercamiento a través de infinitos entornos al punto x , obtenemos a 3 como resultado.

Es decir que el número x puede ser entendido como el límite en el infinito de un conjunto de intervalos, en donde, como se ejemplifica en (12), puede dividirse en una sucesión creciente (límite lateral izquierdo de x), y una sucesión decreciente (límite lateral derecho de x).

3.1.4. Cuarta parte de la conferencia: Definición de número real.

Esta parte de la conferencia, esencialmente funciona como el establecimiento de la definición de número de Bachmann, en la cual, el autor realiza una comparación no muy descriptiva, con la definición de E. Heine.

Bachmann indica que con respecto a la justificación que de la parte anterior, es común pensar los números racionales como valores límites. Es por ello que presenta una serie de ejemplos, con sucesiones de variaciones positivas, esto es, como el caso de las sucesiones:

$$1, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{3^m}, \frac{1}{4^m}, \dots$$

$$-1, -\frac{1}{2^m}, -\frac{1}{3^m}, -\frac{1}{4^m}, \dots$$

En donde, si $m > 0$, se encuentra que el cero es el **límite común** de ambas sucesiones. Este tipo de planteamientos, son similares a la idea de convergencia en las sucesiones de Cauchy, sin embargo, ese estudio comparativo lo haremos más adelante.

Otro ejemplo que brinda el autor, para indicar un segundo aspecto importante de su perspectiva del concepto de número, es que esa noción de límite común, para él es muy familiar para nosotros. Tal es el caso del número:

0,123456789112233445566778899111222333444555666777888999

El cual, tiene un patrón de comportamiento en sus cifras decimales, como son, la repetición de los dígitos del 1 al 9, una vez, luego dos veces, y así sucesivamente. A simple vista la representación de tal valor, difícilmente podría realizarse por medio de un fraccionario, sin embargo, puede ser entendido, bajo el concepto de número de Bachmann, como el límite común de las dos siguientes sucesiones, que convergen entre sí:

0	1
0,1	0,2
0,12	0,13
0,123	0,124
...	...

Este planteamiento, que involucra en sí mismo conceptos matemáticos muy importantes como el de **límite, convergencia y continuidad**, puede ser resumido de la siguiente manera:

DEFINICIÓN I²⁰: (Número real de Bachmann) Sea z un conjunto de sucesiones de números racionales

$$(8) z = \left\{ \begin{matrix} a_1, & a_2, & a_3, & \dots & a_i & \dots \\ b_1, & b_2, & b_3, & \dots & b_i & \dots \end{matrix} \right\} = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$$

Tal que, si:

- I) a_i y b_i son números racionales
- II) a_i es una sucesión estrictamente creciente, es decir, $a_{i+1} > a_i$; y b_i es una sucesión estrictamente decreciente, es decir, $b_{i+1} < b_i$
- III) $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = b_i = z$

Podemos decir que, **z es un número real.**

Sin embargo, el índice III, muestra una expresión de la intuición que podría tenerse sobre el planteamiento de Bachmann; sin embargo, enunciar que tal límite existe, incluye de premeditado que el número real z existe. Lo cual, podría incurrir a un tipo de complicación teóricamente, pero que puede ser resuelto con el hecho, de que tanto Bachmann (1892) como Huang (1968) trabajan con sucesiones de Cauchy implícitamente. De esta manera, cambiaremos esa enunciación de la noción de acercamiento por límite, por la siguiente:

$$a_i - b_i = 0 \text{ Cuando } i \rightarrow \infty$$

Observación: La sucesión de intervalos racionales, nunca van a “tocar” a z , incluso si es un número racional; debido a que como especifica el índice II, el comportamiento de las sucesiones es estrictamente crecientes y decrecientes, es decir, la sucesión se aproxima tanto como desea al punto, pero no llega a ser él.

Esta definición, enmarcaría toda la esencia del planteamiento de Bachmann formalmente. Sin embargo, el mismo autor manifiesta que este planteamiento tiene dos implicaciones muy importantes:

- a. Las dos sucesiones, deben tener un límite común. Es decir, que ese límite debe existir para que ambas sucesiones converjan hacia él.

²⁰ Formulada de esta manera por el autor del presente trabajo de grado.

- b. Que ese límite se puede considerar como un número.

Estas implicaciones, enmarcan una característica del trabajo de Bachmann: No es el número quien determina a las sucesiones, sino que son ellas quienes garantizan la existencia del número. Esta idea, requiere ser estudiada con cuidado, porque el acercamiento se realiza a través de números racionales, pero ellos mismos existen porque, pueden determinarse sucesiones que converjan a ellos de la forma como Bachmann lo estipula. Es por eso, que el autor agrega un condicional para romper con esta cadena deductiva, y es que, cuando se hace referencia a un número racional, afirmamos que siempre permanece entre dos sucesiones a_i y b_i , y se entiende como el límite común de ambas sucesiones.

3.1.5. Quinta parte de la conferencia: Operaciones con números reales.

Bachmann en esta parte, está centrado esencialmente en vislumbrar la naturaleza del número real que ha definido, con respecto al sistema teórico en el cual se encuentra. En el sentido de que, la existencia que el autor atribuye no solo se remite a una forma de aproximación al número, sino que también va asociado a que debe ser operacionalizable. Cabe resaltar, que la definición que da Bachmann es general, él no asigna una etiqueta de real o imaginaria para su definición, sin embargo, teniendo en cuenta el procedimiento que desarrolla para estimar un rango de movilización de ese número (un intervalo en el cual se encuentra, a través de las sucesiones que establece), podemos afirmar con total seguridad que se refiere a un número real. Sin embargo, en su primera conferencia, él no especifica este aspecto, ya que él habla de número con mucha generalidad.

De esta manera, el propósito del autor es clarificar como se puede y se debe entender, desde su perspectiva, la extensión de la noción racional del concepto de número. En el cual, Bachmann menciona que el número racional es un caso especial de esa extensión numérica que se ha presentado, y hace alusión con ello, a una noción expandida del concepto de número. Y es que, claramente esa noción está dada por la variabilidad de dos sucesiones, que a través de unas condiciones fijas, convergen a ese límite común, que entendemos como número. Siendo esta idea, más general que la que comúnmente se presenta escolarmente, o incluso, la que normalmente es conocida. Esta noción, que moviliza los conceptos de

continuidad, límite y convergencia, no es tan simple como afirmar que, siendo $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ conjuntos disyuntos de $\mathbb{I}$, la unión de ambos, conforma el conjunto de los números reales.

Y por supuesto, esa idea compartida de la unión de los números racionales e irracionales, para obtener los números reales, es cierta. Sin embargo, esa linealidad surge por la necesidad de ir ampliando el dominio numérico para realizar operaciones que no se desarrollaban anteriormente. Y uno de estos aspectos, históricamente hablando, es el surgimiento de la irracionalidad.

Bachmann manifiesta un aspecto clave, que caracteriza su concepto de número, y es razonable en un sistema matemático. Teniendo dos elementos en el sistema, debe ser posible, por medio de determinadas reglas y propiedades, vincularlos con un tercer elemento, es decir, a otro perteneciente al sistema. Sin embargo, este enunciado (al menos en esta parte) lo aplica para establecer las operaciones de adición, sustracción y producto, entre dos números. Para ello, recordemos que aunque se habla de número real en general, los valores que componen las sucesiones son racionales. Y adicional a ello, el autor especifica que considera, que los valores que convergen unos a otros, son todos positivos²¹.

De esta manera, consideramos como un segundo número positivo:

$$\xi = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i, \dots) \\ (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_i, \dots)$$

O bien,

$$\xi = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix}$$

²¹ Entendemos que pese a esa restricción que realiza el autor, podemos emplear el método con números negativos, e incluso con el cero, según sea el caso.

En el cual, por convención, la primera sucesión es creciente, y la segunda decreciente. Bachmann establece las siguientes operaciones, entre este número y el z definido anteriormente:

$$(9) \begin{Bmatrix} a_1 + \alpha_1, a_2 + \alpha_2, a_3 + \alpha_3, \dots \\ b_1 + \beta_1, b_2 + \beta_2, b_3 + \beta_3, \dots \end{Bmatrix}$$

$$(10) \begin{Bmatrix} a_1 - \beta_1, a_2 + \beta_2, a_3 - \beta_3, \dots \\ b_1 - \alpha_1, b_2 - \alpha_2, b_3 - \alpha_3, \dots \end{Bmatrix}$$

$$(11) \begin{Bmatrix} a_1 \alpha_1, a_2 \alpha_2, a_3 \alpha_3, \dots \\ b_1 \beta_1, b_2 \beta_2, b_3 \beta_3, \dots \end{Bmatrix}$$

En las cuales, cada par de sucesiones correspondientes, convergen al mismo límite común. Por ejemplo, el caso (16), Bachmann explica que se desprende de las desigualdades características según las cuales:

$$b_i > b_{i+1} a_{i+1} > a_i$$

$$\beta_i > \beta_{i+1} \alpha_{i+1} > \alpha_i$$

Incluso también:

$$b_i \beta_i > b_{i+1} \beta_{i+1} a_{i+1} \alpha_{i+1} > a_i \alpha_i$$

Y, por definición, el valor numérico de $b_i - a_i$ y $\beta_i - \alpha_i$ se reduce significativamente, a cantidades muy pequeñas, con índice creciente i ; por lo tanto, de acuerdo al autor, con respecto a:

$$b_i \beta_i - a_i \alpha_i = b_i (\beta_i - \alpha_i) + \alpha_i (b_i - a_i)$$

Se puede establecer, lo mismo, debido a que $b_i \beta_i - a_i \alpha_i$, siempre está entre α_i y β_i , y a_1 y b_1 . Y por lo tanto, (16) converge entre sí.

De esta manera, Bachmann establece tres elementos nuevos en el sistema, dados por la suma, diferencia y producto de los dos números z, ξ :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} z \pm \xi = \begin{pmatrix} a_i \pm \alpha_i \\ b_i \pm \beta_i \end{pmatrix} \\ z \cdot \xi = \begin{pmatrix} a_i \cdot \alpha_i \\ b_i \cdot \beta_i \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

3.1.6. Sexta parte de la conferencia: Orden en los números reales.

Bachmann en esta parte, aunque no exhaustivamente, presenta su concepto de orden en los números reales, tal planteamiento reducido a la inquietud cómo saber cuándo, teniendo z y ξ , uno es mayor que el otro. Además de ello, el autor realiza una precisión, y es que no necesariamente ellos deben ser positivos. Bajo el planteamiento de que los valores racionales de las sucesiones, debían ser positivos, estamos restringiendo los números reales que podemos obtener; sin embargo, ya planteando de forma general este acercamiento, podemos aproximarnos a cualquier valor real a través de este método.

De esta manera, el autor explica que las definiciones explicitadas anteriormente, cumplen para números z y ξ son números racionales. Esto, debido a que si un número racional z se encuentra siempre entre a_i y b_i , hay otro ξ que siempre está entre α_i y β_i ; y podemos definir el conjunto de operaciones dadas en (17).

DEFINICIÓN II (Orden de los números reales de Bachmann): Si consideramos la diferencia:

$$z - \xi = \begin{pmatrix} a_i - \beta_i \\ b_i - \alpha_i \end{pmatrix}$$

De las desigualdades dadas a continuación, podemos inferir tres casos posibles:

$$b_i - \alpha_i > b_{i+1} - \alpha_{i+1} > a_{i+1} - \beta_{i+1} > a_i - \beta_i$$

- a. Si $b_i - \alpha_i < 0$ para mínimo un valor específico del índice i , también lo es para todos los valores mayores de él. Si además, también $\alpha_i - \beta_i < 0$, entonces todos los

números racionales de las dos sucesiones de números son negativos, desde un cierto punto, y por lo tanto z debe ser considerado como un número negativo, y llamamos $z < \xi$. Esto es, z es negativo, si ambas sucesiones que lo componen, están conformadas por números negativos.

- b. Si $b_i - a_i > 0$ para todo valor i ; y a la vez, $a_i - \beta_i > 0$ desde cierto valor del índice i , tendremos que considerar $z - \xi$ como un número positivo, y lo llamamos $z > \xi$.
- c. Si tenemos dos sucesiones de números, una serie creciente conformada por números negativos, y una serie decreciente conformada de números positivos, y que la diferencia entre los valores racionales que las constituyen se reduce cada vez más, hasta un valor muy pequeño; el límite común de las dos sucesiones de números, será cero, es decir, tenemos $z - \xi = 0$, o lo que es equivalente, los dos números z, ξ son iguales entre sí: $z = \xi$.

3.1.7. Séptima parte de la conferencia: Inversos multiplicativos.

Bachmann, en esta penúltima parte de su conferencia, se enfoca en definir el cociente entre dos números reales. Teniendo en cuenta la definición de orden, consideramos que ξ es diferente de cero; de tal manera que los números α_i, β_i , se supone que son positivos, y su valor no disminuye infinitamente a valores muy pequeños, con índice i creciente. Por lo tanto, permanecen siempre mayores, de cierto número definible γ . Así, el autor define el cociente por la igualdad:

$$(13) \quad \frac{z}{\xi} = \left(\begin{array}{c} \frac{a_i}{\beta_i} \\ \frac{b_i}{\alpha_i} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{a_1}{\beta_1}, \frac{a_2}{\beta_2}, \frac{a_3}{\beta_3} \\ \frac{b_1}{\alpha_1}, \frac{b_2}{\alpha_2}, \frac{b_3}{\alpha_3}, \dots \end{array} \right)$$

Bachmann demuestra que ambas sucesiones convergen entre sí. Partiendo de que, como en las otras tres operaciones definidas, los valores que componen las sucesiones son racionales, tenemos que:

- a. Si $b_i > \alpha_i, \beta_i > \alpha_i$, entonces $\frac{1}{\alpha_i} > \frac{1}{\beta_i}$ y también $\frac{b_i}{\alpha_i} > \frac{a_i}{\beta_i}$

- b. Si $b_{i+1} < b_i$, $\alpha_{i+1} > \alpha_i$, entonces $\frac{1}{\alpha_{i+1}} < \frac{1}{\alpha_i}$, es, que $\frac{b_{i+1}}{\alpha_{i+1}} < \frac{b_i}{\alpha_i}$, teniendo una sucesión decreciente.
- c. Porque $\alpha_{i+1} > \alpha_i$, $\beta_{i+1} < \beta_i$ y además, $\frac{1}{\beta_{i+1}} > \frac{1}{\beta_i}$ es, que $\frac{\alpha_{i+1}}{\beta_{i+1}} > \frac{\alpha_i}{\beta_i}$, es una sucesión creciente.
- d. Y finalmente, la diferencia entre dos miembros correspondientes

$$\frac{b_i}{\alpha_i} - \frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{b_i\beta_i - \alpha_i\alpha_i}{\alpha_i\beta_i}$$

a medida que el índice i aumenta, el valor de la diferencia decrece infinitamente a valores muy pequeños; ya que, el autor menciona que el denominador siempre es mayor que γ^2 , mientras que el numerador, como se ha mostrado anteriormente, converge a cero.

3.1.8. Octava parte de la conferencia: Propiedades adicionales.

Finalmente, esta parte corresponde a una ejemplificación que brinda Bachmann, sobre como ciertas reglas del cálculo se cumplen, habiendo establecido las cuatro operaciones básicas aritméticamente de los números reales, de forma válida. Y concluyendo, que tras definir el concepto de número real mediante sucesiones de números racionales que convergen entre sí, como su límite común; afirmar que el número es racional solo en casos especiales, y que se llama irracional en los casos restantes; en donde, los números racionales e irracionales, que ha sido presentado desde la perspectiva de Bachmann, juntos forman el dominio de todos los números reales.

Así, Bachmann muestra, para un número:

$$\zeta = \left(\begin{matrix} a_i \\ b_i \end{matrix} \right),$$

donde a_i, b_i son los miembros correspondientes de la serie creciente y decreciente, que el conocido teorema de la multiplicación se cumple:

$$(z \pm \xi) * \zeta = z\zeta \pm \xi\zeta$$

Con esta idea, Bachmann muestra que la terna $(\tau, +, *)$ adopta una estructura de cuerpo; al indicar que las operaciones de suma y producto se pueden efectuar, cumpliendo las propiedades asociativas, conmutativas, distributiva de la multiplicación con respecto a la adición; garantizando la existencia también de los elementos inversos, tales como el aditivo y el multiplicativo. Concluyendo, que tal terna no se comporta como un anillo solamente, sino que, en su generalidad, es un cuerpo.

De esta forma, Bachmann finaliza su primera conferencia, en donde explicita que su interés era mostrar cómo los números irracionales deben definirse con precisión y establecer científicamente su carácter como números. Y relaciona lo desarrollado con el problema inicial, donde los números irracionales introducidos a través de la ecuación $h^2 = 13$, la hacen resoluble. Porque si h representa dos sucesiones de números que convergen entre sí, entonces la definición dada del producto, indica que h^2 es el valor correspondiente a las dos sucesiones formadas por los cuadrados de los números en las sucesiones determinadas por h , que convergen entre sí, y se entiende como su límite común.

CAPÍTULO IV.

4. RECONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS REALES DE BACHMANN A TRAVÉS DEL ANÁLISIS INTERVALAR.

Una vez estudiado con mayor detalle el planteamiento de Bachmann, es importante resaltar que tiene una trascendencia matemática, presentando muchas nociones que hoy en día conocemos con mayor rigurosidad. Sin embargo, el propósito de esta investigación, es colocar tal planteamiento en una reconstrucción de los números reales, que lo establezca como un objeto matemático propiamente, y no solamente como el resultado de un método de acercamiento, el cual *intuimos* que existe en ese conjunto.

Para esta construcción, utilizaremos como nuestro elemento base, los intervalos encajados anidados, los cuales se definen de la siguiente forma, bajo el marco teórico de (Huang, 1968):

Definición (Huang, 1968): Definimos $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ como una sucesión de intervalos racionales cerrados anidados si

- (1) a_n y b_n son números racionales.
- (2) $a_n \leq b_n$ para todo n en N
- (3) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ para todo n en N
- (4) $L(a_n - b_n) = 0$, donde L representa $\lim_{n \rightarrow \infty}$

La definición de número real de Bachmann, y la definición de Huang, nos limitan, en primera instancia, a no trabajar con todo el plano real, sino que nos restringen el dominio sobre el cual establecemos el acercamiento a nuestro límite común. Debido a que, las sucesiones crecientes y decrecientes, que convergen a nuestro número real, son conformadas con valores mayores y menores a él, respectivamente.

Sea el caso de la convergencia de la sucesión $1 \pm \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}$. Esta sucesión converge a 1, cuando $n \rightarrow +\infty$, y es que la sucesión creciente:

$$1 + \frac{1}{n} > 1$$

Mientras que la sucesión decreciente:

$$1 - \frac{1}{n} < 1$$

Estas dos sucesiones, son *sucesiones racionales fundamentales*, las cuales limitan el dominio en el cual se movilizan los valores próximos a 1; son llamadas así, debido a que (Huang, 1968) en su trabajo, adopta las sucesiones como sucesiones de Cauchy, sin mencionar este hecho de manera explícita. Lo cual favorece la organización esquemática de su teoría, debido a que convenientemente funciona sin contradicciones.

Y esto, toma una relevancia muy significativa en nuestra reconstrucción, ya que vamos a realizar la siguiente convención:

- a. A cada valor constituyente de la sucesión racional decreciente, se le va a asignar una posición en el eje de las abscisas.

- b. A cada valor constituyente de la sucesión racional creciente, se le va a asignar una posición en el eje de las ordenadas.

Lo anterior nos permite inferir, que el punto límite común de ambas sucesiones, que convergen entre sí, adopta un orden de acuerdo al eje que se considera en el plano, debido a que, para la sucesión racional decreciente: a_i , ocurre que con respecto a ese límite z , $a_i < z$. Mientras que, para los valores de la sucesión racional creciente b_i , ocurre que $b_i > z$, para un índice i creciente.

Sin embargo, esta caracterización nos ilustra que en el plano racional, nuestro límite común es de la forma (z, z) , en donde, gracias al planteamiento de Bachmann, conocemos que si las entradas z son racionales, el punto está incluido en el plano, debido a que existe como límite común alcanzable en la recta real, ya que los racionales están definidos fundamentalmente. Sin embargo, si la entrada z no es racional, esa coordenada constituye un *hueco* en el plano racional, o bien, una *singularidad*.

El acercamiento a este par ordenado (z, z) puede realizarse de múltiples maneras, mientras que se trabaje con el dominio restringido por las dos condiciones explicitadas anteriormente, donde nuestro dominio particular, queda determinado por el semiplano:

$$\mathcal{T} = \{(a, b): a < z, b > z\}$$

Es por ello, que vamos a centrar nuestra atención a continuación, en estudiar las formas de acercamiento a esa coordenada, la cual no se hace de una sola manera; al quedar establecido el semiplano τ , podemos ver que todo punto que esté contenido en él, cumple las condiciones estipuladas por Bachmann para aproximarse a un número real. Sin embargo, eso no implica, que necesariamente debe haber un patrón de variabilidad entre los intervalos, debido a que cada uno de ellos hace parte de la misma familia de intervalos encajados.

Dicho esto, ilustremos algunas curvas que pueden funcionar en el acercamiento a punto cualquiera, en este caso, $(4,4)$. Tales curvas, no necesariamente deben ser funciones continuas, y más impresionante, no requieren ser funciones. Sin embargo, es pertinente tomar el caso en el que los gráficos representen funciones, para el tratamiento algebraico y analítico de ellas. Algunos ejemplos de acercamientos inusuales pueden ser a través de puntos no

conectados, funciones periódicas, conexiones de semicircunferencias, y otras formas de acercamiento que puedan ser imaginadas:

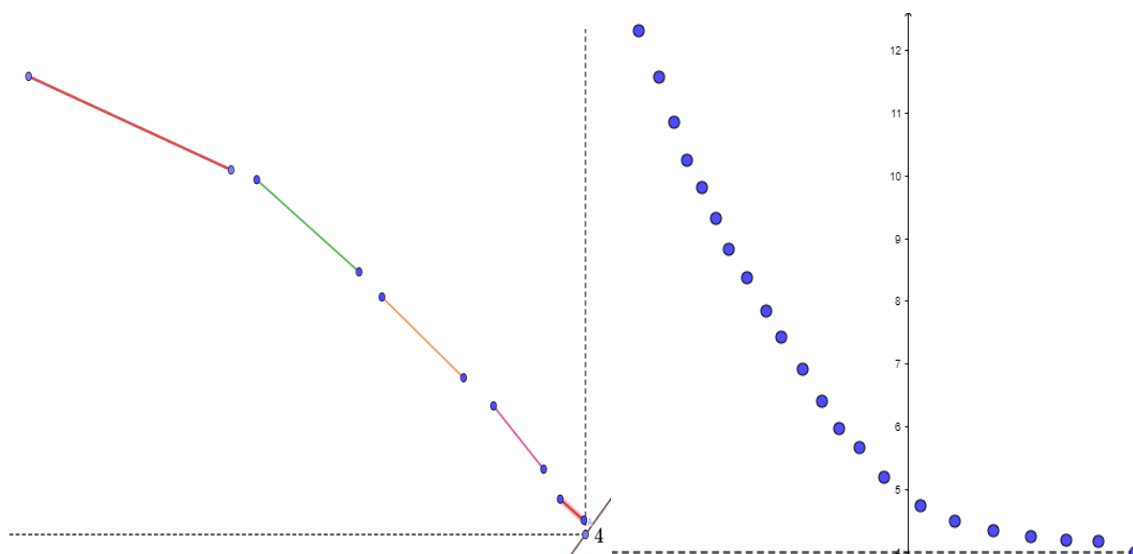


Figura 11. Diferentes formas de acercamiento a un punto específico del plano racional.

Lo que poseen en común todas las gráficas mostradas en la **Figura 11**, es que todas denotan un decrecimiento, y que todas se aproximan al mismo punto en común. Esta es una manera práctica de observar el planteamiento que Bachmann realizó, debido a que realizamos un cambio en la forma de representación, pasando del trabajo en la recta real, a hacerlo en un plano con múltiples elementos manipulables. Sin embargo, debemos resaltar la complejidad de este asunto, debido a que ciertas representaciones pueden facilitar mejor la aproximación a una coordenada específica. Más aún, no necesariamente toda curva debe tener una expresión que permita identificar características propias de ella, de manera analítica; lo que puede dificultar un estudio completo con el objetivo de comprender la naturaleza de un número real. Es por ello, que a continuación se mostrará, de qué forma una representación como las rectas, pueden ayudarnos en esta tarea y ser representativas para todas las curvas posibles que se acercan al mismo punto.

En concordancia con el problema planteado por Bachmann con respecto a la resolución de la ecuación $h^2 = 13$ en los números racionales, consideremos la función $f(x) = x$, tal que las coordenadas que corresponden al gráfico de la función, son de la forma $x \equiv (x, x)$. Para nuestro abordaje en este apartado, vamos a considerar solamente un valor específico, en este caso, aquel valor h que satisface la ecuación $h^2 = 13$. De tal manera que, ese valor específico

se encuentra incluido en infinitos intervalos cerrados. Tales intervalos, como se indicó, pertenecen a un semiplano que genera la coordenada (h, h) , que siendo constituida por entradas racionales o irracionales, se ubica en la función $f(x) = x$.

Si asociamos el extremo izquierdo de cada uno de los intervalos que contiene a h , a una componente x del eje de las abscisas en el plano racional, y asociamos el extremo derecho de cada intervalo a una componente y del eje de las ordenadas; cada intervalo puede ser representado como una coordenada específica en un semiplano de la forma:

$$\mathcal{T}' = \{(a, b): a < h, b > h\}$$

Nuestro objetivo es plantear una aproximación a h , con un conjunto infinito de intervalos en $\mathcal{T}'$, que posean una regularidad en su comportamiento, es decir, que describan el gráfico de una función algebraica o trascendente. Es por ello, que a continuación vamos a considerar familias de conjuntos de pares ordenados, que cumplan dicha característica, para tratar de hacer un contraste entre ellas, para establecer un criterio de equivalencia.

4.1. Estudio de la familia de pares ordenados del gráfico de $f(x) = ax + b$

Para esta sección, vamos a suponer que el valor h que satisface la ecuación $h^2 = C$, es conocido, de tal manera que $h \notin \mathbb{Q}$. Por conocimiento ya probado, conocemos que $h = \pm\sqrt{C}$, sin embargo, como el problema de partida es asociado a distancias, vamos a restringirnos a trabajar con $h = \sqrt{C}$. Vamos a considerar el conjunto de pares ordenados que se obtienen de la función $f(x) = x$, de tal forma que $f(\sqrt{C}) = \sqrt{C}$ esté incluido en ese conjunto. Esta función está definida en la región R racional, dada por $a_i < \sqrt{C} < b_i$, la cual será nuestro semiplano $\mathcal{T}'$. El valor $\sqrt{C}$, puede ser un número racional, o un número irracional; de tal manera que para nuestro estudio, consideraremos estos dos casos.

Dadas estas condiciones, encontramos que existen infinitas rectas que describen funciones lineales con esas condiciones. Nuestro interés está centrado ahora, en fijar un criterio de selección, que nos oriente en la escogencia de una recta que se aproxime tanto como deseemos, al punto $(\sqrt{C}, \sqrt{C})$, para el caso donde las entradas representan valores racionales o irracionales, dentro de una amplia gama de opciones que de antemano conocemos que existen. Justamente se escoge las rectas para el desarrollo de este método, debido a que existe

una sencillez más intuitiva en el tratamiento de las rectas tanto en un sistema geométrico, como en un sistema algebraico, debido a que la variación de los parámetros para encontrar el acercamiento más eficiente, se remite al trabajo con el punto y la pendiente de la recta. Mientras que, en otros casos, como en las parábolas, el trabajo debe ser ampliado a la concavidad, simetría de la gráfica, ubicación del vértice, etc. Y el acercamiento será más complicado, debido a los elementos inmersos en el concepto de función cuadrática. De esta forma, podemos ver que, para otras funciones particulares, como las racionales y exponenciales, ocurre una particularidad similar.

Es por lo anterior, que nuestro objetivo es fijar la representación de un número real, por medio de una recta. Debido a que se pretende asociar un practicismo a esta representación, ya que, gracias a ella, puedo decidir con un nivel de significancia y eficiencia lo suficientemente buena, qué tan aproximada está la representación generada, del número real en sí que simboliza. Todo esto, sin descuidar la naturaleza estructural que posee el conjunto de los números reales. Justamente esta idea es la que permea todo el trabajo que realizó Bachmann en su primera conferencia, ya que su elaboración es práctica, y no formal; él busca hacer un planteamiento didáctico, sin realizar una construcción propiamente del conjunto de los números reales. Sin embargo, en ningún momento descuida esa naturaleza estructural del concepto, mostrando su organización como cuerpo completo, sus operaciones y su orden.

De esta manera, procedemos a explicar un método para escoger esa recta: *Sea el punto (a, a) , tal que ocurre que $a \in \mathbb{Q}$ o $a \notin \mathbb{Q}$, y sea $Q(\alpha, \beta)$ un punto de coordenadas enteras. Ilustramos rectas utilizando dos puntos de coordenadas enteras, tal que uno de ellos es Q , de tal manera, que al evaluar valores cercanos cercano a “ a ” en el eje de las abscisas, el valor de la imagen en la recta más próxima que pueda ser generada, se acerque a “ a ” también.* Estudiaremos el método mencionado a continuación:

4.1.1. Representación de un número racional.

Vamos a definir, por medio de familia de intervalos encajados, el número racional $\frac{1}{2}$, el cual según nuestra convención, está dado por la coordenada en el plano $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Esta coordenada, en la recta real, está dada por $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, es decir, que si está incluido como un intervalo encajado, debido a que ya está definido por ser un número racional.

Nuestro trabajo a continuación, es definir $\mathcal{T}'$, determinado por todos los valores $x < \frac{1}{2}$ e $y > \frac{1}{2}$. Una vez realizado esto, vamos a tratar de aproximarnos lo mejor posible a la coordenada $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, a través de funciones lineales, que puedan ser determinadas a través de dos puntos constituidos por **entradas enteras**, teniendo en cuenta que las rectas deben ser decrecientes.

El proceso de selección de las dos coordenadas enteras, se hace con el fin de garantizar el mayor acercamiento posible a nuestro punto A, en el cual, nuestro interés principalmente, es que al evaluar en nuestras funciones lineales $x = \frac{1}{2}$, el valor de salida, es decir, su imagen, se acerque lo mayor posible a $y = \frac{1}{2}$, o en este caso, al ser las cantidades racionales, pueda pasar directamente por el punto A. Por lo tanto, tomemos el punto $B = (1,2)$ como punto inicial. Generamos diferentes rectas, que incluyan a B y otro punto de coordenadas enteras, con el fin de que se acerquen a A.

Tabla 1. Rectas generadas con B y otros puntos de coordenadas enteras.

<i>No.</i>	<i>Puntos de referencia</i>	<i>Ecuación de la recta</i>	<i>Imagen de $x = \frac{1}{2}$</i>
1	$(0,2) - (-1,6)$	$y_{1/2} = -4x + 2$	$y_{1/2} = 0$
2	$(0,2) - (-1,5)$	$y_{1/2} = -3x + 2$	$y_{1/2} = \frac{1}{2}$
3	$(0,2) - (-1,4)$	$y_{1/2} = -2x + 2$	$y_{1/2} = 1$

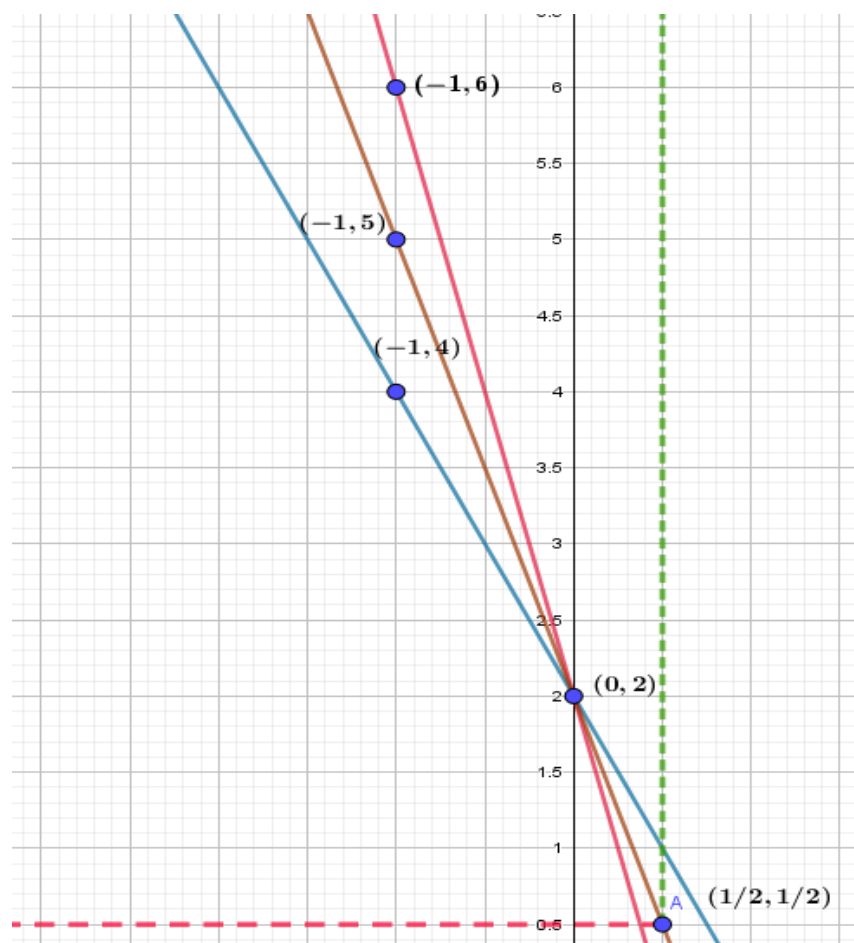


Figura 12. Rectas de la **Tabla 1**, próximas a A. $y_{1/2} = -4x + 2$ (color fucsia); $y_{1/2} = -3x + 2$ (color café); $y_{1/2} = -2x + 2$ (color azul).

Las rectas indicadas en la **Tabla 1**, se ilustran en la **Figura 12**. Podemos analizar, que la recta que mejor acercamiento, geométricamente hablando, tiene con respecto al punto A, es la recta $y_{1/2} = -3x + 2$. Por supuesto, al reemplazar $x = 1/2$ en esta ecuación, obtenemos como valor de salida $y_2 = \frac{1}{2}$. Lo que nos muestra, que al considerar el punto (C,C) con coordenadas racionales, teóricamente podemos encontrar una recta que lo incluya. Sin embargo, también podemos ver que otras rectas, también se acercan, pero tienen un margen de error con respecto a la variable dependiente, ya que éste, difiere del valor necesitado, por 0,5 (para el caso de las otras dos rectas en la **Tabla 1**).

4.1.2. Representación de un número irracional: El caso de e

Para el caso de los números irracionales, vamos a ver cómo representar a e como ejemplo. Este número, de relevancia para todo el campo de las matemáticas, ocupa en este apartado, una singularidad o “*hueco*” en nuestro plano racional.

Así como en el caso anterior, vamos a ubicar en el plano aquel punto de coordenadas (e, e) , el cual, representará un hueco en la recta $y = x$. Ubicando puntos de coordenadas enteras, vamos a usar funciones lineales, para formular una aproximación de e , que se acerque a esa representación decimal que conocemos en la actualidad. Cabe resaltar que, siendo un número no periódico infinito, siempre podemos mejorar la aproximación a él, pero al ser un proceso infinito, nunca vamos a tomar una recta, teóricamente, que pase exactamente por el punto (e, e) . Así, en la siguiente tabla, se presentan dos casos:

Tabla 2. Formulación de rectas que se aproximen a e .

No.	Puntos de referencia	Ecuación de la recta	Imagen de $x = 2$	Imagen de $x = 2,7$	Imagen de $x = 2,718$
1	$(-3,10); (1,5)$	$y_1 = -1,25x + 6,25$	$y_1 = 3,75$	$y_1 = 2,875$	$y_1 = 2,8525$
2	$(-3,7); (1,4)$	$y_2 = -0,75x + 4,75$	$y_2 = 3,25$	$y_2 = 2,725$	$y_2 = 2,7115$

Notemos que al comenzar a aumentar los decimales en el valor asignado para la variable x , de acuerdo al valor conocido de e , la cercanía es mayor. Además de eso, la incertidumbre disminuye al comparar las imágenes en las rectas, siendo la recta no. 2 más próxima a e . Aunque no encontramos una linealidad en la exactitud con la que la recta no. 2 se aproxima a e , podemos ver que los resultados numéricamente hablando, si concuerdan con el acercamiento gráfico que podemos observar geométricamente.

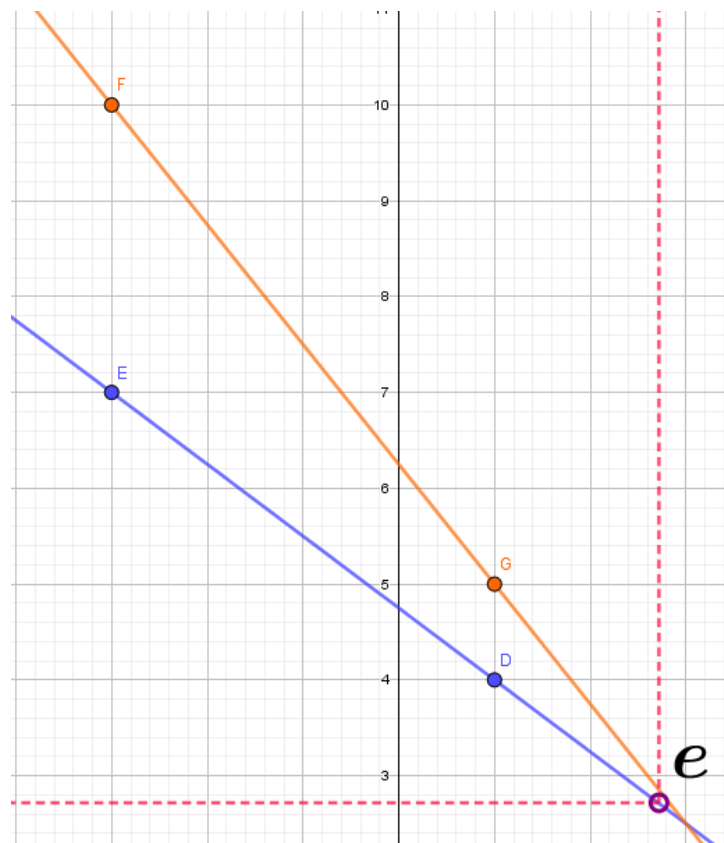


Figura 13. Representación de las rectas inscritas en la **Tabla 2**. Donde la recta naranja es y_1 ; la recta azul es y_2 .

Recordemos que e puede interpretarse como la unión de las cortaduras formadas por $(-\infty, (1 + \frac{1}{n})^n)$, para $n \rightarrow \infty$, con n natural. Una muestra de que, siendo un número irracional, este valor puede ser hallado como el **límite** de sucesiones racionales. Una idea importante para las reflexiones que realizaremos a posteriori, muy conectado al concepto de número real.

4.2. Estudio de la familia de pares ordenados del gráfico de funciones cuadráticas, exponenciales, racionales con respecto a funciones de la forma $f(x) = ax + b$.

En esta sección, trabajaremos con $\sqrt{3}$, para ejemplificar el caso de $(\sqrt{C}, \sqrt{C})$, donde $\sqrt{C}$ es irracional; ya que nos compete conocer de qué manera podemos aproximarnos a los puntos de esa forma, por medio de otras funciones que no sean lineales, y de qué manera podemos afirmar que tales curvas son equivalentes al conjunto de rectas que se aproximan a esos

puntos. Sean las parábolas $f(x) = (x - 1.73)^2 + 1.73$ y $g(x) = 0.5(x - 1.73)^2 + 1.73$, restringida a τ' .

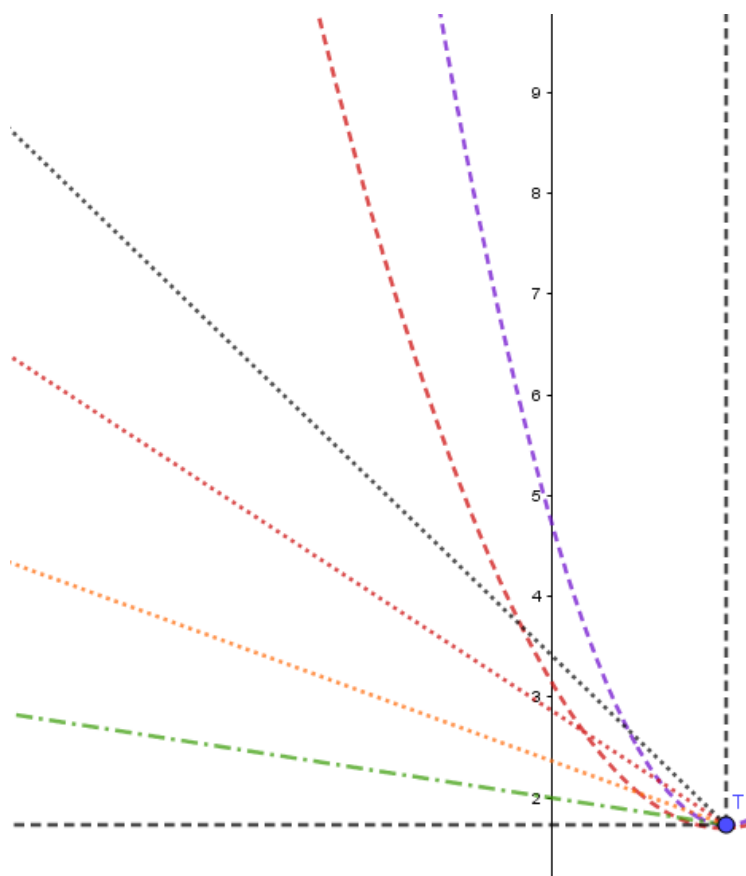


Figura 14. Representación de la parábola $y = (x - 1.73)^2 + 1.73$ (color violeta) y $y = 0.5(x - 1.73)^2 + 1.73$ (color rojo); en contraste con las rectas ilustradas en la **Figura 12**.

Es importante mencionar en contraste con las rectas, que las funciones cuadráticas ilustradas son decrecientes; y su cercanía al punto irracional es en efecto, muy eficiente. Si aplicamos el criterio $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} [a_i, b_i] - [\alpha_j, \beta_j] \approx [0, 0]$, encontramos que efectivamente, al comparar cada una de las rectas ilustradas en la imagen, con las semiparábolas, e incluso, estas últimas entre sí, encontramos que efectivamente es válido el criterio.

Por otro lado, tenemos que la función $f(x) = a^x$ está constituido por un número real positivo a , tal que se excluye el caso cuando $a = 1$. Sin embargo, x puede ser cualquier real. En nuestro estudio, vamos a considerar dos casos particulares para ilustrar que se cumple de forma general, bajo estas condiciones, la equivalencia de la familia de funciones exponenciales con la familia de rectas.

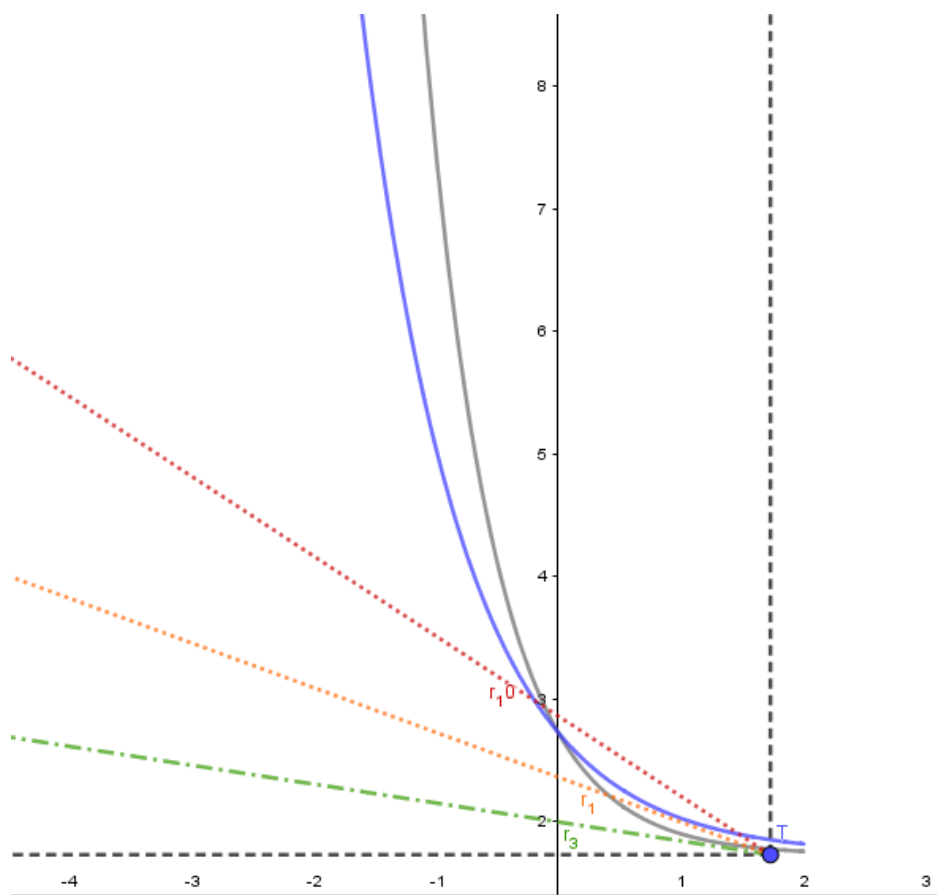


Figura 15. Representación de las funciones $y = 0.173^x + 1.73$ (color gris) y $y = 0.3^x + 1.7$ (color azul); en contraste con las rectas ilustradas en la **Figura 12**.

Como vemos en la **Figura 13**, las funciones $y = 0.173^x + 1.73$ y $y = 0.3^x + 1.7$ son monótonamente decrecientes, y están definidas en τ' . Como podemos observar, la aproximación que brinda la función ilustrada de color azul es menos precisa que la brindada de color gris. Esto se adecúa por medio de los parámetros que describen cada función. La gráfica de las funciones exponenciales, son similares a las funciones cuadráticas con las cuales trabajamos anteriormente; por lo cual, podemos afirmar que la congruencia entre ambas familias de funciones, es dada por medio del criterio (1). Así mismo, por propiedad de transitividad, podemos afirmar que la familia de funciones exponenciales, es equivalente con la familia de funciones lineales. Lo cual ocurre de igual manera con la función $y = -(x + 1.73)^3 + 1.73$, trazada en la **Figura 14**.

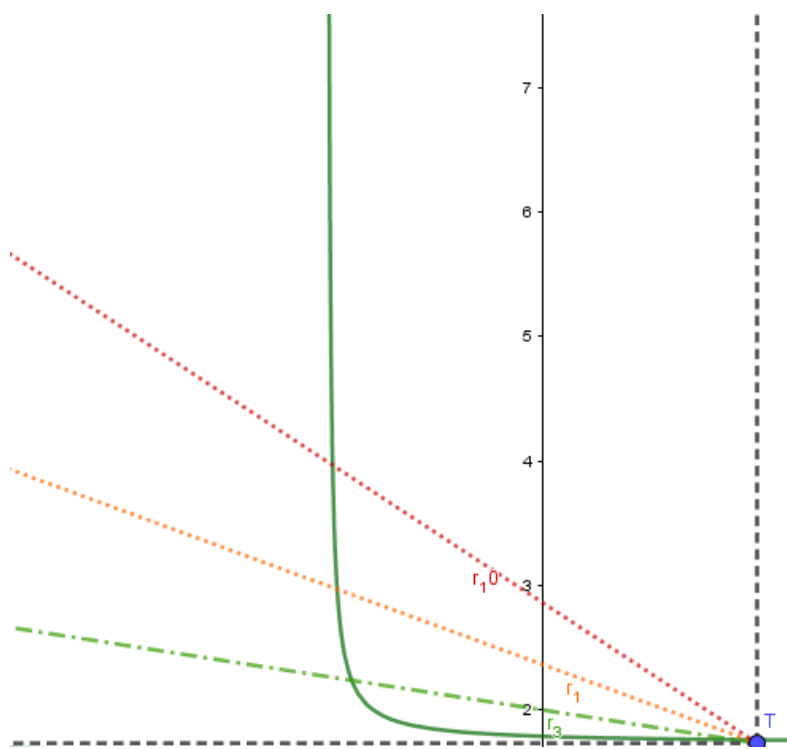


Figura 16. Representación de la función $y = \frac{0.1}{x+1.73} + 1.73$ (color verde).

Como ya comprobamos, las funciones cuadráticas, exponenciales y racionales atribuyen una utilidad de aproximación al punto $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$; y por medio del criterio (1) hemos verificado que son congruentes en este tipo de objetivo, a las funciones lineales. Es por ello, que no es necesario detallar de forma rigurosa cada una, cuando el criterio nos vincula directamente cada familia entre sí.

Dicho esto, planteamos como curvas representativas de nuestra reconstrucción, a la familia de funciones lineales que se aproximan al punto $(\sqrt{C}, \sqrt{C})$, para los casos racionales e irracionales. Sin resaltar, que existen muchas formas de aproximación geométricamente, pero por el contraste estudiado, nuestra escogencia será esa. De esta manera, centraremos nuestra atención a continuación, en detallar las operaciones básicas entre números reales, así como algunas propiedades.

4.2.1. Definición de la suma, resta y producto de números reales.

Una vez estipulado la forma como entendemos el “número” en nuestra reconstrucción, vamos a indicar, como sistema teórico se entiende, operaciones elementales que permitan obtener

nuevos elementos dentro de él. Cada elemento dentro de tal sistema, está relacionado, y cumple las condiciones mencionadas anteriormente.

En aritmética, entendemos la suma de números reales, como una adición de cantidades; y bien, intuitivamente se puede pensar, que considerándolos como funciones lineales, o bien, rectas en el plano, sumar dos reales correspondería a sumar sus rectas representativas. Sin embargo, tal idea incurre a un error, debido a que no necesariamente sumar dos rectas, equivale a obtener otra que pertenezca al semiplano $\mathcal{T} = \{(x, y): x < a + b, y > a + b\}$ siendo $a + b$ el número real resultante de sumar a y b reales. Y así mismo, ocurre con la resta y producto. Esa idea de trasladar las rectas, realmente no corresponde a la idea de operar que podemos pensar por aspectos geométricos cuando trasladamos parábolas, y otro tipo de gráficos de funciones.

Dicho esto, ¿de qué manera debemos entender la suma, resta y producto de números reales en esta reconstrucción? La respuesta se encuentra, en la misma definición de número real.

DEFINICIÓN DE SUMA, RESTA Y PRODUCTO: Sean las rectas y_a y y_b , representativas de los números reales a y b respectivamente. Entendemos la operación binaria $\circ$ entre ambos, como el resultado de combinar dos puntos pertenecientes a cada recta, de tal forma que pueda generarse la recta representativa de $y_{a \circ b}$, de tal forma que los dos puntos de referencia, pertenece al semiplano

$$\mathcal{T} = \{(x, y): x < a \circ b, y > a \circ b\}$$

Básicamente esta idea indica, que el resultado, es una recta representativa, que incluso, no es única. Como hemos mencionado antes, el acercamiento a un punto en el plano se puede realizar de muchas formas, y que varía de acuerdo a los puntos de referencia que consideremos; sin embargo, en este caso, se delimita a tales puntos, como pertenecientes a las rectas representativas que van a utilizarse para generar una nueva. Es decir, una selección conveniente para aproximarnos tanto como deseemos al resultado de la operación en cuestión.

Observemos cómo funciona este método:

Caso # 1: Consideremos la suma $\frac{1}{2} + 3$. Teniendo en cuenta que la recta representativa de $\frac{1}{2}$ es $y_{1/2} = -x + 1$, y la recta representativa de 3 es $y_3 = -x + 6$; entendemos la suma, como la selección de un punto de cada recta, que en conjunto, puedan generar una nueva recta, que se acerque óptimamente a 3.5, de tal forma que tales puntos escogidos, se encuentren en el plano:

$$\mathcal{T} = \{(x, y): x < 3.5, y > 3.5\}$$

De esta manera, compilamos los datos en la siguiente tabla:

Tabla 3. Formulación de la recta representativa de $\frac{1}{2} + 3$

Punto escogido de $y_{1/2}$ (Color azul)	Punto escogido de y_3 (Color verde)	Recta $y_{3.5}$ generada (Color fucsia)
$(-16.97, 17.97)$	$(0, 6)$	$y_{3.5} = -0,71x + 6$

Y lo representamos gráficamente de la siguiente manera:

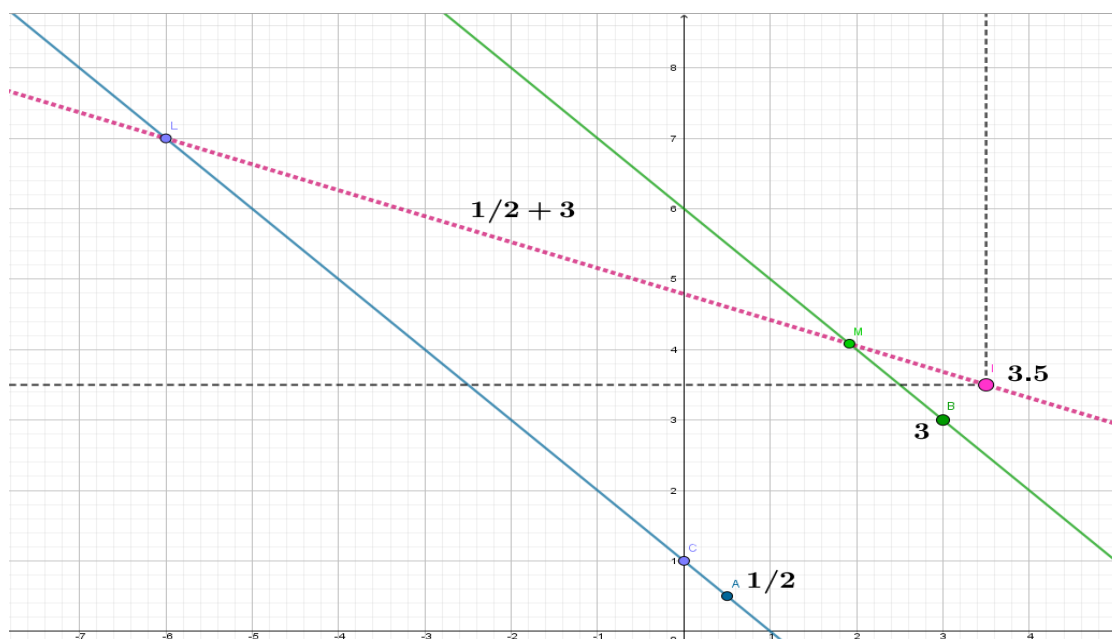


Figura 17. Recta representativa de la suma $\frac{1}{2} + 3$ (color fucsia).

Caso # 2: Consideremos $-3 - 5$. Teniendo en cuenta que la recta representativa de -3 es $y_{-3} = -1,67x - 8$, y la recta representativa de -5 es $y_{-5} = -x - 10$; realizamos la selección de un punto de cada recta, que en conjunto, puedan generar una nueva recta, que se acerque óptimamente a -8 , de tal forma que tales puntos escogidos, se encuentren en el plano:

$$\mathcal{T} = \{(x, y): x < -8, y > -8\}$$

De esta manera, compilamos los datos en la siguiente tabla:

Tabla 4. Formulación de la recta representativa de $-3 - 5$

Punto escogido de y_{-3} (Color fucsia)	Punto escogido de y_{-5} (Color fucsia)	Recta y_{-8} generada (Color café)
$(-14.36, 15.93)$	$(-10.17, 0.17)$	$y_{-8} = -3,76x - 38,11$

Y lo representamos gráficamente de la siguiente manera:

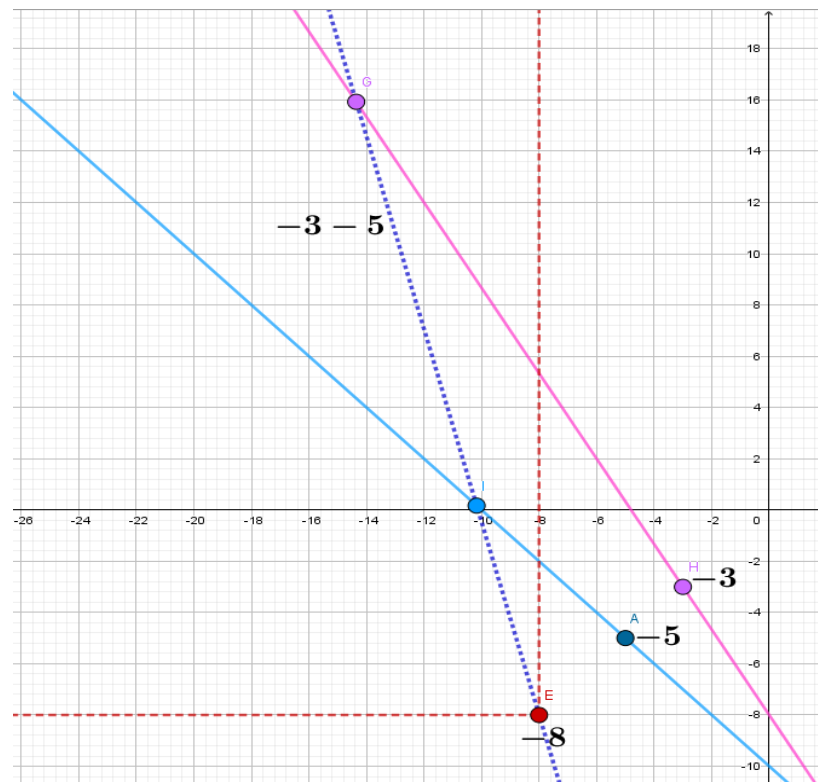


Figura 18. Recta representativa de $-3 - 5$ (color morado).

Caso # 3: Consideremos el producto $3 * (-1)$. Teniendo en cuenta que la recta representativa de 3 es $y_3 = -x + 6$, y la recta representativa de -1 es $y_{-1} = -x - 2$; realizamos la selección de un punto de cada recta, que en conjunto, puedan generar una nueva recta, que se acerque óptimamente a -3 , de tal forma que tales puntos escogidos, se encuentren en el plano:

$$\mathcal{T} = \{(x, y): x < -3, y > -3\}$$

De esta manera, compilamos los datos en la siguiente tabla:

Tabla 5. Formulación de la recta representativa de $3 * (-1)$.

Punto escogido de y_3 (Color verde)	Punto escogido de y_{-1} (Color azul)	Recta y_{-3} generada (Color café)
$(-10, 16)$	$(-5.33, 3.33)$	$y_{-3} = -2,71x - 11,14$

Y lo representamos gráficamente de la siguiente manera:

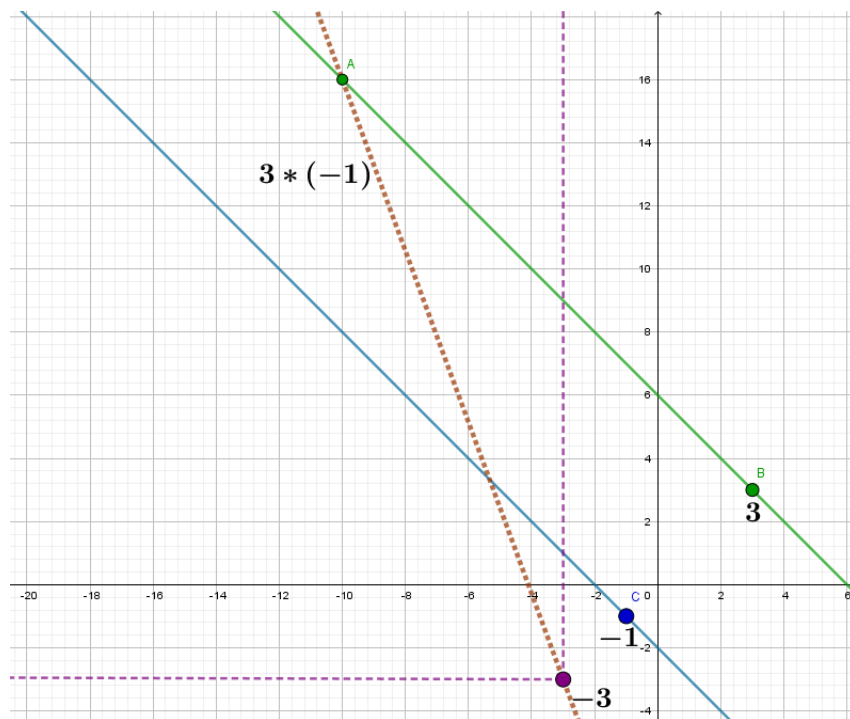


Figura 19. Recta representativa de $3 * (-1)$ (color café).

4.2.1.1. Algunas propiedades.

Considerando la ejemplificación del índice anterior, es importante explicitar cómo se evidencia la conmutatividad en la operación de la suma y producto.

Teniendo en cuenta las sumas empleadas en los dos primeros casos: $\frac{1}{2} + 3$ y $1 + 4$, aritméticamente conocemos que el orden en que se efectúe la suma, no alterará el resultado. Y esta intuición funciona en nuestra reconstrucción.

Una de las particularidades que expresa el método propuesto anteriormente, es que tomando elementos pertenecientes a un sistema conformado por familias de intervalos encajados, permiten obtener otro elemento dentro del mismo sistema. En el caso específico del trabajo con funciones lineales, obtenemos otra función de la misma clase, que representa un resultado determinado. Es por ello, que la selección por simplicidad de las rectas como representación de los números reales por acercamiento, no se ve disuelta en ningún momento por la obtención de un elemento por fuera del conjunto de salida. De esta manera, podemos consignar esta propiedad de la siguiente forma:

“Para dos números reales a y b , representadas por las rectas y_a y y_b respectivamente; el resultado de cualesquiera de las cuatro operaciones binarias básicas que los involucre, arrojará una recta representativa de la misma clase que las iniciales” (Propiedad clausurativa).

Los sumandos, están asociados a coordenadas específicas en el plano, de hecho, correspondientes a la recta $y = x$. Por lo tanto, las rectas representativas se conservan y así mismo, el semiplano definido por la suma entre ellos. Esto, debido a que la ubicación de los puntos $(a + b, a + b)$ y $(b + a, b + a)$ es la misma. Este planteamiento ocurre de la misma forma para $(a * b, a * b)$ y $(b * a, b * a)$, indicando que ambos, tienen la misma recta representativa. De esta manera, podemos afirmar, que: *“Para dos números reales a y b , la recta representativa para la suma $a + b$, es equivalente a la representativa para $b + a$; de la misma forma, ocurre para $a * b$ y $b * a$ ”* (Propiedad conmutativa).

Las demás propiedades no serán detalladas, pero así como las expuestas anteriormente, pueden ser razonadas con base a la ejemplificación del funcionamiento de la reconstrucción.

4.2.2. Definición del cociente entre números reales.

En la aritmética convencional, la operación del cociente se efectúa normalmente como una repartición de elementos en cantidades iguales. De tal manera que, $4 \div 2 = 2$. Esta operación, trasladada al análisis intervalar, debe ser definida de tal manera que las familias de intervalos que constituyen el número 2 y el 4, me permitan encontrar una recta que se aproxime al punto que representa el cociente mencionado, que es 2.

Es importante precisar ciertos aspectos importantes: El resultado por sí mismo, puede ser representado como una familia de rectas que se aproximan tanto como se desea a él. Debemos tener presente la naturaleza del resultado, ya que, no todo cociente es un número entero ni racional. Sin embargo, generalmente, para todos los casos, la familia está comprendida en el semi plano τ determinado por la coordenada correspondiente al cociente. Así que, una forma de entender el cociente, es formar a partir de la recta representativa de 4, y 2, una recta que las intercepte a ambas, y que se acerque tanto como se desee a 2, incluída en τ ; de esta forma, se garantiza que la operación está bien definida bajo nuestro marco teórico, y además, le atribuye existencia al cociente como número real.

Para mostrar la validez de esta operación, vamos a desarrollar dos casos; el primero, será el que mencionamos, de cara a un caso con un buen grado de simplicidad. El segundo, teniendo en cuenta un cociente racional; y el tercero, la división efectuada entre números irracionales.

Observación: Consideramos el número real 2, representado por la recta $y_2 = -2x + 6$, y el número real 4, representado por $y_4 = -x + 8$. Una idea que surge al pensar la operación de la división, así como ocurre en las demás operaciones, es realizar el cociente entre las funciones lineales correspondientes. Sin embargo, esa idea no es correcta, debido a que tal operación representaría una función racional, dada por $y_{4/2} = \frac{-x+8}{-2x+6}$. Así, vemos que, no obtenemos una función lineal como resultado.

Consideramos el número real 2, representado por la recta $y_2 = -2x + 6$, y el número real 4, representado por $y_4 = -x + 8$. Tenemos que el cociente entre y_2 y y_4 , entendido no en el sentido del álgebra de funciones, sino como un álgebra de intervalos, será una combinación

de ellas dos. Es decir, seleccionamos un punto de cada una, que esté determinado por el semiplano τ , de tal forma que la recta que pase entre ambos, se aproxime a 2.

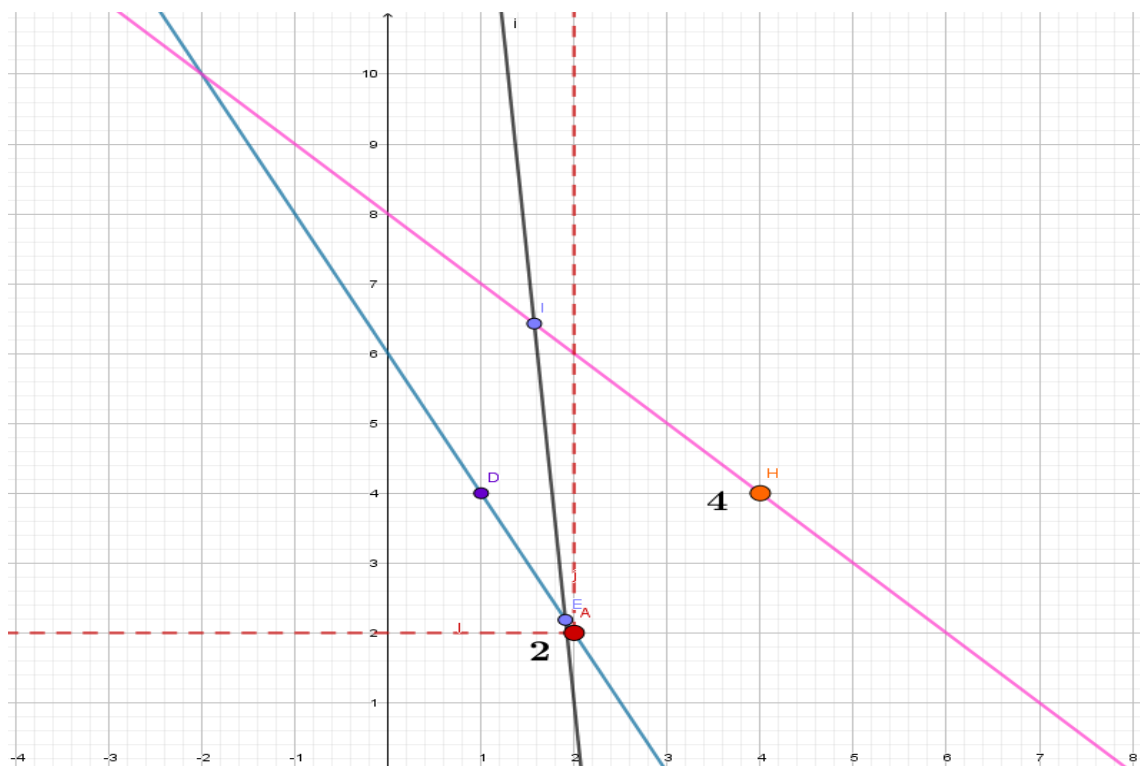


Figura 20. Recta representativa de $y_{4/2}$ (color negro).

De esta manera, como se muestra en la **Figura 20**, una recta que representa al cociente entre 4 y 2, es: $y_{4/2} = -10,36x + 22,71$. Tomando el punto en $y_4 : (1.57, 6.43)$, y en y_2 , un punto muy próximo al punto 2, tal como $(1.999, 2.002)$, y tanto como se pueda aproximar. De tal manera, que si evalúo $x = 2$ en $y_{4/2}$, obtenemos que $y_{4/2} = 1,99$.

Podemos ver entonces, que el resultado de tal operación, es una recta que pertenece como elemento a la familia de intervalos encajados que representan a 2.

A continuación plantearemos el procedimiento para resolver el cociente $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$. Debemos considerar que tanto la cantidad del numerador como la del denominador, son irracionales, lo cual en sí mismas, indica que no hay intervalo cerrado que constituya cada uno como punto aislado en la recta real. De esta manera, en el plano racional se representarán como “huecos” o coordenadas no definidas.

CAPÍTULO V

5. REFLEXIONES FINALES.

5.1. El concepto de número real conectado a las nociones de límite, continuidad y convergencia.

La reconstrucción que ha sido presentada en el Capítulo IV, tiene varias características que deben ser marcadas para comprender de qué forma define un número real; esto es, cómo muestra la naturaleza de ese concepto.

Es interesante visualizar cómo podemos acercarnos a ese punto específico en el plano racional, de tal manera que, de todos esos recorridos y curvas, las rectas nos facilitan la aproximación numérica, y es un representante que permite una variación de sus parámetros sin necesidad de ahondar en una dificultad muy elevada. Sin embargo, toda esta cuestión del *acercamiento al punto z en el plano*, está relacionada estrechamente al concepto de *límite de una función y/o sucesión*.

Las sucesiones de la forma $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow z$, definidas en el semiplano determinado por el punto (z, z) , se acercan cada vez más a dicho punto, debido a que **convergen a él**. Y esto a su vez, indica que dicho punto es el límite de la sucesión. Es decir, que estamos partiendo en nuestra reconstrucción, de que dicho límite existe y es conocido. Un ejemplo de ello, es dado con el número e , ya que actúa como el límite cuando $n \rightarrow \infty$ de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Esto indica, que matemáticamente, si z es el límite de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, |a_n - z| < \epsilon$$

Esto significa que en el intervalo, $(\epsilon - z, \epsilon + z)$ se encuentran reunidos infinitos términos de la sucesión, cuando el valor n supera a N . Esto fortalece la equivalencia entre todas las formas de acercamiento que se describieron en el capítulo IV, mostrando que tal relación existe, porque cada una de ellas converge al mismo valor, o bien, el punto al que se acercan, actúa como el límite de todas ellas.

Sin embargo, hay otro aspecto importante; y es que, viendo desde esta perspectiva el trabajo realizado por Bachmann (1892), podemos notar que la relación que él hacía, con respecto a

la convergencia de las sucesiones racionales de intervalos encajados, era la acumulación de términos de dos sucesiones (una creciente y la otra decreciente), a ese límite en común, del cual ya se conocía su existencia. Esto queda indicado en el índice III de la definición de número real, donde:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \lim_{i \rightarrow \infty} b_i = z,$$

Lo cual nos lleva a que se cumple:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (a_i - b_i) = 0$$

Lo que nos muestra, que para una sucesión racional que represente este proceso de diferenciación entre a_i y b_i , tenemos que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N, |a_n - a_m| < \epsilon$$

Esto evidencia, que el trabajo de acercamiento se realiza utilizando sucesiones de Cauchy. Y adicionalmente a ello, que para la construcción de número real de Bachmann, y para nuestra reconstrucción, el criterio de Cauchy es fundamental. Debido a que, debemos garantizar que la sucesión escogida converge a un límite L , el cual debe ser conocido con anterioridad. Tal criterio puede ser enunciado como: “Una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un valor z , si y solo si, la sucesión es de Cauchy”.

Como mencionan los autores de *Numbers* (1991)²², la definición de los números reales por medio de sucesiones fundamentales, se remonta a Cantor & Méray, los cuales conciben la idea de que cada número real es límite de una sucesión de números racionales, en donde las diferencias entre términos sucesivos, se vuelve arbitrariamente pequeñas. Además de ello, en el mismo texto, se muestran las referencias de Cantor, sobre las ventajas que ofrece su construcción con esta teoría, debido a que es más adecuada para realizar cálculos analíticos.

Una vez establecido estos elementos centrales, el criterio de Cauchy, funciona como la pieza final de nuestro rompecabezas. Debido a que, verifica nuestro criterio de equivalencia entre las curvas de aproximación planteadas. Cada curva $C_1, C_2, \dots, C_n$, siendo decreciente y

²² **Autores:** Ebbinghaus, H.-D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Neukirch, J., Prestel, A., Remmert, R.

convergente a tal punto, es conformada por sucesiones fundamentales racionales, que con la idea que brinda Cantor, nos permite atribuir significado al concepto de número real. El conjunto de esas curvas, que representan clases de equivalencias, entre los elementos de la clase, cumplen que el límite de sus diferencias se reduce a cero, y es justamente por la acumulación de términos que cada curva contribuye a su acercamiento al punto específico.

Esta reconstrucción, está relacionada con el Teorema de Cantor de Intervalos Encajados, debido a que, en el trabajo con intervalos de la forma $I_n = [a_n, b_n]$, pertenecientes a una familia de intervalos anidados, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$, tenemos que su intersección es no vacía, y es reducido a un solo punto. Esto es, matemáticamente:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{z\}$$

Sin embargo, Corazza (2016) indica que como es bien sabido, $\mathbb{R}$ es el único campo ordenado completo. Este resultado, sin embargo, requiere una formulación adecuada de "completez": la versión que normalmente es concebida, es la que llamamos "Completez de Dedekind", es decir, que cada subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que es acotado superiormente, tiene un extremo superior. Otra versión de completez, que en algunos textos se llama *propiedad de intervalo anidado* (NIP), requiere que cualquier sucesión anidada y decreciente de intervalos cerrados tenga un punto común. Sin embargo, el uso de esta propiedad en lugar de la completez de Dedekind no nos proporciona una caracterización de $\mathbb{R}$; no es cierto que cada campo ordenado que satisfaga el NIP sea isomorfo a $\mathbb{R}$. Para obtener la caracterización deseada, es necesario incluir la *Propiedad Arquimediana*; de tal manera que cada campo ordenado de Arquímedes que satisface el NIP es isomorfo a $\mathbb{R}$.

Esta cuestión con respecto a nuestra reconstrucción de $\mathbb{R}$, es solucionada gracias a la demostración que realizó (Huang, 1968), en la cual, partiendo de su construcción de números reales, con clases de equivalencia $C_{\{[a_n, b_n]\}}$ pertenecientes al conjunto de todas las sucesiones de intervalos racionales cerrados anidados, es arquimediano y completo. Tales resultados se consignan en su trabajo, como el *corolario 3* y el *teorema 20* respectivamente. De esta manera, podemos afirmar con total seguridad, que la reconstrucción que hemos desarrollado, cumple la *propiedad Arquimediana*.

5.2. Consideraciones adicionales.

La reconstrucción realizada, se ilustra gráficamente con un proceso de variación de parámetros, caracterizados de forma particular, por medio de una herramienta tecnológica; que permite mostrar el acercamiento que brinda las rectas representativas de los ejemplos adoptados, y de qué forma va mejorando conforme esos parámetros son ajustados correctamente. Sin embargo, existe una restricción que limita la aplicación de la teoría de la reconstrucción, debido a que, tras un determinado acercamiento, el programa comienza a trabajar con aproximaciones numéricas. Esto, como muchos lenguajes de programación, debido a que no se conciben procesos infinitos de cálculos.

Lo anterior muestra la forma como la herramienta de trabajo, en este caso Geogebra, presenta también unas especificaciones, que deben ser tenidas en cuenta para no generar algún tipo de contradicción teórica; debido a que, aunque la idea de acercamiento a un punto, por medio de sucesiones de Cauchy puede realizarse infinitesimalmente, a la hora de implementarlo, llegará un momento donde no podrá mostrarse de forma estricta.

Además de ello, el programa puede incluir el punto (C, C) con entradas irracionales, como un punto existente en el plano. Lo que podría sugerir la existencia de rectas que incluyen esos puntos, y pasan por él. Esto generaría confusiones con respecto a ese acercamiento que pretendemos generar, a partir de las rectas representativas.

Cabe mencionar también, que la desventaja teórica, según los autores de *Numbers*²³ (1991), de utilizar este enfoque de intervalos anidados, es que la introducción de la relación $\leq$ entre clases de equivalencia de intervalos anidados, y la verificación de las propiedades de campo para la suma y la multiplicación, no son sencillas de presentar.

²³ Autores: Ebbinghaus, H.-D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Neukirch, J., Prestel, A., Remmert, R.

5.3. CONCLUSIONES:

- a) Este trabajo de grado ha ilustrado, que el análisis intervalar es una teoría que se conecta con el concepto de número real, y que le brinda al docente de educación media, el panorama sobre la complejidad que se tiene al hablar de un objeto matemático específico. Mostrando además, que esta teoría posee un componente histórico, debido a que el análisis intervalar, como una forma no típica de abordaje para el estudio matemático, se ve manifestada en múltiples momentos de la historia de la matemática.
- b) La reconstrucción de los números reales, a través de la aritmética de intervalos, en cuanto aporte a la formación matemática de los educandos y docentes en ejercicio de educación matemática, compone una comprensión general sobre la naturaleza que envuelve al conjunto de números reales; debido a que, enseña una forma de caracterizarlos como objetos matemáticos. Mostrando que el concepto de número real no es desasociado de los conceptos de límite y convergencia. Lo cual, ayudará al docente de matemáticas de educación media, a formular situaciones de aprendizaje, que ayuden al estudiante a desarrollar un razonamiento matemático sobre el concepto de número real, para emplearlo en su formación de educación superior.
- c) El estudio diacrónico realizado, solo ha mostrado una parte muy pequeña de lo que la perspectiva histórica – epistemológica puede ofrecer con respecto al surgimiento y consolidación del concepto de número real. Este panorama, involucra al docente de matemáticas de educación media, en una posición de investigador, con el fin de indagar sobre la información que el ser humano, ya sea por necesidad, o por algún otro tipo de motivación, ha adquirido para mejorar sus técnicas y el entendimiento del mundo que lo rodea. Esto, también muestra que las matemáticas no han sido estáticas ni lo serán, sino que representan un universo de posibilidades, donde otros resultados pueden ser conformados. Es por ello, que para el docente de educación media, es relevante conocer la historia y el recorrido que ha debido ocurrir, para que se construya los objetos matemáticos de su enseñanza, siendo también de aprendizaje, debido a que perfila sus saberes propios.

- d) La profundización realizada en el planteamiento de Bachmann (1892) por medio de la traducción libre desarrollada de su obra original, muestra que la formulación que emplea no es propiamente una construcción del conjunto de los números reales, sino que su pretensión está dirigida a una presentación didáctica por medio de la aritmética de intervalos, conformada por sucesiones de Cauchy. Por lo tanto, no es su preocupación ahondar en una construcción, pero si, la de brindar conceptualmente elementos para comprender el concepto de número real, a partir de un practicismo, que se ve inmerso en la teoría de Simón Stevin; quien, por medio de sus métodos, irrumpió la tradición griega, y mostró una forma de unificar lo formal con lo práctico en el quehacer matemático.

6. REFERENCIAS

Arboleda, L.C. (2011). Objetividad Matemática, Historia y Educación Matemática En G.I. Arbeláez & L.C. Recalde (Comps). *Los números reales como objeto matemático* (pp. 135-161). Santiago de Cali: editorial Universidad del Valle.

Arbeláez, G., y Gálvez, F. (2011). El conjunto de los números reales como objeto matemático: La “construcción” de Dedekind. En Arbeláez. G., y Recalde, L., *Los números reales como objeto matemático*. (pp. 135 - 161). Santiago de Cali, Colombia: Programa Editorial, Universidad del Valle.

Anaconda, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *REVISTA EMA*, VOL. 8, N° 1, 30-46.

Bachmann, P. (1892). Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen. *Teubner (Leipzig)*. Erste Vorlesung. Definition der Irrationalzahlen (Pg. 1 - 16).

Calderón, N. (2014). Diferentes construcciones del número real. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia.

Corazza, P. (2016). Revisiting the Construction of the Real Line. Department of Mathematics and Computer Science. Maharishi University of Management.

Ebbinghaus, H.-D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Neukirch, J., Prestel, A., Remmert, R. (1991). Graduate texts in Mathematics, readings in Mathematics: Numbers. *Springer*. Traducido por H.L.S. Orde.

Epple, M. (2003). The End of the Science of Quantity: Foundations of Analysis, 1860 – 1890. En Niels, H., *A history of Analysis*. (pp. 291 – 323). History of Mathematics, Vol. 24, AMS, LMS.

Guacaneme, E. (2016). Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas, Universidad del Valle. Santiago de Cali.

Hodgson, B. (2011). La contribución de la Historia de las Matemáticas a la Formación de Profesores de Matemáticas en Educación Secundaria. Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, Québec, Canada G1K 7P4.

Huang, N. (1968). A construction of the real numbers using nested closed intervals. Oregon State University.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de <http://www.mineducacion.gov.co>

Moore, R. (1966). Interval Analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Moreno, A. (2017). Los números reales como conjuntos de intervalos, ventajas y limitaciones de su consideración en la educación media. Instituto de educación y pedagogía, Universidad del Valle. Santiago de Cali.

Ortiz, G., y Valencia, S. (2010). La categoricidad de los Reales en Hilbert. Universidad del Valle, Cali, Colombia. Revista Brasileira de História da Matemática, Vol. 10, no. 19. abril 2010 –septiembre 2010 (pp. 39 - 65)

Recalde., L. (2011). Medida, número y magnitud en la antigüedad griega. En Arbeláez. G., y Recalde, L., *Los números reales como objeto matemático*. (pp. 39 - 68). Santiago de Cali, Colombia: Programa Editorial, Universidad del Valle.

Sinkevich., Galina (2014). Concepts of a number of C. Méray, E. Heine, G. Cantor, R. Dedekind and K. Weierstrass. TECHNICAL TRANSACTIONS, FUNDAMENTAL SCIENCES.

Sinkevich., Galina (2015). On the history of nested intervals: from Archimedes to Cantor. Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering.

Stevin, S. (1625). *La pratique d'arithmetique*. A Leide: De l'Imprimerie des Elzeviers. Digitalizado por: University of Ottawa; contribuyente: Fisher - University of Toronto.

Waldegg, G. (1996). La contribución de Simón Stevin a la construcción del concepto de Número. CINVESTAV, México. EDUCACIÓN MATEMÁTICA, Vol. 8 – No. 2. GEI.