



VICERRECTORIA DE INVESTIGACIONES
División de Proyectos

**FORMATO PARA LA ELABORACIÓN
DE INFORMES FINALES - PROYECTOS
DE INVESTIGACIÓN**

Fecha de presentación del Informe: Día Mes Año

Datos generales del Proyecto

Código del proyecto: CI 972			
Título del proyecto: Estimativos Geométricos para el Primer Valor Propio del Problema de Steklov			
Facultad o Instituto Académico: Ciencias Naturales y Exactas			
Departamento o Escuela: Matemáticas			
Grupo (s) de investigación: EDPG			
Investigadores ¹	Nombre	Tiempo asignado	Tiempo dedicado
Investigador Principal	Óscar Andrés Montaña Carreño	10 h/sem	10 h/sem
Coinvestigadores			
Otros participantes			

1. Resumen ejecutivo:

Dada un variedad Riemanniana n -dimensional (M, g) , compacta, conexa y con frontera suave ∂M , el operador Dirichlet-Neumann está definido por

$$L(u) = \partial \bar{u} / \partial \eta, \quad u \in C^\infty(\partial M)$$

donde $\bar{u}$ es la extensión armónica a M de u y η es la normal unitaria exterior a ∂M .

El operador Dirichlet-Neumann es autoadjunto no negativo en $L^2(\partial M)$ con espectro discreto

$$0 = v_0 < v_1 \leq \dots \leq v_k \leq \dots,$$

¹ Todas las personas relacionadas en el informe y que participen en el proyecto deben haber suscrito el acta de propiedad intelectual de acuerdo con los formatos establecidos.





donde v_k tiende a infinito. El primer valor propio no cero v_1 de L es conocido como el primer valor propio de Steklov.

El objetivo general del proyecto es estudiar y contribuir a la solución del problema de Steklov, en este sentido nos proponemos encontrar cotas que relacionen el primer valor propio de Steklov con elementos geométricos de la variedad. Para tal fin hemos planteado los siguientes objetivos específicos:

1. Encontrar cotas superiores tipo Weinstock o Payne para el primer valor propio de Steklov sobre una superficie simplemente conexa de R^3 .
2. Encontrar cotas inferiores para el primer valor propio de Steklov en un dominio estrellado de una variedad M .
3. Encontrar cotas superiores para el primer valor propio de Steklov en un dominio simplemente conexo de una variedad M .
4. Obtener estimativos para el primer valor propio de Steklov en la bola n -dimensional dotada con una métrica conforme a una métrica rotacionalmente invariante.

Puesto que es un proyecto de Matemáticas, donde no existe una técnica decantada que permita inequívocamente llegar a los resultados esperados; si se cumplen dos de los cuatro objetivos específicos, consideraremos que el proyecto ha culminado exitosamente.

El proyecto se plantea con una duración de un año empezando en el segundo semestre del año 2014. Se espera publicar un artículo en una revista al menos de categoría B, presentar una ponencia nacional o internacional, graduar 1 estudiante de pregrado e iniciar el trabajo de grado de 1 estudiante de Maestría.

La metodología a seguir es la siguiente: Revisión bibliográfica exhaustiva; estudio de las técnicas usadas por Weinstock, Payne, y Montañó para dominios euclidianos; identificación y solución de las posibles obstrucciones que la extensión de esas técnicas presenten al abordar el caso más general, presentación en un seminario periódico de los avances de la investigación; elaboración de reportes técnicos; redacción en forma de artículo de los resultados de la investigación, presentación de resultados en eventos nacionales o



internacionales; publicación en revista especializada o divulgativa de los resultados que se hayan obtenido.

2. Síntesis del proyecto:

El objetivo general del proyecto era estudiar y contribuir a la solución del problema de Steklov encontrando cotas geométricas para el primer valor propio no nulo del operador Dirichlet-Neumann. Para tal fin se propuso cumplir con dos de los siguientes objetivos específicos:

1. Encontrar cotas superiores tipo Weinstock o Payne para el primer valor propio de Steklov sobre una superficie simplemente conexa de R^3 .
2. Encontrar cotas inferiores para el primer valor propio de Steklov en un dominio estrellado de una variedad M .
3. Encontrar cotas superiores para el primer valor propio de Steklov en un dominio simplemente conexo de una variedad M .
4. Obtener estimativos para el primer valor propio de Steklov en la bola n -dimensional dotada con una métrica conforme a una métrica rotacionalmente invariante.

En el transcurso de la investigación se trabajó en todos los objetivos específicos obteniendo resultados menores en los objetivos 1 y 4. El mayor esfuerzo, aunque sin frutos todavía, se hizo en la conjetura de Escobar para dominios convexos del espacio euclídeo (el primer valor propio está acotado inferiormente por $c > 0$ donde c es una cota inferior para la curvatura media de la frontera del dominio convexo). Los resultados obtenidos en nuestra investigación satisfacen los objetivos 2 y 3 y aparecen publicados en el artículo "Lower Bound for the First Steklov Eigenvalue" (ver anexo 1). En nuestro artículo demostramos un teorema de comparación para bolas geodésicas que complementa el teorema de comparación para bolas geodésicas de Escobar publicado en el artículo A comparison Theorem for the First non-zero Steklov Eigenvalue, Journal of Functional Analysis, 178, 143-155 y extendemos a variedades un estimativo encontrado por García G. y Montaña O. en el artículo A Lower Bound for the First Steklov Eigenvalue on a Domain, Revista Colombiana de Matemáticas, 49, 95-104,



2015.

El problema de Steklov y en particular la conjetura de Escobar es un problema difícil e interesante que aporta fundamentalmente al desarrollo de la matemática en el área del análisis geométrico. Sigue siendo un problema abierto, esperando por un Matemático entusiasta que lo resuelva.

3. Productos:

Tabla No. 1. Cantidad y tipo de productos pactados en el *Acta de Trabajo y Compromiso* y productos finalmente presentados

TIPO DE PRODUCTOS	No. de PRODUCTOS PACTADOS	No. de PRODUCTOS PRESENTADOS
Productos de nuevos conocimientos		
Artículo completo publicado en revistas A1 o A2		
Artículo completo publicados en revistas B	1	1
Artículo completo publicados en revistas C		
Libros de autor que publiquen resultados de investigación		
Capítulos en libros que publiquen resultados de investigación		
Productos o procesos tecnológicos patentados o registrados		
• Prototipos y patentes		
• Software		
Productos o procesos tecnológicos usualmente no patentables o protegidos por secreto industrial		



TIPO DE PRODUCTOS	No. de PRODUCTOS PACTADOS		No. de PRODUCTOS PRESENTADOS	
Normas basadas en resultados de investigación				
Formación de recursos humanos	No. de estudiantes vinculados	No. de tesis	No. De estudiantes Vinculados	No. De tesis
Estudiantes de pregrado	2		2	
Semillero de Investigación	1		1	
Estudiantes de maestría				
Estudiantes de doctorado				
Productos de divulgación				
Publicaciones en revistas no indexadas				
Ponencias presentadas en eventos (congresos, seminarios, coloquios, foros)	No. de ponencias nacionales 1	No. de ponencias internacionales	No. de ponencias nacionales 1	No. de ponencias internacionales
Propuesta de investigación				
Propuestas presentadas en convocatorias externas para búsqueda de financiación.	1		1	

Tabla No. 2. Detalle de productos.

Para cada uno de los productos obtenidos y relacionados en la tabla anterior, indique la información solicitada para cada uno, anexando copia de las respectivas constancias. Como anexo a esta guía encontrará el instructivo para la revisión de informes finales y productos

Tipo de producto:	Artículo
Nombre General:	Revista de Ciencias Universidad del Valle, (2014), Vol: 18. Núm: 2. Págs: 123 - 130



VICERRECTORIA DE INVESTIGACIONES
División de Proyectos

**FORMATO PARA LA ELABORACIÓN
DE INFORMES FINALES -
PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN**

Nombre Particular:	Lower Bound for the First Steklov Eigenvalue
Ciudad y fechas:	Cali, diciembre de 2015
Participantes:	Oscar Andrés Montaña Carreño
Sitio de información:	Biblioteca Álvaro López Toro
Formas organizativas:	EDPG

4. Impactos actual o potencial:

Los resultados obtenidos son importantes en geometría diferencial en el área de análisis geométrico.

La presente versión del informe contiene las observaciones de los evaluadores:

Oscar A. Montaña C.

Firma del investigador principal

VoBo. Vicedecano de Investigaciones

Por favor presente su informe impreso y en formato digital en hoja tamaño carta, letra arial 11, con espacios de 1 1/2

LISTADO DE ANEXOS

1. Artículo Lower Bound for the First Steklov Eigenvalue
2. Correo dirigido a Diego Luis Hoyos que evidencian dos estudiantes matriculados en Seminario y vinculados al proyecto.
3. Carta Dirigida a Jose Raúl Quintero que evidencia que una de las estudiantes se vinculó al programa de Semilleros.
4. Certificado de Ponencia.
5. Recibo de correo certificado que evidencia el envío de un proyecto a convocatoria externa (Fundación para la promoción de la investigación).
6. Copia del proyecto enviado a convocatoria externa al Banco de la república.
7. Factura de la compra de equipo.

Lower Bound for the First Steklov Eigenvalue

Óscar Andrés Montaña Carreño

Universidad del Valle

Received: October 24, 2014

Accepted: December 18, 2014

Pag. 123-130

Abstract

In this paper we find lower bounds for the first Steklov eigenvalue in Riemannian n -manifolds, $n = 2, 3$, with non-positive sectional curvature.

Keywords: First Steklov eigenvalue, sectional curvature.

1 Introduction

Let $(\overline{M}, g)$ be a n -dimensional, compact, connected Riemannian manifold with smooth boundary ∂M . The operator $L : C^\infty(\partial M) \rightarrow C^\infty(\partial M)$ defined by $Lu = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta}$, where $\hat{u}$ is the harmonic extension over M of u and η is the unit outward normal to ∂M is known as Dirichlet-Neumann operator. The first non-nule eigenvalue $\nu(M)$ of L is called the first eigenvalue of the Steklov problem and it is variationaly characterized by:

$$\nu(M) = \min \left\{ R[\varphi] : \int_{\partial M} \varphi d\sigma = 0, \varphi \in C^\infty(\overline{M}) \right\}, \quad (1)$$

where $R[\varphi] = \frac{\int_M |\nabla \varphi|^2 dv}{\int_{\partial M} \varphi^2 d\sigma}$ is called Rayleigh quotient. For the Euclidian ball of the radio $r > 0$ the first eigenvalue is $\nu = \frac{1}{r}$ with its own space generated by the coordinate functions. A function φ such that $\int_{\partial M} \varphi d\sigma = 0$ is called test function.

Starting from the variational characterization given by (1), if φ is a test function over M then $\nu(M) \leq R[\varphi]$.

In recent years, different authors, among them Weinstock [14], Kuttler and Sigillito [8], Payne [13], Escobar [4, 5, 6], Wang and Xia [15, 16], Illias and Makloul [7] and Montaña [9, 10, 11, 12] among others have dealt with the problem of finding geometrical estimates for the first eigenvalue of Steklov.

In this article we find lower bounds for the first eigenvalue of Steklov in geodesic balls and simply connected domain of a Riemannian n -manifold; where $n = 2, 3$, complete of non-positive sectional curvature.

Our result is extended to Riemannian n -manifolds; where $n = 2, 3$, the estimate of Kutler-Sigillito for star-shaped domains of the plane [8].

2 Preliminaries

For this article, (M, g) will be a Riemannian n -manifold; where $n = 2, 3$, complete, simply connected and with non-positive sectional K curvature. Since M is complete, then for every $p \in M$ the exponential function $\exp_p$ is defined over all $T_p M$. Moreover, since $K \leq 0$ over all M the Hadamard theorem [1] implies that $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ is a diffeomorphism, that is, M is diffeomorphic to $\mathbb{R}^n \approx T_p M$, $n = 2, 3$.

Under the given hypothesis

$$v(t, \theta) = \exp_p t\xi(\theta), \quad t \geq 0, \quad \xi \in S^{n-1}, \quad (2)$$

it is a parameterization in geodesic coordinates for M .

When $n = 2$ the metrics can be written in the form of

$$ds^2 = dt^2 + f^2(t, \xi)d\xi^2, \quad (3)$$

where $f(0, \xi) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial t}(0, \xi) = 1$ and $d\xi^2$ is the metric of S^1 [2].

When $n = 3$ the metrics can be written in the form of

$$ds^2 = dt^2 + h_{ij}(t, \theta)d\theta^i \otimes d\theta^j. \quad (4)$$

For every $t > 0$ the boundary of the geodesic ball with center p and radio t , $\partial \mathcal{B}(p, t)$, is diffeomorphic to S^2 and thus $h_{ij}(t, \theta)d\theta^i \otimes d\theta^j$ is a metric over S^2 . The Uniformization theorem implies that the metric is conformally equivalent to the standard metric over S^2 ([6] pag 152). Therefore, we can assume that the metric over the 3-manifold is also in the form of

$$ds^2 = dt^2 + f^2(t, \xi)d\xi^2, \quad (5)$$

where $f(0, \xi) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial t}(0, \xi) = 1$ and $d\xi^2$ is the standard metric of S^2 .

Since the sectional curvature is non-positive, then the Bishop comparison theorem [3] implies

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{f(t, \xi)}{t} \right\} &\geq 0, \\ f(t, \xi) &\geq t, \end{aligned} \quad (6)$$

and therefore

$$1 \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t, \xi)}{t} \leq \frac{f(t, \xi)}{t} \leq f(1, \xi) \leq f_o = \max_{\xi \in S^1} f(1, \xi). \quad (7)$$

3 Estimate for the First Eigenvalue over a Geodesic Ball

Theorem 3.1. *If $\mathfrak{B}_p \subset M$ is a geodesic ball with a ratio 1 and center $p \in M$, then the first eigenvalue of Steklov satisfies the inequality*

$$\nu(\mathfrak{B}_p) \geq \frac{1}{f_o^{n+1}}, \quad (8)$$

where $f_o = \max_{\xi \in S^1} f(1, \xi)$. The equality is achieved only if $\mathfrak{B}_p$ is isometric to the Euclidian ball of radio 1.

Proof. From (6) we have

$$\begin{aligned} R_g[\varphi] &= \frac{\int_{\mathfrak{B}_p} |\nabla \varphi|^2 dv}{\int_{\partial \mathfrak{B}_p} \varphi^2 d\sigma} = \frac{\int_{\mathfrak{B}_p} \left\{ \varphi_t^2 + \frac{1}{f^2} |\overline{\nabla} \varphi|^2 \right\} f^{n-1} dt d\xi}{\int_{\partial \mathfrak{B}_p} \varphi^2 f^{n-1} d\xi} \\ &\geq \frac{\int_{\mathfrak{B}_p} \left\{ \varphi_t^2 + \frac{1}{f^2} |\overline{\nabla} \varphi|^2 \right\} t^{n-1} dt d\xi}{\int_{\partial \mathfrak{B}_p} \varphi^2 f^{n-1} d\xi} \\ &\geq \frac{1}{f_o^{n-1}} \frac{\int_{\mathfrak{B}_p} \left\{ \varphi_t^2 + \frac{1}{f^2} |\overline{\nabla} \varphi|^2 \right\} t^{n-1} dt d\xi}{\int_{\partial \mathfrak{B}_p} \varphi^2 d\xi}, \end{aligned}$$

and from (7) it follows that $1 \geq \frac{1}{f_o^2}$ and $\frac{t^2}{f^2} \geq \frac{1}{f_o^2}$, and therefore

$$\begin{aligned} R_g[\varphi] &\geq \frac{1}{f_o^{n+1}} \frac{\int_{\mathfrak{B}_p} \left\{ \varphi_t^2 + \frac{1}{t^2} |\overline{\nabla} \varphi|^2 \right\} t^{n-1} dt d\xi}{\int_{\partial \mathfrak{B}_p} \varphi^2 d\xi} \\ &\geq \frac{1}{f_o^{n+1}} R_\delta[\varphi], \end{aligned}$$

where δ is the Euclidian metric and $\overline{\nabla}$ is the gradient over S^{n-1} . If φ_1 is a eigenfunction for $\nu(\mathfrak{B}_p, g)$ and choose the constant b such that $\varphi := \varphi_1 - b$ serves as a test function for the first eigenvalue of the Euclidean ball, $\nu(\mathfrak{B}_p, \delta) = 1$, then

$$\begin{aligned} \nu(\mathfrak{B}_p, g) &= R_g[\varphi_1] \\ &\geq R_g[\varphi] \\ &\geq \frac{1}{f_o^{n+1}} R_\delta[\varphi] \\ &\geq \frac{1}{f_o^{n+1}}. \end{aligned}$$

The equality is given only if $f(t, \xi) = t$, in such case $\mathfrak{B}_p$ is isometric to the Euclidian ball of radio 1.

From the Escobar comparison theorem [6] and from our estimate, we have

$$\frac{1}{f_o^{n+1}} \leq \nu(\mathfrak{B}_p, g) \leq 1. \quad (9)$$

4 Simply Connected Domains

In this section, D is a simply connected domain of $T_p M$ and Ω is also a domain of M such that $\Omega = \exp_p(D)$. $v(t, \theta) = \exp_p t\xi(\theta)$ is a parameterization in geodesic coordinates of M , where $\xi(\theta)$ is a parameterization of S^{n-1} . We suppose that the boundary of D is smooth and it is given by $\partial D = \{R\xi : \xi \in S^{n-1}\}$, where $R : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ is a strictly positive smooth function. In geodesic coordinates, the function $F(t, \theta) = t - R(\theta)$ is such that ∂D and $\partial\Omega$ are curves (surfaces) of 0 level of F in the parameterizations $t\xi(\theta)$ and $v(t, \theta)$ respectively. For this reason the unit normal vectors to each one of the boundaries are given by:

$$\eta_\delta = \frac{1}{W_\delta}(\partial_t - \frac{\bar{\nabla} R}{R^2}), \text{ where } W_\delta = \sqrt{1 + (\frac{|\bar{\nabla} R|}{R})^2}, \quad (10)$$

$$\eta_g = \frac{1}{W_g}(\partial_t - \frac{\bar{\nabla} R}{f^2}), \text{ where } W_g = \sqrt{1 + (\frac{|\bar{\nabla} R|}{f})^2}. \quad (11)$$

From the previous identities, if we solve the equations $\cos \gamma = \langle \eta_\delta, \partial_t \rangle = \frac{1}{W_\delta}$ and $\cos \psi = \langle \eta_g, \partial_t \rangle = \frac{1}{W_g}$ we obtain:

$$(\frac{|\bar{\nabla} R|}{R})^2 = \tan^2 \gamma, \quad (12)$$

$$(\frac{|\bar{\nabla} R|}{f})^2 = \tan^2 \psi. \quad (13)$$

From the inequality $\frac{1}{f} \leq \frac{1}{t}$ it is deduced that over the boundaries

$$\tan^2 \psi = (\frac{|\bar{\nabla} R|}{f})^2 \leq (\frac{|\bar{\nabla} R|}{R})^2 = \tan^2 \gamma. \quad (14)$$

4.1 Estimate for the Integral of the Squared Gradient Over Ω

Let us suppose that the angle γ satisfies the inequality:

$$\tan^2 \gamma \leq a \quad (15)$$

for $a > 0$, that is; $(\frac{|\bar{\nabla} R|}{f})^2 \leq (\frac{|\bar{\nabla} R|}{R})^2 \leq a$.

Changing the variable $\theta = u$ and $t = \rho R(u)$ we have:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dv &= \int_{S^{n-1}} \int_0^{R(\theta)} \left\{ \varphi_t^2 + \frac{1}{f^2} |\overline{\nabla} \varphi|^2 \right\} f^{n-1} dt d\xi \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_0^1 \frac{1}{f^2} \left\{ |\overline{\nabla} \varphi|^2 - 2\rho \frac{\varphi_\rho}{R} \langle \overline{\nabla} \varphi, \overline{\nabla} R \rangle + \frac{f^2 + \rho^2 |\overline{\nabla} R|^2}{R^2} \varphi_\rho^2 \right\} f^{n-1} R d\rho d\xi. \end{aligned}$$

Since $-2\rho \frac{\varphi_\rho}{R} \langle \overline{\nabla} \varphi, \overline{\nabla} R \rangle \geq -\left\{ \alpha^2 |\overline{\nabla} \varphi|^2 + \frac{\rho^2 |\overline{\nabla} R|^2}{\alpha^2 R^2} \varphi_\rho^2 \right\}$ for every $\alpha > 0$, then

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dv \geq \int_{S^{n-1}} \int_0^1 \left\{ \left(\frac{1}{R^2} - \frac{\rho^2 |\overline{\nabla} R|^2}{f^2 R^2} \beta^2 \right) \varphi_\rho^2 + \frac{1}{f^2} \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} |\overline{\nabla} \varphi|^2 \right\} f^{n-1} R d\rho d\xi,$$

where $\beta^2 = \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}$. The sectional non-positive curvature implies that $f(t, \xi) \geq t$ therefore $-\frac{\rho^2}{f^2(\rho R, \xi)} \geq -\frac{1}{R^2}$ and that results in

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dv \geq \int_{S^{n-1}} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{R} (1 - a\beta^2) \varphi_\rho^2 + \frac{R}{f^2} \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} |\overline{\nabla} \varphi|^2 \right\} f^{n-1} d\rho d\xi.$$

If we resolve the equation $\frac{1-a\beta^2}{R} = \frac{R\beta^2}{1+\beta^2}$ for β^2 we obtain

$$\beta^2 = \frac{-R^2 - a + 1 + \sqrt{(R^2 + a - 1)^2 + 4a}}{2a} > 0. \quad (16)$$

Therefore

$$\begin{aligned} \frac{1 - a\beta^2}{R} &= \frac{R\beta^2}{1 + \beta^2} \\ &= \frac{R^2 + a + 1 - \sqrt{(R^2 + a - 1)^2 + 4a}}{2R} \\ &= \frac{2R}{R^2 + a + 1 + \sqrt{(R^2 + a - 1)^2 + 4a}} \\ &\geq \frac{2r_m}{r_M^2 + a + 1 + \sqrt{(r_M^2 + a - 1)^2 + 4a}}, \end{aligned}$$

with $r_m = \min_{S^{n-1}} R$ and $r_M = \max_{S^{n-1}} R$. Going back to the integral we obtain

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dv &\geq \\ &\frac{2r_m}{r_M^2 + a + 1 + \sqrt{(r_M^2 + a - 1)^2 + 4a}} \int_{S^{n-1}} \int_0^1 \left\{ \varphi_\rho^2 + \frac{1}{f^2} |\overline{\nabla} \varphi|^2 \right\} f^{n-1} d\rho d\xi, \end{aligned}$$

getting the estimate

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dv \geq C \int_{\mathfrak{B}_p} |\nabla \varphi|^2 dv, \quad (17)$$

with

$$C = \frac{2r_m}{r_M^2 + a + 1 + \sqrt{(r_M^2 + a - 1)^2 + 4a}}.$$

4.2 Estimate for the Integral over the Boundary of φ^2

$$\int_{\partial\Omega} \varphi^2 d\sigma = \int_{S^{n-1}} \varphi^2 \sqrt{\frac{|\nabla R|^2}{f^2} + 1} f^{n-1} d\xi.$$

Since $f(R, \xi) \geq R$ then

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \varphi^2 d\sigma &\leq \int_{S^{n-1}} \varphi^2 \sqrt{\frac{|\nabla R|^2}{R^2} + 1} f^{n-1} d\xi \\ &\leq \sqrt{a+1} \int_{S^{n-1}} \varphi^2 f^{n-1} d\xi, \end{aligned}$$

getting the estimate

$$\int_{\partial\Omega} \varphi^2 d\sigma \leq \sqrt{a+1} \int_{\partial\mathfrak{B}_p} \varphi^2 d\sigma. \quad (18)$$

4.3 Estimate for the rst eigenvalue of Steklov over Ω

From the estimates calculated in the previous sections (17), (18), we have the following estimate for the Rayleigh quotient:

$$\begin{aligned} R[\varphi] &= \frac{\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dv}{\int_{\partial\Omega} \varphi^2 d\sigma} \\ &\geq \frac{C}{\sqrt{a+1}} \frac{\int_{\mathfrak{B}_p} |\nabla \varphi|^2 dv}{\int_{\partial\mathfrak{B}_p} \varphi^2 d\sigma}, \end{aligned}$$

where $C = \frac{2r_m}{r_M^2 + a + 1 + \sqrt{(r_M^2 + a - 1)^2 + 4a}}$ and $\mathfrak{B}_p$ is the geodesic ball over M with center in p and radio 1.

If φ_1 is a eigenfunction for the first eigenvalue over Ω and chose the constant b such that $\varphi = \varphi_1 - b$ serves as a test function for the first eigenvalue of the geodesic ball $\mathfrak{B}_p$, then

$$\begin{aligned}\nu(\Omega) &= R[\varphi_1] \\ &\geq R[\varphi] \\ &\geq \frac{C}{\sqrt{a+1}} \nu(\mathfrak{B}_p) \\ &\geq \frac{C}{\sqrt{a+1}} \frac{1}{f_o^{n-1}}.\end{aligned}$$

References

- [1] Docarmo M. P. (1992). Riemannian Geometry, Birkhauser.
- [2] Chavel I. (2005). Riemannian Geometry A Modern Introduction, Cambridge University Press.
- [3] Chavel I. (1984). Eigenvalues In Riemannian Geometry, Academic Press, Inc.
- [4] Escobar J. F. (1997). The Geometry of the first Non-Zero Steklov Eigenvalue, Journal of Functional Analysis, 150, 544-556.
- [5] Escobar J. F. (1999). An Isoperimetric Inequality and the First Steklov Eigenvalue, Journal of Functional Analysis, 165, 101-116.
- [6] Escobar J. F. (2000). A comparison Theorem for the First non-zero Steklov Eigenvalue, Journal of Functional Analysis, 178, 143-155.
- [7] Ilias S. and Makhoul O. (2011). A Reilly inequality for the first Steklov eigenvalue, Differential Geom. Appl. 5, 699 - 708.
- [8] Kuttler J. R. and Sigillito V. G. (1968). Lower Bounds for Stekloff and free membrane eigenvalues, SIAM Review, 10, 368-370-
- [9] Montaña O. A. (2013). The Stekloff problem for rotationally invariant metrics on the ball Revista Colombiana de Matemáticas, 47, 2, 181-190.
- [10] Montaña O. A. (2013). Cota superior para el primer valor propio del problema de Steklov, Revista Integración, 31, 1, 53-58.
- [11] Montaña O. A. (2013). Cota superior para el primer valor propio de Steklov en el espacio euclídeo, Revista de Ciencias, 17, 2, 95-103.
- [12] Montaña O. A. (2014). Métricas rotacionalmente invariantes y el problema de Steklov, Revista Integración, 32, 2, 117-128.
- [13] Payne L. E. (1970). Some isoperimetric inequalities for harmonic functions, SIAM J. Math. Anal. 1, 354-359.

- [14] Weinstock R. (1954). Inequalities for a classical eigenvalue problem, J. Rational Mech. Anal. 3, 745 - 753.
- [15] Wang Q. and Xia C. (2009). Sharp bounds for the first non-zero Steklov eigenvalues, J. Funct. Anal, 257, 2635 - 2654.
- [16] Wang Q. and Xia C. (2010). Inequalities for the Steklov Eigenvalues, arXiv:1006.1154.

Autor's address

Óscar Andrés Montaña Carreño
Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali - Colombia
oscar.montano@correounivalle.edu.co



oscar andres montano carreno <oscar.montano@correounivalle.edu.co>

(sin asunto)

1 mensaje

oscar andres montano carreno <oscar.montano@correounivalle.edu.co>

11 de junio de 2015, 10:55

Para: Diego Luis Hoyos Hoyos <diego.hoyos@correounivalle.edu.co>

Cordial saludo

Hola Diego

Te envió la nota de dos estudiantes de pregrado.

Andrea Vanessa Hurtado Quiceno (Trabajo de grado 1) nota: 3.5

Alejandro Tovar (Seminario 1) nota : 2.5

Gracias.

—

Atentamente;

Óscar Andrés Montaña Carreño
Profesor Asociado
Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle
Calle 13 # 100 - 00
Oficina 3170
Cali - Colombia

Santiago de Cali, 2 de junio de 2015

Doctor

JOSÉ RAÚL QUINTERO

Vicedecano de Investigaciones

Facultad de Ciencias Naturales y Exacta

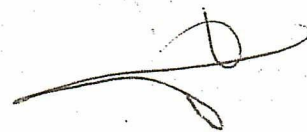
Cordial saludo

La estudiante Andrea Vanessa Hurtado se vinculó este semestre al proyecto "Estimativos Geométricos para el Primer Valor Propio del Problema de Steklov" con código CI 972. Su vinculación se hizo dentro del programa de semilleros de Investigación. El trabajo de Andrea consistía en cumplir con el cronograma trazado en su proyecto de grado, entregar informes semanales y bosquejar un pequeño artículo sobre los resultados ya obtenidos. La estudiante Hurtado no cumplió con ninguno de los compromisos argumentando que el curso Integral de Lebesgue le ocupaba todo su tiempo. La nota asignada a la estudiante Hurtado es **2.5**.

Atentamente:

Oscar A. Montaña C.

Oscar Andrés Montaña Carreño
Director del proyecto



X ENCUESTRO INTERNACIONAL^{DE} MATEMÁTICAS

DESDE EL 30 DE SEPTIEMBRE AL 03 DE OCTUBRE

CUMPLIDO DE COMISIÓN

El Comité Organizador del X Encuentro Internacional de Matemáticas certifica que:

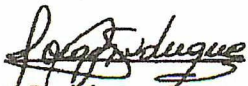
Óscar Montaña

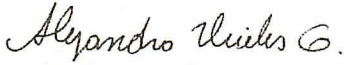
Asistió como conferencista al **X Encuentro Internacional de Matemáticas**, ciclo de Cursos, Conferencias y Ponencias, realizado en la ciudad de Barranquilla, del día 30 de Septiembre al 03 de Octubre de 2014.

Desarrollando la (el) Ponencia:

Cota Superior para el primer valor propio del problema de Steklov en el espacio euclideo

Para constancia se firma en Barranquilla a los 03 días del mes de Octubre de 2014.


Jorge Rodríguez Contreras
Presidente Comité Organizador


Alejandro Uribeles Guerrero Presidente
Coordinador Comité Organizador



Servientrega S.A. Nit 860.512.330-3 Principal Bogota D.C. Colombia Av Calle 6 No 34 A-11 Atención al usuario: www.servientrega.com. PBX 7 700 200 FAX 7 700 380 ext 110045. Grandes Contribuyentes Resolución DIAN 000041 del 30 enero de 2014, Autoretenedores Resol. DIAN:09698 de Nov 24/2003. Responsables y Retenedores de IVA. Factura por computador Resolución DIAN: 310000078494, 17/06/2014, prefijo 009 desde el 15000001 al 39000000

Fecha: 14 / 01 / 2016 11:28

Fecha Prog. Entrega: 15 / 01 / 2016



Factura No.: 930141323

Código CDS/SER: 1 - 20 - 314

CRA 100 # 13-00

OSCAR MONTAÑO // UNIVERSIDAD DEL VALLE

Tel/cel: 3107654723

Cod. Postal: 760032

Ciudad: CALI

Dpto: VALLE

País: COLOMBIA D.I./NIT: 1

FIRMA DEL REMITENTE
(NOMBRE LEGIBLE Y D.I.)

[Handwritten signature]

DESTINATARIO

CLO
20
3CTR

DOCUMENTO UNITAR PZ: 1

Ciudad: CALI

VALLE

F.P.: CONTADO

NORMAL

M.T.: TERRESTRE

CRA 5 # 11-68

FPIT // BANCO DE LA REPUBLICA

Tel/cel: 3107654723 D.I./NIT: 1

País: COLOMBIA Cod. Postal: 760044

e-mail:

Dice Contener: DCTOS

Obs. para entrega:

Vr. Declarado: \$ 5,000

Vr. Flete: \$ 0

Vr. Sobre flete: \$ 300

Vr. Mensajería expresa: \$ 3,500

Vr. Total: \$ 3,800

Vr. a Cobrar: \$ 0

Vol (Pz): / / Peso Pz (Kg):

Peso (Vol): Peso (Kg): 1.00

No. Remisión:

No. Bolsa seguridad:

No. Sobreporte:

Guía Retorno Sobreporte:

ECIBI A CONFORMIDAD (NOMBRE LEGIBLE, SELLO Y D.I.)

Factura No. 930141323



FECHA Y HORA DE ENTREGA
HORA / DÍA / MES / AÑO

Observaciones en la entrega:



El usuario deja expresa constancia que tuvo conocimiento del contrato que se encuentra publicado en la página web de Servientrega S.A. www.servientrega.com y en las carteleras ubicadas en los Centros de Soluciones; que regula el servicio acordado entre las partes, cuyo contenido ciusular acepta expresamente con la suscripción de este documento. Así mismo declara conocer nuestro Aviso de Privacidad y Aceptar la Política de Protección de

Quien Recibe: :

DG-CL-IGM-F43 V.2

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas

Proyecto de Investigación

Conjetura de Escobar para el Primer Valor Propio del
Problema de Steklov.

ÓSCAR ANDRÉS MONTAÑO CARREÑO
Investigador Principal

Presentado a
BANCO DE LA REPÚBLICA

Santiago de Cali, 18 de enero de 2016

1. Resumen Ejecutivo

Dada una variedad Riemanniana n -dimensional (M, g) , compacta, conexa y con frontera suave ∂M , el operador Dirichlet-Neumann está definido por

$$\begin{cases} L : C^\infty(\partial M) \rightarrow C^\infty(\partial M), \\ u \rightarrow \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta}, \end{cases}$$

donde $\hat{u}$ es la extensión armónica de u , y η es la normal unitaria exterior a ∂M . L es un operador autoadjunto no negativo en $L^2(\partial M)$ con espectro discreto

$$0 = \nu_0 < \nu_1 \leq \dots \leq \nu_k \leq \dots,$$

donde ν_k tiende a infinito. El primer valor propio no cero ν_1 de L es conocido como el primer valor propio de Steklov.

El objetivo general del proyecto es estudiar y contribuir a la solución de la Conjetura de Escobar para el primer valor propio del problema de Steklov, en este sentido nos proponemos encontrar cotas que relacionen el primer valor propio de Steklov con las curvaturas principales de la frontera de la variedad. Para tal fin nos hemos planteado un único objetivo específico:

- Demostrar la Conjetura de Escobar para dominios convexos del espacio euclidiano.

Puesto que es un proyecto de Matemáticas, donde no existe una técnica decantada que permita inequívocamente llegar a los resultados esperados; si se obtienen resultados cercanos y que sean aceptados para publicación en

una revista indexada por Colciencias consideraremos que el proyecto ha culminado exitosamente.

El proyecto se plantea con una duración de dos años empezando en el segundo semestre del año 2016. Se espera publicar un artículo en una revista de categoría A2 y presentar una ponencia nacional o internacional.

La metodología a seguir es la siguiente: Revisión bibliográfica exhaustiva; estudio de las técnicas usadas por Escobar [E2] para adaptar algunos resultados a dominios euclidianos; identificación y solución de las posibles obstrucciones que la extensión de esas técnicas presenten al abordar el caso más general, presentación en un seminario periódico de los avances de la investigación; elaboración de reportes técnicos; redacción en forma de artículo de los resultados de la investigación, presentación de resultados en eventos nacionales o internacionales; publicación en revista especializada de los resultados que se hayan obtenido.

Capítulo 1

2. Descripción del Proyecto

2.1 Planteamiento del Problema

Sea (M, g) una variedad Riemanniana n -dimensional, compacta, conexa y con frontera suave ∂M ; dada una función $u \in C^\infty(\partial M)$, sea $\hat{u}$ la extensión armónica de u , es decir, la única solución del problema

$$\begin{cases} \Delta_g \hat{u} = 0 & \text{en } M, \\ \hat{u} = u & \text{sobre } \partial M. \end{cases}$$

El operador Dirichlet-Neumann es el operador definido por

$$\begin{cases} L : C^\infty(\partial M) \rightarrow C^\infty(\partial M), \\ u \rightarrow \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta}, \end{cases}$$

donde η es la normal unitaria exterior a ∂M . L es un operador autoadjunto no negativo en $L^2(\partial M)$ con espectro discreto

$$0 = \nu_0 < \nu_1 \leq \dots \leq \nu_k \leq \dots,$$

con ν_k tendiendo a infinito. Los valores propios para este problema fueron estudiados en 1902 por Steklov [S] y son llamados valores propios de Steklov, el primer valor propio no cero ν_1 de L es conocido como el primer valor propio de Steklov.

El objetivo general del proyecto es estudiar y contribuir a la solución del

problema de Steklov, es decir, acotar en términos de la geometría de la variedad el primer valor propio no nulo del operador Dirichlet-Neumann.

2.2 Marco Teórico y Estado del Arte

En un comunicado sobre ecuaciones de la física matemática, presentado ante la sociedad matemática de Kharkov, Ucrania, el 16 de diciembre de 1895, Steklov propone el problema de encontrar una función φ armónica en el interior de una superficie convexa S , que satisfaga la condición

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \nu \varphi + f, \text{ sobre } \partial S,$$

donde f es una función continua sobre la frontera de S y ν es un parámetro. En el año 1902 [S], Steklov presenta un estudio con resultados teóricos y aplicados sobre el problema anterior, en su estudio toma importancia la condición auxiliar,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \nu \varphi, \text{ sobre } \partial S,$$

a partir de este momento el problema de encontrar una función φ armónica sobre S con la condición $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \nu \varphi$, sobre ∂S , es conocido como el problema de Steklov; hoy en día el problema ha sido generalizado a variedades Riemannianas conexas, compactas y con frontera suave ∂M , en estos términos una forma práctica de plantear el problema de Steklov es encontrar una solución de

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 & \text{en } M, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \nu \varphi & \text{sobre } \partial M. \end{cases} \quad (1.1)$$

El problema de Steklov tiene solución si y sólo si ν pertenece al espectro del operador Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} L : C^\infty(\partial M) \rightarrow C^\infty(\partial M), \\ u \rightarrow \frac{\partial \hat{u}}{\partial \eta}, \end{cases} \quad (1.2)$$

donde $\hat{u}$ es la extensión armónica de u , y η es la normal unitaria exterior a la frontera de M . L es un operador autoadjunto no negativo en $L^2(\partial M)$ con espectro discreto

$$0 = \nu_0 < \nu_1 \leq \dots \leq \nu_k \leq \dots,$$

con ν_k tendiendo a infinito. Los valores propios para este problema se conocen como valores propios de Steklov, el primer valor propio no cero ν_1 de L es conocido como el primer valor propio de Steklov.

En 1954 para dominios simplemente conexos del plano, Weinstock [W] encuentra la primera desigualdad isoperimétrica para el primer valor propio de Steklov $\nu_1(D)$, el resultado es el siguiente

$$\nu_1(D) \leq \frac{2\pi}{l}, \quad (1.3)$$

donde l es el perímetro de la frontera del dominio simplemente conexo D . La cota superior que da la desigualdad isoperimétrica es la mejor, en el sentido de que es alcanzada, además da un resultado de rigidez, es decir, se alcanza si y sólo si D es un círculo. El mismo Weinstock observa que debido a la clásica desigualdad isoperimétrica $l^2 \geq 4\pi A$, donde A es el área de D , se obtiene la desigualdad

$$\nu_1(D) \leq \sqrt{\frac{\pi}{A}}.$$

Cuando la frontera de D es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, Weinstock observa que el problema de Steklov se resuelve explícitamente para los valores propios y funciones propias que damos a continuación:

$$\begin{cases} \nu_{2k-1} = \nu_{2k} = \frac{k}{a}, & k = 1, 2, \dots, \\ \varphi_{2k-1} = b_k r^k \cos k\theta, & k = 1, 2, \dots, \\ \varphi_{2k} = b_k r^k \sin k\theta, & k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

donde (r, θ) son las coordenadas polares en el plano ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$) y los b_i son factores numéricos escogidos con efectos de normalización de las funciones propias.

En 1968 Kuttler y Sigillito [KS] para un dominio plano Ω estrellado con respecto a un punto, que sin pérdida de generalidad consideraremos el origen, obtienen la cota inferior

$$\nu_1(\Omega) \geq \frac{1 - \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4 \min(R/R')^2}}}{\max \sqrt{R^2 + R'^2}}, \quad (1.4)$$

donde $R(\theta)$ representa la función distancia desde el origen hasta la frontera de Ω . Ellos también demuestran que la igualdad se obtiene si y sólo si Ω es un disco.

En 1970 para dominios convexos del plano Payne [P] encuentra dos desigualdades isoperimétricas. Puesto que el dominio D es convexo Payne asume que existen constantes positivas k_1 y k_2 tales que $k_1 \leq k \leq k_2$, donde k es la función de curvatura de la frontera del dominio D . Con estas hipótesis Payne demuestra que

$$k_1 \leq \nu_1(D) \leq k_2, \quad (1.5)$$

con igualdad si y sólo si D es un círculo.

En el año 1997 Escobar [E2] estudia el problema de Steklov en variedades Riemannianas con frontera. El primer resultado obtenido por Escobar es la extensión de la primera desigualdad de Payne a variedades 2-dimensionales. El resultado es el siguiente:

Teorema 1. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana 2-dimensional compacta con frontera. Supongamos que M tiene curvatura Gaussiana no negativa K y que la curvatura geodésica de ∂M , k_g , satisface $k_g \geq k_0 > 0$. Entonces el primer valor propio de Steklov satisface*

$$\nu_1(M) \geq k_0. \quad (1.6)$$

La igualdad se obtiene solamente para la bola de radio k_0^{-1} .

Recordemos que dos métricas g y $\tilde{g}$ sobre una variedad M son puntualmente conformes si $g = e^{2f}\tilde{g}$, donde f es una función suave de M en los reales. Denotando por $\nu_1(g)$ el primer valor propio de Steklov relativo a la métrica

g , Escobar establece para variedades 2-dimensionales, la siguiente relación entre los valores propios

$$\nu_1(g) \geq \max_{x \in \partial M} e^{-f(x)} \nu_1(\tilde{g}). \quad (1.7)$$

Puesto que las curvaturas geodésicas bajo deformación conforme están relacionadas mediante la ecuación $e^f k_g = k_{\tilde{g}} + \frac{\partial f}{\partial \eta_{\tilde{g}}}$, podemos decir que

$$\nu_1(g) \geq \left(\max_{x \in \partial M} e^{-f(x)} \right) \min_{x \in \partial M} \left\{ e^{f(x)} k_g(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial \eta_{\tilde{g}}} \right\}. \quad (1.8)$$

Para dimensiones mayores, $n \geq 3$, Escobar obtiene el siguiente resultado:

Teorema 2. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana compacta con borde y dimensión $n \geq 3$. Asumamos que $\text{Ricci}(g) \geq 0$ y que la segunda forma fundamental π satisface $\pi \geq k_0 I$ sobre ∂M , $k_0 > 0$. Entonces*

$$\nu_1 > \frac{k_0}{2}. \quad (1.9)$$

En el año 1999 Escobar [E3] obtiene, entre otros, los siguientes resultados:

Teorema 3. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana 2-dimensional, completa, simplemente conexa y con curvatura Gaussiana no-positiva. Sea Ω un dominio de M acotado y simplemente conexo con $\text{Area}(\Omega) = \text{Area}(B_r(0))$ donde $B_r(0)$ es la bola Euclidiana de radio r y centro en 0. Entonces*

$$\nu_1(\Omega) \leq \nu_1(B_r(0)).$$

La igualdad se da solamente cuando Ω es isométrica a la bola Euclidiana $B_r(0)$.

Teorema 4. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana n -dimensional compacta y con frontera. Supongamos que la curvatura de Ricci es no negativa y que la segunda forma fundamental de ∂M satisface $\pi \geq 0$. Entonces*

$$\left(\min_{x \in \partial M} h(x) \right) \nu_1(M) < \frac{2\lambda_1}{n-1}, \quad (1.10)$$

donde λ_1 es el primer valor propio del Laplaciano sobre ∂M y $h(x)$ es la función de curvatura media sobre ∂M .

Al final del artículo Escobar enuncia la siguiente conjetura:

Conjetura 1. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana compacta con borde y dimensión $n \geq 3$. Asumamos que $\text{Ricci}(g) \geq 0$ y que la segunda forma fundamental π satisface $\pi \geq k_0 I$ sobre ∂M , $k_0 > 0$. Entonces*

$$\nu_1 > k_0. \quad (1.11)$$

La igualdad se tiene solamente para la bola Euclidiana de radio k_0^{-1} .

En un siguiente artículo publicado en el 2000 [E4] Escobar demuestra un teorema de comparación, bajo hipótesis sobre las curvaturas radiales demuestra que el primer valor propio sobre una bola geodésica es menor o igual al primer valor propio sobre la bola en un espacio de forma apropiado. A continuación enunciamos el teorema.

Teorema 5. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana n -dimensional completa, $n = 2, 3$. Sea $p \in M$ y $B_r(p)$ una bola geodésica con centro en p y de radio $r < i(p)$, donde $i(p)$ es el radio de inyectividad en el punto p . Asumamos que las curvaturas radiales satisfacen que $K(\frac{\partial}{\partial s}, X) \leq K_o$, donde X es un vector unitario perpendicular al vector radial $\frac{\partial}{\partial s}$. Sea $\beta_r \subset M_o^n$ una bola geodésica de radio r donde M_o^n representa el espacio de forma simplemente conexo de curvatura seccional constante K_o . Entonces*

$$\nu_1(B_r(p)) \leq \nu_1(\beta_r).$$

La igualdad se tiene solamente cuando $B_r(p)$ es isométrica a β_r .

En el 2009 Wang y Xia [W-X1] publican un refinamiento de la cota superior encontrada por Escobar (1.10), el resultado es el siguiente:

Teorema 6. *Sea (M, g) una variedad Riemanniana n -dimensional compacta y conexa con curvatura de Ricci no negativa y borde ∂M y sea η el campo normal unitario exterior de ∂M . Supongamos que las curvaturas principales de ∂M son acotadas inferiormente por una constante positiva c . Denotemos por λ_1 el primer valor propio no cero del Laplaciano actuando sobre funciones*

definidas sobre ∂M . Entonces el primer valor propio no cero ν_1 del problema de Steklov satisface

$$\nu_1 \leq \frac{\sqrt{\lambda_1}}{(n-1)c} (\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_1 - (n-1)c^2}), \quad (1.12)$$

con igualdad si y sólo si M es isométrica a una bola Euclidiana n -dimensional de radio $\frac{1}{c}$.

Observemos que de la desigualdad (1.12) se puede deducir la desigualdad (1.10), en efecto

$$\begin{aligned} \nu_1 &\leq \frac{\sqrt{\lambda_1}}{(n-1)c} (\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_1 - (n-1)c^2}) \\ &\leq \frac{\sqrt{\lambda_1}}{(n-1)c} (\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_1}) \\ &\leq \frac{2\lambda_1}{(n-1)c} \\ &\leq \frac{2\lambda_1}{(n-1)(\min_{x \in \partial M} h(x))}. \end{aligned}$$

Al considerar coordenadas polares en $\mathbb{R}^n$, todo punto $x \in \mathbb{R}^n$ se puede escribir en la forma $x = sy$, $s \geq 0$ y $y \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, donde S^{n-1} es la esfera $(n-1)$ -dimensional de radio 1.

g es una métrica rotacionalmente invariante sobre $\mathbb{R}^n$ si en coordenadas polares se puede escribir en la forma

$$ds^2 + f^2(s)dy^2, \quad (1.13)$$

donde dy^2 representa la métrica usual sobre S^{n-1} y f es una función suave con $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

Para métricas rotacionalmente invariantes en la bola n -dimensional de radio $r > 0$, Montaña [M1], [M2], [M4] obtuvo los siguientes resultados:

Teorema 7. *Sea (B_r, g) una bola en $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) dotada con una métrica rotacionalmente invariante. Supongamos que B_r tiene curvatura de Ricci no*

negativa y curvatura media sobre ∂B_r , $h(r) > 0$. Entonces el primer valor propio para el problema de Steklov ν_1 satisface

$$h(r) \leq \nu_1 \leq \left\{ \frac{r}{f(r)} \right\}^{n+1} \frac{1}{r}.$$

La igualdad se tiene solamente para la métrica estándar de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 8. Sea (B_r, g) una bola n -dimensional dotada con una métrica rotacionalmente invariante g . Supongamos que B_r tiene curvatura de Ricci no positiva. Entonces el primer valor propio del problema de Steklov satisface

$$\left\{ \frac{r}{f(r)} \right\}^{n+1} \frac{1}{r} \leq \nu_1 \leq h(r),$$

donde $h(r)$ es la curvatura media sobre ∂B_r . La igualdad se tiene si y sólo si B_r está dotada con la métrica usual de R^n .

Teorema 9. Sea B_r una bola n -dimensional ($n = 2, 3$) dotada con una métrica g de la forma

$$ds^2 + f^2(s, y)dy^2,$$

donde dy^2 representa la métrica usual sobre S^{n-1} , la esfera unitaria $(n-1)$ -dimensional. Supongamos que las curvaturas radiales satisfacen $K(\frac{\partial x}{\partial s}, X) \leq K_o \leq 0$, donde X es un vector unitario y perpendicular al vector radial $\frac{\partial x}{\partial s}$. Entonces el primer valor propio del problema de Steklov satisface

$$\nu_1(B_r, g) \leq h,$$

donde h es la función curvatura media sobre $(\partial B_r, g)$. La igualdad se tiene si y sólo si B_r está dotada con la métrica usual de R^n .

Para dominios en el espacio Euclidiano Montaña [M3] obtuvo los siguientes resultados:

Teorema 10. Sea M un dominio de $\mathbb{R}^n$. Si existe una bola $B_r(b)$ de radio $r > 0$ y centro en $b = cm(\partial M)$ con $B_r(b) \subseteq M$, entonces el primer valor propio de Steklov sobre M satisface la desigualdad

$$\nu_1(M) \leq \frac{1}{r} = \nu_1(B_r). \quad (1.14)$$

Cuando el dominio es estrellado con respecto a un punto García y Montaña [GM] obtuvieron el siguiente resultado:

Teorema 11. *Sea Ω un dominio de R^n , acotado y estrellado con respecto a un punto p , con frontera $\partial\Omega$ y normal unitaria exterior η . Si $0 \leq \theta \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, donde $\cos(\theta) = \left\langle \frac{x-p}{|x-p|}, \eta \right\rangle$, $x \in \partial\Omega$, entonces el primer valor propio de Steklov para Ω , $\nu_1(\Omega)$, satisface la desigualdad*

$$\nu_1(\Omega) \geq \left(\frac{r_m^{n-2}}{r_M^{n-1}} \right) \frac{\{2 + a - \sqrt{a^2 + 4a}\}}{2\sqrt{a+1}}, \text{ con } a = (n-1) \tan^2(\alpha), \quad (1.15)$$

donde

$$r_m = \inf_{x \in \partial M} \{|x - p|\} \text{ y } r_M = \max_{x \in \partial M} \{|x - p|\}.$$

Con esta investigación pretendemos ayudar al entendimiento y solución de un problema clásico de la geometría diferencial.

2.3 Objetivos

2.3.1 Objetivo General

El objetivo general del proyecto es estudiar y contribuir a la solución de la Conjetura de Escobar para el primer valor propio del problema de Steklov, en este sentido nos proponemos encontrar cotas que relacionen el primer valor propio de Steklov con las curvaturas principales de la frontera de la variedad.

2.3.2 Objetivo Específico

Para tal fin nos hemos planteado un único objetivo específico:

- Demostrar la Conjetura de Escobar para dominios convexos del espacio euclidiano.

Puesto que es un proyecto de Matemáticas, donde no existe una técnica decantada que permita inequívocamente llegar a los resultados esperados;

si se obtienen resultados cercanos y que sean aceptados para publicación en una revista indexada por Colciencias consideraremos que el proyecto ha culminado exitosamente.

2.4 Metodología Propuesta

La metodología a seguir es la siguiente: Revisión bibliográfica exhaustiva; estudio de las técnicas usadas por Escobar [E2] para adaptar algunos resultados a dominios euclidianos; identificación y solución de las posibles obstrucciones que la extensión de esas técnicas presenten al abordar el caso más general, presentación en un seminario periódico de los avances de la investigación; elaboración de reportes técnicos; redacción en forma de artículo de los resultados de la investigación, presentación de resultados en eventos nacionales o internacionales; publicación en revista especializada de los resultados que se hayan obtenido.

2.5 Resultados Esperados

Un artículo A2 donde se publiquen los resultados obtenidos.

2.5.1 Usuarios Potenciales Directos e Indirectos de los Resultados de Investigación

La primera institución que se beneficiará de los resultados de esta investigación será la Universidad del Valle, lo que fortalecerá con ello los programas de pregrado y postgrado en matemáticas. Una contribución Indirecta y tal vez la más importante desde el punto de vista social es la siguiente: El ambiente académico del Departamento se ve enriquecido por las actividades que los grupos de investigación realizan dentro del desarrollo de sus proyectos. Por ejemplo la participación activa como conferencistas o asistentes al Foro divulgativo Semanal del Departamento de Matemáticas, contribuirá a la creación de este ambiente académico, tan necesario para el desarrollo de una matemática universal entre jóvenes estudiantes de pregrado y postgrado y profesores de otras áreas de la Universidad del Valle.

Tipo de Producto	Cantidad
Artículos Completos Publicados en Revistas A	1

Productos de Divulgación	Ponencias nacionales
Ponencias Presentadas en Eventos	1

2.6 Impactos Esperados

El proyecto se inscribe en el Programa de Ciencias Básicas y su mayor contribución social debe medirse por la formación de investigadores y el aumento de la capacidad investigativa de la nación. Como el problema general planteado es un problema en la frontera de la investigación matemática mundial, los artículos de investigación que se publicarán como resultado de este proyecto, serán una muestra visible de una capacidad investigativa de primer nivel. El éxito en el proyecto contribuirá al fortalecimiento del Programa de Doctorado en Matemáticas de la Universidad del Valle.

2.7 Declaración Sobre Impacto Ambiental del Proyecto

El proyecto no produce ningún impacto ambiental negativo.

2.8 Cronograma de Actividades

Este proyecto de Investigación está propuesto para dos años, empezando en Agosto del 2016. El cronograma de actividades es el siguiente:

Agosto 2016-Agosto de 2017

1. Lectura de artículos asignados sobre el tema.
2. Actualización bibliográfica.
3. Exposición de los avances de la Investigación en el Seminario de Geometría.

Septiembre de 2017-Agosto de 2018.

1. Exposición de los avances de la Investigación en el Seminario de Geometría.
2. Exposición de los avances de la Investigación en el Foro Divulgativo Semanal del Departamento de Matemáticas.
3. Escritura de los resultados obtenidos.
4. Sometimiento para publicación de los resultados obtenidos en revistas indexadas.
5. Redacción del informe final.

3 Presupuesto en Pesos

Este proyecto tiene un costo de \$18.000.000 pesos.

Presupuesto Global en Pesos

Rubros	Contrapartida Especie	Solicitado Convocatoria	Total
Personal	18.000.000		18.000.000
Total	18.000.000	18.000.000	18.000.000

Descripción de los gastos de personal (en miles de pesos)

Nombre	Función Proyecto	Dedicacion	Especie	Efect
Óscar Montaña	Inv. Principal	10 hrs/sem	18.000.000	
Total		440 hrs/año	18.000.000	

Hoja de Vida

La hoja de vida del investigador principal también aparece en la aplicación CvLAC que se encuentra disponible en www.colciencias.gov.co/scienti.

1.0.1. Datos personales

Nombre: Óscar Andrés Montaña Carreño

Cédula: 16.714.852 de Cali

Correo electrónico: oscar.montano@correounivalle.edu.co

Dirección: Cra 100 # 28 - 68 Unidad residencial Madeira 3-104

Celular: 3176705615

Teléfono oficina: 3212100 extensión 3101

Oficina: 3170

Cargo actual: Profesor asociado del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle

1.0.2. Títulos Universitarios

Área: Geometría y Topología

Título	Universidad	Año
Candidato a Doctor en Ciencias Matemáticas	Univalle	2014
Magister en Ciencias Matemáticas	Univalle	2004
Matemático	Univalle	1988

1.0.3. Últimos cargos desempeñados

Institución	Cargo	Año
Universidad del Valle	Docente	2005-2014
Universidad Javeriana	Docente	1990-2005

1.0.4. Publicaciones

1. Montaña O. A Lower Bound for the First Steklov Eigenvalue on a Domain. Revista Colombiana de Matemáticas, Vol 49, 2015.
2. Montaña O. Lower Bound for the First Steklov Eigenvalue. Revista de Ciencias Naturales y Exactas de la Universidad del Valle, Vol 18,2, 2014.
3. Montaña O. The Stekloff Problem for Rotationally Invariant Metrics on the Ball. Revista Colombiana de Matemáticas, Vol 47, 2013.

4. Montaña O. Cota superior para el primer valor propio del problema de Steklov. Revista Integración, Vol 31, 2013.
5. Montaña O. Cota superior para el primer valor propio de Steklov en el espacio euclideo. Revista de Ciencias Naturales y Exactas de la Universidad del Valle, Vol 17, 2013.
6. Montaña O. Cota inferior para el primer valor propio de Neumann. Revista de Ciencias Naturales y Exactas de la Universidad del Valle, Vol 17, 2013.
7. Montaña O. El problema de Stekloff sobre el cono. Revista Integración, Vol 30, 2012.
8. Montaña O. Perdomo O. Salas N. Métricas planas y el teorema de uniformización en toros mínimos de la esfera 3 dimensional. Revista de la academia colombiana de ciencias. Vol 32, 2008.
9. Montaña O. Inexistencia de lazos oblicuos sobre el hiperboloide de dos hojas. Revista Tumbaga. Vol 1, 2006.
10. Montaña O. Tantrices de lazos en $\mathbb{R}^3$. Lecturas Matemáticas. Vol 26, 2005.
11. Montaña O. Volumen de la hiperesfera. Scientia y Technica. Vol 28, 2005.
12. Montaña O. Introducción al problema de prescribir la curvatura gaussiana sobre $\mathbb{R}^2$. Revista Integración. Vol 21, 2003.
13. Montaña O. García G. Métricas conformes en superficies compactas con frontera. Matemáticas enseñanza universitaria. Vol 11, 2003.
14. Montaña O. Tofiño J. La geometría de los fractales una nueva geometría de la naturaleza. Epíclidos. Vol 1, 2002.

1.0.5. Trabajos de grado de Maestría dirigidos

Teorema de Holonomía de Berger. Estudiante Johan Suarez Motato. 2011.

1.0.6. Proyectos de Investigación

1. Estimativos Geométricos para el Primer valor propio del Problema de Steklov. Universidad del Valle. Junio de 2014 a Diciembre de 2015.
2. Existencia de lazos oblicuos en superficies. Universidad del Valle. Septiembre de 2005 a Junio de 2006.
3. Caracterización de superficies minimales en S^3 . Javeriana Cali. Agosto de 2004 a Agosto de 2005.

Bibliografía

- [B] J.H. Bramble and L.E. Payne, *Bounds in the Neumann problem for second order uniformly elliptic operators*, *Pacific Journal of Mathematics*, 12, 3, 823-833, (1962)
- [C] A. P. Calderón, *On an Inverse Boundary Value Problem*, *Seminar in Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics*, Soc. Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 65 - 73, (1980)
- [CH] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, Inc., (1984)
- [E1] J.F Escobar, *Topics in PDE's and Differential Geometry*, XII Escola de Geometria Diferencial, Goiania/Ed. da UFG, (2002)
- [E2] J.F Escobar, *The Geometry of the first Non-Zero Steklov Eigenvalue*, *Journal of functional analysis*, 150, 544-556, (1997)
- [E3] J.F Escobar, *An isoperimetric inequality and the first Steklov Eigenvalue*, *Journal of functional analysis*, 165, 101-116, (1999)
- [E4] J.F Escobar, *A comparison theorem for the first non-zero Steklov Eigenvalue*, *Journal of functional analysis*, 178, 143-155, (2000)
- [E5] J.F Escobar, *The Yamabe problem on manifolds with Boundary*, *Jour. of Diff. Geom.*, 25, 21-84, (1992)
- [E6] J.F Escobar, *Conformal Deformation of a Riemannian Metric to a Scalar Flat Metric with Constant Mean Curvature on the Boundary*, *Annals of Math.*, 136, 1-50, (1992)

- [G] J.F. Grosjean, *Upper bounds for the first eigenvalue of the Laplacian on compact submanifolds*, *Pacific J. Math.*, 206(1), 93 - 112, (2002)
- [I-M] S. Ilias, O. Makhouf, *A Reilly inequality for the first Steklov eigenvalue*, *Differential Geom. Appl.*, 5, 699 - 708, (2011)
- [KS] J.R. Kuttler and V.G. Sigillito, *Lower bounds for Stekloff and free membrane eigenvalues*, *SIAM Review*, 10, 368-370, (1968)
- [M1] O. A. Montaña, *The Stekloff problem for rotationally invariant metrics on the ball*, *Revista Colombiana de Matemáticas*, 47, 2, 181-190, (2013)
- [M2] O. A. Montaña, *Cota superior para el primer valor propio del problema de Steklov*, *Revista Integración*, 31, 1, 53-58, (2013)
- [M3] O. A. Montaña, *Cota superior para el primer valor propio de de Steklov en el espacio euclideo*, *Revista de Ciencias Naturales y Exactas de la Universidad del Valle*, 17, 2, (2013)
- [M4] O. A. Montaña, *Métricas rotacionalmente invariantes y el problema de Steklov*, *Sometido a la Revista Integración*, (2014)
- [GM] G. García and O. A. Montaña, *A Lower Bound for the First Eigenvalue of The Steklov Problem in Domains of a Euclidian Space*, *Sometido a la Revista Colombiana de Matemáticas*, (2014)
- [P] L. E. Payne, *Some isoperimetric inequalities for harmonic functions*, *SIAM J. Math. Anal.*, 1, 354-359, (1970)
- [Pr] M. H. Protter, H. F. Weinberger *Maximum Principles in Differential Equations*, *Springer Verlag.*, (1984)
- [R] R.C. Reilly, *Aplications of the Hessian operator in a Riemannian manifold*, *Indiana Univ. Math.*, 26, 459 - 472, (1977)
- [S] M. W. Steklov, *Sur les problemes fondamentaux de la physique mathematique*, *Ann. Sci. École Norm.*, 19, 445 - 490, (1902)

- [SY] R. Schoen and S. T. Yau, *Lectures on Differential Geometry*, International Press, (1994)
- [W] R. Weinstock, *Inequalities for a classical eigenvalue problem*, *J. Rational Mech. Anal.*, 3, 745 - 753, (1954)
- [W-X1] Q. Wang, C. Xia, *Sharp bounds for the first non-zero Steklov eigenvalues*, *J. Funct. Anal.*, 257, 2635 - 2654, (2009)
- [W-X2] Q. Wang, C. Xia, *Inequalities for the Steklov Eigenvalues*, *arXiv:1006.1154*, (2010)
- [X] C. Xia, *Rigidity for compact manifolds with boundary and non-negative Ricci curvature*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125, 1801 - 1806, (1997)



ZURICH DE OCCIDENTE S.A

CALI

CRA 4 # 10-44 OFICINA 1005

Edificio Plaza de Cayzedo

Tel: 8963987

No somos grandes
contribuyentes según
resolución número 000041
del 30 de enero de 2014

IVA Régimen Común Auto-retenedores Resolución 1776 de Febrero 15/2011

Código Ica 203 7.7 x 1000 NO Efectuar retenciones

Resolución Autorización DIAN: 310000072419 2013/08/20 4CAL Numeración: 1 - 3000

Factura impresa x Computador por: ZURICH DE OCCIDENTE S.A. Nit: 800.087.219-1

"La presente factura de venta se asimila en sus efectos legales a la letra de cambio." (ART 772, 773,774 del Código del Comercio. Toda mora en el pago causa los intereses máximos permitidos por la ley.)

UNIVERSIDAD DEL VALLE

Nit: 890399010

CALI - VALLE DEL CAUCA

Dirección: CLL 13 No.100-00

Tel. : 3212100

Vendedor: Ruth Sanchez

Orden de compra del cliente: 0040-1213-2014/ OSCAR
ANDRES MONTAÑO

Factura de Venta: 4CAL-0314

TRM DIA

2133.03

Fecha factura

14/11/2014

Fecha de vencimiento

14/12/2014

Fecha de pago oportuno

Descripción

Cantidad

Precio
unidad

Desc.(%)

Precio

Portege R30-A3102L C15-4300M 4GB 750GB 13,3"
W7PRO

1
Unidad(es)

\$2,678,813.00

0.00

\$2,678,813.00

Base:

\$2,678,813.00

Impuestos:

\$0.00

Total:

\$2,678,813.00

Impuesto

Base

Importe

AUTORRETENCION CREE 0.4%

\$2,678,813.00

\$-10,715.25

AUTORRETENCION VENTAS CR 2.5%

\$2,678,813.00

\$66,970.32

AUTORRETENCION CREE CR 0.4%

\$2,678,813.00

\$10,715.25

AUTORRETENCION VENTAS 2.5%

\$2,678,813.00

\$-66,970.32

Plazo de pago: 30 días

Las garantías de todos los productos son atendidas solamente por los centros de servicio del fabricante de acuerdo a las instrucciones contenidas en las condiciones de garantía que acompaña cada producto.



w.zurich.co

El eslabon entre Usted y la Tecnología