

**PORTAFOLIO ÓPTIMO EN EL MODELO DE MEDIA-VARIANZA DE  
MARKOWITZ BAJO UNA CONDICIÓN DE CARDINALIDAD.**

**EDWAR ARTURO ZAPATA PEREZ  
COD: 0626362**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ADMINISTRACIÓN  
PROGRAMA ACADÉMICO DE CONTADURÍA PÚBLICA  
SANTIAGO DE CALI  
2013**

**PORTAFOLIO ÓPTIMO EN EL MODELO DE MEDIA-VARIANZA DE  
MARKOWITZ BAJO UNA CONDICIÓN DE CARDINALIDAD.**

**EDWAR ARTURO ZAPATA PEREZ**

**Trabajo de grado en la modalidad de Monografía requisito para optar al título  
de Contador Público**

**Director  
JAVIER H. OSPINA HOLGUIN**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA ADMINISTRACIÓN  
PROGRAMA ACADÉMICO DE CONTADURÍA PÚBLICA  
SANTIAGO DE CALI  
2013**

## **AGRADECIMIENTOS**

- Primero dar gracias a Dios por que ha sido él quien me dio la oportunidad de vivir y disfrutar esta magnífica experiencia, me ha guiado e iluminado en el transcurso de mi vida y en el desarrollo de mi carrera.
- Segundo agradecer a mis padres, hermanos y tíos por su apoyo incondicional, los cuales son las personas que más admiro y quiero, sin ellos no hubiera sido posible culminar esta gran etapa de mi vida.
- A mi madre quien me dio la vida y la oportunidad de vivir esta experiencia le dedico este triunfo porque ella con su sabiduría e incondicional apoyo hizo posible que cumpliera este sueño. Gracias madre por tu confianza y amor hacia mí.
- A mi novia quien me brindo todo su cariño, amor y entendimiento para que lograra mis metas, gracias a ella por acompañarme en este camino.
- Tercero agradecemos a cada uno de los docentes que me acompañaron en este ciclo de mi vida y me brindaron todo su conocimiento para crecer personal y profesionalmente; en especial al profesor Javier Humberto Ospina H. quien muy amablemente me colaboró en la consecución de mi objetivo y quien me dio toda su paciencia y dedicación para culminar con el desarrollo de esta investigación.
- Por último y no menos importante le doy gracias a nuestros compañeros y amigos que hicieron que este camino fuera agradable, lleno de anécdotas y alegrías.

## TABLA DE CONTENIDO

|                                                                                                                                        | Pág.      |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>INTRODUCCION .....</b>                                                                                                              | <b>8</b>  |
| <b>JUSTIFICACIÓN .....</b>                                                                                                             | <b>9</b>  |
| <b>1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....</b>                                                                                             | <b>10</b> |
| 1.1. ANTECEDENTES .....                                                                                                                | 10        |
| 1.2. CONTEXTO DEL PROBLEMA .....                                                                                                       | 12        |
| 1.3. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA .....                                                                                                    | 14        |
| 1.4. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA .....                                                                                                    | 15        |
| <b>2. OBJETIVOS .....</b>                                                                                                              | <b>17</b> |
| 2.1. OBJETIVO GENERAL .....                                                                                                            | 17        |
| 2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....                                                                                                       | 17        |
| <b>3. MARCO REFERENCIAL .....</b>                                                                                                      | <b>18</b> |
| 3.1. MARCO CONTEXTUAL .....                                                                                                            | 18        |
| 3.2. MARCO TEORICO.....                                                                                                                | 22        |
| 3.2.1 Costos de Transacción en la Bolsa de Colombia: un ejemplo.....                                                                   | 23        |
| 3.2.2 Medidas utilizado para encontrar el portafolio óptimo .....                                                                      | 24        |
| 3.2.2.1 Optimización matemática.....                                                                                                   | 24        |
| 3.2.2.2 Fundamentacion Estadistica .....                                                                                               | 27        |
| 3.2.2 Modelo de Markowitz .....                                                                                                        | 27        |
| 3.2.3 Portafolios Eficientes .....                                                                                                     | 29        |
| 3.3. MARCO CONCEPTUAL.....                                                                                                             | 31        |
| <b>4. METODO .....</b>                                                                                                                 | <b>35</b> |
| 4.1DESARROLLO DEL MODELO MATEMATICO PARA HALLAR EL<br>PORTAFOLIO OPTIMO PARA EL INVERSIONISTA CON CONDICIONES DE<br>CARDINALIDAD. .... | 35        |
| <b>5. RESULTADOS DE LA INVESTIGACION .....</b>                                                                                         | <b>43</b> |
| 5.1 CONSTRUCCION DEL PORTAFOLIO OPTIMO PARA EL INVERSIONISTA .                                                                         | 43        |
| 5.2 POSIBLES COMBINACIONES DADO EL RESULTADO DEL MODELO.....                                                                           | 44        |
| 5.3 ANALISIS DE LOS RESULTADOS.....                                                                                                    | 51        |

|                                             |    |
|---------------------------------------------|----|
| CONCLUSIONES .....                          | 52 |
| RECOMENDACIONES Y LIMITES DEL ESTUDIO ..... | 53 |
| BIBLIOGRAFIA .....                          | 54 |

## LISTA DE GRAFICAS

Pág.

|                                                                                              |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Grafica 1. Extremos de una función.....                                                      | 25 |
| Grafica 2. Frontera eficiente .....                                                          | 30 |
| Grafica 3. Acciones con más índice de Bursátilidad en el Mercado Accionario Colombiano ..... | 35 |
| Grafica 4. Cambio porcentual de las acciones encontradas .....                               | 36 |
| Grafica 5. Selección de la Matriz de Varianza-Covarianzas .....                              | 37 |
| Grafica 6. Parámetros de la Matriz de Varianzas-Covarianzas .....                            | 38 |
| Grafica 7. Resultado de la matriz de Varianzas-Covarianzas .....                             | 38 |
| Grafica 8. Vector de rendimientos medios .....                                               | 39 |
| Grafica 9. Solución y parámetros del Solver .....                                            | 42 |

## LISTA DE TABLAS

|                                                                                                                | Pág. |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Tabla 1. Modelo Solver grupo seis acciones periodos comprendidos entre enero de 2009 hasta julio de 2012 ..... | 43   |
| Tabla 2. Bancolombia, Ecopetrol y Banco de Bogotá .....                                                        | 44   |
| Tabla 3. Bancolombia, Ecopetrol y Almacenes Éxito .....                                                        | 45   |
| Tabla 4. Bancolombia, Ecopetrol e Isa .....                                                                    | 45   |
| Tabla 5. Bancolombia, Ecopetrol y Suramericana .....                                                           | 45   |
| Tabla 6. Bancolombia, Almacenes Éxito y Banco de Bogotá .....                                                  | 46   |
| Tabla 7. Bancolombia, Almacenes Éxito e Isa .....                                                              | 46   |
| Tabla 8. Bancolombia, Isa y Banco de Bogotá .....                                                              | 46   |
| Tabla 9. Bancolombia, Suramericana y Banco de Bogotá .....                                                     | 47   |
| Tabla 10. Bancolombia, Suramericana y Almacenes Éxito .....                                                    | 47   |
| Tabla 11. Bancolombia, Suramericana e Isa .....                                                                | 47   |
| Tabla 12. Ecopetrol, Almacenes Éxito y Banco de Bogotá .....                                                   | 48   |
| Tabla 13. Ecopetrol, Almacenes Éxito e Isa .....                                                               | 48   |
| Tabla 14. Ecopetrol, Isa y Banco de Bogotá .....                                                               | 48   |
| Tabla 15. Ecopetrol, Suramericana y Banco de Bogotá .....                                                      | 49   |
| Tabla 16. Ecopetrol, Suramericana y Almacenes Éxito .....                                                      | 49   |
| Tabla 17. Ecopetrol, Suramericana e Isa .....                                                                  | 49   |
| Tabla 18. Almacenes Éxito, Isa y Banco de Bogotá .....                                                         | 50   |
| Tabla 19. Suramericana, Almacenes Éxito y Banco de Bogotá .....                                                | 50   |
| Tabla 20. Suramericana, Almacenes Éxito e Isa .....                                                            | 50   |
| Tabla 21. Suramericana, Isa Y Banco de Bogotá .....                                                            | 51   |

## INTRODUCCIÓN

El propósito del estudio consiste en plantear un modelo para la creación de un portafolio óptimo para un inversionista en el modelo de media-varianza de Markowitz teniendo en cuenta una condición de cardinalidad. Una condición de cardinalidad es una condición según la cual se escoge únicamente un conjunto de  $k$  acciones del total global de  $n$  acciones analizadas, con  $k < n$ .

Cuando el inversionista decide optimizar un portafolio, es decir hallar, dada cierta rentabilidad, qué tanto debe invertir en cada acción para minimizar el riesgo, (lo que típicamente se logra con el modelo de media-varianza de Markowitz), a menudo es de interés añadir, por consideraciones, por ejemplo, de costos, una restricción adicional: el que el número de acciones escogidas sea más pequeño que el total de acciones analizadas. En este trabajo, se plantea un modelo matemático para incorporar esta condición al problema de optimización de Markowitz.

El desarrollo de la investigación, junto con los resultados obtenidos, es de suma importancia porque sugieren una generalización particular del problema de Markowitz a condiciones del mercado más realistas.

Para llevar a cabo el desarrollo del trabajo, se utilizará la siguiente estrategia empírica.

- a) Se planteará en un ejemplo concreto el nuevo modelo como un problema de optimización de Markowitz con una condición adicional.
- b) Para demostrar que hemos llegado al óptimo global, consideraremos todas las combinaciones de  $k$  acciones del total de  $n$ . Para cada combinación se resolverá el portafolio de Markowitz original (sin la condición), lo que nos dará un óptimo para cada combinación. Luego se escogerá el óptimo entre todas las combinaciones óptimas.

Los dos óptimos (en a. y en b.) deben coincidir. El tipo de investigación brindará un apoyo a los inversionistas para la adecuada toma de decisiones en el amplio sector del mercado de valores.

## JUSTIFICACIÓN

La investigación establece un aporte de cómo deberá ser un portafolio óptimo para un inversionista mediante una condición de cardinalidad. Una condición de cardinalidad es aquella que solo permite escoger un subgrupo de acciones de un total disponible. La condición adicional puede ser deseable por diversas razones, como con el fin de reducir los costos de transacción o cuando el inversionista prefiere tener menos acciones en su portafolio porque le parece que no tiene suficiente tiempo o dinero para estar pendiente de un portafolio con más acciones.

Por ello se establecerá un modelo matemático que nos permita identificar las variables a tener en cuenta para diversificar la inversión y reducir el riesgo con una condición de cardinalidad. Una vez definido el modelo se resolverá mediante un ejemplo el problema anteriormente mencionada.

En el ámbito académico resulta de importancia el tema planteado en la investigación, ya que es importante estar en capacidad de analizar y brindar una asesoría lo más personalizada posible, y la condición de cardinalidad apunta a un subsegmento de los inversionistas que no estarían satisfechos con el modelo tradicional.

Para el autor de la investigación, además se pretende afianzar conocimientos financieros sobre el mercado bursátil y demás temas económicos que nos lleven a adquirir habilidades con miras al adelanto de estudios de posgrados.

## 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

### 1.1 ANTECEDENTES

El mercado accionario colombiano ha sido objeto de constante investigación y día tras día ha provocado innumerables interrogantes prácticos y académicos los cuales han sido debatidos por los analistas de mercado y los entes regulatorios. Por consiguiente, se destaca que las constantes investigaciones realizadas han ayudado a que las condiciones de la economía mejoren y evolucionen de la mano de la globalización en la necesidad de estar a la altura de los grandes mercados financieros.

En años anteriores entidades como el Banco de República en su libro Regulación del Mercado de Capitales y el Congreso de la República por medio de la ley 964 de 2005 publicaron regulaciones con el fin de establecer un marco jurídico y normativo para el adecuado uso del mercado accionario y los procedimientos y directrices a utilizar para hacer parte del extenso y dispendioso sector del Mercado de Capitales.

Autores como Robinson y Urrutia (2007) en su ejemplar llamado “Economía Colombiana del siglo XX, un análisis cuantitativo”<sup>1</sup> y Zuluaga, y Arbeláez (2002) en su libro “El Mercado de Capitales Colombiano en los noventa”<sup>2</sup> establecieron sustanciosas investigaciones que han servido como base de referencia para que las personas interesadas en esta clase de mercado tengan una seguridad razonable del rumbo que van a tomar sus negocios y los posibles riesgos y oportunidades a los cuales se van a enfrentar.

Actualmente en esta nueva década R. P. Brito y L. N. Vicente en “Efficient Cardinality/Mean-Variance Portfolios”<sup>3</sup> realizan un aporte al modelo de media-varianza de Markowitz mediante condiciones de cardinalidad, han observado la teoría y han concluido que existen numerosas variables como los costos de

---

<sup>1</sup> ROBINSON, James; URRUTIA Miguel. Economía Colombiana del siglo XX un análisis cuantitativo. Primera Edición. Bogotá: 2007. p. 239-308.

<sup>2</sup> ARBELÁEZ, María Angélica; ZULUAGA, Sandra; GUERRA, María Lucía. El mercado de Capitales Colombiano en los Noventa y las firmas comisionistas de Bolsa. Bogotá: Alfa Omega Grupo Editor, 2002.

<sup>3</sup> R. P. Brito y L. N. Vicente. Efficient Cardinality/Mean-Variance Portfolios. Febrero 19 de 2012 pág.5-6.

transacción, impuestos entre otros que deben ser tenidos en cuenta en la conformación de portafolios.<sup>4</sup>

Por otro lado, en Colombia existen numerosas publicaciones tales como la revista Dinero o la revista Poder desde donde por medio de sus columnas se hace alusión a los diferentes acontecimientos en materia de economía y finanzas y donde se hace referencia a las principales compañías presentes en el mercado accionario. Existen, además diarios y medios electrónicos que publican los índices y precios de acciones y divulgan también las diferentes formas de practicar las negociaciones en el mercado de valores identificando, analizando y concluyendo sobre los avances en materia de mercado accionario que se deben tener en cuenta a la hora de invertir.

La mayoría de los conceptos de inversión en Colombia, para un sólo periodo de tiempo, están enmarcados en el modelo de optimización media-varianza de Markowitz, aunque existen desarrollos recientes como los modelos VaR (valor en riesgo). El presente trabajo ofrece un primer paso a la generalización del modelo de media-varianza para un mercado en que los inversionistas, en especial las personas naturales, suelen tener posiciones en sólo un subconjunto del conjunto total de acciones líquidas. No existen antecedentes en Colombia sobre análisis de portafolios eficientes mediante condiciones de cardinalidad hasta donde pudimos investigar.

---

<sup>4</sup> Ibíd. Since the appearance of the classical Markowitz mean-variance model, a number of methodologies have been proposed to render it more realistic. The classical Markowitz model assumes a perfect market without transaction costs or taxes, but such costs are an important issue to consider as far as the portfolio selection is concerned, especially for small investors. Recently, it has been studied the addition of a constraint that sets an upper bound on the number of active positions taken in the portfolio, in an attempt to improve performance and reduce transactions costs.

## 1.2. CONTEXTO DEL PROBLEMA

En 1993, Medina y Echeverri publican los resultados de un estudio sobre las opciones de rentabilidad y riesgo para las 32 acciones que componían el Índice de la Bolsa de Medellín (IBOMED) y el cálculo de la frontera eficiente a partir de la teoría de portafolios y del Modelo de valoración de Activos de Capital (CAPM).<sup>5</sup>

La Misión de Estudios del Mercado de Capitales [1996] concluyó, entre otras, que en Colombia ha ido creciendo el número de empresas que han venido financiando sus proyectos por la vía del endeudamiento y reinversión de utilidades, de tal manera que el crédito bancario y el denominado “patrimonio del inversionista” se han consolidado como sus fuentes principales de financiamiento. De acuerdo con esto, la generación de recursos para la empresa típicamente no ha pasado por las bolsas de valores.

Sumado al surgimiento de la Bolsa de Valores de Colombia en el año 2001, cuando se integraron en un solo ente las bolsas de valores de Bogotá, Medellín y Cali<sup>6</sup>, la promulgación de la ley 964 de 2005 como marco normativo que promueve y regula el mercado de capitales en Colombia<sup>7</sup> se dieron pasos decisivos que dan a entender que las políticas de desarrollo del país dependen en gran medida del dinamismo económico dado por el aporte que simultáneamente puedan dar los sectores empresarial, financiero y estatal en una sola bolsa. La bolsa genera así un ambiente equitativo, pero sobre todo atractivo, para que el inversionista de cualquier condición tenga la voluntad y la confianza de contribuir al flujo del ciclo económico mediante su participación en el mercado de valores y a la espera de obtener por ello más riqueza.

En el contexto de esta investigación se tiene como principal modelo para determinar la inversión la solución de una optimización por medio de la teoría de media-varianza de Markowitz. Este modelo está basado en la teoría de la elección de portafolios de inversión mediante una medida de riesgo, que es la varianza o

---

<sup>5</sup> MEDINA Carlos A. Y ECHEVERRI José I. La selección de portafolios y la frontera eficiente: el caso de la Bolsa de Medellín, 1990-1992. Lecturas de Economía. No. 39. Medellín, 1993.

<sup>6</sup> BOLSA DE VALORES DE COLOMBIA [En línea]  
[http://www.bvc.com.co/recursos/Files/Acerca\\_de\\_la\\_BVC/Ochenta\\_Anos\\_Mercado\\_de\\_Valores](http://www.bvc.com.co/recursos/Files/Acerca_de_la_BVC/Ochenta_Anos_Mercado_de_Valores).  
[Citado el 4 diciembre de 2012] pág.12.

<sup>7</sup> Ibíd., pág. 14.

volatilidad dado un rendimiento deseado. Los portafolios eficientes según Markowitz, son aquellos que tiene un mínimo riesgo, para un retorno dado o equivalentemente un máximo retorno para un nivel de riesgo dado.

Para encontrar portafolios eficientes se minimiza la varianza del portafolio que depende de la matriz de varianzas covarianzas. La matriz de varianzas covarianzas representa toda la variabilidad individual de cada acción y los comovimientos entre acciones y por ende el riesgo de los activos financieros en el portafolio. Su estimación precisa es fundamental en la determinación del portafolio eficiente en el modelo de media-varianza.

Para poder integrar una cartera de inversión equilibrada lo más importante es la diversificación ya que de esta forma se reduce la variación de los rendimientos. La idea de la cartera óptima es diversificar las inversiones para así disminuir las fluctuaciones en la rentabilidad total de la cartera y por lo tanto también el riesgo.

Dada la teoría de carteras de Markowitz, esta investigación pretende mediante un análisis de portafolios presentar un modelo de optimización que minimicé el riesgo y nos dé una inversión óptima añadiendo una condición de cardinalidad al problema.

### **1.3. DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA**

Es necesario diversificar para disminuir el riesgo de una inversión en portafolios. Para ello es necesario no invertir todo el capital en un solo valor, sino buscar un portafolio diversificado en la así llamada frontera eficiente lo que nos garantiza que la composición del portafolio es aquella que reduce el riesgo dada cierta rentabilidad.

En busca de una mejor estrategia para la creación de un adecuado portafolio de inversión se deben evaluar también otros aspectos secundarios: los costos de transacción y los costos de búsqueda de información, son dos de estos aspectos. Una manera específica de minimizar estos costos (aunque no la única) es requerir que el portafolio óptimo sólo tenga un número más pequeño del total de acciones líquidas analizadas.

Formular un modelo matemático que nos permita seleccionar el mejor subgrupo de valores de un total de acciones consideradas para conformar lo que será el portafolio de inversión es el propósito de este trabajo. Lo anterior ofrece un primer paso o un referente a modelos más generales que tengan en cuenta no sólo la rentabilidad de los valores adquiridos, y los riesgos y oportunidades de crecimiento, sino también los costos a los que se está expuesto. La condición de cardinalidad, en este contexto, tiene gran importancia matemática, ya que permite, por definición, escoger el mejor subgrupo de acciones de un grupo mayor.

#### 1.4. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En el contexto de la optimización media-varianza de Markowitz, específicamente vamos a resolver el problema con una condición adicional: la condición de cardinalidad.

El problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned} \min_y \sigma_p^2 &= y' \Sigma y \\ \text{suje to a} \\ 1. y' \mu &= \mu_0, \\ 2. y' 1 &= 1, \\ 3. y_i &\geq 0, \\ 4. \sum_i 1_{y_i > 0} &\leq k \end{aligned}$$

Dónde:

$\sigma_p^2$  es la varianza del portafolio que se desea minimizar,

$y$  es el vector de pesos del portafolio que indica qué porcentaje se invertirá en cada acción en el óptimo,

$\Sigma$  es la matriz de varianzas covarianzas de los rendimientos,

$\mu$  es el vector de rendimientos de cada acción,

$\mu_0$  es el rendimiento esperado,

$1_{y_i > 0}$  es la función indicatriz que es igual a 1 si  $y_i > 0$  e igual a 0 en otro caso.

El problema consiste entonces en hallar el mínimo de la varianza de un portafolio bajo las siguientes condiciones:

1. Que el rendimiento total del portafolio sea un rendimiento esperado  $\mu_0$
2. Que la suma de todos los pesos equivalga a 1.
3. Que cada peso sea mayor o igual a cero.
4. Y que el total de las acciones con pesos positivos sea igual o menor que  $k$ .

Nuestro interrogante será: ¿cómo deberá ser un portafolio óptimo en el mercado accionario en Colombia para un inversionista usando una condición de cardinalidad?

## **2. OBJETIVOS**

### **2.1. OBJETIVO GENERAL**

Plantear una estrategia para la construcción de un adecuado portafolio para el inversionista teniendo en cuenta una condición de cardinalidad.

### **2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Plantear algorítmicamente (en Excel) un modelo matemático que permita hallar el portafolio óptimo para el inversor teniendo en cuenta una condición de cardinalidad.
- Construir un portafolio óptimo para el inversionista de acuerdo al algoritmo propuesto anteriormente.
- Corroborar que el portafolio óptimo hallado mediante el algoritmo propuesto sea realmente óptimo mediante un análisis de media-varianza de todas las combinaciones de  $k$  acciones de  $n$  posibles.

### 3. MARCO REFERENCIAL

#### 3.1. MARCO CONTEXTUAL

El presente estudio se enmarca contextualmente en las Bolsas de Valores, en las Firms Comisionistas de Bolsa y en las Entidades Financieras como organismos o entes autorizados para la funcionalidad del mercado de valores en donde se compran y venden instrumentos financieros como acciones, bonos, divisas, entre otros. Por ello es pertinente describir y resaltar algunos aspectos de dichos organismos que operan en Colombia y que son preponderantes a la hora de contextualizar esta investigación.

“La Bolsa de Valores en Colombia surgió por primera vez en 1.928 como una sociedad anónima al servicio de inversionistas, empresarios e industriales como un espacio dedicado a facilitar el contacto entre aquellas personas que tenían dinero ahorrado o para invertir, y aquellas que sabían y tenían la experiencia en producir o hacer negocios pero que necesitaban precisamente de ese capital o de esos recursos para poder trabajar o crecer. Inicialmente eran pocas las empresas inscritas en la bolsa, es decir un mercado cerrado y pequeño. Luego esa unión solidaria entre empresarios e inversionista sellada mediante la bolsa fue creciendo y siendo determinante en el crecimiento socioeconómico del país. En 1961 nació la Bolsa de Valores de Medellín vista como un mercado ideal para la transacción comercial de títulos valores en la región; lo cual permitió un crecimiento económico notable en innovación para las empresas inscritas. Más adelante en 1981 la idea se cristalizó en el Occidente del Colombia, y fue así como se creó en Santiago de Cali la Bolsa de Occidente.”<sup>8</sup>

Finalmente, en 2001, la unión de las bolsas se hizo realidad dando paso a la creación de la Bolsa de Valores de Colombia, una única entidad que desde esa época ha venido administrando los principales mercados de valores del país. Desde el inicio de sus funciones, en julio de 2001, la BVC ha demostrado ser la respuesta a las necesidades de empresarios, intermediarios e inversionistas,

---

<sup>8</sup> BOLSA DE VALORES DE COLOMBIA [En línea]

[http://www.bvc.com.co/pps/tibco/portalbvc/Home/Inversionistas/Video\\_Conozca\\_la\\_Bolsa?action=dummy](http://www.bvc.com.co/pps/tibco/portalbvc/Home/Inversionistas/Video_Conozca_la_Bolsa?action=dummy) [Citado el 15 de Mayo de 2012] p.2.

quienes con una sola entidad ahora encuentran mayores beneficios para administrar los mercados accionario, cambiario, de derivados y de renta fija.<sup>9</sup>

Es así como hoy nuestro mercado de capitales cuenta con más de 300 empresas inscritas, cuyos títulos de renta fija y renta variable se negocian de manera transparente a través de las plataformas de la plaza bursátil, por más de 600 mil personas naturales y todos los administradores profesionales de portafolios, pensando en formar un patrimonio propio y respaldar el crecimiento económico del país.<sup>10</sup>

“Desde su nacimiento el 3 de julio de 2001, la BVC ha venido contribuyendo al crecimiento y desarrollo de la economía colombiana, facilitando el financiamiento de empresas industriales, comerciales y de servicios, que demandan de manera continua, recursos económicos para adelantar su tarea productiva”.<sup>11</sup>

Vale la pena destacar un hecho reciente y significativo a favor de la Bolsa de Valores de Colombia, el cual demuestra el favorable crecimiento económico que desde 2011 y en este comienzo del año 2012 se presenta, tornándose un ambiente favorable para el inversionista y el empresario colombiano. El hecho referenciado por el diario El Espectador es el siguiente:

“El mercado de renta variable colombiano cerró 2011 como uno de los protagonistas del MILA (Mercado Integrado Latinoamericano), al convertirse en el destino más apetecido para las compras desde Lima y Santiago de Chile, el de mayor aporte en las emisiones accionarias y por tener las compañías con el mayor volumen de negociación de la región bursátil y el título con la mayor valorización del nuevo mercado. Las compañías con mayor volumen negociado en el total consolidado de los 546 emisores del MILA, pertenecen al mercado de la Bolsa de Valores de Colombia, como son, Pacific Rubiales, con 6.270 millones de dólares y Ecopetrol, con 3.331 millones de dólares. La BVC aportó

---

<sup>9</sup> BOLSA DE VALORES DE COLOMBIA [En línea]  
[http://www.bvc.com.co/recursos/Files/Acerca\\_de\\_la\\_BVC/Ochenta\\_Anos\\_Mercado\\_de\\_Valores](http://www.bvc.com.co/recursos/Files/Acerca_de_la_BVC/Ochenta_Anos_Mercado_de_Valores).  
[Citado el 15 de Mayo de 2012] p.4.

<sup>10</sup> Ibíd., pág.2.

<sup>11</sup> BOLSA DE VALORES DE COLOMBIA. [En línea]  
<http://www.bvc.com.co/pps/tibco/portalbvc/Home/AcercaBVC/misionVisionValores?action>  
[Citado el 15 de Mayo de 2012]. pág. 1.

el 74,3% del valor de las nuevas emisiones de acciones del mercado integrado, con 7.011 millones de dólares, del total de 9.433 millones de dólares, que puso al MILA como el segundo colocador regional más importante después de Brasil, precisa el informe de prensa. Colombia finalmente registró la acción con la mayor valorización del MILA. El título de la textilera Fabricato obtuvo una variación positiva de 214,1%, remarca el informe de prensa del recinto bursátil.<sup>12</sup>

Además de pretender la integración de las bolsas de Chile, Perú y Colombia está por sumarse un nuevo miembro que fortalecería el camino del MILA a convertirse en un atractivo para los actuales y futuros inversionistas, tal como lo destaca el artículo publicado por la bolsa de valores de Colombia en donde el comité del MILA estudia la viabilidad de este nuevo integrante. Veamos el comunicado:

“Concluyeron positivamente estudios de factibilidad técnica y operativa para la incorporación de México al MILA y el Grupo BMV ratifica su interés” señaló la BVC.

En Cartagena de Indias -- El Comité Ejecutivo del MILA, junto con el Grupo Bolsa Mexicana de Valores (BMV), cerraron de manera exitosa el primer paso para el ingreso oficial de México al Mercado Integrado Latinoamericano MILA, del que hacen parte actualmente las bolsas y depósitos centralizados de valores de Chile, Colombia y Perú.

Según el estudio de viabilidad, está clara la hoja de ruta requerida para la incorporación de México en MILA en los frentes operativos, tecnológicos, comercial y regulatorios, lo que permitirá emprender las acciones necesarias en los próximos meses de manera conjunta, y así asegurar el ingreso del Grupo BMV a este mercado bursátil integrado.

En materia regulatoria México identificó los ajustes normativos que permitirán su incorporación a MILA, entre otros el establecimiento de mecanismos de ruteo internacional de órdenes y el reconocimiento de los valores MILA en el mercado mexicano. Dichas modificaciones implican una reforma a la Ley del Mercado de Valores que será puesta

---

<sup>12</sup> EL ESPECTADOR. Bolsa de Valores de Colombia, la más dinámica del MILA. [En línea] <http://www.elespectador.com/economia/articulo-322054-bolsa-de-valores-de-colombia-mas-dinamica-del-mila>. [Citado el 20 de enero de 2012]. p. 1.

a consideración del Congreso Mexicano y la emisión de la regulación prudencial correspondiente. Esta propuesta será presentada en el transcurso del primer semestre de 2013 y una vez se cuente con el marco regulatorio necesario, el mercado mexicano iniciaría el proceso de alistamiento tecnológico y operativo. Por lo anterior, se estima que la incorporación plena de México a MILA se consolidaría aproximadamente en el primer semestre de 2014.<sup>13</sup>

Así las cosas, para los empresarios, inversionistas y demás personas interesadas en el objeto de este estudio son pertinentes las características, funciones y modos de operación de la Bolsa de Valores de Colombia; aspectos que serán analizados de forma amplia en el desarrollo del documento.

---

<sup>13</sup> BOLSA DE VALORES DE COLOMBIA [ En línea ]  
<http://www.bvc.com.co/pps/tibco/portalbvc/Home/Accionistas/Informaci%C3%B3n+Reciente?com.tibco.ps.p> [Citado el 20 de Septiembre de 2012.]

### 3.2 MARCO TEORICO

El sistema financiero Colombiano lo conforman cuatro mercados y de acuerdo a nuestra investigación nos compete tener conocimiento sobre el mercado de capitales el cual busca que las personas que necesitan recursos para financiar sus negocios encuentren inversionistas interesados en hacer parte de la compañía como accionista con la expectativa de obtener un rendimiento.

De acuerdo a las condiciones otorgadas por los entes regulatorios el mercado valores tiene como objetivo fundamental que las empresas y el Gobierno obtengan recursos para financiarse, así una vez realicen sus proyectos podrán expandir sus operaciones a otros territorios y mejorar la calidad de su producción o realizar inversiones en otros negocios.

Los avances teóricos sobre el mercado de valores colombiano se pueden agrupar en dos conjuntos: El primero trata de explicar desde la teoría económica el comportamiento del mismo y la interrelación con aspectos como: la eficiencia, la información, las negociaciones, etc. Un segundo grupo en que se han realizado importantes trabajos es la forma como el inversionista elige sus inversiones atendiendo a la rentabilidad y al riesgo asumido.

Dentro del primer grupo se destacan los trabajos de Samuelson [1965]<sup>14</sup> sobre el comportamiento de los precios futuros de las acciones y el de Fama [1970]<sup>15</sup> sobre teoría de juego justo y la forma débil de eficiencia del mercado. Dentro del segundo grupo se pueden mencionar: la teoría de portafolio de Harry Markowitz [1952]<sup>16</sup>, basada en la teoría de elección y extendida por el teorema de separación de J. Tobin [1958]. Esta teoría ha constituido uno de los pilares teóricos de las finanzas en el tema de inversión, y es la base del Modelo de Valoración de Activos de Capital (CAPM.)<sup>17</sup> desarrollado originalmente por Sharpe, Trynor, Mossin y Litner y que finalmente les otorgó el Premio Nobel de Economía en 1990 a los profesores Harry Markowitz, William Sharp y Merton Miller.

---

<sup>14</sup> SAMUELSON, Paul A. "Prof. That Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly". *Industrial Management Review*, 6, 2 (1965).

<sup>15</sup> FAMA F, Eugene. *Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work*. (May, 1970), pág. 383-417.

<sup>16</sup> MARKOWITZ, Harry, *Journal of Finance*. 1952.

<sup>17</sup> Siglas de su nombre en inglés: Capital Asset Pricing Model.

### 3.2.1 Costos de transacción en la Bolsa de Colombia: un ejemplo

Claude Ménard define los costos de transacción como los “costos de funcionamiento del sistema de intercambio; y más precisamente, en el marco de una economía de mercado, los costos de recurrir al mercado para proceder a la asignación de los recursos y a la transferencia de los derechos de propiedad.”<sup>18</sup>

En el tema de inversión, los costos de transacción se pueden agrupar en dos grandes grupos: de una parte, el costo de oportunidad del tiempo invertido por los posibles inversionistas estudiando las condiciones del mercado y el comportamiento de las empresas emisoras de las acciones. De otra parte, los gastos explícitos por parte del inversionista para invertir, cumplir con los trámites requeridos y para hacer cumplir sus derechos.

Para que tengamos una idea de los costos asociados a la inversión en el mercado de valores, tenemos como ejemplo a una de las grandes comisionistas de bolsa y quizás la de mayor cantidad de participación en el mercado. Valores Bancolombia en su portal web publica que “la APT (Administración de Portafolios de Terceros) es un servicio en el cual usted delega la administración completa del portafolio de valores: estructuración del portafolio y ejecución en el mercado; administración y control de riesgos y valoración a precios de mercado”.

Se asesora al cliente en la determinación de su perfil de riesgo y políticas de inversión según sus objetivos, horizonte de inversión y necesidades de liquidez. Para ello se debe firmar un contrato de Administración de Portafolios, en el cual se fijan las condiciones y lineamientos bajo los cuales se llevará a cabo la administración del portafolio.

Para cada portafolio se pacta una rentabilidad objetivo de acuerdo al tipo de portafolio y a las condiciones de mercado vigente. En caso de superar esta rentabilidad, Valores Bancolombia cobrará una comisión de éxito. Para la compra y venta de acciones Valores Bancolombia cobra una comisión mínima por cada

---

<sup>18</sup> MÉNARD, Claude. Economía de las organizaciones. 1997. Grupo Editorial Norma y Editorial Universidad Nacional. pág. 27.

operación de \$ 100.000 pesos o del 3% del total de la operación.<sup>19</sup>

El objetivo del ejemplo anterior es precisamente explicitar porque un inversionista persona natural podría preferir invertir en un pequeño conjunto de acciones por su cuenta, para evitar estos costos de transacción. Sin embargo, al reducir los costos de transacción del segundo tipo (costos directos), incrementa los del primer tipo (costos de búsqueda de información). Una manera para modelar el problema que enfrenta el inversionista persona natural es suponer que para reducir los costos de ambos tipos, el prefiera invertir sólo en un subconjunto de acciones del total disponible. La principal estrategia matemática para lograr esto es añadir una condición de cardinalidad al problema de Markowitz, lo que nos ayudará a escoger bajo estas circunstancias el portafolio óptimo al mínimo riesgo (y a bajos costos).

### **3.2.2 Medidas utilizadas para encontrar el portafolio óptimo**

Para seleccionar un adecuado portafolio para un inversionista es necesario tener en cuenta algunos principios básicos para realizar la selección de estrategias financieras que nos lleven a obtener un portafolio eficiente.

Debemos empezar por elegir entre la gran diversidad de herramientas de inversión que existen y determinar qué proporción de la inversión debe destinarse a cada uno de los instrumentos financieros elegidos para obtener el beneficio esperado con el mínimo riesgo. El análisis de portafolio proporciona herramientas para realizar una selección óptima de los instrumentos de inversión. Entre los métodos empleados se encuentra “la teoría de portafolios Media-Varianza” conocida como el modelo de Markowitz. La selección óptima estará en función de los intereses y necesidades del inversionista. Por ello a continuación se profundizará sobre los temas que servirán como apoyo para el desarrollo de nuestra propuesta.

#### **3.2.2.1 Optimización matemática**

La optimización o programación no lineal es la selección de un elemento mejor con respecto a algún criterio a partir de un conjunto de alternativas disponibles: es una respuesta óptima a una necesidad que está sujeta a una serie de restricciones que limitan el logro del objetivo propuesto. Por ejemplo,

---

<sup>19</sup> VALORES BANCOLOMBIA [En línea]

([http://www.valoresbancolombia.com/cs/Satellite?c=Page&cid=1259764081421&pagename=ValoresBancolombia%2FVB\\_TemplateMenuDerecho](http://www.valoresbancolombia.com/cs/Satellite?c=Page&cid=1259764081421&pagename=ValoresBancolombia%2FVB_TemplateMenuDerecho)) [Citado el 30 de Octubre de 2012].

$$\text{Max (Min) } F(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\text{Sujeto a: } f_1(y_1, y_2, \dots, y_n) \leq \geq a_1$$

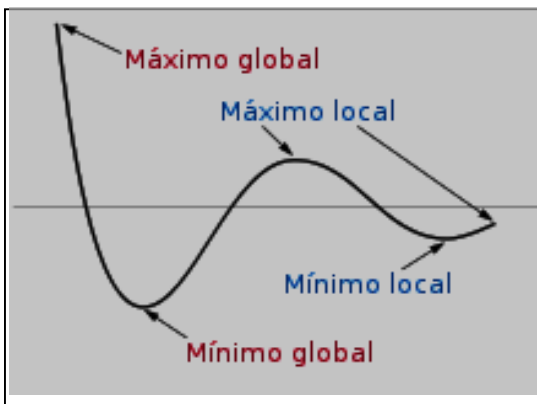
$$f_m(y_1, y_2, \dots, y_n) \leq \geq a_m$$

$$y_i \geq 0, i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Para entender un poco mejor discutamos un poco acerca de la región factible. Gráficamente la región factible es el conjunto permitido de valores de entrada. La optimización incluye la búsqueda del mejor valor disponible de una función objetivo definido en un dominio.

Los máximos y mínimos de una función, conocidos como extremos de una función, son los valores más grandes (máximos) o más pequeños (mínimos), que toma una función en un punto situado ya sea dentro de una región particular (extremo local) o en el dominio de la función en su totalidad (extremo global). El localizar los valores extremos es el objetivo que pretende la optimización matemática. Veamos un ejemplo gráfico de una dimensión donde se muestran los puntos máximos y mínimos de una función:

Gráfico N° 1 Extremos de una función.



Fuente: tomada del portal web [http://es.wikipedia.org/wiki/Extremos\\_de\\_una\\_funci%C3%B3n](http://es.wikipedia.org/wiki/Extremos_de_una_funci%C3%B3n) [citado el 30 de octubre de 2012]

### 3.2.2.2 Fundamentación estadística

Para comprender acerca de las variables utilizadas durante la elaboración de los cálculos matemáticos que son objeto de nuestra investigación haremos un referente de acuerdo a la caracterización del portafolio y los elementos que lo

conforman. Para ello empezaremos por definir algunos elementos de hacen parte del estudio.

Media aritmética: en matemáticas y estadística, la media aritmética, también llamada promedio, es un estimador de la media esperada en una población. Este estimador se obtiene de una serie de datos cuantitativos objeto de estudio a partir de la suma de todos sus valores dividida entre el número de sumandos.

Expresada de forma más intuitiva, podemos decir que la media (aritmética) es la cantidad total de la variable distribuida a partes iguales entre cada observación.

Según la teoría de portafolio si la variable  $X$  representa la rentabilidad de un activo, entonces la media representa la tendencia central de la rentabilidad de dicho activo, es decir cómo se ha venido comportando la rentabilidad a lo largo del tiempo de estudio. En un portafolio de activos la media aritmética se utiliza para estimar el valor esperado de la rentabilidad del portafolio, así:

$$\sum \mu_i \cdot y_i = y' \mu$$

dónde:

$\mu_i$  es la rentabilidad del activo  $i$

$y_i$  es la proporción invertida en el activo  $i$ .<sup>20</sup>

Varianza y Desviación Estándar: La varianza del portafolio suele representarse como  $\sigma_p^2$ . Esta es una variable que intenta estimar la esperanza del cuadrado de la desviación de una variable respecto a su media. Es una medida de dispersión. Se usa como medida de riesgo porque “la medida del riesgo debe estimar de algún modo hasta qué punto es probable que el resultado real difiera del resultado esperado.”<sup>21</sup>

Se le denomina varianza en un portafolio de activos al riesgo que asume el inversionista al escoger una inversión y representa la volatilidad de la rentabilidad en el tiempo respecto de su valor central. Mientras mayor sea el valor de la varianza mayor será la dispersión de los posibles resultados de la rentabilidad del activo, por lo que la media no representaría una verdadera tendencia central y por ende se asumiría un mayor riesgo en el portafolio de incluirse el activo.

---

<sup>20</sup> CORRALES CESPEDES, José [En línea]

Optimización del modelo media-varianza para la selección de un portafolio de acciones y su aplicación en la BVL usando programación no lineal. Pág. 18. [Citado el 30 de octubre de 2012].

<sup>21</sup> ALEXANDER, Gordon J. SHARPE, William F. BAILEY, Jeffery V. Fundamentos de Inversiones. Teoría y práctica. Tercera Edición. México 2003. Pág. 119-142.

En teoría de portafolio la varianza del portafolio se estima de la siguiente forma:<sup>22</sup>

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i y_j \sigma_{ij}$$

La matriz  $s_{ij}$  es la matriz de varianzas covarianzas, un estimador de la covarianza.

La covarianza es una medida de dispersión conjunta de dos variables estadísticas, mide el valor esperado del producto de las desviaciones con respecto a la media. La matriz de varianzas covarianzas es una matriz que contiene la covarianza entre los elementos de un vector. Es la generalización natural a dimensiones superiores del concepto de varianza de una variable aleatoria escalar.

“La matriz de varianza-covarianza es una herramienta que permite encontrar una base óptima para representar los datos. Es una matriz que representa la covarianza entre pares diferentes de variables aleatorias, cada una con varianza finita, entonces la matriz de covarianza  $\Sigma$  es la matriz cuya entrada  $(i, j)$  es la covarianza”<sup>23</sup> y se representa de la siguiente manera:

$$S_{ij} = E \left\{ (X_i - m_i)(X_j - m_j) \right\}$$

### 3.2.3 Modelo de Markowitz

“Harry Markowitz en [1952]<sup>24</sup> publicó en la revista *Journal of Finance* un artículo basado en su tesis doctoral. En dicho artículo planteaba un modelo de conducta racional del decisor para la selección de carteras de títulos – valores con liquidez inmediata. Posteriormente, publicó su libro *Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments*. En 1990, junto con Merton Miller y William Sharpe ganó el Premio Nobel en Ciencias Económicas por su teoría.”<sup>25</sup>

---

<sup>22</sup> Ibíd., pág. 132.

<sup>23</sup> Ibíd, pág. 134.

<sup>24</sup> MARKOWITZ, Harry, *Journal of Finance*. 1952.

<sup>25</sup> HAUGEN, Robert A. *Modern Investment Theory*. Third Edition. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. Pág. 280.

Markowitz desarrolla su modelo sobre la base del comportamiento racional del inversor, es decir, el inversor desea la rentabilidad y rechaza el riesgo. Por lo tanto, para él una cartera será eficiente si proporciona la máxima rentabilidad posible para un riesgo dado, o de forma equivalente, si presenta el menor riesgo posible para un nivel determinado de rentabilidad.

Markowitz rechazó el análisis de portafolios basado únicamente en el estudio de la rentabilidad de los activos resaltando como bajo esa hipótesis un inversionista colocaría toda su riqueza en el activo con la mayor rentabilidad esperada. Consideró que una gran rentabilidad esperada era deseable, así como un riesgo grande era indeseable, llegando así al análisis de media-varianza para buscar minimizar el riesgo de cada nivel de rentabilidad, permitiéndole plantear el siguiente problema. El portafolio óptimo para un inversionista resulta de resolver:

$$\begin{aligned} \min_y \sigma_p^2 &= y' \Sigma y \\ \text{sujeto a} \\ 1. y' \mu &= \mu_0, \\ 2. y' 1 &= 1, \\ 3. y_i &\geq 0, \end{aligned}$$

Dónde:

$\sigma_p^2$  es la varianza del portafolio que se desea minimizar,

$y$  es el vector de pesos del portafolio que indica qué porcentaje se invertirá en cada acción en el óptimo,

$\Sigma$  es la matriz de varianzas covarianzas de los rendimientos,

$\mu$  es el vector de rendimientos de cada acción,

$\mu_0$  es el rendimiento esperado,

Actualmente la teoría de las carteras se ha vuelto un tema mucho más interesante y necesario que nunca. Existen un gran número de oportunidades de inversión disponibles y la cuestión de cómo los inversionistas deberían de integrar sus carteras de inversión es una parte central de las finanzas.

Para poder integrar una cartera de inversión es importante contar con un mercado de valores desarrollado, que permita al inversionista diversificar su portafolio de inversiones manteniendo la rentabilidad y disminuyendo el riesgo.<sup>26</sup>

Para determinar la selección de portafolio de activos dada una cartera base, el modelo determina los pesos y que deben tener los activos en la cartera con el fin de obtener una rentabilidad esperada con mínima varianza.

El modelo de Markowitz ha sido resuelto y ampliamente estudiado, incluso existen algoritmos para el desarrollo del mismo que permite obviar las complejidades que implica resolver este modelo matemático. Además es uno de los modelos más aceptados, puesto que a partir de este se puede determinar una frontera de inversión eficiente, que dependiendo del grado de aversión al riesgo que tiene el inversionista determina un portafolio apropiado que ofrece la mayor rentabilidad posible.<sup>27</sup>

### **3.2.4 Portafolios Eficientes**

En 1958, James Tobin añadió a la Teoría de Portafolio la idea de la frontera eficiente.<sup>28</sup> De acuerdo con la teoría, todas las combinaciones posibles de valores se pueden trazar en un gráfico que comprende de la desviación estándar de los valores y sus rendimientos esperados en sus dos ejes. La colección de todas las carteras en el espacio de riesgo-retorno define una zona, que está rodeada por una línea inclinada hacia arriba. Esta línea se denomina como la frontera eficiente. La colección de carteras que caen sobre la frontera eficiente son las carteras eficientes que tienen la menor cantidad de riesgo para una determinada cantidad de retorno o, alternativamente, el más alto nivel de rendimiento para un nivel dado de riesgo.

---

<sup>26</sup> GÓMEZ RESTREPO, Carlos Arturo. El mercado de valores en Colombia: una mirada desde la nueva economía institucional. Revista economía y desarrollo. Universidad Autónoma [2006].

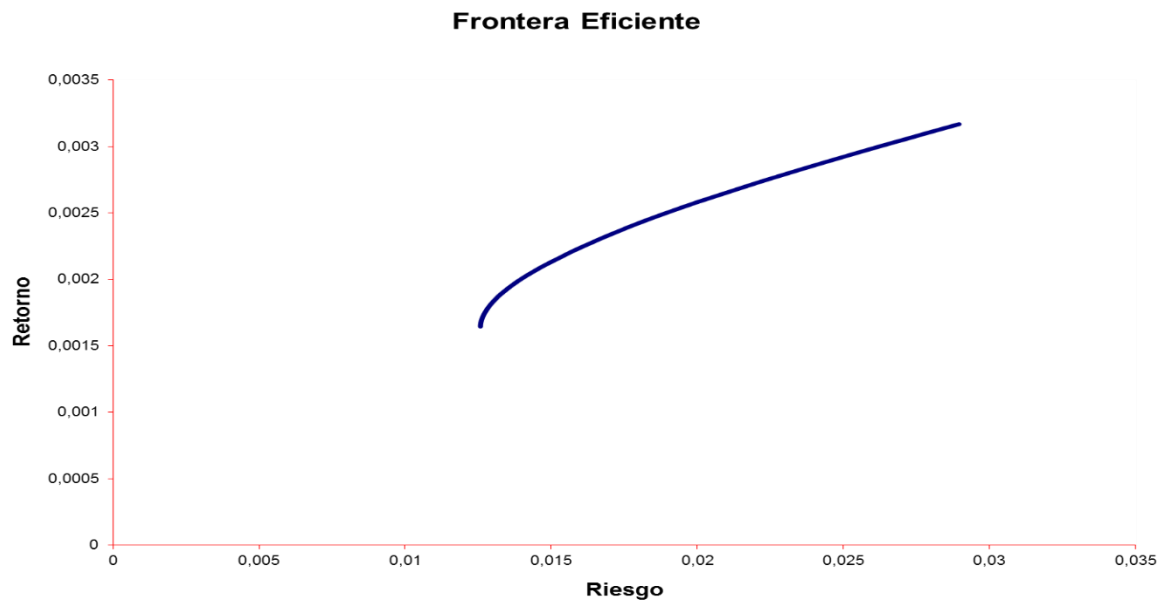
<sup>27</sup> Corrales Céspedes, José [En línea] optimización del modelo media-varianza para la selección de un portafolio de acciones y su aplicación en la BVL usando programación no lineal. Pág. 26.[Citado el 01 de noviembre de 2012]

<sup>28</sup> Tobin J. 1958 "Liquidity preference as behavior toward risk", Review of Economics Studies, Nº 25

En la frontera eficiente están situadas las mejores rentabilidades para un riesgo determinado, clasificadas de la forma que a mayor riesgo corresponda una mayor rentabilidad. Según el grado de aversión al riesgo, el inversor se situará de forma razonable en uno u otro punto de la línea de la frontera eficiente. Cualquier otro punto sería irracional. Sin embargo, a nivel práctico el modelo presenta algún grado de complejidad. Los datos para tener en cuenta, son las rentabilidades y riesgos históricos y se supone que en el futuro serán similares.

Esta suposición es demasiado fuerte en la mayoría de los casos. Sin embargo, este conflicto lo presentan todos los modelos de comportamiento bursátil.

Gráfico N° 2: Frontera Eficiente.



### 3.3 MARCO CONCEPTUAL

Los principales términos y conceptos para este trabajo que al definirlos darán mayor claridad son los siguientes:

**Acciones:** Títulos que representan una parte del capital de una sociedad. Los dueños de las acciones son accionistas de la sociedad que las emitió, es decir, son los propietarios de la misma. Cada acción tiene un valor nominal que corresponde a la parte del capital de la empresa que representa. Por lo general las acciones también tienen un valor de mercado, o de realización que puede diferir sustancialmente del valor nominal.<sup>29</sup>

**Bolsa de Valores:** Organización privada que provee un mercado descentralizado y reglamentado para la negociación de valores (esencialmente acciones y bonos). Las bolsas de valores son mercados secundarios, ya que no se involucran en la emisión de nuevas acciones, sino en la negociación de las acciones existentes. Tampoco intervienen directamente en la compra y venta de acciones sino que proveen facilidades para que estas operaciones se puedan realizar con mayor fluidez y seguridad. Solo tienen derecho a participar en las transacciones bursátiles corredores de bolsa debidamente acreditados en nombre y representación de personas naturales o jurídicas.<sup>30</sup>

**Bursátilidad:** I.B.A Índice de bursátilidad Accionario, mide la dinámica de una acción, basada en el grado de facilidad para comprarla o venderla en el mercado secundario. Este índice es divulgado mensualmente por la Superintendencia de Valores. El cálculo del índice de bursátilidad accionaria tiene en cuenta la frecuencia de cotización, monto transado promedio por rueda bursátil, grado de rotación de las acciones y número de operaciones realizadas en promedio por rueda.<sup>31</sup>

---

<sup>29</sup> DICCIONARIO DE TERMINOS FINANCIEROS Y BANCARIOS. Marcuse, Robert. Quinta Ed. Enero de 2009 Pág. 2. [Citado el 12 de marzo de 2013].

<sup>30</sup> Ibíd., pág. 27.

<sup>31</sup> BOLSA DE OCCIDENTE. Diccionario Bursátil. Ideas afines y matemáticas básicas financieras. Santiago de Cali. 1999. Pág. 22.

**Comisionista de Bolsa:** Persona jurídica aceptada como titular de cuenta por títulos en posición propia o en posición de terceros, es decir, quien representa a cada uno de los accionistas ante el Depósito Centralizado de Valores, y por medio del cual se realizan todas las operaciones de compra, venta, cesión, repos y demás operaciones del mercado de valores. También es la entidad encargada del pago de los dividendos a cada uno de los accionistas.<sup>32</sup>

**DCV:** Es el Depósito Central de Valores que administra los títulos valores físicos que emite y garantiza el Banco de la República.<sup>33</sup>

**DECEVAL:** Es el Depósito Centralizado de Valores de Colombia. Su principal función es la inmovilización de valores físicos en bóvedas de alta seguridad y su posterior desmaterialización, para permitir que las transacciones realizadas se hagan mediante registros electrónicos totalmente automatizados. Los clientes de deceval son bolsas de valores, bancos, comisionistas de bolsa, corporaciones de ahorro y vivienda, fondos de pensiones y cesantías, compañías de seguros y fondos mutuos de inversión.<sup>34</sup>

**Estrategia:** La estrategia es un modelo coherente, unificador e integrador de decisiones que determina y revela el propósito de la organización en términos de objetivos a largo plazo, programas de acción, y prioridades en la asignación de recursos, tratando de lograr una ventaja sostenible a largo plazo y respondiendo adecuadamente a las oportunidades y amenazas surgidas en el medio externo de las organizaciones, teniendo en cuenta las fortalezas y debilidades de la entorno.<sup>35</sup>

**Índice Bursátil:** Se define como el indicador bursátil del mercado ordinario de las bolsas de valores [...]. Refleja las fluctuaciones que por efectos de oferta y demanda o por factores externos del mercado, sufren los precios de las acciones. Es el instrumento más representativo, ágil y oportuno para evaluar la evolución y

---

<sup>32</sup> FINANZAS PERSONALES. [En Línea].  
<http://www.finanzaspersonales.com.co/Diccionario>. [Citado el 12 de marzo de 2013].

<sup>33</sup> BOLSA DE OCCIDENTE, Diccionario Bursátil. Ideas afines y matemáticas básicas financieras. Santiago de Cali. 1999. Pág. 38.

<sup>34</sup> Ibíd., Pág. 38.

<sup>35</sup> UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA. Dirección Nacional de Servicios Virtuales [En Línea]  
<http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/economicas/2008551/lecciones/cap1-4-2.htm>  
[Citado el 12 de marzo de 2013].

tendencia del mercado accionario. Cualquier variación de su nivel es el fiel sinónimo del comportamiento de este segmento del mercado, explicando con su aumento las tendencias alcistas en los precios de las acciones y, en forma contraria, con su reducción la tendencia hacia la baja de los mismos.<sup>36</sup>

**Mercado de Capitales:** Es el conjunto de mecanismos a disposición de una economía para cumplir la función básica de la asignación y distribución, en el tiempo y en el espacio, de los recursos de capital, los riesgos, el control y la información asociados con el proceso de transferencia del ahorro a la inversión.<sup>37</sup>

**Optimización:** Proceso de selección de títulos en una cartera con el fin de maximizar o minimizar determinados aspectos definidos por el inversor, tales como rendimiento, cupón, duración, convexidad y coste de una cartera. Está sujeto a restricciones tales como créditos, diversificación, plazo y duración.<sup>38</sup>

**Portafolio de Inversión:** Es Una combinación de activos financieros poseídos por una misma persona, natural o jurídica. Un portafolio de inversión es diversificado cuando en el conjunto de activos se combinan especies con rentabilidades, emisores, modalidades de pago de intereses y riesgos diferentes.<sup>39</sup>

**Riesgo:** Es el grado de variabilidad o contingencia del retorno de una inversión. En términos generales se puede esperar que, a mayor riesgo, mayor rentabilidad de la inversión. Existen varias clases de riesgos: de mercado, solvencia, jurídico, de liquidez, de tasa de cambio, riesgo de tasa de interés.<sup>40</sup>

---

<sup>36</sup> GRUPO BANCOLOMBIA [ En Línea]  
<http://www.grupobancolombia.com/contenidoCentralizado/corporativo/servicioCliente>.  
[Citado el 15 de Noviembre de 2012].

<sup>37</sup> VALORES BANCOLOMBIA [En línea].  
[http://www.valoresbancolombia.com/cs/Satellite?c=Page&cid=1259764070489&pagename=ValoresBancolombia%2FVB\\_TemplateGlosario](http://www.valoresbancolombia.com/cs/Satellite?c=Page&cid=1259764070489&pagename=ValoresBancolombia%2FVB_TemplateGlosario) [Citado el 12 de Marzo de 2013].

<sup>38</sup> DICCIONARIO DE TERMINOS FINANCIEROS Y DE INVERSION. Mochón Morcillo Francisco.  
Segunda Ed. 1998. Pág. 279.

<sup>39</sup> VALORES BANCOLOMBIA [En línea].  
[http://www.valoresbancolombia.com/cs/Satellite?c=Page&cid=1259764070489&pagename=ValoresBancolombia%2FVB\\_TemplateGlosario](http://www.valoresbancolombia.com/cs/Satellite?c=Page&cid=1259764070489&pagename=ValoresBancolombia%2FVB_TemplateGlosario) [Citado el 12 de Marzo de 2013].

<sup>40</sup> BOLSA DE OCCIDENTE, Diccionario Bursátil. Ideas afines y matemáticas básicas financieras.  
Santiago de Cali. 1999. Pág. 73.

**Series de tiempo:** es una secuencia de datos, observaciones o valores, medidos en determinados momentos del tiempo, ordenados cronológicamente y, normalmente, espaciados entre sí de manera uniforme. El análisis comprende métodos que ayudan a interpretar este tipo de datos, extrayendo información representativa, tanto referente a los orígenes o relaciones subyacentes como a la posibilidad de extrapolar y predecir su comportamiento futuro.<sup>41</sup>

**Tasa de Interés:** Es la expresión porcentual del interés aplicado sobre un capital. Las tasas de interés pueden estar expresadas en términos nominales o efectivos, las nominales son aquellas en que el pago de intereses no se capitaliza. Las tasas efectivas corresponden a las tasas de intereses anuales equivalentes a la capitalización de los intereses periódicos, estas tasas son el instrumento apropiado para medir y comparar el rendimiento de distintas alternativas de inversión.<sup>42</sup>

---

<sup>41</sup> MOORE, David S. Estadística básica aplicada. 2-da Edición. España 2000 pág. 305.

<sup>42</sup> BOLSA DE VALORES DE COLOMBIA [En Línea]  
<http://www.bvc.com.co/pps/tibco/portalbvc/Home/GlosarioResultado>  
[Citado 12 de Marzo de 2013].

## 4. METODO

### 4.1 DESARROLLO DEL MODELO MATEMATICO PARA HALLAR EL PORTAFOLIO OPTIMO PARA EL INVERSIONISTA CON CONDICIONES DE CARDINALIDAD.

El desarrollo de la investigación tiene como base fundamental datos estadísticos de las acciones con más índice de bursatilidad durante los últimos tres años. Los datos se obtuvieron del portal del Grupo Aval. De la información económica y financiera se obtuvo una muestra de un total de seis acciones de acuerdo a su comportamiento y constante negociación. Las acciones seleccionadas fueron Bancolombia, Ecopetrol, Suramericana, Almacenes Éxito, Isa y Banco de Bogotá, como se muestra en el gráfico N° 3. Como punto de referencia se muestran datos comprendidos entre el 05 de enero de 2009 y el 31 de julio de 2012 en los cuales se encontraron los precios día a día de cada acción.

Gráfico N° 3

Acciones con más índice de Bursatilidad en el Mercado Accionario Colombiano.

|     | A                                                                                         | B                  | C      | D          | E                | F      | G          | H                   | I      | J          | K                      | L      | M          | N          | O      | P                   | Q         | R      |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|--------|------------|------------------|--------|------------|---------------------|--------|------------|------------------------|--------|------------|------------|--------|---------------------|-----------|--------|
| 1   |                                                                                           |                    |        |            |                  |        |            |                     |        |            |                        |        |            |            |        |                     |           |        |
| 2   |                                                                                           |                    |        |            |                  |        |            |                     |        |            |                        |        |            |            |        |                     |           |        |
| 3   | <b>ACCIONES CON MAS ALTO INDICE DE BURSATILIDAD EN EL PERIODO ENERO 2009 A JULIO 2012</b> |                    |        |            |                  |        |            |                     |        |            |                        |        |            |            |        |                     |           |        |
| 4   |                                                                                           |                    |        |            |                  |        |            |                     |        |            |                        |        |            |            |        |                     |           |        |
| 5   |                                                                                           | <b>Bancolombia</b> |        |            | <b>Ecopetrol</b> |        |            | <b>Suramericana</b> |        |            | <b>Almacenes Éxito</b> |        |            | <b>Isa</b> |        | <b>Banco Bogota</b> |           |        |
| 6   | 05/01/2009                                                                                | 13.180,00          | 1,67%  | 05/01/2009 | 2.040,00         | 2,45%  | 05/01/2009 | 15.580,00           | 3,21%  | 05/01/2009 | 10.300,00              | 1,75%  | 05/01/2009 | 7.200,00   | 2,78%  | 05/01/2009          | 22.500,00 | 0,00%  |
| 7   | 06/01/2009                                                                                | 13.400,00          | -1,34% | 06/01/2009 | 2.090,00         | -2,15% | 06/01/2009 | 16.080,00           | -1,74% | 06/01/2009 | 10.480,00              | -0,38% | 06/01/2009 | 7.400,00   | -1,35% | 06/01/2009          | 22.500,00 | 0,00%  |
| 8   | 07/01/2009                                                                                | 13.220,00          | -0,15% | 07/01/2009 | 2.045,00         | -0,49% | 07/01/2009 | 15.800,00           | 0,63%  | 07/01/2009 | 10.440,00              | 0,19%  | 07/01/2009 | 7.300,00   | 1,37%  | 07/01/2009          | 22.500,00 | 0,00%  |
| 9   | 08/01/2009                                                                                | 13.200,00          | 0,76%  | 08/01/2009 | 2.035,00         | 0,98%  | 08/01/2009 | 15.900,00           | -0,63% | 08/01/2009 | 10.460,00              | -0,57% | 08/01/2009 | 7.400,00   | -0,27% | 08/01/2009          | 22.500,00 | 0,00%  |
| 10  | 09/01/2009                                                                                | 13.300,00          | -0,30% | 09/01/2009 | 2.055,00         | -0,49% | 09/01/2009 | 15.800,00           | -0,25% | 09/01/2009 | 10.400,00              | -0,19% | 09/01/2009 | 7.380,00   | 0,27%  | 09/01/2009          | 22.500,00 | -0,09% |
| 11  | 13/01/2009                                                                                | 13.260,00          | -3,47% | 13/01/2009 | 2.045,00         | -1,47% | 13/01/2009 | 15.760,00           | -2,54% | 13/01/2009 | 10.380,00              | -2,12% | 13/01/2009 | 7.400,00   | -1,35% | 13/01/2009          | 22.480,00 | 0,09%  |
| 12  | 14/01/2009                                                                                | 12.800,00          | -1,41% | 14/01/2009 | 2.015,00         | -0,99% | 14/01/2009 | 15.360,00           | -2,21% | 14/01/2009 | 10.160,00              | -1,67% | 14/01/2009 | 7.300,00   | 1,37%  | 14/01/2009          | 22.500,00 | 0,44%  |
| 13  | 15/01/2009                                                                                | 12.620,00          | 1,58%  | 15/01/2009 | 1.995,00         | -0,25% | 15/01/2009 | 15.020,00           | 0,27%  | 15/01/2009 | 9.990,00               | -0,90% | 15/01/2009 | 7.400,00   | -1,35% | 15/01/2009          | 22.600,00 | 0,00%  |
| 14  | 16/01/2009                                                                                | 12.820,00          | 1,40%  | 16/01/2009 | 1.990,00         | 1,01%  | 16/01/2009 | 15.060,00           | 1,06%  | 16/01/2009 | 9.900,00               | -1,01% | 16/01/2009 | 7.300,00   | 0,00%  | 16/01/2009          | 22.600,00 | 0,00%  |
| 869 | 18/07/2012                                                                                | 27.500,00          | 0,44%  | 18/07/2012 | 5.010,00         | -0,50% | 18/07/2012 | 30.700,00           | 0,91%  | 18/07/2012 | 30.400,00              | 1,84%  | 18/07/2012 | 11.700,00  | 0,68%  | 18/07/2012          | 50.500,00 | 0,00%  |
| 870 | 19/07/2012                                                                                | 27.620,00          | -2,53% | 19/07/2012 | 4.985,00         | -0,70% | 19/07/2012 | 30.980,00           | 0,06%  | 19/07/2012 | 30.800,00              | -0,32% | 19/07/2012 | 11.780,00  | -1,02% | 19/07/2012          | 50.500,00 | 0,40%  |
| 871 | 23/07/2012                                                                                | 26.920,00          | 0,30%  | 23/07/2012 | 4.950,00         | 0,91%  | 23/07/2012 | 31.000,00           | -0,45% | 23/07/2012 | 30.960,00              | -0,84% | 23/07/2012 | 11.660,00  | 0,86%  | 23/07/2012          | 50.700,00 | 1,18%  |
| 872 | 24/07/2012                                                                                | 27.000,00          | -0,74% | 24/07/2012 | 4.995,00         | -2,50% | 24/07/2012 | 30.860,00           | -0,19% | 24/07/2012 | 30.700,00              | 0,72%  | 24/07/2012 | 11.760,00  | -2,21% | 24/07/2012          | 51.300,00 | -1,99% |
| 873 | 25/07/2012                                                                                | 26.800,00          | -0,52% | 25/07/2012 | 4.870,00         | 1,44%  | 25/07/2012 | 30.800,00           | -0,65% | 25/07/2012 | 30.920,00              | -1,29% | 25/07/2012 | 11.500,00  | 2,26%  | 25/07/2012          | 50.280,00 | 0,99%  |
| 874 | 26/07/2012                                                                                | 26.660,00          | 3,15%  | 26/07/2012 | 4.940,00         | 4,05%  | 26/07/2012 | 30.600,00           | 1,31%  | 26/07/2012 | 30.520,00              | 2,82%  | 26/07/2012 | 11.760,00  | 0,68%  | 26/07/2012          | 50.780,00 | 1,02%  |
| 875 | 27/07/2012                                                                                | 27.500,00          | -0,15% | 27/07/2012 | 5.140,00         | 0,58%  | 27/07/2012 | 31.000,00           | -0,71% | 27/07/2012 | 31.380,00              | -0,89% | 27/07/2012 | 11.840,00  | -2,03% | 27/07/2012          | 51.300,00 | -0,97% |
| 876 | 30/07/2012                                                                                | 27.460,00          | -1,02% | 30/07/2012 | 5.170,00         | -0,39% | 30/07/2012 | 30.780,00           | -0,26% | 30/07/2012 | 31.100,00              | -1,29% | 30/07/2012 | 11.600,00  | -1,72% | 30/07/2012          | 50.800,00 | -0,59% |
| 877 | 31/07/2012                                                                                | 27.180,00          |        | 31/07/2012 | 5.150,00         |        | 31/07/2012 | 30.700,00           |        | 31/07/2012 | 30.700,00              |        | 31/07/2012 | 11.400,00  |        | 31/07/2012          | 50.500,00 |        |
| 878 | Media-Promedio                                                                            |                    | 0,09%  |            |                  | 0,12%  |            |                     | 0,09%  |            |                        | 0,14%  |            |            | 0,06%  |                     |           | 0,10%  |

Fuente: Datos tomados del portal web [En línea]

[https://www.grupoaval.com/portal/page?\\_pageid=33,54994&\\_dad=portal&\\_schema=PORTAL](https://www.grupoaval.com/portal/page?_pageid=33,54994&_dad=portal&_schema=PORTAL)

La muestra tomada arroja un total de 871 datos estadísticos por acción que son el resultado de la negociación en el mercado bursátil de las seis acciones objeto de nuestra investigación.

Durante este tiempo, se comenzó por encontrar el retorno (cambio porcentual de los precios) para cada día por acción y posteriormente se halló la media durante el periodo analizado para los retornos de cada acción seleccionada.

El cambio porcentual es un indicador útil para mirar si el valor de cierta acción está creciendo o disminuyendo en un periodo de tiempo. En este trabajo utilizaremos retornos simples, no retornos logarítmicos. A partir de un momento hasta el siguiente, el retorno simple se calcula de la siguiente manera:  $[(\text{valor al final del período} - \text{valor al inicio del período}) / \text{valor al inicio del período}] * 100$ .

Gráfico N° 4

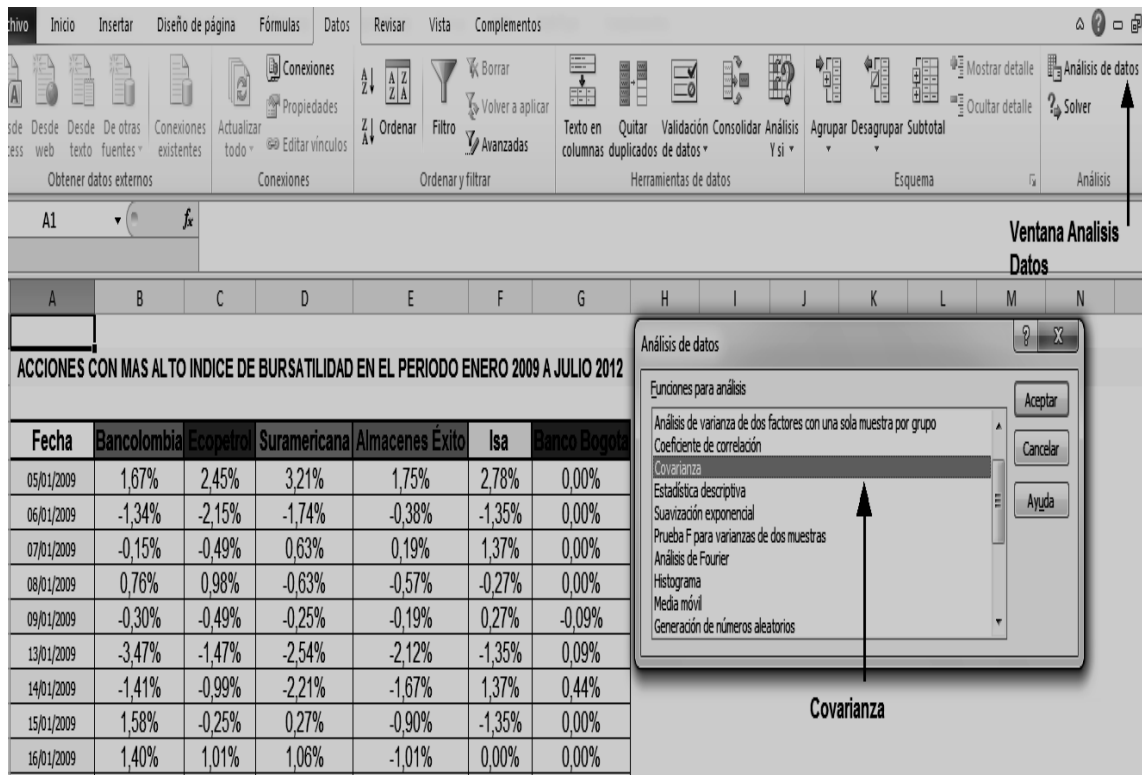
Cambio Porcentual de los precios de las acciones seleccionadas.

|     | A                                                                                         | B                  | C                | D                   | E                      | F          | G                   |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|------------------|---------------------|------------------------|------------|---------------------|
| 1   |                                                                                           |                    |                  |                     |                        |            |                     |
| 2   | <b>ACCIONES CON MAS ALTO INDICE DE BURSATILIDAD EN EL PERIODO ENERO 2009 A JULIO 2012</b> |                    |                  |                     |                        |            |                     |
| 3   |                                                                                           |                    |                  |                     |                        |            |                     |
| 4   | <b>Fecha</b>                                                                              | <b>Bancolombia</b> | <b>Ecopetrol</b> | <b>Suramericana</b> | <b>Almacenes Éxito</b> | <b>Isa</b> | <b>Banco Bogota</b> |
| 5   | 05/01/2009                                                                                | 1,67%              | 2,45%            | 3,21%               | 1,75%                  | 2,78%      | 0,00%               |
| 6   | 06/01/2009                                                                                | -1,34%             | -2,15%           | -1,74%              | -0,38%                 | -1,35%     | 0,00%               |
| 7   | 07/01/2009                                                                                | -0,15%             | -0,49%           | 0,63%               | 0,19%                  | 1,37%      | 0,00%               |
| 8   | 08/01/2009                                                                                | 0,76%              | 0,98%            | -0,63%              | -0,57%                 | -0,27%     | 0,00%               |
| 9   | 09/01/2009                                                                                | -0,30%             | -0,49%           | -0,25%              | -0,19%                 | 0,27%      | -0,09%              |
| 10  | 13/01/2009                                                                                | -3,47%             | -1,47%           | -2,54%              | -2,12%                 | -1,35%     | 0,09%               |
| 11  | 14/01/2009                                                                                | -1,41%             | -0,99%           | -2,21%              | -1,67%                 | 1,37%      | 0,44%               |
| 12  | 15/01/2009                                                                                | 1,58%              | -0,25%           | 0,27%               | -0,90%                 | -1,35%     | 0,00%               |
| 13  | 16/01/2009                                                                                | 1,40%              | 1,01%            | 1,06%               | -1,01%                 | 0,00%      | 0,00%               |
|     |                                                                                           |                    |                  |                     |                        |            |                     |
| 869 | 19/07/2012                                                                                | -2,53%             | -0,70%           | 0,06%               | -0,32%                 | -1,02%     | 0,40%               |
| 870 | 23/07/2012                                                                                | 0,30%              | 0,91%            | -0,45%              | -0,84%                 | 0,86%      | 1,18%               |
| 871 | 24/07/2012                                                                                | -0,74%             | -2,50%           | -0,19%              | 0,72%                  | -2,21%     | -1,99%              |
| 872 | 25/07/2012                                                                                | -0,52%             | 1,44%            | -0,65%              | -1,29%                 | 2,26%      | 0,99%               |
| 873 | 26/07/2012                                                                                | 3,15%              | 4,05%            | 1,31%               | 2,82%                  | 0,68%      | 1,02%               |
| 874 | 27/07/2012                                                                                | -0,15%             | 0,58%            | -0,71%              | -0,89%                 | -2,03%     | -0,97%              |
| 875 | 30/07/2012                                                                                | -1,02%             | -0,39%           | -0,26%              | -1,29%                 | -1,72%     | -0,59%              |
| 876 |                                                                                           |                    |                  |                     |                        |            |                     |
| 877 | Media-Promed                                                                              | 0,09%              | 0,12%            | 0,09%               | 0,14%                  | 0,06%      | 0,10%               |

Una vez encontrados los retornos simples para las series de acciones es necesario estimar la matriz de varianzas-covarianzas. Algorítmicamente, en Excel se halla de la siguiente manera: en el menú superior de Excel, en la ventana de Datos se escoge un link llamado análisis de datos. De allí seleccionamos la

funcion para el análisis a realizar, en nuestro caso la función a escoger será Covarianza como lo muestra la siguiente gráfica.

Gráfico N° 5  
Selección de la Matriz de Varianza-Covarianzas.



Una vez elegimos la funcion vamos a la tabla y seleccionamos los datos (que deben incluir el nombre de cada columna en la primera fila para que este nombre quede como primera fila en nuestra matriz de varianzas-covarianzas). Debemos arrastrar hasta cubrir el total de la tabla para que nos calcule todos los datos.

Gráfico N° 6  
Parámetros de la Matriz de Varianzas-Covarianzas.

The screenshot shows the Excel 'Covarianza' dialog box. The 'Rango de entrada' is '\$B\$4:\$G\$13'. The 'Agrupado por' is 'Columnas'. The 'Rotulos en la primera fila' checkbox is checked. The 'Opciones de salida' section has 'En una hoja nueva' selected. The background table contains the following data:

| Fecha      | Bancolombia | Suramericana | Almacenes Éxito | Isa    |
|------------|-------------|--------------|-----------------|--------|
| 05/01/2009 | 1,67%       | 2,45%        | 3,21%           | 1,75%  |
| 06/01/2009 | -1,34%      | -2,15%       | -1,74%          | -0,38% |
| 07/01/2009 | -0,15%      | -0,49%       | 0,63%           | 0,19%  |
| 08/01/2009 | 0,76%       | 0,98%        | -0,63%          | -0,57% |
| 09/01/2009 | -0,30%      | -0,49%       | -0,25%          | -0,19% |
| 13/01/2009 | -3,47%      | -1,47%       | -2,54%          | -2,12% |
| 14/01/2009 | -1,41%      | -0,99%       | -2,21%          | -1,67% |
| 15/01/2009 | 1,58%       | -0,25%       | 0,27%           | -0,90% |
| 16/01/2009 | 1,40%       | 1,01%        | 1,06%           | -1,01% |

El resultado de nuestra matriz de varianzas-covarianzas será necesario copiarlo para que los valores de la matriz aparezcan al lado triangular opuesto, como se aprecia en el gráfico 7.

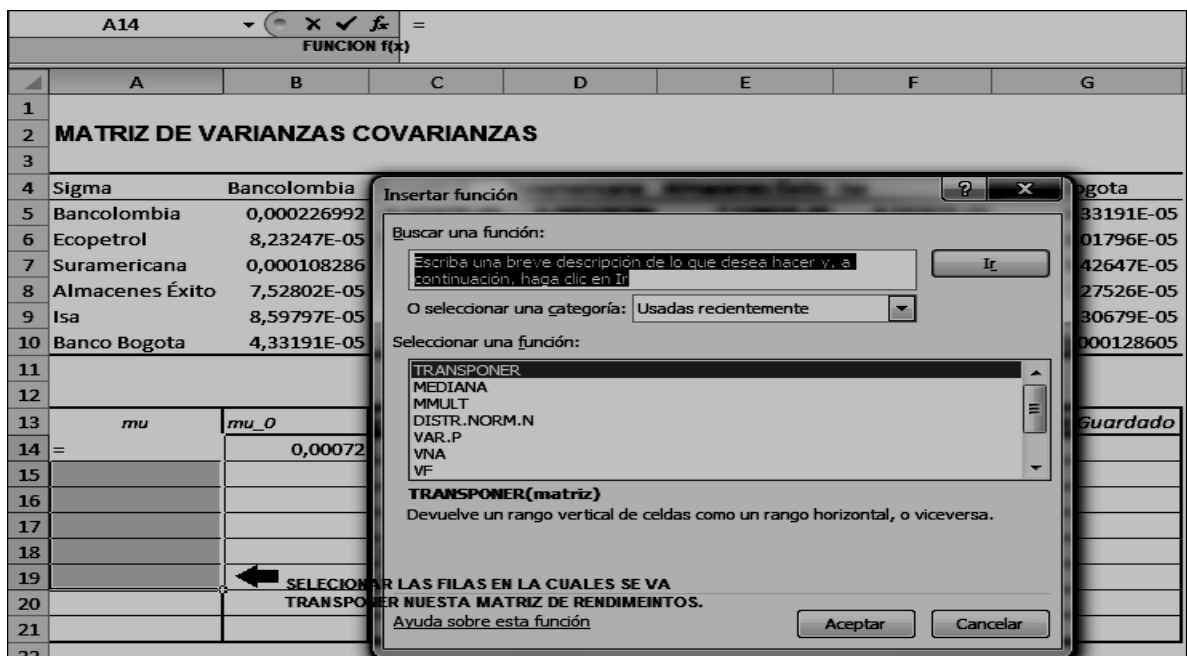
Grafica N° 7  
Resultado de Matriz de Varianza-Covarianza.

|    | A                                                                                                                         | B                  | C                | D                   | E                      | F           | G                   |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|------------------|---------------------|------------------------|-------------|---------------------|
| 1  | <b>MATRIZ DE VARIANZA-COVARIANZA SE DEBE COPIAR Y TRASPONER PARA QUE APAREZCAN LOS VALORES DE MATRIZ AL LADO OPUESTO.</b> |                    |                  |                     |                        |             |                     |
| 2  |                                                                                                                           |                    |                  |                     |                        |             |                     |
| 3  |                                                                                                                           | <b>Bancolombia</b> | <b>Ecopetrol</b> | <b>Suramericana</b> | <b>Almacenes Éxito</b> | <b>Isa</b>  | <b>Banco Bogota</b> |
| 4  | <b>Bancolombia</b>                                                                                                        | 0,000226992        |                  |                     |                        |             |                     |
| 5  | <b>Ecopetrol</b>                                                                                                          | 8,23247E-05        | 0,000188825      |                     |                        |             |                     |
| 6  | <b>Suramericana</b>                                                                                                       | 0,000108286        | 8,8544E-05       | 0,000213587         |                        |             |                     |
| 7  | <b>Almacenes Éxito</b>                                                                                                    | 7,52802E-05        | 4,4788E-05       | 7,85427E-05         | 0,000215929            |             |                     |
| 8  | <b>Isa</b>                                                                                                                | 8,59797E-05        | 7,58407E-05      | 0,000101567         | 6,96967E-05            | 0,000184842 |                     |
| 9  | <b>Banco Bogota</b>                                                                                                       | 4,33191E-05        | 4,01796E-05      | 4,42647E-05         | 2,27526E-05            | 3,30679E-05 | 0,000128605         |
| 10 |                                                                                                                           |                    |                  |                     |                        |             |                     |
| 11 |                                                                                                                           | <b>Bancolombia</b> | <b>Ecopetrol</b> | <b>Suramericana</b> | <b>Almacenes Éxito</b> | <b>Isa</b>  | <b>Banco Bogota</b> |
| 12 | <b>Bancolombia</b>                                                                                                        | 0,000226992        | 8,23247E-05      | 0,000108286         | 7,52802E-05            | 8,59797E-05 | 4,33191E-05         |
| 13 | <b>Ecopetrol</b>                                                                                                          | 8,23247E-05        | 0,000188825      | 8,8544E-05          | 4,4788E-05             | 7,58407E-05 | 4,01796E-05         |
| 14 | <b>Suramericana</b>                                                                                                       | 0,000108286        | 8,8544E-05       | 0,000213587         | 7,85427E-05            | 0,000101567 | 4,42647E-05         |
| 15 | <b>Almacenes Éxito</b>                                                                                                    | 7,52802E-05        | 4,4788E-05       | 7,85427E-05         | 0,000215929            | 6,96967E-05 | 2,27526E-05         |
| 16 | <b>Isa</b>                                                                                                                | 8,59797E-05        | 7,58407E-05      | 0,000101567         | 6,96967E-05            | 0,000184842 | 3,30679E-05         |
| 17 | <b>Banco Bogota</b>                                                                                                       | 4,33191E-05        | 4,01796E-05      | 4,42647E-05         | 2,27526E-05            | 3,30679E-05 | 0,000128605         |

Luego de encontrar los datos de insumo necesarios para el cálculo, debemos empezar por transponer algunos de estos datos, como se ve en el gráfico 9. Así se transponen los rendimientos medios (media o promedio) en un vector columna. Para realizar este procedimiento es necesario seleccionar la columna en la cual se van a transponer los datos, es decir, si se van a transponer 6 datos se deben seleccionar 6 filas.

Posteriormente nos dirigimos a la función transponer y seleccionamos los datos que van a quedar en nuestro vector columna. Para que el resultado sea el correcto se debe oprimir en el teclado sostenido Ctrl+Shift+Enter. Esta columna será denominada  $\mu$  ( $\mu$ ), es decir, rendimientos medios. Veamos a continuación:

Grafica N° 8  
Vector de rendimientos medios.



Como parte de nuestra investigación debemos establecer un retorno esperado  $\mu_0$  ( $\mu_0$ ) para nuestro portafolio, es decir, la tasa o rendimiento esperado para nuestro inversionista. Esta tasa está representada diariamente ya que los datos consultados son mostrados de acuerdo al precio diario de cada acción.

Para tener un resultado más fácil de interpretar podemos transformar el rendimiento diario a una tasa efectiva anual que será lo que percibirá el inversionista por el dinero que posee en títulos (acciones). Ello lo haremos de la siguiente manera:

Tasa Periódica → Tasa Efectiva Anual.

$$(1 + i)^m - 1$$

$$(1 + 0,00072)^{365} - 1$$

$$0,3004436 = 30,04\%$$

El inversionista tendrá una expectativa de rendimiento de una tasa efectiva anual del 30.04%.

Llamaremos ( $y$ ) al vector de los pesos de cada acción dentro del portafolio que se encuentra conformado por seis acciones objeto de nuestra investigación. Debemos recordar que las columnas que hemos mencionado deben ser nombradas de acuerdo a su representación, es decir se deben seleccionar y en la parte superior de la hoja de cálculo de Excel se puede colocar el nombre según la necesidad ( $\mu$ ,  $\mu_0$ ,  $y$ ).

La varianza es conocida como el riesgo del portafolio y el objetivo será hallar el mínimo riesgo al que debe estar dispuesto el inversionista para obtener el rendimiento que se espera para la conformación del portafolio.

En nuestra plantilla de Excel el riesgo del portafolio (varianza) es representado como  $y' \Sigma y$ , es decir, es igual a `=MMULT (TRANSPONER (y); MMULT (sigma; y))`: al finalizar se oprime sostenido Ctrl+Shift+Enter y queda resuelta la función.

El retorno del portafolio analizado será representado de la siguiente manera  $y' \mu$ , es decir, es igual a `=MMULT (TRANSPONER (y); mu)`. Al finalizar se oprime sostenido Ctrl+Shift+Enter.

Para que el portafolio sea eficiente el retorno debe ser igual a rendimiento esperado, por ende, se añade como restricción que este retorno sea igual al retorno esperado por el inversionista.

La condición de cardinalidad representa la condición de que del total de las acciones sólo un número máximo de acciones menor al total estén permitidas en el portafolio. Matemáticamente se escribe así:

$$\sum_i 1_{y_i > 0} \leq k$$

donde la función  $1_{y_i > 0}$  es 1 si  $y_i > 0$  y cero en otro caso. Es decir, la condición expresa que el número de acciones con pesos positivos puede ser cuando máximo  $k$ . En Excel, esta función se expresa mediante un condicional Si.

El portafolio de varianza mínima sujeto a un retorno esperado y a la condición de cardinalidad es, entonces:

El problema a resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned} \min_y \sigma_p^2 &= y' \Sigma y \\ \text{sujeto a} \\ 1. y' \mu &= \mu_0, \\ 2. y' 1 &= 1, \\ 3. y_i &\geq 0, \\ 4. \sum_i 1_{y_i > 0} &\leq k \end{aligned}$$

Dónde:

$\sigma_p^2$  es la varianza del portafolio que se desea minimizar,

$y$  es el vector de pesos del portafolio que indica qué porcentaje se invertirá en cada acción en el óptimo,

$\Sigma$  es la matriz de varianzas covarianzas de los rendimientos,

$\mu$  es el vector de rendimientos de cada acción,

$\mu_0$  es el rendimiento esperado,

$1_{y_i > 0}$  es la función indicatriz que es igual a 1 si  $y_i > 0$  e igual a 0 en otro caso.

El problema de portafolio consiste en hallar el mínimo de la varianza de un portafolio sujeto a las siguientes condiciones:

Que el rendimiento total del portafolio sea un rendimiento esperado  $\mu_0$

Que la suma de todos los pesos equivale a 1.

Que cada peso se mayor o igual a cero.

Que el número de acciones seleccionadas en el portafolio sea menor o igual a tres.

Se busca así encontrar la mínima varianza sujeto a un retorno esperado mediante la herramienta de Solver de Excel que nos permite solucionar nuestro modelo matemático y nos da como resultado el peso de las acciones que harán parte de nuestro portafolio. Las restricciones que tiene el problema son las que utilizaremos en el Solver de Excel para encontrar el grupo de acciones que serán óptimas para el inversionista, como lo mostramos a continuación:

Grafica N° 9  
Solución y Parámetros del Solver.

**Parámetros de Solver**

**Minimo de la Varianza del Portafolio**

Establecer objetivo: **\$D\$21**

Para: ☒ Máx. ☒ Mín. ☐ Valor de: 0

Cambiando las celdas de variables: **y**

Sujeto a las restricciones:

- \$D\$21 = 1
- \$F\$15 = mu\_0
- \$G\$21 <= 3
- y >= 0

Condiciones para el solver

☐ Convertir variables sin restricciones en no negativas

Método de resolución: **GRG Nonlinear**

Método de resolución: Seleccione el motor GRG Nonlinear para problemas de Solver no lineales suavizados. Seleccione el motor LP Simplex para problemas de Solver lineales, y seleccione el motor Evolutionary para problemas de Solver no suavizados.

Botones: Ayuda, Resolver, Cerrar

**MATRIZ DE VARIANZAS COVARIANZAS**

|                 | Bancolombia | Ecopetrol   | Suramericana | Almacenes Éxito | Isa         | Banco Bogota |
|-----------------|-------------|-------------|--------------|-----------------|-------------|--------------|
| Bancolombia     | 0,000226992 | 8,23247E-05 | 0,000108286  | 7,52802E-05     | 8,59797E-05 | 4,33191E-05  |
| Ecopetrol       | 8,23247E-05 | 0,000188825 | 8,8544E-05   | 4,4788E-05      | 7,58407E-05 | 4,01796E-05  |
| Suramericana    | 0,000108286 | 8,8544E-05  | 0,000213587  | 7,85427E-05     | 0,000101567 | 4,42647E-05  |
| Almacenes Éxito | 7,52802E-05 | 4,4788E-05  | 7,85427E-05  | 0,000215929     | 6,96967E-05 | 2,27526E-05  |
| Isa             | 8,59797E-05 | 7,58407E-05 | 0,000101567  | 6,96967E-05     | 0,000184842 | 3,30679E-05  |
| Banco Bogota    | 4,33191E-05 | 4,01796E-05 | 4,42647E-05  | 2,27526E-05     | 3,30679E-05 | 0,000128605  |

| mu              | mu_0        | y | y*Sigma*y   | y*mu    | N° Acciones en el Portafolio | Modulo Guardado |
|-----------------|-------------|---|-------------|---------|------------------------------|-----------------|
| 0,000944876     | 0,00072     | 0 | 0,00012142  | 0,00072 | 0                            | 0,00012142      |
| 0,001158006     | 0           | 0 | 0           | 0       | 0                            | 0               |
| 0,000886923     | 0           | 0 | 0           | 0       | 0                            | VERDADERO       |
| 0,001376047     | 0           | 0 | 0           | 0       | 1                            | FALSO           |
| 0,000619884     | 0,732966867 | 0 | 0,732966867 | 0       | 1                            | VERDADERO       |
| 0,000994803     | 0,267032354 | 0 | 0,267032354 | 0       | 1                            | VERDADERO       |
| Sumatoria de y* | 1           | 1 | 1           | 1       | 3                            | 32767           |

Varianza minima retorno del portafolio

Acciones seleccionadas por el solver como optimas.

La solución al Solver con la condición de cardinalidad determinó tres acciones como óptimas dentro del portafolio.

Para un problema con más acciones, el procedimiento es el mismo. Desafortunadamente, el Solver de Excel no es lo suficientemente sofisticado para hallar el óptimo global cuando hay muchas acciones.

Para verificar que hemos hallado el mínimo global, intentamos encontrar el óptimo del problema media-varianza (sin la condición de cardinalidad) para cada combinación de tres acciones que pueden hacer parte de un portafolio de seis acciones. Para cada combinación posible de tres de un grupo de seis acciones, se halla la varianza mínima. Luego se halla la varianza mínima del conjunto de todas estas varianzas mínimas. Esta varianza mínima del conjunto total de las combinaciones debe coincidir con el óptimo hallado cuando agregamos la condición de cardinalidad al problema de media-varianza. Es decir, el portafolio de mínima varianza entre todas las combinaciones debe ser igual al portafolio obtenido con la condición de cardinalidad.

## 5. RESULTADOS DE LA INVESTIGACION

### 5.1 CONSTRUCCION DEL PORTAFOLIO OPTIMO PARA EL INVERSIONISTA

Como resultado de esta investigación se halla mediante un modelo matemático de Markowitz con una condición de cardinalidad el portafolio óptimo para el retorno esperado (Tabla 1). Lo siguiente que se debe mostrar es que el modelo ya optimizado con la condición de cardinalidad coincide con el óptimo del conjunto total de los problemas de Markowitz con cada combinación de tres acciones del total de seis (Tabla 2 a 21):

**Tabla N° 1**

**Modelo Solver grupo seis acciones periodos comprendidos entre enero de 2009 hasta julio de 2012.**

#### MATRIZ DE VARIANZAS COVARIANZAS

Sigma

|                 | Bancolombia | Ecopetrol   | Suramericana | Almacenes Éxito | Isa         | Banco Bogota |
|-----------------|-------------|-------------|--------------|-----------------|-------------|--------------|
| Bancolombia     | 0,000226992 | 8,23247E-05 | 0,000108286  | 7,52802E-05     | 8,59797E-05 | 4,33191E-05  |
| Ecopetrol       | 8,23247E-05 | 0,000188825 | 8,8544E-05   | 4,4788E-05      | 7,58407E-05 | 4,01796E-05  |
| Suramericana    | 0,000108286 | 8,8544E-05  | 0,000213587  | 7,85427E-05     | 0,000101567 | 4,42647E-05  |
| Almacenes Éxito | 7,52802E-05 | 4,4788E-05  | 7,85427E-05  | 0,000215929     | 6,96967E-05 | 2,27526E-05  |
| Isa             | 8,59797E-05 | 7,58407E-05 | 0,000101567  | 6,96967E-05     | 0,000184842 | 3,30679E-05  |
| Banco Bogota    | 4,33191E-05 | 4,01796E-05 | 4,42647E-05  | 2,27526E-05     | 3,30679E-05 | 0,000128605  |

| $\mu$       | $\mu_0$         | $y$         | $y'.\text{Sigma}.y$ | $y'.\mu$ | Nº Acciones en el Portafolio | Modelo Guardado |
|-------------|-----------------|-------------|---------------------|----------|------------------------------|-----------------|
| 0,000944876 | 0,00072         | 0           | 0,00012142          | 0,00072  | 0                            | 0,00012142      |
| 0,001158006 |                 | 0           |                     |          | 0                            | 6               |
| 0,000886923 |                 | 0           |                     |          | 0                            | VERDADERO       |
| 0,001376047 |                 | 7,79388E-07 |                     |          | 1                            | FALSO           |
| 0,000619884 |                 | 0,732966867 |                     |          | 1                            | VERDADERO       |
| 0,000994803 |                 | 0,267032354 |                     |          | 1                            | VERDADERO       |
|             | Sumatoria de Y= | 1           |                     |          | 3                            | 32767           |
|             |                 |             |                     |          |                              | 0               |

Los cálculos obtenidos en el modelo de Markowitz con la condición de cardinalidad arrojaron que solo dos acciones (ISA (73%) y Banco de Bogotá (26%)) de las seis seleccionadas formaran parte del portafolio y que estas representan el 100% del portafolio. La escogencia de la tercera acción es irrelevante ya que su peso es insignificante (Tabla 1).

## 5.2 COMBINACIONES POSIBLES DADO EL RESULTADO DEL MODELO

A continuación se muestra el desarrollo del modelo de Markowitz estándar para cada una de las posibles combinaciones de tres acciones del total de seis. Se pretende encontrar la combinación que tenga una varianza mínima y verificar que el portafolio escogido es igual a la del modelo propuesto con la condición de cardinalidad.

Hay un total de veinte combinaciones y se halla para cada grupo de tres acciones el portafolio óptimo estándar (Tabla 2 a 21). El portafolio óptimo global entre los veinte portafolios hallados fue igual al del modelo propuesto (ISA (73%) y Banco de Bogotá (26%)). Este resultado se halló en la Tabla 8, 14, 18 y 21 donde los pesos fueron (ISA (73%) y Banco de Bogotá (26%) y una tercera acción (Bancolombia o Suramericana o Ecopetrol o Almacenes Éxito) con un peso insignificante. Para algunas combinaciones, el modelo estándar de Markowitz no convergió. En estos resultados se concluye que el retorno esperado es demasiado alto y por lo tanto no hay solución viable para esa combinación de tres acciones.

**Tabla N° 2**  
**Bancolombia, Ecopetrol y Banco de Bogotá**

**Sigma**

|                     | <b>Bancolombia</b> | <b>Ecopetrol</b> | <b>Banco Bogota</b> |
|---------------------|--------------------|------------------|---------------------|
| <b>Bancolombia</b>  | 0,000226992        | 8,23247E-05      | 4,33191E-05         |
| <b>Ecopetrol</b>    | 8,23247E-05        | 0,000188825      | 4,01796E-05         |
| <b>Banco Bogota</b> | 4,33191E-05        | 4,01796E-05      | 0,000128605         |

| <i>mu</i>   | <i>mu_0</i>     | <i>y</i> | <i>y'.Sigma.y</i> | <i>y'.mu</i> | <i>Modelo Guardado</i> |
|-------------|-----------------|----------|-------------------|--------------|------------------------|
| 0,000944876 | 0,00072         | 1        | 0,00022699        | 0,000944876  | 0,00022699             |
| 0,001158006 |                 | 0        |                   |              | 3                      |
| 0,000994803 |                 | 0        |                   |              | VERDADERO              |
|             | Sumatoria de Y= | 1        |                   |              | FALSO                  |
|             |                 |          |                   |              | VERDADERO              |
|             |                 |          |                   |              | 32767                  |
|             |                 |          |                   |              | 0                      |

**Tabla N° 3**  
**Bancolombia, Ecopetrol y Almacenes Éxito**

**Sigma**

|                        | <b>Bancolombia</b> | <b>Ecopetrol</b> | <b>Almacenes Éxito</b> |
|------------------------|--------------------|------------------|------------------------|
| <b>Bancolombia</b>     | 0,000226992        | 8,2325E-05       | 7,52802E-05            |
| <b>Ecopetrol</b>       | 8,23247E-05        | 0,00018883       | 4,4788E-05             |
| <b>Almacenes Éxito</b> | 7,52802E-05        | 4,4788E-05       | 0,000215929            |

| <b>mu</b>   | <b>mu_0</b>     | <b>y</b> | <b>y'.Sigma.y</b> | <b>y'.mu</b> | <b>Modelo Guardado</b> |
|-------------|-----------------|----------|-------------------|--------------|------------------------|
| 0,000944876 | 0,00072         | 1,00000  | 0,000226991       | 0,000944875  | 0,000226991            |
| 0,001158006 |                 | 0,00000  |                   |              | 3                      |
| 0,001376047 |                 | 0,00000  |                   |              | FALSO                  |
|             | Sumatoria de Y= | 0,999999 |                   |              | FALSO                  |
|             |                 |          |                   |              | VERDADERO              |
|             |                 |          |                   |              | 32767                  |
|             |                 |          |                   |              | 0                      |

**Tabla N° 4**  
**Bancolombia, Ecopetrol e Isa**

**Sigma**

|                    | <b>Bancolombia</b> | <b>Ecopetrol</b> | <b>Isa</b>  |
|--------------------|--------------------|------------------|-------------|
| <b>Bancolombia</b> | 0,000226992        | 8,23247E-05      | 8,59797E-05 |
| <b>Ecopetrol</b>   | 8,23247E-05        | 0,000188825      | 7,58407E-05 |
| <b>Isa</b>         | 8,59797E-05        | 7,58407E-05      | 0,000184842 |

| <b>mu</b>   | <b>mu_0</b>     | <b>y</b>    | <b>y'.Sigma.y</b> | <b>y'.mu</b> | <b>Modelo Guardado</b> |
|-------------|-----------------|-------------|-------------------|--------------|------------------------|
| 0,000944876 | 0,00072         | 0,198224732 | 0,00014436        | 0,00072      | 0,00014436             |
| 0,001158006 |                 | 0,066332045 |                   |              | 3                      |
| 0,000619884 |                 | 0,735443223 |                   |              | VERDADERO              |
|             | Sumatoria de Y= | 1           |                   |              | FALSO                  |
|             |                 |             |                   |              | VERDADERO              |
|             |                 |             |                   |              | 32767                  |
|             |                 |             |                   |              | 0                      |

**Tabla N° 5**  
**Bancolombia, Ecopetrol y Suramericana**

**Sigma**

|                     | <b>Bancolombia</b> | <b>Ecopetrol</b> | <b>Suramericana</b> |
|---------------------|--------------------|------------------|---------------------|
| <b>Bancolombia</b>  | 0,000226992        | 8,2325E-05       | 0,000108286         |
| <b>Ecopetrol</b>    | 8,23247E-05        | 0,00018883       | 8,8544E-05          |
| <b>Suramericana</b> | 0,000108286        | 8,8544E-05       | 0,000213587         |

| <b>mu</b>   | <b>mu_0</b>     | <b>y</b> | <b>y'.Sigma.y</b> | <b>y'.mu</b> | <b>Modelo Guardado</b> |
|-------------|-----------------|----------|-------------------|--------------|------------------------|
| 0,000944876 | 0,00072         | 0        | 0,00021359        | 0,000886923  | 0,0002136              |
| 0,001158006 |                 | 0        |                   |              | 3                      |
| 0,000886923 |                 | 1        |                   |              | VERDADERO              |
|             | Sumatoria de Y= | 1        |                   |              | FALSO                  |
|             |                 |          |                   |              | VERDADERO              |
|             |                 |          |                   |              | 32767                  |
|             |                 |          |                   |              | 0                      |

**Tabla N° 6**  
**Bancolombia, Almacenes Éxito y Banco de Bogotá.**

**Sigma**

|                        | <b>Bancolombia</b> | <b>Almacenes Éxito</b> | <b>Banco Bogota</b> |
|------------------------|--------------------|------------------------|---------------------|
| <b>Bancolombia</b>     | 0,000226992        | 7,52802E-05            | 4,33191E-05         |
| <b>Almacenes Éxito</b> | 7,52802E-05        | 0,000215929            | 2,27526E-05         |
| <b>Banco Bogota</b>    | 4,33191E-05        | 2,27526E-05            | 0,000128605         |

| <b>mu</b>   | <b>mu_0</b>     | <b>y</b> | <b>y'.Sigma.y</b> | <b>y'.mu</b> | <b>Modelo Guardado</b> |
|-------------|-----------------|----------|-------------------|--------------|------------------------|
| 0,000944876 | 0,00072         | 1        | 0,000226992       | 0,000944876  | 0,000226992            |
| 0,001376047 |                 | 0        |                   |              | 3                      |
| 0,000994803 |                 | 0        |                   |              | VERDADERO              |
|             | Sumatoria de Y= | 1        |                   |              | FALSO                  |
|             |                 |          |                   |              | VERDADERO              |
|             |                 |          |                   |              | 32767                  |
|             |                 |          |                   |              | 0                      |

**Tabla N° 7**  
**Bancolombia, Almacenes Éxito e Isa**

**Sigma**

|                        | <b>Bancolombia</b> | <b>Almacenes Éxito</b> | <b>Isa</b>  |
|------------------------|--------------------|------------------------|-------------|
| <b>Bancolombia</b>     | 0,000226992        | 7,52802E-05            | 8,59797E-05 |
| <b>Almacenes Éxito</b> | 7,52802E-05        | 0,000215929            | 6,96967E-05 |
| <b>Isa</b>             | 8,59797E-05        | 6,96967E-05            | 0,000184842 |

| <b>mu</b>   | <b>mu_0</b>     | <b>y</b>    | <b>y'.Sigma.y</b> | <b>y'.mu</b> | <b>Modelo Guardado</b> |
|-------------|-----------------|-------------|-------------------|--------------|------------------------|
| 0,000944876 | 0,00072         | 0,254158122 | 0,000146119       | 0,00072      | 0,000146119            |
| 0,001376047 |                 | 0,023165395 |                   |              | 3                      |
| 0,000619884 |                 | 0,722676484 |                   |              | VERDADERO              |
|             | Sumatoria de Y= | 1           |                   |              | FALSO                  |
|             |                 |             |                   |              | VERDADERO              |
|             |                 |             |                   |              | 32767                  |
|             |                 |             |                   |              | 0                      |

**Tabla N° 8**  
**Bancolombia, Isa y Banco de Bogotá.**

**Sigma**

|                     | <b>Bancolombia</b> | <b>Isa</b>  | <b>Banco Bogota</b> |
|---------------------|--------------------|-------------|---------------------|
| <b>Bancolombia</b>  | 0,000226992        | 8,59797E-05 | 4,33191E-05         |
| <b>Isa</b>          | 8,59797E-05        | 0,000184842 | 3,30679E-05         |
| <b>Banco Bogota</b> | 4,33191E-05        | 3,30679E-05 | 0,000128605         |

| <b>mu</b>   | <b>mu_0</b>     | <b>y</b>    | <b>y'.Sigma.y</b> | <b>y'.mu</b> | <b>Modelo Guardado</b> |
|-------------|-----------------|-------------|-------------------|--------------|------------------------|
| 0,000944876 | 0,00072         | 0           | 0,00012142        | 0,00072      | 0,00012142             |
| 0,000619884 |                 | 0,732966119 |                   |              | 3                      |
| 0,000994803 |                 | 0,267034215 |                   |              | FALSO                  |
|             | Sumatoria de Y= | 1,000000333 |                   |              | FALSO                  |
|             |                 |             |                   |              | VERDADERO              |
|             |                 |             |                   |              | 32767                  |
|             |                 |             |                   |              | 0                      |

**Tabla N° 9**  
**Bancolombia, Suramericana y Banco de Bogota.**

**Sigma**

|                     | <b>Bancolombia</b> | <b>Suramericana</b> | <b>Banco Bogota</b> |
|---------------------|--------------------|---------------------|---------------------|
| <b>Bancolombia</b>  | 0,000226992        | 0,000108286         | 4,33191E-05         |
| <b>Suramericana</b> | 0,000108286        | 0,000213587         | 4,42647E-05         |
| <b>Banco Bogota</b> | 4,33191E-05        | 4,42647E-05         | 0,000128605         |

| <b>mu</b>   | <b>mu_0</b>     | <b>y</b>    | <b>y'.Sigma.y</b> | <b>y'.mu</b> | <b>Modelo Guardado</b> |
|-------------|-----------------|-------------|-------------------|--------------|------------------------|
| 0,000944876 | 0,00072         | 0           | 0,000213587       | 0,000886923  | 0,000213587            |
| 0,000886923 |                 | 0,999999976 |                   |              | 3                      |
| 0,000994803 |                 | 0           |                   |              | FALSO                  |
|             | Sumatoria de Y= | 0,999999976 |                   |              | FALSO                  |
|             |                 |             |                   |              | VERDADERO              |
|             |                 |             |                   |              | 32767                  |
|             |                 |             |                   |              | 0                      |

**Tabla N° 10**  
**Bancolombia, Suramericana y Almacenes Éxito.**

**Sigma**

|                        | <b>Bancolombia</b> | <b>Suramericana</b> | <b>Almacenes Éxito</b> |
|------------------------|--------------------|---------------------|------------------------|
| <b>Bancolombia</b>     | 0,000226992        | 0,000108286         | 7,52802E-05            |
| <b>Suramericana</b>    | 0,000108286        | 0,000213587         | 7,85427E-05            |
| <b>Almacenes Éxito</b> | 7,52802E-05        | 7,85427E-05         | 0,000215929            |

| <b>mu</b>   | <b>mu_0</b>     | <b>y</b> | <b>y'.Sigma.y</b> | <b>y'.mu</b> | <b>Modelo Guardado</b> |
|-------------|-----------------|----------|-------------------|--------------|------------------------|
| 0,000944876 | 0,00072         | 0        | 0,000213587       | 0,000886923  | 0,000213587            |
| 0,000886923 |                 | 1        |                   |              | 3                      |
| 0,001376047 |                 | 0        |                   |              | VERDADERO              |
|             | Sumatoria de Y= | 1        |                   |              | FALSO                  |
|             |                 |          |                   |              | VERDADERO              |
|             |                 |          |                   |              | 32767                  |
|             |                 |          |                   |              | 0                      |

**Tabla N° 11**  
**Bancolombia, Suramericana e Isa**

**Sigma**

|                     | <b>Bancolombia</b> | <b>Suramericana</b> | <b>Isa</b>  |
|---------------------|--------------------|---------------------|-------------|
| <b>Bancolombia</b>  | 0,000226992        | 0,000108286         | 8,59797E-05 |
| <b>Suramericana</b> | 0,000108286        | 0,000213587         | 0,000101567 |
| <b>Isa</b>          | 8,59797E-05        | 0,000101567         | 0,000184842 |

| <b>mu</b>   | <b>mu_0</b>     | <b>y</b>    | <b>y'.Sigma.y</b> | <b>y'.mu</b> | <b>Modelo Guardado</b> |
|-------------|-----------------|-------------|-------------------|--------------|------------------------|
| 0,000944876 | 0,00072         | 0,172849812 | 0,00014172        | 0,00072      | 0,00014172             |
| 0,000886923 |                 | 0,164552902 |                   |              | 3                      |
| 0,000619884 |                 | 0,662597286 |                   |              | FALSO                  |
|             | Sumatoria de Y= | 1           |                   |              | FALSO                  |
|             |                 |             |                   |              | VERDADERO              |
|             |                 |             |                   |              | 32767                  |
|             |                 |             |                   |              | 0                      |

**Tabla N° 12**  
**Ecopetrol, Almacenes Éxito y Banco de Bogotá.**

**Sigma**

|                        | <b>Ecopetrol</b> | <b>Almacenes Éxito</b> | <b>Banco Bogota</b> |
|------------------------|------------------|------------------------|---------------------|
| <b>Ecopetrol</b>       | 0,000188825      | 4,4788E-05             | 4,01796E-05         |
| <b>Almacenes Éxito</b> | 4,4788E-05       | 0,000215929            | 2,27526E-05         |
| <b>Banco Bogota</b>    | 4,01796E-05      | 2,27526E-05            | 0,000128605         |

| <b>mu</b>   | <b>mu_0</b>     | <b>y</b> | <b>y'.Sigma.y</b> | <b>y'.mu</b> | <b>Modelo Guardado</b> |
|-------------|-----------------|----------|-------------------|--------------|------------------------|
| 0,001158006 | 0,00072         | 0        | 0,00012860        | 0,000994803  | 0,00012860             |
| 0,001376047 |                 | 0        |                   |              | 3                      |
| 0,000994803 |                 | 1        |                   |              | VERDADERO              |
|             | Sumatoria de Y= | 1        |                   |              | FALSO                  |
|             |                 |          |                   |              | VERDADERO              |
|             |                 |          |                   |              | 32767                  |
|             |                 |          |                   |              | 0                      |

**Tabla N° 13**  
**Ecopetrol, Almacenes Éxito e Isa.**

**Sigma**

|                        | <b>Ecopetrol</b> | <b>Almacenes Éxito</b> | <b>Isa</b>  |
|------------------------|------------------|------------------------|-------------|
| <b>Ecopetrol</b>       | 0,000188825      | 4,4788E-05             | 7,58407E-05 |
| <b>Almacenes Éxito</b> | 4,4788E-05       | 0,000215929            | 6,96967E-05 |
| <b>Isa</b>             | 7,58407E-05      | 6,96967E-05            | 0,000184842 |

| <b>mu</b>   | <b>mu_0</b>     | <b>y</b>    | <b>y'.Sigma.y</b> | <b>y'.mu</b> | <b>Modelo Guardado</b> |
|-------------|-----------------|-------------|-------------------|--------------|------------------------|
| 0,001158006 | 0,00072         | 0,172805252 | 0,00015193        | 0,00072      | 0,000151926            |
| 0,001376047 |                 | 0,009423753 |                   |              | 3                      |
| 0,000619884 |                 | 0,817770995 |                   |              | VERDADERO              |
|             | Sumatoria de Y= | 1           |                   |              | FALSO                  |
|             |                 |             |                   |              | VERDADERO              |
|             |                 |             |                   |              | 32767                  |
|             |                 |             |                   |              | 0                      |

**Tabla N° 14**  
**Ecopetrol, Isa y Banco de Bogotá.**

**Sigma**

|                     | <b>Ecopetrol</b> | <b>Isa</b>  | <b>Banco Bogota</b> |
|---------------------|------------------|-------------|---------------------|
| <b>Ecopetrol</b>    | 0,000188825      | 7,58407E-05 | 4,01796E-05         |
| <b>Isa</b>          | 7,58407E-05      | 0,000184842 | 3,30679E-05         |
| <b>Banco Bogota</b> | 4,01796E-05      | 3,30679E-05 | 0,000128605         |

| <b>mu</b>   | <b>mu_0</b>     | <b>y</b>    | <b>y'.Sigma.y</b> | <b>y'.mu</b> | <b>Modelo Guardado</b> |
|-------------|-----------------|-------------|-------------------|--------------|------------------------|
| 0,001158006 | 0,00072         | 0           | 0,00012142        | 0,00072      | 0,00012142             |
| 0,000619884 |                 | 0,732965929 |                   |              | 3                      |
| 0,000994803 |                 | 0,267034404 |                   |              | FALSO                  |
|             | Sumatoria de Y= | 1,000000333 |                   |              | FALSO                  |
|             |                 |             |                   |              | VERDADERO              |
|             |                 |             |                   |              | 32767                  |
|             |                 |             |                   |              | 0                      |

**Tabla N° 15**  
**Ecopetrol, Suramericana y Banco de Bogota.**

**Sigma**

|                     | <b>Ecopetrol</b> | <b>Suramericana</b> | <b>Banco Bogota</b> |
|---------------------|------------------|---------------------|---------------------|
| <b>Ecopetrol</b>    | 0,000188825      | 8,8544E-05          | 4,01796E-05         |
| <b>Suramericana</b> | 8,8544E-05       | 0,000213587         | 4,42647E-05         |
| <b>Banco Bogota</b> | 4,01796E-05      | 4,42647E-05         | 0,000128605         |

| <b>mu</b>   | <b>mu_0</b>     | <b>y</b>    | <b>y'.Sigma.y</b> | <b>y'.mu</b> | <b>Modelo Guardado</b> |
|-------------|-----------------|-------------|-------------------|--------------|------------------------|
| 0,001158006 | 0,00072         | 0           | 0,00021359        | 0,000886923  | 0,00021359             |
| 0,000886923 |                 | 0,999999977 |                   |              | 3                      |
| 0,000994803 |                 | 0           |                   |              | FALSO                  |
|             | Sumatoria de Y= | 0,999999977 |                   |              | FALSO                  |
|             |                 |             |                   |              | VERDADERO              |
|             |                 |             |                   |              | 32767                  |
|             |                 |             |                   |              | 0                      |

**Tabla N° 16**  
**Ecopetrol, Suramericana y Almacenes Éxito.**

**Sigma**

|                        | <b>Ecopetrol</b> | <b>Suramericana</b> | <b>Almacenes Éxito</b> |
|------------------------|------------------|---------------------|------------------------|
| <b>Ecopetrol</b>       | 0,000188825      | 8,8544E-05          | 4,4788E-05             |
| <b>Suramericana</b>    | 8,8544E-05       | 0,000213587         | 7,85427E-05            |
| <b>Almacenes Éxito</b> | 4,4788E-05       | 7,85427E-05         | 0,000215929            |

| <b>mu</b>   | <b>mu_0</b>     | <b>y</b>    | <b>y'.Sigma.y</b> | <b>y'.mu</b> | <b>Modelo Guardado</b> |
|-------------|-----------------|-------------|-------------------|--------------|------------------------|
| 0,001158006 | 0,00072         | 0           | 0,000213587       | 0,000886923  | 0,000213587            |
| 0,000886923 |                 | 0,999999977 |                   |              | 3                      |
| 0,001376047 |                 | 0           |                   |              | FALSO                  |
|             | Sumatoria de Y= | 0,999999977 |                   |              | FALSO                  |
|             |                 |             |                   |              | VERDADERO              |
|             |                 |             |                   |              | 32767                  |
|             |                 |             |                   |              | 0                      |

**Tabla N° 17**  
**Ecopetrol, Suramericana, e Isa.**

**Sigma**

|                     | <b>Ecopetrol</b> | <b>Suramericana</b> | <b>Isa</b>  |
|---------------------|------------------|---------------------|-------------|
| <b>Ecopetrol</b>    | 0,000188825      | 8,8544E-05          | 7,58407E-05 |
| <b>Suramericana</b> | 8,8544E-05       | 0,000213587         | 0,000101567 |
| <b>Isa</b>          | 7,58407E-05      | 0,000101567         | 0,000184842 |

| <b>mu</b>   | <b>mu_0</b>     | <b>y</b>    | <b>y'.Sigma.y</b> | <b>y'.mu</b> | <b>Modelo Guardado</b> |
|-------------|-----------------|-------------|-------------------|--------------|------------------------|
| 0,001158006 | 0,00072         | 0,083971231 | 0,000145421       | 0,00072      | 0,000145421            |
| 0,000886923 |                 | 0,205697897 |                   |              | 3                      |
| 0,000619884 |                 | 0,710330872 |                   |              | VERDADERO              |
|             | Sumatoria de Y= | 1           |                   |              | FALSO                  |
|             |                 |             |                   |              | VERDADERO              |
|             |                 |             |                   |              | 32767                  |
|             |                 |             |                   |              | 0                      |

**Tabla N° 18**  
**Almacenes Éxito, Isa y Banco de Bogotá.**

**Sigma**

|                 | Almacenes Éxito | Isa         | Banco Bogota |
|-----------------|-----------------|-------------|--------------|
| Almacenes Éxito | 0,000215929     | 6,96967E-05 | 2,27526E-05  |
| Isa             | 6,96967E-05     | 0,000184842 | 3,30679E-05  |
| Banco Bogota    | 2,27526E-05     | 3,30679E-05 | 0,000128605  |

| mu          | mu_0            | y           | y'.Sigma.y | y'.mu   | Modelo Guardado |
|-------------|-----------------|-------------|------------|---------|-----------------|
| 0,001376047 | 0,00072         | 0           | 0,00012142 | 0,00072 | 0,00012142      |
| 0,000619884 |                 | 0,732966074 |            |         | 3               |
| 0,000994803 |                 | 0,267033926 |            |         | VERDADERO       |
|             | Sumatoria de Y= | 1           |            |         | FALSO           |
|             |                 |             |            |         | VERDADERO       |
|             |                 |             |            |         | 32767           |
|             |                 |             |            |         | 0               |

**Tabla N° 19**  
**Suramericana, Almacenes Éxito y Banco de Bogota.**

**Sigma**

|                 | Suramericana | Almacenes Éxito | Banco Bogota |
|-----------------|--------------|-----------------|--------------|
| Suramericana    | 0,000213587  | 7,85427E-05     | 4,42647E-05  |
| Almacenes Éxito | 7,85427E-05  | 0,000215929     | 2,27526E-05  |
| Banco Bogota    | 4,42647E-05  | 2,27526E-05     | 0,000128605  |

| mu          | mu_0            | y | y'.Sigma.y | y'.mu       | Modelo Guardado |
|-------------|-----------------|---|------------|-------------|-----------------|
| 0,000886923 | 0,00072         | 1 | 0,00021359 | 0,000886923 | 0,00021359      |
| 0,001376047 |                 | 0 |            |             | 3               |
| 0,000994803 |                 | 0 |            |             | VERDADERO       |
|             | Sumatoria de Y= | 1 |            |             | FALSO           |
|             |                 |   |            |             | VERDADERO       |
|             |                 |   |            |             | 32767           |
|             |                 |   |            |             | 0               |

**Tabla N° 20**  
**Suramericana, Almacenes Éxito e Isa.**

**Sigma**

|                 | Suramericana | Almacenes Éxito | Isa         |
|-----------------|--------------|-----------------|-------------|
| Suramericana    | 0,000213587  | 7,85427E-05     | 0,000101567 |
| Almacenes Éxito | 7,85427E-05  | 0,000215929     | 6,96967E-05 |
| Isa             | 0,000101567  | 6,96967E-05     | 0,000184842 |

| mu          | mu_0            | y           | y'.Sigma.y | y'.mu   | Modelo Guardado |
|-------------|-----------------|-------------|------------|---------|-----------------|
| 0,000886923 | 0,00072         | 0,261846902 | 0,00014777 | 0,00072 | 0,00014777      |
| 0,001376047 |                 | 0,039928901 |            |         | 3               |
| 0,000619884 |                 | 0,698224197 |            |         | VERDADERO       |
|             | Sumatoria de Y= | 1           |            |         | FALSO           |
|             |                 |             |            |         | VERDADERO       |
|             |                 |             |            |         | 32767           |
|             |                 |             |            |         | 0               |

**Tabla N° 21**  
**Suramericana, Isa y Banco de Bogota.**

**Sigma**

|              | Suramericana | Isa         | Banco Bogota |
|--------------|--------------|-------------|--------------|
| Suramericana | 0,000213587  | 0,000101567 | 4,42647E-05  |
| Isa          | 0,000101567  | 0,000184842 | 3,30679E-05  |
| Banco Bogota | 4,42647E-05  | 3,30679E-05 | 0,000128605  |

| mu          | mu_0            | y           | y'.Sigma.y | y'.mu   | Modelo Guardado |
|-------------|-----------------|-------------|------------|---------|-----------------|
| 0,000886923 | 0,00072         | 0           | 0,00012142 | 0,00072 | 0,00012142      |
| 0,000619884 |                 | 0,732966081 |            |         | 3               |
| 0,000994803 |                 | 0,267033919 |            |         | VERDADERO       |
|             | Sumatoria de Y= | 1           |            |         | FALSO           |
|             |                 |             |            |         | VERDADERO       |
|             |                 |             |            |         | 32767           |
|             |                 |             |            |         | 0               |

### 5.3 ANALISIS DE RESULTADOS

Del total de seis acciones se encontraron mediante el modelo propuesto tres que son las óptimas para el inversor usando la condición de cardinalidad. Podemos decir que el portafolio óptimo para el inversionista que busca un mínimo riesgo bajo la condición de cardinalidad se puede conformar con las acciones Banco de Bogotá e Isa y una tercera acción con un peso insignificante.

Este resultado se comprobó verificando entre todas las combinaciones de tres acciones del total de seis seleccionadas la tripla que tenía el riesgo mínimo era la misma que se había hallado con la condición de cardinalidad. Así, del total de veinte combinaciones que se realizaron se encontró que las acciones que conforman el portafolio óptimo global son Banco de Bogotá e Isa, con los mismos pesos. La tercera acción de este portafolio también tiene un peso insignificante y pueden ser por ende una de las otras cuatro acciones analizadas.

Basado en los análisis de las combinaciones realizados también pudimos identificar que hubo triplas de acciones para las cuales no se halló el retorno esperado razón por la cual se concluye que para un rendimiento tan alto no es posible hallar un óptimo con estas triplas.

## CONCLUSIONES

Esta investigación establece como aporte un modelo matemático simple para calcular un portafolio óptimo de media –varianza para un inversionista con una condición adicional de cardinalidad. Una condición de cardinalidad es aquella que solo permite escoger un subgrupo de acciones de un total disponible. La condición de cardinalidad puede ser deseable por diversas razones, como con el fin de reducir los costos de transacción o cuando el inversionista prefiere tener menos acciones en su portafolio porque le parece que no tiene suficiente tiempo o dinero para estar pendiente de un portafolio con más acciones.

La herramienta de análisis Solver de Excel que permite optimizar una función objetivo nos permitió dar solución a un ejemplo de problema de optimización media-varianza con una condición de cardinalidad. El problema matemático de optimización con la condición de cardinalidad es lo suficientemente complejo para que Solver no halle los resultados óptimos (globales) si el número de acciones totales de las que se puede escoger es muy grande. Por eso, en este trabajo usamos como universo para seleccionar las acciones, un total de solo seis acciones de la Bolsa de Colombia (las seis más líquidas), y una condición de cardinalidad que requiere escoger solo tres de esas seis acciones.

Los resultados obtenidos después de realizar la optimización con la condición de cardinalidad fueron que del grupo de seis acciones la herramienta Solver nos ayudó a encontrar las tres mejores acciones del portafolio óptimo para el retorno requerido: dos tenían un peso significativo (ISA (73%) y Banco de Bogotá (26%) y una tercera acción (Bancolombia o Suramericana o Ecopetrol o Almacenes Éxito) tenía un peso insignificante.

El resultado en Solver con la condición de cardinalidad se corroboró hallando el portafolio óptimo estándar para cada una de las posibles triplas del total de seis acciones. La tripla óptima entre todas las triplas coincidió con que las acciones que proporcionan el mínimo riesgo dado el rendimiento escogido eran las mismas que al resolver el problema original con la condición de cardinalidad, a saber ISA (73%) y Banco de Bogotá (26%) y una tercera acción (Bancolombia o Suramericana o Ecopetrol o Almacenes Éxito) con un peso insignificante. Este resultado valida empíricamente por medio de un ejemplo el modelo matemático propuesto.

## RECOMENDACIONES Y LÍMITES DEL ESTUDIO

El mercado de valores representa una compleja forma de negociación: por ello es recomendable analizar el funcionamiento del mercado de valores, tener pleno conocimiento sobre las diferentes formas de inversión y documentarse adecuadamente acerca de los agentes de mercado que pueden asesorarnos en la compra y venta de sus títulos.

Aunque siempre es necesario diversificar para disminuir el riesgo como se muestra en este estudio y para ello es necesario no invertir todo el capital en un solo valor, también pudimos identificar que en algunas ocasiones la mejor composición del portafolio sólo se puede obtener mediante condiciones matemáticas adicionales a las del problema de media-varianza de Markowitz.

Nuestra investigación, en concreto, nos permitió abordar, aunque de una manera muy preliminar, un aspecto más de la realidad de la bolsa: los costos de transacción y los costos de información. Estos costos los abordamos mediante una condición de cardinalidad que limitaba el total de acciones con pesos no nulos en el portafolio, lo que pensamos que limita de cierta manera el costo total de transacción y sobre todo el costo de búsqueda de información.

En cuanto a las limitaciones de este estudio, identificamos que la herramienta Solver de Excel no es lo suficientemente apropiada para resolver el problema de Markowitz con una condición de cardinalidad, porque al aumentar el número de acciones no converge al resultado óptimo (no presentamos estos resultados). Por esta razón nos restringimos a un ejercicio pequeño para probar que el modelo funciona: a escoger un portafolio de 3 acciones de un total de seis. Para condiciones más realistas y más complejas que las de cardinalidad, sería recomendable utilizar un software matemático más avanzado (como por ejemplo IBM ILOG CPLEX Optimization Studio).

Otra limitación deriva de las limitaciones del uso del modelo de Markowitz: por ejemplo, debido a que los datos estadísticos de la media y la matriz de varianzas-covarianzas son históricos, estos datos pueden no coincidir con los comportamientos futuros lo que puede ocasionar que los portafolios suministrados no sean de total confiabilidad.

## BIBLIOGRAFIA

ALEXANDER, Gordon J. SHARPE, William F. BAILEY, Jeffery V. Fundamentos de Inversiones. Teoría y práctica. Tercera Edición. México 2003. Pág. 119-142.

ARBELÁEZ, María Angélica; ZULUAGA, Sandra; GUERRA, María Lucia. El mercado de Capitales Colombiano en los Noventa y las firmas comisionistas de Bolsa. Bogotá: Alfa Omega Grupo Editor, 2002.

ATEHORTUA GRANADOS, Jhon Alexander. Mercado de Capitales y portafolios de inversión. Ediciones de la U. Colombia. 2012 pág. 89.

BODIE, Zvi; KANE, Alex; MARCUS, Alan J. Principios de Inversiones. Quinta Edición. España 2004. Pág. 99-141

BOLSA DE OCCIDENTE. Diccionario Bursátil. Ideas afines y matemáticas básicas financieras. Santiago de Cali. 1999. Pág. 22-38-73

BOLSA DE VALORES DE COLOMBIA [En línea]  
[http://www.bvc.com.co/recursos/Files/Acerca\\_de\\_la\\_BVC/Ochenta\\_Anos\\_Mercado\\_de\\_Valores](http://www.bvc.com.co/recursos/Files/Acerca_de_la_BVC/Ochenta_Anos_Mercado_de_Valores). [Citado el 4 diciembre de 2012] pág.12.

BOLSA DE VALORES DE COLOMBIA [En línea]  
[http://www.bvc.com.co/pps/tibco/portalbvc/Home/Inversionistas/Video\\_Conozca\\_la\\_Bolsa?action=dummy](http://www.bvc.com.co/pps/tibco/portalbvc/Home/Inversionistas/Video_Conozca_la_Bolsa?action=dummy) [Citado el 15 de Mayo de 2012] p.2.

BOLSA DE VALORES DE COLOMBIA [En línea]  
[http://www.bvc.com.co/recursos/Files/Acerca\\_de\\_la\\_BVC/Ochenta\\_Anos\\_Mercado\\_de\\_Valores](http://www.bvc.com.co/recursos/Files/Acerca_de_la_BVC/Ochenta_Anos_Mercado_de_Valores). [Citado el 15 de Mayo de 2012] p.4.

BOLSA DE VALORES DE COLOMBIA. [En línea]  
<http://www.bvc.com.co/pps/tibco/portalbvc/Home/AcercaBVC/misionVisionValores?action> [Citado el 15 de Mayo de 2012]. pág. 1.

BOLSA DE VALORES DE COLOMBIA [En línea]  
<http://www.bvc.com.co/pps/tibco/portalbvc/Home/Accionistas/InformacionReciente?com.tibco.ps.p> [Citado el 20 de Septiembre de 2012.]

CORRALES CESPEDES, José [En línea]  
Optimización del modelo media-varianza para la selección de un portafolio de acciones y su aplicación en la BVL usando programación no lineal. Pág. 18. [Citado el 30 de octubre de 2012].

EL ESPECTADOR. Bolsa de Valores de Colombia, la más dinámica del MILA.  
<http://www.elespectador.com/economia/articulo-322054-bolsa-de-valores-de-colombia-mas-dinamica-del-mila>.

FAMA F, Eugene. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. (Mayo, 1970), pág. 383-417.

FINANZAS PERSONALES.

<http://www.finanzaspersonales.com.co/Diccionario>

GITMAN, Lawrence J. JOEHNK, Michael. Fundamentos de Inversiones. Décima Edición. México 2009. Pág. 3-5

GÓMEZ RESTREPO, Carlos Arturo. El mercado de valores en Colombia: una mirada desde la nueva economía institucional. Revista economía y desarrollo. Universidad Autónoma [2006].

GRUPO AVAL [En línea]

[https://www.grupoaval.com/portal/page?\\_pageid=33,54994&\\_dad=portal&\\_schema=PORTAL](https://www.grupoaval.com/portal/page?_pageid=33,54994&_dad=portal&_schema=PORTAL) [Citado el 15 de septiembre de 2012].

GRUPO BANCOLOMBIA [En Línea]

<http://www.grupobancolombia.com/contenidoCentralizado/corporativo/servicioCliente>. [Citado el 15 de Noviembre de 2012].

HAUGEN, Robert A. Modern Investment Theory. Third Edition. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. Pág. 280.

MARCUSE, Robert. Diccionario De Términos Financieros Y Bancarios. Quinta Ed. Enero de 2009 Pág. 2.

MARKOWITZ, Harry, *Journal of Finance*. 1952.

MEDINA Carlos A. Y ECHEVERRI José I. La selección de portafolios y la frontera eficiente: el caso de la Bolsa de Medellín, 1990-1992. Lecturas de Economía. No. 39. Medellín, 1993.

MÉNARD, Claude. Economía de las organizaciones. 1997. Grupo Editorial Norma y Editorial Universidad Nacional. pág. 27.

MOCHÓN MORCILLO, Francisco. Diccionario de términos financieros y de inversión. Segunda Ed. 1998. Pág. 279.

MOORE, David S. Estadística básica aplicada. 2-da Edición. España 2000 pág. 305.

R. P. Brito y L. N. Vicente. Efficient Cardinality/Mean-Variance Portfolios. Febrero 19 de 2012 pág.5-6.

ROBINSON, James; URRUTIA Miguel. Economía Colombiana del siglo XX un análisis cuantitativo. Primera Edición. Bogotá: 2007.

RARDIN, Ronald L. "Optimization in Operations Research". New Jersey, 1998. En: CORRALES CESPEDES, José. P 16-18

SAMUELSON, Paul A. "Prof. That Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly". Industrial Management Review, 6, 2 (1965).

Tobin J. 1958 "Liquidity preference as behavior toward risk", Review of Economics Studies, N° 25.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA. Dirección Nacional de Servicios Virtuales [En Línea] <http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/economicas/2008551/lecciones/cap1-4-2.htm> [Citado el 12 de marzo de 2013].

VALORES BANCOLOMBIA [En línea]  
[http://www.valoresbancolombia.com/cs/Satellite?c=Page&cid=1259764081421&paginae=ValoresBancolombia%2FVB\\_TemplateMenuDerecho](http://www.valoresbancolombia.com/cs/Satellite?c=Page&cid=1259764081421&paginae=ValoresBancolombia%2FVB_TemplateMenuDerecho). [Citado el 30 de Octubre de 2012].

VALORES BANCOLOMBIA [En línea].  
[http://www.valoresbancolombia.com/cs/Satellite?c=Page&cid=1259764070489&paginae=ValoresBancolombia%2FVB\\_TemplateGlosario](http://www.valoresbancolombia.com/cs/Satellite?c=Page&cid=1259764070489&paginae=ValoresBancolombia%2FVB_TemplateGlosario) [Citado el 12 de Marzo de 2013].

VALORES BANCOLOMBIA [En línea].  
[http://www.valoresbancolombia.com/cs/Satellite?c=Page&cid=1259764070489&paginae=ValoresBancolombia%2FVB\\_TemplateGlosario](http://www.valoresbancolombia.com/cs/Satellite?c=Page&cid=1259764070489&paginae=ValoresBancolombia%2FVB_TemplateGlosario) [Citado el 12 de Marzo de 2013].