

Dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje de la probabilidad condicional, asociadas al uso de los diagramas de árbol

Andrea Loaiza Donneys - 201923389

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Licenciatura en Matemáticas

2025

Dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje de la probabilidad condicional, asociadas al uso de los diagramas de árbol

Andrea Loaiza Donneys - 201923389

Informe final del trabajo de grado para optar por el título de
Licenciada en Matemáticas

Dirigido por:

Mg. Ana María Gómez López

Universidad del Valle

Facultad de Educación y Pedagogía

Escuela de Educación en Ciencias, Tecnologías y Culturas

Licenciatura en Matemáticas

2025

TABLA DE CONTENIDO

Capítulo I: Presentación del problema de investigación	9
1.1 Planteamiento de la problemática	9
1.2 Objetivos	11
1.3 Justificación	12
1.4 Antecedentes	14
Capítulo II. Referentes teóricos	18
2.1 Sobre la probabilidad condicional	18
2.2 Sobre las representaciones que se usan en probabilidad condicional	21
2.3 Sobre la teoría semiótica cognitiva de las representaciones semióticas	24
Capítulo III. Diseño metodológico	30
3.1 Aproximación metodológica	30
3.2 Contextualización y participantes	31
3.3 Presentación de la actividad de implementación	32
3.4 Análisis	49
3.4.1 Fase I: Identificación de las dificultades de probabilidad condicional	50
3.4.2 Fase II: Clasificación de las dificultades en la probabilidad condicional	52
Capítulo IV: Resultados	54
4.1 Resultados de la fase I: Identificación de las dificultades de probabilidad condicional	55
4.2 Resultados de la fase II: Clasificación y caracterización de dificultades	67
4.2.1 Tratamiento gráfico incompleto del diagrama de árbol	69
4.2.2 Ambigüedad semiótica y de notación en la condicionalidad	69
4.2.3 Insuficiencia conceptual en condicionamiento y ley de probabilidad total	70
4.2.4 Dificultades en la articulación entre registros de representación	71
Capítulo V: Conclusiones y recomendaciones	72

5.1	Conclusiones asociadas al primer objetivo específico de la investigación: Identificar las dificultades de los profesores de matemáticas en formación asociadas al uso de los diagramas de árbol	73
5.2	Conclusiones asociadas al segundo objetivo específico de la investigación: Clasificar las dificultades de los profesores de matemáticas en formación asociadas al uso de los diagramas de árbol.....	75
5.2.1	Tratamiento gráfico incompleto del diagrama de árbol.....	75
5.2.2	Ambigüedad semiótica y de notación en la condicionalidad	76
5.2.3	Insuficiencia conceptual en condicionamiento y ley de la probabilidad total..	76
5.2.4	Dificultades en la articulación entre registros de representación	76
5.3	Conclusiones asociadas al objetivo general de la investigación: Caracterizar las dificultades de los profesores de matemáticas en formación asociadas al uso de los diagramas de árbol	77
5.3.1	Tratamiento gráfico incompleto del diagrama de árbol.....	78
5.3.2	Ambigüedad semiótica y de notación en la condicionalidad	78
5.3.3	Insuficiencia conceptual en condicionamiento y ley de probabilidad total.....	79
5.3.4	Dificultades en la articulación entre registros de representación	79
5.4	Recomendaciones	79
REFERENCIAS		82

Lista de tablas

Tabla 1. Ejemplo del primer criterio de congruencia.....	26
Tabla 2. Instrumento de análisis Fase I.....	51
Tabla 3. Instrumento de análisis Fase II	53

Lista de figuras

Figura 1. Mapa conceptual de los sistemas de representación de probabilidad condicional	21
Figura 2. Diagrama de árbol.....	23
Figura 3. Ejemplo de diagrama de árbol	24
Figura 4. Ejemplo, primer criterio de congruencia.....	27
Figura 5. Diagrama de árbol de la respuesta del ejercicio 1.c.....	39
Figura 6. Diagrama de árbol de la respuesta del ejercicio 2.a	41
Figura 7. Diagrama de árbol del ejercicio 3	43
Figura 8. Diagrama de árbol de la respuesta del ejercicio 3.d.....	48

Agradecimientos

Debo expresar mi agradecimiento a la Universidad del Valle, institución que me brindó espacios y herramientas necesarias para mi formación profesional.

De manera especial, agradezco a mis profesores, quienes con su dedicación y compromiso aportaron significativamente a mi proceso de aprendizaje.

Quiero resaltar y agradecer profundamente a mi directora de trabajo de grado, Ana María Gómez, por su orientación, paciencia y valiosas recomendaciones en el desarrollo de este trabajo. Así mismo, extendo mi gratitud a mi primer director, Jimmy Alexander Uribe, por haber acompañado las primeras etapas de esta investigación y haberme brindado su guía inicial.

Finalmente, expreso un agradecimiento a mi familia, por su apoyo incondicional, comprensión y constante motivación, que fueron fundamentales para culminar con éxito este proceso académico.

Resumen

Esta investigación se centra en identificar y clasificar las dificultades de los profesores de matemáticas en formación, en el aprendizaje de la probabilidad condicional, tomando como referencia el uso del diagrama de árbol como representación. El objetivo general fue caracterizar dichas dificultades, entendidas desde los aspectos conceptuales de la probabilidad como desde el manejo de distintos registros semióticos.

La presente investigación se sustentó con base en tres referentes teóricos. En primer lugar, las nociones de probabilidad condicional y sus fundamentos en la regla de Bayes y la ley de probabilidad total (Mendenhall et al.,2006). En segundo lugar, los sistemas de representación empleados en probabilidad condicional, con énfasis en el diagrama de árbol como herramienta gráfica que permite organizar el espacio muestral y facilitar la visualización de la condicionalidad (Roldán, Batanero y Beltrán, 2018). Finalmente, se adoptó la teoría semiótico-cognitiva de Duval (1999,2006), que brinda un marco para analizar las actividades cognitivas implicadas en formación, tratamiento y conversión de registros, así como las dificultades derivadas de la coordinación semiótica.

La investigación es cualitativa. Se trabajó con siete profesores de matemáticas en formación, quienes resolvieron una actividad escrita sobre probabilidad condicional. El análisis se realizó en dos fases: a) Se identifican las dificultades de cada producción realizada, distinguiendo entre las asociadas a la comprensión del objeto matemático y las vinculadas con el uso de registros de representación; y posteriormente b) las dificultades se agrupan en categorías más amplias a través de una tabla de doble entrada que permitió clasificar patrones comunes.

A partir del análisis se identificaron cuatro categorías de dificultades: Tratamiento gráfico incompleto del diagrama de árbol, ambigüedad semiótica en la notación condicional; insuficiencia conceptual en la aplicación de la probabilidad condicional y la ley de probabilidad total (incluyendo sesgos); y dificultad en la articulación entre registros de representación.

Palabras clave: Probabilidad condicional, diagrama de árbol, representaciones semióticas.

Capítulo I: Presentación del problema de investigación

Este capítulo presenta la problemática de investigación que trata del aprendizaje de la probabilidad condicional por parte de los profesores de matemáticas en formación. Además, se estudian las representaciones semióticas asociadas al objeto matemático de la probabilidad condicional para el aprendizaje de ésta.

El capítulo expone la delimitación del problema de investigación, el objetivo general y los específicos, los antecedentes y justificación.

1.1 Planteamiento de la problemática

En los últimos años se ha intentado que la enseñanza de la estadística tenga más fuerza en el currículo, es decir, evitar que esta sea casi vista en las últimas semanas del año escolar. Naya, Ríos, & Zapata (2012) enfatizan que se debe formar consumidores de estadística que logren hacer cálculos correctos y sacar sus propias conclusiones en diferentes contextos para no tener complicaciones en sus estudios universitarios y en su formación personal.

Para la enseñanza de la estadística, también es muy importante la probabilidad. Mendenhall, Beaver, & Beaver (2006) mencionan que la probabilidad es una herramienta usada en estadística, para evaluar la confiabilidad de los resultados que se obtengan de un estudio y hacer inferencias estadísticas a partir de muestras.

Tauber, L., Alvarado, H., Zapata, L., Pinto, J., & Huerta, A. (2019) destacan que la enseñanza de la probabilidad forma seres capaces de entender críticamente las crisis y conflictos del mundo bajo la aplicación de conceptos estadísticos y así ser partícipes de la sociedad como personas críticas y conscientes de su alrededor en todos los aspectos (social,

político, etc.) Por lo tanto, es posible afirmar que la enseñanza de la probabilidad ayuda a facilitar el desarrollo de habilidades que permiten participar de manera activa y responsable en la sociedad.

Pero cuando hablamos de probabilidad, se tiene unas subdivisiones una de ellas es la probabilidad condicional. Díaz, López, Montes, & Rodríguez (2016) destacan que la probabilidad condicional es usada en diferentes campos profesionales como la agricultura y la medicina. En estos campos, la probabilidad condicional ayuda a analizar cómo diferentes fenómenos podrían afectar o mejorar situaciones específicas. Por tanto, la probabilidad condicional permite tomar mejores decisiones en entornos laborales en situaciones de incertidumbre, por lo que el dominio de esta es pertinente para escenarios complejos en los diversos campos profesionales.

Batanero, Contreras, Díaz, & Cañadas (2013) mencionan que algunos futuros profesores de matemáticas no pueden definir adecuadamente la probabilidad condicional, por lo que esto afecta la enseñanza de esta. Esto puede llevar a sesgos en la comprensión y aplicación de la probabilidad condicional.

Batanero, Contreras, & Carmen (2012) exponen que los futuros profesores de matemáticas caen en sesgos a la hora de realizar problemas de probabilidad condicional, como la falacia de ejes de tiempo o la confusión entre independencia y exclusión de eventos. Esto es preocupante ya que implica que los profesores de matemáticas en formación no tendrían las suficientes herramientas para la enseñanza de la probabilidad condicional.

Duval (2006) destaca que “la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación” (p.144), además menciona que “los estudiantes también deberían ser capaces de reconocer el mismo objeto matemático en otros contextos de representación y usarlos” (p.145) por lo que los profesores de matemáticas en formación deben distinguir las distintas representaciones de la probabilidad condicional. Por ello, es importante tener en cuenta la teoría semiótica-cognitiva que presenta Duval (2006) que menciona que el uso de las representaciones es lo que nos permite tener acceso a ellos.

Después de haber presentado el curso de estadística de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, a algunos profesores de matemáticas en formación se les dificulta interpretar y hacer uso de distintas representaciones de la probabilidad condicional. Por ejemplo, algunos estudiantes no lograban representar lo expuesto de una situación problema en tablas de contingencia o diagramas de árbol. Principalmente en esta última representación existían más dificultades, pues no era común usarla en clase o ser explicada por el docente del curso. Con base en lo anterior surge la siguiente pregunta problema:

¿Cuáles son las dificultades de los profesores de matemáticas en formación, de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, en el aprendizaje de la probabilidad condicional, asociadas al uso de los diagramas de árbol?

1.2 Objetivos

Objetivo General: Caracterizar las dificultades de los profesores de matemáticas en formación, de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, en el aprendizaje de la probabilidad condicional, asociadas al uso de los diagramas de árbol.

Objetivos específicos:

- ✓ Identificar las dificultades de los profesores de matemáticas en formación, de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, en el aprendizaje de la probabilidad condicional, asociadas al uso de los diagramas de árbol.
- ✓ Clasificar las dificultades de los profesores de matemáticas en formación, de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, en el aprendizaje de la probabilidad condicional, asociadas al uso de los diagramas de árbol.

1.3 Justificación

Actualmente en la educación matemática es importante abordar las dificultades que presentan los profesores de matemáticas en formación, específicamente en la probabilidad condicional. Batanero, et al. (2013) señalan que es poco usual que los profesores de matemáticas en formación tengan una preparación específica en la probabilidad, lo que puede afectar en los conocimientos que adquieran sus futuros estudiantes. Además, muchos de los profesores en formación no han recibido una formación específica sobre el conocimiento didáctico de la probabilidad condicional.

La falta de formación en probabilidad condicional es escasa en los profesores, ya que llegan a tener concepciones incorrectas del azar, por lo que es necesario fortalecer tanto la enseñanza como el aprendizaje en probabilidad. Es necesario que el profesor de matemáticas en formación entienda como un evento inicial puede modificar un segundo evento, teniendo en cuenta la dependencia o independencia de estos. Batanero, Contreras, & Carmen (2012)

mencionan que la probabilidad condicional es un concepto que permite realizar cambios en la creencia de un suceso aleatorio según la nueva información que se adquiere.

En el aprendizaje de la probabilidad condicional es necesario implementar estrategias específicas como el uso de distintas representaciones para la comprensión del concepto y reconocerlas en diferentes experimentos aleatorios.

El presente trabajo analiza las dificultades que tienen los profesores de matemáticas en formación a partir de la teoría semiótica - cognitiva Duval (1999), la cual establece que las representaciones son el único acceso disponible a los objetos matemáticos. Esta teoría determina que el uso de distintas representaciones ayuda a tener una mejor comprensión del objeto matemático, ya que permite identificar sus características en cualquier representación, por la conexión que se puede encontrar entre ellas y la posibilidad de transformación de una a otra.

En la probabilidad condicional se promueve el uso de distintas representaciones en la resolución de problemas, como la lengua natural, tablas de contingencia, diagramas de árbol y registro simbólico. Gómez & Correa (2012) destacan que estas representaciones “establecen distancias en la comprensión que pueden ofrecer de la probabilidad condicional dentro de cada una de ellas, dada su naturaleza; por lo cual resulta indispensable caracterizar los elementos propios de cada representación” (p.17-18)

En la investigación se seleccionó el diagrama de árbol como representación para el aprendizaje de los profesores de matemáticas en formación. Este diagrama es una herramienta destacada en el aprendizaje, ya que determina el espacio muestral y los

compuestos de dichos experimentos, descomponiéndolo en varias fases y poder visualizar todos los posibles resultados Roldán, Batanero y Beltrán (2018).

En investigaciones relacionadas al aprendizaje de la probabilidad condicional en profesores de matemáticas en formación se observa que no se encuentran gran variedad al uso de las representaciones y especialmente al diagrama de árbol. Los principales suelen ser las tablas de contingencia o el registro simbólico. Roldán (2018) demuestran que las ventajas de los diagramas de árbol se pueden dar en tres características: provocan un impacto visual en las personas, describen de una forma sintética y estructurada de cada fenómeno y permiten ir de lo abstracto a lo particular.

En este orden de ideas, en la metodología se propone la elaboración de una actividad para resolver problemas de probabilidad condicional a profesores de matemáticas en formación y el uso del diagrama de árbol. Asimismo, esta actividad es de carácter cualitativo para recolectar la información permitirá distinguir fácilmente las distintas formas en que se elaboraron las actividades, para identificar las dificultades que se puedan presentar así construir una rejilla de análisis con relación a los aspectos de tipo semiótico y matemático, y la caracterización con ciertas condiciones ligadas a la teoría semiótica-cognitiva, por parte de los profesores de matemáticas en formación.

1.4 Antecedentes

Los estudios que se encuentran sobre la probabilidad condicional son variados, pero son pocos los que van en relación con el uso de diagramas de árbol. En este apartado se presentan dos grupos de investigaciones: a) las relacionadas con profesores de matemáticas

en formación y b) las relacionadas con el uso de representaciones semióticas, respecto a la probabilidad condicional.

Del primer grupo de investigaciones, Contreras (2011) se enfoca en reconocer las necesidades de formación que tienen los futuros profesores de matemáticas de educación primaria y secundaria relacionadas con su conocimiento matemático y didáctico en la probabilidad condicional, además de analizar algunos recursos didácticos que ayudarían a resolver dichas necesidades.

Contreras (2011) reconoce que en educación primaria no se presenta como tal la probabilidad condicional, pero si se introducen las tablas de doble entrada para dicho objeto matemático. Este autor realiza un estudio de caso con profesores de matemáticas en formación y observa que hay varios errores en la confusión de probabilidad condicional con una conjunta, y viceversa; además de confundir un suceso con su complementario, suponer independencia, etc.

En educación secundaria, Contreras (2011) muestra que los profesores de matemáticas en formación aún poseen varios sesgos a la hora de trabajar con la probabilidad condicional como el de la falacia del eje de tiempos, de las tasas de base y confusión entre probabilidad conjunta y condicional.

Díaz, Contreras, Batanero, & Roa (2012) destacan los sesgos que hay en el razonamiento probabilístico condicional en los futuros profesores de matemáticas de secundaria. Estos autores reconocen que no todos los licenciados tienen una formación específica en cómo enseñar probabilidad condicional, por lo que es importante reconocer qué dificultades tienen estos para que en un futuro no sean replicadas por sus estudiantes.

Entre los sesgos más frecuentes se encuentran: la falacia de las tasas de base, la confusión entre sucesos independiente y mutuamente excluyentes, la falacia de la conjunción, la falacia de la condicional transpuesta y la falacia del eje temporal.

Por otro lado, León, J., Sosa, L., & Carillo, J. (2020) se enfocan en el análisis del conocimiento del profesor acerca del aprendizaje de la probabilidad condicional y para ello usan de base el modelo *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTKS) de Carillo et al. (2018) que da cuenta de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje.

León et al. (2020) presentan en su estudio una división de 5 conocimientos que se obtuvieron de los profesores de matemáticas en formación frente a una actividad propuesta. El primer conocimiento refiere a las estrategias erróneas utilizadas por los futuros profesores de matemáticas para evaluar el conocimiento del estudiante de secundaria, pues se limita al parafraseo de las respuestas de los estudiantes.

El segundo conocimiento se enmarca al no reconocimiento de las expresiones lingüísticas de los estudiantes en relación con el objeto matemático, por lo que, los profesores de matemáticas en formación confunden la forma en que los estudiantes entienden los eventos probabilísticos.

El tercer conocimiento da cuenta que los profesores en formación son conscientes de que los eventos aleatorios suelen causar dificultades en los estudiantes cuando intentan interpretar enunciados de los problemas de probabilidad.

El cuarto conocimiento enuncia que los profesores en formación son capaces de identificar que los conocimientos previos de los estudiantes propician la comprensión de la probabilidad condicional. No obstante, el quinto conocimiento revela que los profesores en

formación tienen limitaciones al identificar cómo los conocimientos previos de los estudiantes, especialmente en relación con fenómenos aleatorios, pueden generar dificultades en el aprendizaje de la probabilidad condicional.

Estos cinco tipos de conocimiento indican varias dificultades que poseen los futuros profesores de matemáticas al identificar el conocimiento del estudiante, por lo tanto, resulta complicado evaluar si los estudiantes han comprendido la probabilidad condicional.

Del segundo grupo de investigaciones, Gómez & Correa (2012) presentan una problemática relacionada con el aprendizaje de la probabilidad condicional, bajo el análisis de textos escolares en educación media, en la que se tienen en cuenta aspectos de redacción y situaciones de lectura propuestos que puedan ayudar a superar las dificultades de tipo didáctico frente a la comprensión de un enunciado. Para esto se identifica la relación entre las situaciones problema y las experiencias cotidianas del estudiante y así crear un aprendizaje significativo.

Gómez & Correa (2012) enuncian que es crucial resaltar que las marcas lingüísticas en el cálculo de probabilidad son importantes para diferenciar qué tipo de probabilidad es y así disminuir las confusiones entre probabilidad conjunta y condicional.

En los anteriores trabajos de investigación se identifica que la probabilidad condicional cuenta con diversas problemáticas en el aprendizaje y la enseñanza. Se identifica también que existen pocos estudios en relación con profesores de matemáticas en formación en relación con el aprendizaje de la probabilidad condicional asociados con el uso de diagramas de árbol; por lo que es necesario abordar dicha problemática.

Capítulo II. Referentes teóricos

En este capítulo se presentan los referentes teóricos que sustentan la problemática de investigación. Por ello el capítulo expone a) las nociones de probabilidad condicional, b) las representaciones que se usan en esta¹ y c) la teoría semiótico-cognitiva de Duval (1999) sobre las representaciones semióticas. A continuación, se presentan cada uno de los anteriores referentes teóricos:

2.1 Sobre la probabilidad condicional

La regla de Bayes fue de los primeros cálculos en probabilidad para dar solución a ciertos ejercicios. Sin embargo, esta regla no fue suficiente para estudios posteriores y garantizar su validez en diferentes situaciones. Por lo que, surge la probabilidad condicional que se destaca por considerar la ocurrencia de eventos según otro evento. Dentro de la probabilidad condicional, se destacan dos nociones importantes: los eventos independientes y dependientes. Por ello, es necesario comenzar con el cálculo de que la probabilidad de dos eventos A y B ocurran en un determinado experimento:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) \text{ o } P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$$

Con base en lo anterior y según lo expuesto por Mendenhall et al. (2006), la probabilidad condicional se refiere a la probabilidad del evento A dada la ocurrencia del evento B. Esto se expresa como:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ si } P(B) \neq 0$$

¹ Se hace énfasis en el diagrama de árbol de acuerdo con los intereses de la presente investigación.

Las nociones básicas para el cálculo de probabilidad condicional incluyen dos características importantes: los eventos dependientes e independientes. Mendenhall et al. (2006) mencionan que dos eventos son independientes cuando la probabilidad de un evento B no influye en un evento A, o viceversa, es decir, que la probabilidad del evento A sigue igual, independientemente de si el evento B ocurre o no. Por lo tanto, dos eventos son independientes si y solo si:

$$P(B/A) = P(B) \quad (1)$$

o

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad (2)$$

De otro modo, se diría que los eventos A y B son dependientes. En el caso que sean más de dos eventos, que son mutuamente independientes, entonces la probabilidad que ocurra A, B y C es de:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

A menudo, al presentar este tema, surgen varias dificultades. Una de las más comunes es la confusión entre eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes, aunque no es lo relevante de este trabajo se hace importante destacar sus diferencias. Mendenhall et al. (2006) aclaran “Muchos estudiantes encuentran difícil decir la diferencia entre eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes

- Cuando dos eventos son mutuamente excluyentes o disjuntos, no pueden ocurrir los dos cuando se realice el experimento. Una vez ocurrido el evento

B, el evento A no puede ocurrir, de modo que $P(A/B) = 0$, o viceversa. El suceso del evento B afecta la probabilidad de que el evento A pueda ocurrir.

- Por tanto, los eventos mutuamente excluyentes deben ser dependientes.
- Cuando dos eventos son mutuamente excluyentes o disjuntos,

$$P(A \cap B) = 0 \text{ y } P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

- Cuando dos eventos son independientes,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ y } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).” (p.153)$$

Con estas aclaraciones, podemos introducir la Regla de Bayes, que amplía la regla de multiplicación al considerar un conjunto de n elementos. Se puede escribir $P(A \cap B_i)$ como $P(S_i)P(A/S_i)$, para $i = 1, 2, \dots, k$. La respuesta de dicho cálculo es la Ley de probabilidad total, Mendenhall et al. (2006) mencionan que al tener un conjunto de eventos $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$ que son mutuamente excluyentes y exhaustivos y un evento A, la probabilidad de que ocurra A se expresaría como:

$$P(A) = P(S_1)P(A/S_1) + P(S_2)P(A/S_2) + P(S_3)P(A/S_3) + \dots + P(S_k)P(A/S_k)$$

Mendenhall et al. (2006) mencionan un tipo de probabilidades condicionales que tienen en cuenta unas probabilidades previas. Reescribiendo la Ley de probabilidad total, se considera un $S_1, S_2, \dots, S_k$ siendo las k subpoblaciones mutuamente excluyentes y exhaustivas con probabilidades previas $P(S_1), P(S_2), \dots, P(S_k)$. Si ocurre un evento A, la probabilidad posterior de S_i dada A es la probabilidad condicional, se calcula como:

$$P(S_i/A) = \frac{P(S_i)P(A/S_i)}{\sum_{j=1}^k P(S_j)P(A/S_j)}$$

Este sería una fórmula específica de la Regla de Bayes, que tiene en cuenta todo un conjunto de eventos para calcular la probabilidad que ocurra un evento específico dado que ocurre un evento A.

2.2 Sobre las representaciones que se usan en probabilidad condicional

Díaz, López, Montes, & Rodríguez (2016) presentan en la Figura 1. los diferentes sistemas de representación para la probabilidad condicional: numérico, simbólico, gráficos, pictórico, tabular y ejecutable. El primero nace de la razón de probabilidad en el intervalo $[0,1]$. El segundo son los símbolos usados en teoría de conjuntos, en relación con la probabilidad condicional y simple. El tercero va con relación al simbólico, que representa los eventos de un experimento, la intersección, unión o el complemento.

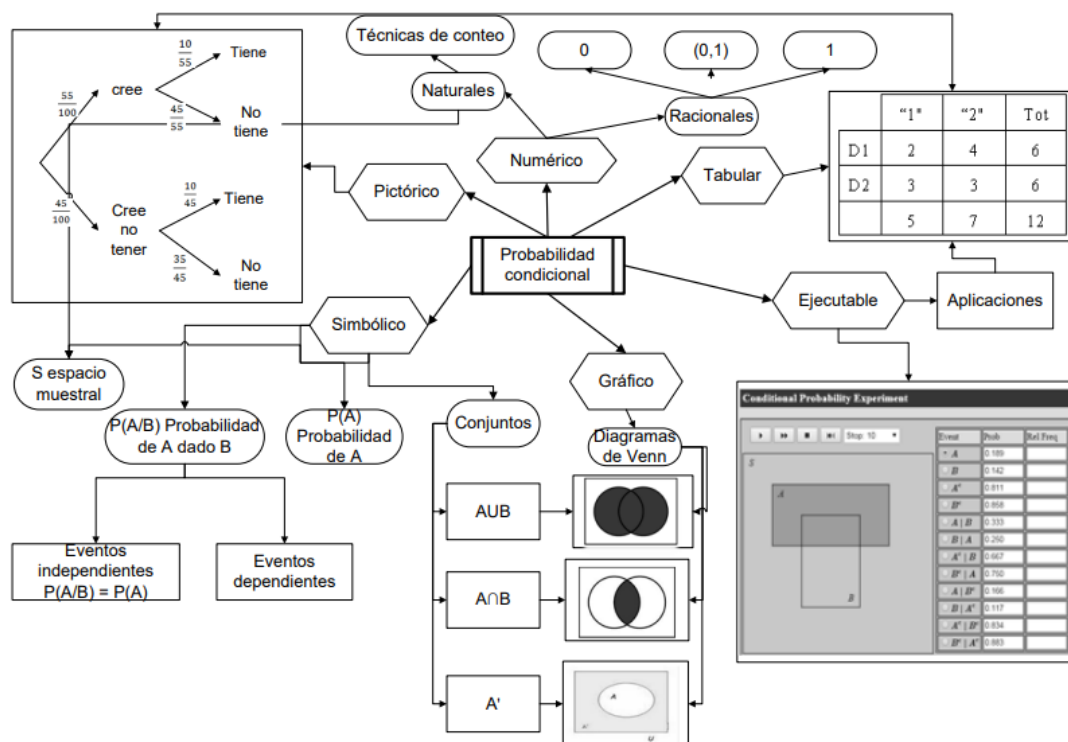


Figura 1. Mapa conceptual de los sistemas de representación de probabilidad condicional

El cuarto y quinto sistema de representación, pictórico y tabular, como los diagramas de árbol y las tablas de doble entrada que organizan los datos y se relacionan con el sistema de representación gráfico para identificar las intersecciones y ocurrencia de un evento. Por último, el sistema de representación ejecutable se encuentra ya en aplicativos de diferentes páginas web que pueden llegar a usar diversos diagramas para relacionar los sistemas de representación.

Para el propósito de este trabajo se seleccionó el sistema de representación pictórico, con el fin de identificar las dificultades que presentan los profesores de matemáticas en formación al resolver problemas de probabilidad condicional.

Roldán, Batanero y Beltrán (2018) describen que un diagrama de árbol tiene un número finito de vértices y lados. Este diagrama parte de una raíz como se muestra en la Figura 2, en la que surgen un número finito de caminos denominados *ramas de primera generación*. Estas ramas representan todas las probabilidades que pueden aparecer en una primera fase de la construcción del diagrama, es decir, en un experimento y terminan en vértices denominados nudos. De estos nudos pueden surgir nuevamente ramas, denominadas *ramas de segunda generación*, que vuelven a terminar en nudos. Este proceso se repite un número finito de veces hasta llegar a los nudos terminales que representan el fenómeno en cuestión.

Los diagramas de árbol tienen ciertas ventajas que permite comunicar mucha información de manera ordenada y clasificada visualmente, lo que propicia una visualización rápida de las posibilidades para que, en la toma de decisiones ayude a distinguir cuáles son las causas que afectan un experimento y así elegir la mejor opción (Roldán, et al., 2018).

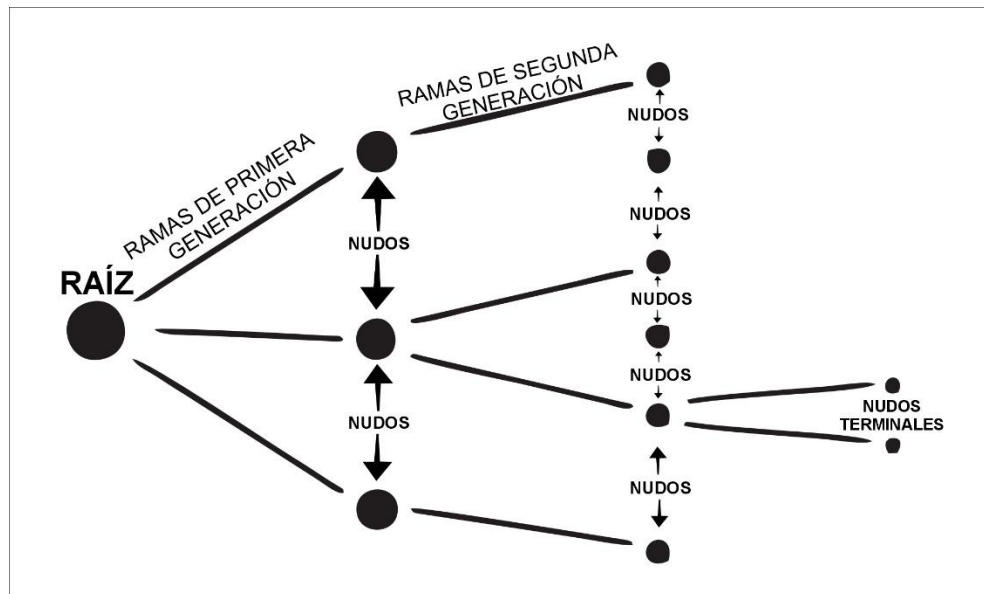


Figura 2. Diagrama de árbol

Estos diagramas suelen ser muy usados en los libros de texto, como en el de Mendenhall et al. (2006):

En una urna hay seis bolas azules y cuatro naranjas. Se realizan tres extracciones sin reemplazamiento. Para hallar la probabilidad de extraer tres bolas naranjas se debe tener en cuenta que los sucesos son dependientes, ya que las composiciones de la urna para la segunda y tercera extracción depende del resultado de las extracciones anteriores. Se consideran los siguientes sucesos:

A_1 : "extraer una bola naranja en la primera extracción".

A_2 : "extraer una bola naranja en la segunda extracción".

A_3 : "extraer una bola naranja en la tercera extracción".

A partir del diagrama de árbol de la Figura 3 se puede calcular fácilmente la probabilidad pedida:

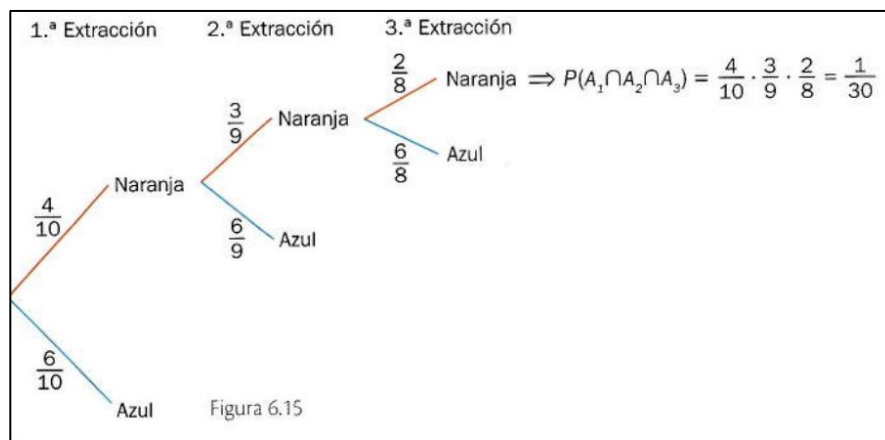


Figura 3. Ejemplo de diagrama de árbol

2.3 Sobre la teoría semiótica cognitiva de las representaciones semióticas

Duval (1999) en su texto de *Semiosis y Pensamiento Humano* enuncia que las representaciones semióticas para los objetos matemáticos propician su comprensión, puesto que estos son de naturaleza abstracta. Por tanto, la actividad cognitiva requiere utilizar sistemas de expresión y de representación, además del lenguaje natural, que es el más común.

Duval (1999) establece en su teoría semiótica – cognitiva que el acceso a los objetos matemáticos se da solo a través de representaciones semióticas. Este mismo autor enfatiza en la importancia de distinguir entre el objeto matemático y las diversas representaciones de este. El autor destaca que los sistemas semióticos constituyen conjuntos organizados de signos y reglas que permiten establecer una relación entre el conocimiento y la representación de objetos matemáticos.

Duval (1999) expone que en toda actividad matemática existen tres actividades cognitivas centrales al interactuar con las representaciones semióticas: formación, tratamiento y conversión.

La Formación, implica crear una representación en un registro semiótico específico. Puede expresar una representación mental o evocar un objeto real. Este proceso requiere obtener los signos relevantes del objeto matemático, la coordinación del objeto y su representación. Esta actividad funciona como herramienta para el aprendizaje y la enseñanza, ya que permite visualizar los conceptos abstractos y posibilitando la interacción entre los estudiantes con el objeto matemático.

El Tratamiento, es **una transformación interna de una representación en un registro** guiadas por las reglas del sistema semiótico correspondiente.

La Conversión, transforma una representación de un registro a otro diferente, es decir, una **transformación externa respecto al registro de la representación de partida**. Esto requiere que se pueda percibir la diferencia entre la representación y lo que ésta representa, ya que en el momento de los cambios de registro surgen dificultades o ambigüedades.

Un registro de representación semiótica se define precisamente al permitir estas tres actividades. En este sentido, Duval (1999) menciona que las representaciones semióticas son las formas a través de las que los sistemas semióticos se expresan y se comunican, interpretando el significado de un objeto mediante producciones formadas por el uso de signos, como enunciados en lengua natural, fórmulas, gráficos, figuras geométricas, entre otros.

Duval (1999) destaca la importancia de los cambios de registro en la actividad cognitiva, principalmente en la matemática para la comprensión de un objeto, pero este

proceso es complejo y no inmediato, ya que implica no solo reconocer los diferentes registros, sino también mantener la coherencia semántica entre ellos.

De acuerdo con Duval (1999) para que haya una conversión clara entre registros semióticos, es necesario que se cumplan tres criterios de congruencia semiótica. El cumplimiento de estos criterios, garantizan que el cambio entre registros se logre de una manera rápida, conservando el significado original y evitando interpretaciones no adecuadas. Duval enfatiza que “Una conversión sólo es epistemológicamente válida si satisface simultáneamente las tres exigencias” (2006, p.154).

El primer criterio, es la correspondencia “semántica” de los elementos significantes: Este garantiza que la representación inicial coincida con la representación del registro de llegada, es decir, que las unidades significativas presentes en la representación de partida puedan asociarse con elementos equivalentes en la representación de llegada.

Una situación particular puede ser: En una clase hay 40 estudiantes. Se les pregunta si les gusta la estadística y si les gusta la geometría. Se compila la siguiente información.

Tabla 1. Ejemplo del primer criterio de congruencia

	Le gusta geometría(G)	No le gusta Geometría (NG)	Total
Le gusta Estadística (E)	12	8	20
No le gusta Estadística (NE)	4	16	20
Total	16	24	40

Este es el registro tabular (Tabla de doble entrada), contiene las frecuencias organizadas por categorías en un registro numérico-tabular. Se quiere convertir esta tabla en un diagrama de árbol que muestre las probabilidades. En esta conversión, debe asegurarse que los elementos como las frecuencias marginales y condicionales se transformen en las ramas y nodos del árbol sin perder su sentido matemático.

Por ejemplo, las probabilidades marginales (como $P(E) = 20/40$) se representan en las ramas principales del árbol, y las condicionales (como $P(E|G) = 12/20$) en las ramas secundarias. De esta forma, cada número de la tabla tiene un lugar correspondiente en el árbol, conservando su función y significado dentro del nuevo registro, como se presenta en la Figura 4.

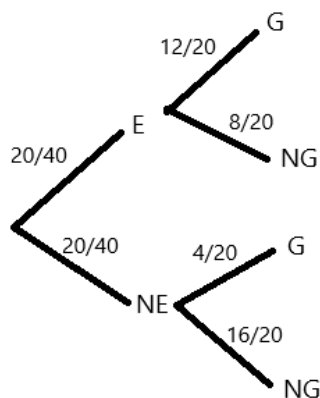


Figura 4. Ejemplo, primer criterio de congruencia

En esta situación, la celda que indica que 12 estudiantes gustan de estadística y geometría representa una unidad significativa, como la probabilidad condicional $P(G|E) = 12/20$; la cual debe conservarse en la conversión del diagrama de árbol. Esta información se representa como una rama que parte del nodo “Le gusta estadística (E)” hacia “Le gusta la Geometría (G)”. Si un estudiante representa incorrectamente esta probabilidad condicional,

confundiendo la condicional con una conjunta o una marginal como $P(G|E) = 12/40$, entonces hay una pérdida de la unidad significativa ya que el significado matemático cambia cuando se pasa de un registro tabular a uno gráfico.

El segundo criterio es la univocidad “semántica” terminal: Cada unidad de la representación final debe corresponderle solo una de la inicial y viceversa, es decir, debe haber una relación biyectiva entre ambas representaciones. Retomando la situación anterior, cada rama del diagrama de árbol representada debe tener una correspondencia con la tabla de frecuencias o el enunciado del problema, Por ejemplo, si en la tabla indica que la probabilidad de que un estudiante le guste la geometría dado que le gusta estadística es $P(G|E) = 12/20$, esta debe estar representada en una única rama específica del árbol (la que parte del nodo “Le gusta estadística (E)” hacia “Le gusta la Geometría (G)). Si el estudiante representa esta probabilidad condicional en más ramas o la asocia con otro nodo, se rompe la univocidad, ya que una misma unidad semántica aparece doble o mal situada en el nuevo registro.

El tercer criterio es la organización de las unidades significantes: Este criterio se refiere a que el orden y disposición de los elementos que componen la representación (las unidades significantes) debe conservarse al cambiar de registro cuando estos comparten el mismo número de dimensiones. Es decir, la estructura interna de la representación debe mantenerse para que el nuevo registro no altere la interpretación del contenido.

Un ejemplo claro se puede observar al pasar de una tabla de doble entrada (registro tabular) a un diagrama de árbol (registro gráfico). La tabla organiza los datos en filas y columnas según dos categorías de dos variables “le gusta estadística” y “le gusta geometría”. Al convertir la tabla en un diagrama de árbol, la disposición secuencial debe

mantenerse, es decir, si en la tabla se ubica primero estadística y luego geometría, esta secuencia debe continuar en las ramas del árbol (Primero las ramas que indican que a los estudiantes sí les gusta o no estadística, luego las que indican que sí les gusta o no geometría).

Si en el diagrama de árbol se invierte este orden (primero geometría y luego estadística), aunque los valores numéricos estén correctos, la interpretación puede alterarse, especialmente si se quiere calcular probabilidades condicional específicas como $P(G|E)$ o $P(E|G)$. Por tanto, conservar la organización original es importante para que en la conversión entre registros sea válida.

Más allá de las actividades cognitivas en los sistemas semióticos, Duval (1999) expone que en el análisis del desarrollo del conocimientos y obstáculos para la comprensión de las matemáticas, se identifican tres fenómenos. El primero es la diversificación de los registros de representación semiótica, que es clave para el desarrollo del conocimiento, la relación de poder representar las ideas a través de los símbolos, utilizando múltiples sistemas semióticos para expresar un mismo concepto; pero que al ser tantos registros puede haber dificultades en su dominio.

El segundo fenómeno es la diferenciación entre representante y representado. Duval (1999) señala que es necesario distinguir entre el signo concreto que se utiliza (el representante) y el objeto matemático al que hace referencia (el representado), el cual es un objeto abstracto. Puede haber confusiones entre el símbolo con el concepto que representa, atribuyéndole características propias de los objetos físicos, lo que puede generar interpretaciones erróneas.

El tercer fenómeno es la coordinación entre los diferentes registros, que consiste en la habilidad para utilizar diferentes sistemas, logrando establecer relaciones operativas entre representaciones, sin cambiar su significado. Esta coordinación requiere no solo conocer las reglas internas de cada sistema, sino también lograr una articulación significativa entre ellos, lo que implica un esfuerzo cognitivo. Para ello, se vuelve necesario aplicar los criterios de congruencia semiótica y reconocer las equivalencias entre los diferentes registros.

Capítulo III. Diseño metodológico

En este capítulo se presenta el diseño metodológico empleado en la presente investigación, con el objetivo de caracterizar las dificultades identificadas en profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje de la probabilidad condicional mediante el uso de diagramas de árbol.

3.1 Aproximación metodológica

Esta investigación adopta un enfoque cualitativo exploratorio, definido por Sampieri, Fernández y Baptista (2010) como un proceso centrado en la recolección y análisis de datos en que los participantes les permita expresarse de manera escrita, gráfica y verbal, lo que facilita acceder a sus perspectivas cognitivas y modos de comprensión frente a conceptos matemáticos.

La elección de este enfoque metodológico responde a la necesidad de profundizar en las dificultades que enfrentan los profesores de matemáticas en formación al aprender conceptos como la probabilidad condicional con el uso del diagrama de árbol. Debido a que el objetivo principal de este trabajo es caracterizar dichas dificultades, no es necesario medirlas cuantitativamente, sino comprender las ideas de los participantes, cómo

interpretan la representación y qué dificultades se presentan durante la resolución de ejercicios específicos.

Por esta razón, el enfoque cualitativo es más adecuado en relación con otros, ya que permite una mirada interpretativa y contextualizada de los procesos de aprendizaje. Este enfoque permite que a la hora de recolectar los datos el investigador aprenda de las respuestas de los participantes y así registrarlas, lo que ayuda a identificar patrones cognitivos a través del análisis del contenido de las respuestas y a la vez generar hipótesis durante el proceso investigativo Sampieri, Fernández y Baptista (2010). Por tanto, se podrá analizar patrones de razonamiento, las estrategias utilizadas y las dificultades persistentes en sus respuestas.

3.2 Contextualización y participantes

Los participantes de esta investigación fueron siete profesores de matemáticas en formación que cursaban semestres superiores al séptimo, de la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad del Valle. Su selección se justifica no solo por el hecho de que hayan abordado el tema de la probabilidad condicional en el curso de Estadística que hayan visto recientemente o en años anteriores, sino también por el nivel de conocimiento matemático que han adquirido hasta este punto de la carrera. Este conocimiento influye en su capacidad de cómo abordan los problemas de probabilidad y en cómo utilizan diagramas de árbol como herramientas de aprendizaje.

El curso de Estadística forma parte del plan de estudio de séptimo semestre, en este curso se abordan temáticas de estadística descriptiva, probabilidad y variables aleatorias y distribuciones de probabilidad. En la temática de probabilidad se incluyen contenidos como

el cálculo de la probabilidad de un evento, técnicas de conteo, probabilidad condicionada, leyes probabilísticas, composición de eventos y teorema de bayes.

Para caracterizar las dificultades que presentan los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje de la probabilidad condicional, asociadas al uso de los diagramas de árbol, es importante analizar cómo construyen y articulan representaciones gráficas y algebraicas.

Con este propósito, se implementará una actividad basada en la adaptación de ejercicios, que ayudará recolectar evidencia directa sobre los procesos de pensamiento de los participantes. Esta actividad permitirá realizar un análisis semiótico-cognitivo de sus respuestas, al evaluar cómo los participantes convierten y tratan la información en distintos registros de representación. Esta información se recolectará a través de hojas de trabajo, en que se identificarán las dificultades presentadas por los participantes. Posteriormente, a partir del análisis semiótico-cognitivo de estas respuestas, será posible identificar y clasificar las dificultades recurrentes.

3.3 Presentación de la actividad de implementación

En este apartado se presenta la actividad diseñada como instrumento central para recolección de datos, con el fin de identificar las dificultades que presentan los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje de la probabilidad condicional, con el uso del diagrama de árbol.

La elección de una actividad como estrategia metodológica se justifica por las siguientes razones:

1) Conversión entre registros semióticos: Los ejercicios seleccionados en la actividad permiten que durante el proceso de solución haya una conversión entre registros de representación semiótica (gráfico, algebraico y lingüístico), desde descripciones verbales (registro lingüístico) hacia diagramas de árbol (registro gráfico), y finalmente a fórmulas algebraicas (registro simbólico); esta estructura obliga a los participantes a recontextualizar la información en múltiples formatos.

2) Relevancia teórica y empírica: Los ejercicios seleccionados fueron modificados teniendo en cuenta dificultades recurrentes identificadas en diferentes investigaciones presentadas con anterioridad, como la confusión entre probabilidad condicional y conjunta, la falacia del eje de tiempo en la construcción de diagrama de árbol y la sobrestimación de la independencia eventos. Estas dificultades no solo son frecuentes, sino que desde la perspectiva de la teoría semiótico-cognitiva de Duval (1999), pueden interpretarse como fallos en la coordinación entre registros de representación. Así al enfrentar a los participantes con tareas que exigen interpretar, convertir y tratar información en distintos registros (lingüístico, gráfico y simbólico), es posible identificar dificultades cognitivas que se presentan en ese proceso y caracterizarlos según el marco teórico de esta investigación.

3) Pertinencia para los objetivos de investigación: La estructura de la actividad, conformada por diversos ejercicios, permite recolectar los datos que responden a los objetivos planteados. Es decir, facilita identificar errores o dificultades a la hora de la estructuración de las ramas o nodos en el diagrama de árbol o asignación incorrecta de probabilidades. De este modo, se obtiene insumos clave para identificar, clasificar y caracterizar las dificultades asociadas al objeto de estudio.

La actividad está centrada en ejercicios de probabilidad condicional mediante el uso del diagrama de árbol. Tiene una duración estimada de una sola sesión que consta de dos horas para su implementación y está compuesta por tres ejercicios, en la que los participantes deben construir diagramas de árbol, calcular e interpretar probabilidades condicionadas para dar solución al problema.

Los ejercicios seleccionados provienen del texto *Introducción Elemental a la Teoría de Probabilidad*. J. Álvarez, Universidad del Valle, este texto se utiliza en la materia de cálculo de probabilidades de la carrera de Estadística de la Universidad del Valle. Este texto tiene un enfoque riguroso de la probabilidad condicional y por requerir representaciones tanto gráficas como simbólicas, un aspecto importante para caracterizar las dificultades de los participantes según el marco teórico de Duval (1999).

Adicionalmente, cada uno de los ejercicios a tener en cuenta fueron ajustados para alinearse a los objetivos del trabajo de investigación, adicionándole un nuevo apartado (c o d) en cada pregunta, para explorar el razonamiento de los participantes y la construcción de diagramas de árbol. Estos ajustes no alteraron la estructura central de los ejercicios originales, sino que se incorporaron como elementos que permiten analizar cómo los participantes justifican sus respuestas, interpretan los resultados y articulan diferentes registros de representación en el proceso de solución.

Para la selección de los ejercicios se tuvo en cuenta el marco teórico señalado sobre la teoría semiótica-cognitiva de Duval (1999), que enuncia que la comprensión matemática surge de la coordinación entre múltiples registros de representación (diagrama de árbol y la parte simbólica). Cada ejercicio ha sido seleccionado para exigir al participante el *tratamiento y conversión* de los registros.

A continuación, se presentan los ejercicios que componen la actividad de implementación. Para cada uno de ellos, se presenta inicialmente el enunciado del ejercicio, seguido de su respectiva solución, y finalmente, se expone la justificación de la selección según el marco teórico de esta investigación:

1) Una caja contiene 3 monedas legales, 4 monedas cargadas tales que la probabilidad de obtener cara con cada una de ellas es $1/3$. Y 5 monedas cargadas tales que la probabilidad de obtener cara con cada una de ellas es de $2/3$.

a) Si se extrae y se lanza una moneda al azar del total de monedas y se obtiene cara ¿Cuál es la probabilidad de que se haya extraído una moneda legal?

■ Primero definiremos los eventos dados:

C = Obtener cara en el lanzamiento

PC = Probabilidad de obtener cara

ML = Extraer una moneda legal. Tiene 3 Monedas

MC1 = Extraer una moneda cargada tipo 1. Tiene 4 Monedas

MC2 = Extraer una moneda cargada tipo 2. Tiene 5 Monedas

Total, monedas = 12

Probabilidad de elegir cada tipo de monedas son:

$$P(ML) = 3/12; P(MC1) = 4/12; P(MC2) = 5/12$$

Probabilidad de obtener solo cara en cada una:

$$P(C|ML) = \frac{1}{2}; P(C|MC1) = \frac{1}{3}; P(C|MC2) = \frac{2}{3}$$

Se calcula la probabilidad:

$$P(ML|C) = \frac{P(C|ML) P(ML)}{P(C)}; \text{Fórmula de Bayes}$$

$$P(C) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{12}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{12}\right) + \left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{12}\right) = \frac{37}{72}$$

Reemplazamos en la fórmula de Bayes y resolvemos:

$$P(ML|C) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{12}}{\frac{37}{72}} = \frac{9}{37}$$

Antes de la justificación es necesario saber que en probabilidad cuando se habla de un elemento legal, es que todas las opciones que hay dentro ese elemento tienen la misma probabilidad de ocurrir y uno cargado es cuando las probabilidades no son iguales para todos los resultados posibles. Un ejemplo sería que un dado legal tiene la misma probabilidad de caer cada uno de sus lados es decir $1/6$ y un dado cargado puede tener más probabilidad uno de los lados, con relación a los otros, de que el 2 caiga la probabilidad es de $2/3$, regularmente esto es dado en la actividad.

Según Duval (2006), todo razonamiento matemático implica movilizar al menos dos registros de representación, en este caso el registro natural, que es la descripción textual del problema y el registro simbólico que son los cálculos de probabilidad y numéricos. A lo largo de la actividad se requiere traducir la situación descrita de lenguaje natural a un modelo probabilístico. En este punto puede haber dificultades como confundir $P(C|ML)$ con $P(ML|C)$, en el cálculo de $P(C)$ se pueden reflejar las ramas del diagrama de árbol y poder resolver el punto C.

b) Se extrae una segunda moneda sin reemplazo del total de monedas ¿Cuál es la probabilidad que en el segundo lanzamiento se obtenga cara, dado que en el primer lanzamiento hubo cara?

Esta es una probabilidad condicional compuesta, donde se consideran todos los tipos de moneda posibles que pudieron salir en el primer lanzamiento. Como se selecciona una segunda moneda aleatoria se consideran tres probabilidades, la primera moneda y su impacto en la segunda. Quedan 11 monedas, si la primera fue:

- ML, quedan 2 monedas ML
- MC1, quedan 3 monedas MC1
- MC2, quedan 4 monedas MC2

Ley de la probabilidad total:

$$P(C2|C1) = P(C|ML)P(ML|C) + P(C|MC1)P(MC1|C) + P(C|MC2)P(MC2|C)$$

Falta calcular $P(MC1|C)$ y $P(MC2|C)$

$$P(MC1|C) = \frac{P(C|MC1) P(MC1)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{4}{12}}{\frac{37}{72}} = \frac{8}{37}$$

$$P(MC2|C) = 1 - P(ML|C) - P(MC1|C) = 1 - \frac{9}{37} - \frac{8}{37} = \frac{20}{37}$$

Probabilidad de extraer según el tipo en la segunda extracción:

Caso 1: Primera moneda ML

$$P(ML) = \frac{2}{11}; P(MC1) = \frac{4}{11}; P(MC2) = \frac{5}{11}$$

$$P(C2|ML) = \frac{17}{33}$$

Caso 2: Primera moneda MC1

$$P(ML) = \frac{3}{11}; P(MC1) = \frac{3}{11}; P(MC2) = \frac{5}{11}$$

$$P(C2|MC1) = \frac{35}{66}$$

Caso 3. Primera moneda MC2

$$P(ML) = \frac{3}{11}; P(MC1) = \frac{4}{11}; P(MC2) = \frac{4}{11}$$

$$P(C2|MC2) = \frac{1}{2}$$

Ahora reemplazamos en la ley de la probabilidad total:

$$P(C2|C) = \left(\frac{9}{37} \times \frac{17}{33}\right) + \left(\frac{8}{37} \times \frac{35}{66}\right) + \left(\frac{20}{37} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{623}{1221} \approx 51.02\%$$

Este ejercicio implica dos extracciones sin reemplazo y dos lanzamientos condicionados, lo que exige entender que el resultado del primer lanzamiento modifica el espacio probabilístico de C2 y entender la $P(C2|C)$ no es independiente de la primera extracción, es decir, debe tener en cuenta el modelo inicial. Por lo que requiere una conversión de registros anidada Duval (2006), por lo que el participante debe coordinar y transformar la información entre diferentes registros de representación de manera independiente dentro de una misma tarea. En un primer caso es del registro natural al simbólico: Extraer una segunda moneda = $P(C2|C)$ y en un segundo caso del registro numérico al operacional.

c) Representa un diagrama de árbol de las situaciones planteadas. ¿Qué aspectos del diagrama de árbol te ayudaron o dificultaron en la resolución del ejercicio?

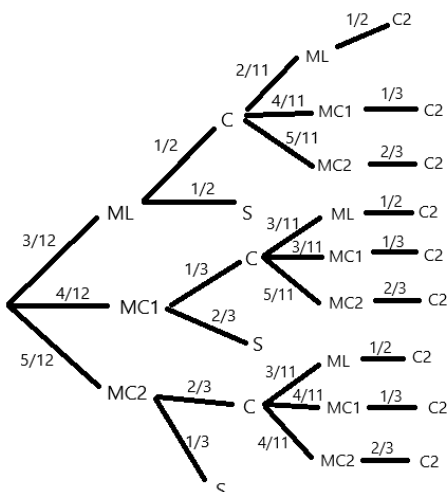


Figura 5. Diagrama de árbol de la respuesta del ejercicio 1.c

El diagrama de árbol es una herramienta para el cálculo de probabilidades, en este se logra ver un registro gráfico del ejercicio, por lo que traduce lo textual de las extracciones y lanzamientos. Hay una coordinación de registros entre lo natural y gráfico, además de al entender como ayuda a calcular las anteriores preguntas permite transformar y conectar diferentes formas de representación (textual, simbólico y gráfico) para entender que C2 depende directamente de C.

d) Explique en sus palabras ¿por qué en (b) no es válido usar directamente 3/12 como probabilidad inicial?

La primera moneda extraída afecta las siguientes probabilidades, una probabilidad $P(A|B)$ no es igual $P(A)$ que es la inicial. Si escogemos el 3/12 estaríamos ignorando el cambio de cantidad de monedas que había inicialmente en total y de cada tipo, como hay tres tipos diferentes también se puede ver reflejado en el cálculo de probabilidades.

En la última pregunta permite identificar si los profesores de matemáticas en formación pueden coordinar adecuadamente el registro natural, en el que se describe la situación del experimento, con el registro simbólico, en el que se representan y calculan las probabilidades. Si el participante usa directamente la fracción $3/12$ como probabilidad inicial en la segunda extracción, estaría ignorando que la primera extracción modifica las condiciones del experimento. Es decir, mantiene fija una representación simbólica que ya no corresponde a la nueva situación, lo que evidencia una dificultad en la coordinación de registros semióticos.

2) En una fábrica de tornillos, tres máquinas M1, M2 Y M3 producen el 30%, 25% y 45% respectivamente, de la producción total de tornillos. Suponga que el 1% de los tornillos producidos por M1 son defectuosos, que el 2% de los tornillos producidos por M2 son defectuosos y que el 3% de los tornillos producidos por M3 son defectuosos.

a) Representa la situación con un diagrama de árbol al extraer al azar un tornillo. Explica y escribe ¿Cómo decidiste qué información colocar en cada nivel del diagrama de árbol y qué conexiones hiciste?

■ Definimos eventos.

M1, M2, M3 = Máquina 1,2 y 3 sucesivamente.

D = Tornillos defectuosos

ND = No defectuosos

■ Diagrama de árbol:

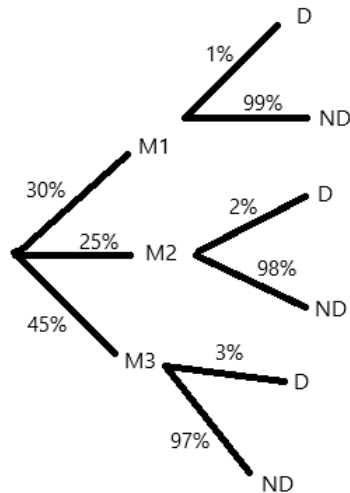


Figura 6. Diagrama de árbol de la respuesta del ejercicio 2.a

En este ejercicio el diagrama de árbol es un mediador semiótico para responder las siguientes preguntas. En la construcción de este, se exige traducir de registro natural al gráfico, si hay un error como omitir una rama, en las ramas de segunda generación, o como asignar inadecuadamente la probabilidad, revele una ruptura semiótica entre el registro natural y el gráfico, lo cual es importante para entender cómo ven los participantes la probabilidad condicional. Al detallar la construcción se puede identificar si los participantes lo realizan mecánicamente o comprenden su función. Pueden aparecer dificultades en el tratamiento dentro del mismo registro a la hora de organizar la información dentro del mismo diagrama o en la conversión entre registros en la manera de interpretar la información verbal y transformarlas a gráfica.

b) De la producción total se extrae al azar un tornillo ¿Cuál es la probabilidad de que el tornillo sea defectuoso?

$$P(D) = P(D|M1)P(M1) + P(D|M2)P(M2) + P(D|M3)P(M3);$$

Ley de la probabilidad total

$$P(D) = (0.01 \times 0.30) + (0.02 \times 0.25) + (0.03 \times 0.45) = 0.0215 \approx 2.15\%$$

La ley de la probabilidad total, ayuda conectar el registro gráfico (diagrama de árbol) y el simbólico, para calcular las probabilidades. Los profesores en formación pueden extraer información del diagrama de árbol y trasladarla a una expresión matemática usando la ley de la probabilidad total, favorece la articulación entre registros. Si no lo logran, puede haber una desconexión entre la comprensión estructural del ejercicio (representación gráfica) y su expresión algebraica, lo que evidencia una dificultad en la conversión de registros semióticos, según lo plantea Duval (2006).

c) De la producción total se extrae al azar un tornillo, si el tornillo extraído es defectuoso ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la máquina M2?

$$P(M2|D) = \frac{P(D|M2) P(M2)}{P(D)}; \text{Fórmula de Bayes}$$

$$P(M2|D) = \frac{(0.02 \times 0.25)}{0.0215} = \frac{0.005}{0.0215} \approx 0.2326 \cong 23.26\%$$

Calcular esta probabilidad demanda un cambio en la forma de interpretar la situación, ya que implica diferenciar la probabilidad directa (D dado M2) hacia la inversa (M2 dado D), donde el participante puede no reconocer que la condicionalidad inversa exige recontextualizar los datos. Este ejercicio permite detectar si hay una falta de comprensión en cómo funciona el diagrama y en problemas de probabilidad condicional.

3) Supóngase que en Cali se desea estudiar la relación entre la filiación política de los ciudadanos en edad de votar -entre ellos Liberal (L), Conservador (C) u otras tendencias

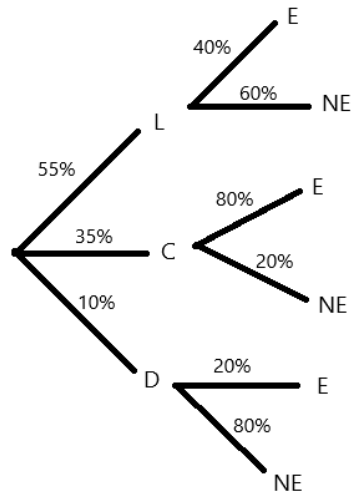


Figura 7. Diagrama de árbol del ejercicio
3

(D)- y si lee (E) o no leen (NE) el periódico *El País*. El siguiente diagrama representa las probabilidades involucradas en el estudio:

- a) Se elige aleatoriamente un ciudadano en edad de votar ¿Cuál es la probabilidad de que la persona seleccionada lea el periódico *El País*?

■ Primero definimos los eventos:

- Afiliación política de los ciudadanos:

L = Liberadores

C = Conservadores

D = Otras tendencias

- Lectura del periódico *El País*:

E = Leen el periódico

NE = No leen el periódico

■ Probabilidades dadas:

- Probabilidad de que un ciudadano tenga una afiliación política:

$$P(L) = 0.55; P(C) = 35\%; P(D) = 10\%$$

- Probabilidad de leer o no el periódico *El País* dado de que tenga una afiliación política:

$$P(E|L) = 0.40; P(E|C) = 0.80; P(E|D) = 0.20$$

$$P(NE|L) = 0.60; P(NE|C) = 0.20; P(NE|D) = 0.80$$

- Calcular la probabilidad de que el ciudadano seleccionado lea El País

$$P(E) = P(E|L)P(L) + P(E|C)P(C) + P(E|D)P(D);$$

Ley de la probabilidad total

$$P(E) = (0.40 \times 0.55) + (0.80 \times 0.35) + (0.20 \times 0.10) = 0.52 \approx 52\%$$

Este ejercicio fue seleccionado porque permite identificar cómo los participantes interpretan y tratan la información contenida en un diagrama de árbol, lo que corresponde al tratamiento dentro del registro gráfico, según la teoría semiótico-cognitiva de Duval (1999). La correcta lectura del enunciado es pertinente para resolver el ejercicio, lo que exige el reconocer correctamente cuales ramas son necesarias para la situación planteada y distinguir eventos condicionados para aplicar adecuadamente las fórmulas (registro simbólico).

Según la teoría semiótico-cognitiva de Duval (1999), una dificultad clave en el aprendizaje de las matemáticas es la conversión entre registros de representación. Como en este caso que el ejercicio requiere que el participante articule el registro gráfico (diagrama de árbol) con el registro simbólico (cálculo de probabilidades) y el registro verbal (comprensión del enunciado y formulación de respuestas), permitiendo así analizar cómo gestionan la conversión entre registros y si estas conversiones dan a lugar a errores conceptuales.

- b) Se elige aleatoriamente un ciudadano en edad de votar. Antes de hacer los cálculos, ¿Cuál crees tú que es la afiliación política más probable de un ciudadano que lee *El País*? Explica brevemente por qué piensas eso. Luego, realiza los cálculos y compara tu suposición con el resultado obtenido.

■ Suposición del estudiante en primera instancia.

Podría ocurrir que un estudiante pensare que:

A primera vista, pienso que seleccionar un ciudadano que lee *El País* es más probable que sea conservador ya que el 80% de los conservadores leen el periódico, una proporción más alta que los otros grupos. Sin embargo, el grupo liberal tiene una participación más grande en la población total.

■ Probabilidad de que se seleccione un ciudadano que lee el periódico dado de que sea una afiliación política.

$$P(L|E) = \frac{P(E|L) P(L)}{P(E)}; \text{Fórmula de Bayes}$$

$$P(L|E) = \frac{(0.40 \times 0.55)}{0.52} = \frac{0.22}{0.52} \approx 0.4231 \cong 42.31\%$$

$$P(C|E) = \frac{(0.80 \times 0.35)}{0.52} = \frac{0.28}{0.52} \approx 0.5385 \cong 53.85\%$$

$$P(D|E) = \frac{(0.20 \times 0.10)}{0.52} = \frac{0.02}{0.52} \approx 0.0385 \cong 3.85\%$$

■ Posible justificación

El ciudadano que lee *El País* es más probable que sea conservador, con una probabilidad de aproximadamente 53.85%. Aunque los liberales son mayoría en la

población, los conservadores tienen una tasa de lectura significativamente mayor, lo que compensa su menor proporción.

El punto (b) es relevante dentro del marco semiótico-cognitivo de Duval (1999) porque le exige al participante realizar una conversión entre registros como en el anterior punto, a partir de la lectura del diagrama de árbol (registro gráfico) aplicar la fórmula de Bayes (registro simbólico). Esta articulación permite identificar si el participante comprende cómo se relacionan probabilidades condicionales directas e inversas, así como su capacidad para seleccionar y coordinar los registros pertinentes en función del problema.

El punto plantea presentar una intuición inicial basada en proporciones aparentes y relacionarlo con el resultado obtenido mediante el cálculo formal, lo que permite identificar posibles dificultades entre el razonamiento informal y el uso riguroso de los conceptos probabilísticos. Este contraste puede poner en evidencia dificultades en el tratamiento del registro simbólico, como en el uso correcto de las fórmulas o en la interpretación del significado de las probabilidades condicionales.

c) Explica por qué la suma de las probabilidades en las ramas siempre es igual a 1.

- Posible respuesta del profesor de matemáticas en formación

En un diagrama de árbol, cada nodo representa eventos mutuamente excluyentes, lo que significa que la suma de esas probabilidades da 1, en este caso cada afiliación política se puede saber solo si lee o no leen el periódico *El País*, es decir que todos los estudiantes están en esa clasificación, ejemplo: $P(E|L) + P(NE|L) = 1$, así mismo con la probabilidad total de seleccionar cualquier afiliación política de las tres presentadas también es 1. Esto se da por la definición de la probabilidad total.

Esta pregunta evalúa si los participantes comprenden la estructura del diagrama, no solo el uso mecánico. Asimismo, permite identificar si las dificultades provienen en la comprensión conceptual de la ley de la probabilidad total o de la representación gráfica. En este caso hay un tratamiento dentro del registro gráfico al reconocer o no la estructura jerárquica del diagrama, como en la conversión hacia el registro simbólico al vincular el diagrama con la fórmula correspondiente.

- d) Justifica cómo el diagrama de árbol ayuda para calcular la probabilidad total de que un ciudadano lea el periódico *El País*. Además, explica que cambiaría en el diagrama si se añadiera un nuevo grupo político. (Ejemplo, un grupo ambientalista que representa el 5% de los ciudadanos, de los cuales el 90% lee *El País*)

El diagrama de árbol permite visualizar todas las ramas y cada una de las probabilidades por lo que es más fácil aplicar fórmulas como la ley de la probabilidad total, ya que tienes conocimiento de cada uno de los valores. El diagrama divide la situación planteada en caminos separados y así evita confusión en los cálculos, es decir, organiza visualmente los casos posibles, mostrando paso a paso la estructura condicional: primero se escoge el grupo político, luego si lee o no lee el periódico.

Si se añadiera una nueva afiliación política como un grupo ambientalista que representa el 5% de los ciudadanos y el 90% de ellos lee *El País*, el diagrama cambiaría:

- Se añade una nueva rama
- Se crean dos subramas si leen o no leen para este grupo
- Se reduce proporcionalmente la participación de los otros grupos para mantener el total en 100%

Cambios ajustados:

$$P(L) = 0.55 \times 95 = 52.25\%$$

$$P(C) = 0.35 \times 95 = 33.25\%$$

$$P(D) = 0.10 \times 95 = 9.5\%$$

■ Nuevo grupo:

A = Ambientalista

$$P(A) = 5\%$$

Probabilidad de leer o no *El País* dado de que es ambientalista

$$P(E|A) = 0.90; P(NE|A) = 0.10$$

Así cambiaría el diagrama de árbol, por tanto, los cálculos del punto (a) y (b)

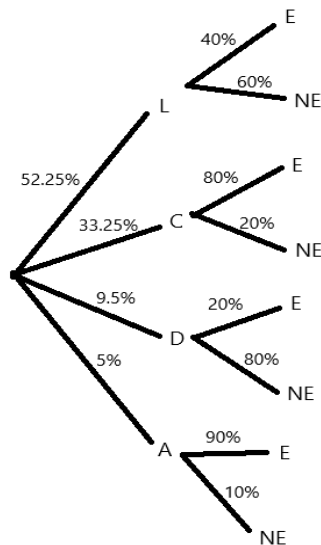


Figura 8. Diagrama de árbol de la respuesta del ejercicio 3.d

Por último, este punto en relación con los anteriores también permite coordinar distintos registros de representación (el registro gráfico y simbólico). Al pedir al estudiante que explique cómo el diagrama facilita el cálculo, se identifica si reconoce o no la estructura del gráfico y como este tiene una función organizadora en el tratamiento de la

información probabilística. Además, al considerar un cambio como el de un nuevo grupo política, se evalúa si el estudiante comprende la lógica de la jerarquía del diagrama y puede adaptarlo al registro gráfico con estas nuevas condiciones. Así se analiza tanto el tratamiento dentro del registro gráfico como la conversión hacia lo simbólico.

Un error común sería que no cambiara la probabilidad de todos los grupos políticos, si se agrega una nueva, ya que sus probabilidades deben sumar 1, puede reflejar una dificultad al adaptarse en el registro con nuevos datos.

El objetivo de estos ejercicios es identificar las dificultades que presentan los participantes a la hora de resolver problemas de probabilidad condicional mediante el uso del diagrama de árbol, que es el foco de este trabajo. La selección y reformulación de los ejercicios buscan integrar tres registros semióticos: gráfico, lingüístico y simbólico. En cada uno, se consideran los criterios de congruencia semiótica de Duval (1999), con el fin de preservar el significado matemático al trabajar con distintas representaciones y evitar la pérdida de información en la conversión entre registros.

3.4 Análisis

A continuación, se expone la manera que se analizarán los datos, de acuerdo con lo presentado en el marco teórico. El análisis se dividirá en dos fases: identificación y clasificación, que corresponden a los dos objetivos específicos, relacionados con a) identificar las dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje de la probabilidad condicional, asociadas al uso de los diagramas de árbol y b) clasificar las dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje de la probabilidad condicional, asociadas al uso de los diagramas de árbol.

3.4.1 Fase I: Identificación de las dificultades de probabilidad condicional

La primera fase del análisis corresponde al primer objetivo específico, enfocado en identificar las dificultades que presentan los profesores de matemáticas en formación al resolver la actividad propuesta anteriormente sobre probabilidad condicional, asociada al uso del diagrama de árbol. Para ello, se emplea una rejilla diseñada para organizar e identificar las producciones escritas por los profesores de matemáticas en formación.

La primera columna de la rejilla corresponde al enunciado de la pregunta planteada de la actividad, lo que permite contextualizar la producción analizada. La segunda columna presenta la respuesta del participante, transcrita de forma literal.

La tercera columna recoge las dificultades asociadas a la comprensión del objeto matemático, específicamente de la probabilidad condicional. Estas dificultades, anticipadas a partir de los antecedentes revisados (véase apartado 1.4) y de los referentes teóricos (véanse apartados 2.1 y 2.2), en que se presentan tanto los conceptos fundamentales como los hallazgos previos sobre las dificultades de aprendizaje. En dichos apartados se anticipa que, de acuerdo con los antecedentes, el razonamiento condicional suele estar incluido por sesgos, tales como la falacia de las tasas de base, la confusión entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes, la falacia de la conjunción, la falacia de la condicional transpuesta y la falacia del eje temporal. Estos sesgos, reconocidos en investigaciones previas, orientan el análisis posterior y sirven de marco para interpretar las producciones estudiantiles.

La cuarta columna registra las dificultades en el uso y manejo de los registros semióticos, con base en la teoría semiótico-cognitiva (Duval, 1996, 2006) presentada en el apartado 2.3. Si bien en dicha sección se expuso principalmente el marco conceptual de la

teoría, de ella se desprenden posibles obstáculos vinculados con el aprendizaje matemático, tales como rupturas en la conversión de registros, tratamiento incompleto de un registro, entre otros. Estos aspectos orientaron la identificación de dificultades específicas en las producciones de los profesores en formación.

Finalmente, la quinta columna sintetiza e interpreta el tipo de dificultad evidenciada, permitiendo una generalización basada en el análisis del investigador. Esta fase constituye la base para la posterior categorización de las dificultades en la fase siguiente.

Tabla 2. Instrumento de análisis Fase I

Ejercicio	Respuesta del estudiante	Dificultades asociadas a la comprensión del objeto matemático	Dificultades asociadas al uso de representaciones	Descripción: Generalización de las dificultades (interpretativo)

El uso de una rejilla como instrumento de identificación responde a la necesidad de organizar de manera sistemática la información cualitativa obtenida de las producciones escritas de los participantes. Este formato permite disponer en paralelo el enunciado del ejercicio, la respuesta del estudiante y el análisis interpretativo, de modo que cada producción se mantenga en su propio contexto y no se diluya en un análisis global. Al estructurar la información en columna diferenciadas, es posible vincular de forma directa las dificultades identificadas a la comprensión del objeto matemático y con el uso de los registros de representación, siguiendo el marco de la teoría semiótico-cognitiva de Duval.

Este procedimiento favorece la trazabilidad del análisis, pues deja documentado cómo se pasa de la respuesta individual a la dificultad identificada, y al mismo tiempo se prepara para la segunda fase del análisis, en las que las dificultades se agrupan y categorizan en patrones más generales.

3.4.2 Fase II: Clasificación de las dificultades en la probabilidad condicional

La segunda fase del análisis corresponde al segundo objetivo específico: clasificar las dificultades de los profesores de matemáticas en formación, en el aprendizaje de la probabilidad condicional, asociadas al uso de los diagramas de árbol.

En la fase anterior se tuvieron en cuenta la identificación de las dificultades en el aprendizaje de la probabilidad condicional bajo el uso de las representaciones a partir del marco teórico de Duval (1999) y las dificultades asociadas a la comprensión del objeto matemático. En la fase II con dichas dificultades se reorganizan en un nivel más general.

Para llevar a cabo el proceso de clasificación, se utilizó como instrumento una tabla de doble entrada, que permite cruzar los dos tipos de dificultades identificadas en la fase I: las asociadas a la comprensión del objeto matemático y las relacionadas con el uso de representaciones.

En la tabla, las filas corresponden a los tipos de dificultades vinculadas al uso de representaciones, mientras que las columnas recogen los tipos de dificultades relacionadas con la comprensión del objeto matemático. El cruce entre ambos tipos posibilita identificar patrones recurrentes, es decir, cómo ciertas dificultades en torno al objeto matemático se relacionan sistemáticamente con las dificultades del uso de representaciones.

A continuación, se presenta dicho instrumento de análisis. En la parte superior de la tabla se ubican las dificultades asociadas a la comprensión del objeto matemático (se identificaron once), mientras que en el margen izquierdo aparecen las dificultades vinculadas al uso de representaciones (se identificaron ocho). El cruce de ambas dimensiones permite observar, de manera organizada, las interrelaciones entre los tipos de obstáculos detectados en la fase I.

De esta manera, la tabla no solo sintetiza la información recolectada en la fase I, sino que permite una reorganización más amplia de las dificultades, integrando ambos tipos de dificultades y constituyendo así la base para la posterior caracterización de las dificultades en el aprendizaje de la probabilidad condicional.

Cabe aclarar que, con fines de síntesis, en la tabla las dificultades se presentan como *Dificultad asociada a la comprensión del objeto matemático I, II, ... y Dificultad al uso de representaciones I, II, III...*, dado que aún no se explicitan en este apartado. La descripción completa de cada una se desarrolla más adelante en el apartado 4.1, mientras que las clasificaciones derivadas de esta tabla se presentan en el apartado 4.2.

Tabla 3. Instrumento de análisis Fase II

Dificultad asociada a la comprensión del objeto matemático Dificultad asociada al uso de representaciones	Dificultad asociada a la comprensión del objeto matemático	Dificultad asociada a la comprensión del objeto matemático	Dificultad asociada a la comprensión del objeto matemático	...	Dificultad asociada a la comprensión del objeto matemático
	I	II	I III		XI

Dificultad asociada al uso de representaciones I					
Dificultad asociada al uso de representaciones II					
...					
Dificultad asociada al uso de representaciones VIII					

Capítulo IV: Resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos a partir del análisis de las producciones de los profesores de matemáticas en formación frente a la actividad sobre probabilidad condicional. Para este estudio se contó con siete respuestas elaboradas por los participantes, las cuales constituyen el material de análisis. El análisis se desarrolló en dos fases complementarias. En la Fase I se identificaron las dificultades en las respuestas de los participantes, organizadas en una rejilla que recoge las dificultades asociadas a la comprensión del objeto matemático y en el uso de registros de representación.

Posteriormente, en la fase II, dichas dificultades fueron reunidas para establecer patrones entre los dos ejes de análisis (dificultades asociadas a la comprensión del objeto matemático y uso de representaciones), lo que permitió conformar categorías más amplias que sintetizan los patrones comunes de las dificultades presentes. De este modo, los resultados muestran tanto el detalle de las respuestas individuales como ya la caracterización general de las dificultades, en coherencia con el objetivo del estudio de la presente investigación.

4.1 Resultados de la fase I: Identificación de las dificultades de probabilidad condicional

La primera fase del análisis corresponde a la identificación de dificultades en el aprendizaje de la probabilidad condicional a partir de las producciones de los profesores de matemáticas en formación. Para ello, se utilizó la rejilla presentada en el capítulo anterior. A partir de esta organización, se procede a presentar las dificultades encontradas en las respuestas de los participantes en cada ejercicio.

El primer ejercicio planteaba una situación de extracción y lanzamiento de monedas en la que se buscaba que los participantes modelaran un experimento compuesto y razonaran sobre la probabilidad condicional en diferentes etapas. El ejercicio se dividía en cuatro apartados.

- Ejercicio 1.a.

En este primer apartado se pedía calcular la probabilidad de que se haya extraído una moneda dado que salió cara en el primer lanzamiento. En términos generales, todos los participantes resolvieron correctamente la probabilidad solicitada y no se identificaron dificultades significativas. Los profesores en formación comprendieron el concepto de probabilidad condicional e identificaron correctamente la situación planteada, aplicando la fórmula de Bayes. Por lo que hubo una conversión entre el registro verbal y simbólico.

- Ejercicio 1.b.

Se pedía calcular la probabilidad de obtener cara en el segundo lanzamiento, considerando que en el primero ya había salido cara. En general los participantes no presentaron dificultades marcadas, ya que lograron razonar acerca de la disminución de

monedas al extraer una segunda sin reemplazo. Sin embargo, se observan formas distintas de argumentación. Un caso particular es la respuesta de un estudiante que afirmó:

“La probabilidad no cambia a menos que conozcamos qué tipo específico de moneda fue la que salió en el anterior lanzamiento, lo único sería disminuir la probabilidad de que salga cada tipo de moneda, ya que el total de monedas cambia. Entonces para que salga una legal la probabilidad sería $3/11$, para que salga una cada con probabilidad de cara de $1/3$ sería $4/11$ y para que salga una cargada con probabilidad de cara de $2/3$ sería $5/11$.”

La dificultad encontrada respecto a la comprensión del objeto matemático se relaciona con: *Dificultad en no reconocer y formalizar la condicionalidad*, ya que el profesor de matemáticas en formación reconoce la reducción del espacio muestral, pero no aplica la ley de la probabilidad total ni desarrolla el cálculo formal de probabilidad condicional requerido. En esta producción se evidencia un razonamiento cualitativo y no tan cuantitativo. En cuanto al uso de representaciones, se observa la dificultad de *permanencia en el registro verbal*, sin pasar a un registros simbólico o gráfico que permiten formalizar la situación. Esto refleja una articulación incompleta entre registros, Duval (2006) señala que la coordinación de representaciones es clave en la comprensión de conceptos probabilísticos.

- Ejercicio 1.c

Se solicita a los participantes construir un diagrama de árbol que representara a las dos extracciones y lanzamientos de monedas de monedas. Mientras algunos lograron elaborar diagramas completos y correctos, en otros se evidenció dificultades tanto en el plano de la comprensión del objeto matemático como en el del uso de representaciones.

En el primer caso, el profesor de matemáticas en formación realiza una representación parcial y utiliza la notación $P(c)$ para referirse a dos eventos diferentes (la probabilidad de que la moneda sea cargada y la probabilidad de obtener cara al lanzarla). Esta ambigüedad de notación revela confusión entre eventos distintos, refleja una falta de distinción conceptual. Además, el diagrama construido omite la segunda extracción y el segundo lanzamiento, es decir, no contempla toda la estructura condicional del experimento. Las dificultades encontradas respecto a la comprensión del objeto matemático son: *confusión entre probabilidad condicional y conjunta* debido al uso ambiguo de los símbolos, y por otro, *visión reducida de la estructura compuesta del experimento*, lo que impide modelar todas las etapas necesarias del fenómeno aleatorio.

En las dificultades del uso de representaciones presentadas en la respuesta del profesor en formación, se observa una *ruptura en la conversión entre registros* ya que el paso del registro simbólico al gráfico resulta incompleto. Además, hay un *uso ambiguo en la notación de $P(c)$ que refleja una confusión semiótica*, pues un mismo símbolo es usado con dos significados distintos, lo que evidencia una falta de coordinación entre los significados de los registros.

En el segundo caso, la respuesta del profesor en formación plantea la primera extracción de manera adecuada, pero no logra identificar que el experimento está conformado por dos etapas (extracciones y lanzamientos). En consecuencia, el diagrama de árbol solo contiene las ramas del primer momento, omitiendo el resto de la estructura, por lo que se pierde parte del proceso del experimento. Desde el punto de vista de la comprensión del objeto matemático, la dificultad identificada es *visión reducida de la estructura compuesta del experimento*, ya que no percibe todo el espacio muestral por lo

que se tiene una comprensión imparcial de los eventos compuestos, ya que el profesor en formación lo interpreta como un experimento simple, sin reconocer las dependencias que se generan entre las etapas.

En cuanto al uso de representaciones, la dificultad encontrada es *la ruptura en la conversión de registros y tratamiento parcial del registro gráfico*, ya que el paso de lo simbólico, verbal al gráfico queda en una ilustración estática, lo que no cumple el papel de herramienta para analizar la situación probabilística. Duval (2006) menciona que esta ruptura impide coordinar los significados de los distintos registros.

En ambos casos hubo una ruptura en la conversión de registros al no realizar correctamente el diagrama de árbol: en el primero no se logra realizar adecuadamente y en el segunda se omite la segunda parte del experimento.

- Ejercicio 1, d.

En este apartado se pedía justificar por qué en el ejercicio anterior no era válido usar directamente $3/12$ como probabilidad inicial. La mayoría de los profesores de matemáticas en formación lograron comprender que debía ajustarse el cálculo tras la extracción de una moneda, aunque se identificó un caso particular en el que el profesor de matemáticas en formación respondió: *“Porque se tiene que contemplar que ya una moneda fue extraída”*

La dificultad asociada a la comprensión del objeto matemático es en el *no reconocimiento y formalización de la condicionalidad*, el profesor en formación reconoce la necesidad de modificar el espacio muestral, pero no llega a precisar de qué manera se transforma ni como formalizarlo en términos probabilísticos. En consecuencia, la comprensión del condicionamiento se mantiene en un nivel parcial e intuitivo. En el uso de

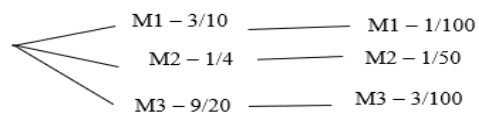
representaciones el profesor en formación tiene una *permanencia en el registro verbal*, esto evidencia una dificultad en la coordinación entre registros de representación, ya que el razonamiento expresado no presenta una fórmula matemática que respalde el argumento.

En el segundo ejercicio se planteaba una situación de probabilidad condicional en el contexto de tres máquinas que producen tornillos. Se indicó que una proporción de la producción provenía de cada máquina (M1, M2 Y M3) y que, en un segundo nivel, cada máquina tenía asociada una probabilidad distinta de producir un tornillo defectuoso.

- Ejercicio 2, a.

En este apartado se pedía construir un diagrama de árbol que representara en un primer nivel la probabilidad de que el tornillo fuera producido por cada una de las máquinas y en un segundo nivel, la probabilidad de que resultara defectuoso. Se identificó un profesor de matemáticas en formación con una respuesta particular en la que la construcción resultó incompleta y desorganizada.

En el primer nivel coloque la probabilidad de que el tornillo sea producido por cada una de las máquinas y en el segundo nivel la probabilidad de que sea defectuoso el tornillo, los relacione según el número de máquina.



La dificultad asociada a la comprensión del objeto matemático principal radica en que el profesor en formación, aunque reconoce que el experimento tiene dos niveles (máquina y defecto), no logra coordinar adecuadamente ambos niveles dentro de la estructura del árbol. Se observa una duplicación de etiquetas y la ausencia de ramas

correspondientes al caso “no defectuoso”, lo que refleja una *comprensión parcial de la estructura condicional del experimento (en el registro gráfico)*

En el uso de las representaciones, la explicación verbal que ofrece el participante sí denota que entiende el significado de cada nivel, pero al trasladarlo al registro gráfico se producen omisiones y duplicaciones. El diagrama pierde organización jerárquica propia del diagrama de árbol, ya que repite los nodos M1, M2 Y M3 en niveles distintos, rompiendo así la lógica condicional de la situación. Esto evidencia *un tratamiento parcial del registro gráfico y una ruptura en la conversión entre registros*, lo que limita el uso del árbol como herramienta.

- Ejercicio 2, b.

En este inciso, se debe calcular la probabilidad de que un tornillo salga defectuoso en la primera extracción. Las respuestas de la mayoría de los profesores de matemáticas en formación aplicaron correctamente la ley de la probabilidad total. Sin embargo, se identificó un caso en el que el profesor de matemáticas en formación respondió: “*La probabilidad es de 3/50 o un 6% que se obtiene de sumar las probabilidades de que un tornillo sea defectuoso en cada máquina.*”

En este procedimiento, la dificultad asociada a la comprensión del objeto matemático es una *confusión en la articulación entre condicionalidad y totalización*. Ya que el profesor de matemáticas llega a un nivel de reconocer las ramas condicionales, pero no logra integrarlas en la formalización de la probabilidad total. Posteriormente, realizó una suma directa de las probabilidades condicionales (1/100, 1/50, 3/100) las ramas de segunda generación, sin ponderarlas por la probabilidad de producción de cada máquina.

En cuanto a las representaciones, *la dificultad radica en la conversión inadecuada entre registros (gráfico $\rightarrow$ simbólico)*, ya que no traslada la estructura gráfica realizada en el anterior apartado a un registro simbólico. El profesor de matemáticas en formación no reconoce el evento de tornillo defectuoso en cada máquina y a su vez no articula dicha información con la jerarquía del árbol. De este modo, se pierde la organización condicional de los niveles del diagrama de árbol, al no reconocer que cada probabilidad de tornillo defectuoso debe estar multiplicada por probabilidad de que el tornillo provenga de la máquina correspondiente.

- Ejercicio 2, c.

En este inciso se pedía calcular la probabilidad condicional de que un tornillo hubiese sido producido por la máquina M2 dado que resultaba defectuoso. Un profesor de matemáticas en formación tuvo una dificultad en la interpretación de probabilidad condicional. Respondió: *“La probabilidad de que sea producido por M2 es de 27/100 que es el resultado de sumar la probabilidad de que sea producido por M2 y de que sea defectuoso”*

Esta respuesta revela dificultades asociadas a la comprensión del objeto matemático, pues existe una *confusión entre probabilidad conjunta y condicional*. En lugar de aplicar la fórmula de la probabilidad condicional como cociente, el profesor de matemáticas en formación interpreta $P(M2|D)$ como una suma, lo que evidencia un error en la formalización probabilística. Además, se observó un sesgo característico el de *falacia de las tasas de base*, ya que no se considera la probabilidad total del defecto en el denominador, sino que manipulan directamente porcentajes sin atender a la estructura condicional del problema.

En cuanto al uso de las representaciones, hay una *ruptura en la conversión entre registros*, aunque en el diagrama de árbol se pueden distinguir las ramas de primera generación que es la producción por máquina y las de la segunda generación que son los tornillos defectuosos, esta información no fue trasladada al cálculo formal (registro simbólico). En su lugar, el profesor de matemáticas en formación operó con los valores como si fueran independientes, perdiendo la correspondencia entre el diagrama de árbol y la notación simbólica. Se evidencia también una confusión semiótica en la notación condicional, pues la barra “|” no se interpreta como relación condicional, sino como si indicara una simple operación aritmética (suma), cambiando totalmente el significado.

- Ejercicio 3, a.

Se pedía calcular la probabilidad de que un ciudadano leyera el periódico El País, considerando la información sobre filiaciones políticas y tasas de lectura asociadas. La mayoría de los profesores de matemáticas en formación calcularon correctamente. Sin embargo, un profesor de matemáticas en formación respondió simplemente: “No sé cómo hacerlo”. Esta respuesta evidencia que, aunque pueda reconocer el contexto no sabe cómo traducirlo a un procedimiento formal.

Esta respuesta refleja una dificultad en dos planos. Primero la asociada a la comprensión del objeto matemático, el profesor en formación *no reconocimiento de la estructura condicional y compuesta del experimento*, que exigía descomponer el evento “leer El País” en función de las distintas filiaciones políticas y aplicar la ley de la probabilidad total, es decir, hay una ausencia de acceso al objeto matemático. Segundo en el uso de representaciones, se observa una clara dificultad que es la *ausencia al acceso a los registros de representación*, ya que no realiza una producción matemática indica un

bloqueo en la conversión de registros, desde el enunciado verbal y del registro gráfico al registro simbólico.

- Ejercicio 3, b.

En este inciso se pedía determinar cuál era la afiliación política más probable de un ciudadano que lee El País. Para ello, los participantes debían aplicar la probabilidad condicional, utilizando la información de filiación y tasas de lectura. Dos profesores en formación presentaron dificultades.

La primera respondió: *“Conservador ya que se observa que el 80% de esta filiación leen el periódico el País, además se debería considerar también a los liberales pues tienen más de la mitad de la afiliación política y con esto mayor posibilidad de ser elegido y con 40% de estos que leen el periódico el País.*

$$P(L \cap E) = 0.22, P(C \cap E) = 0.28, P(D \cap E) = 0.02$$

Después de los cálculos se observa que la afiliación política más probabilidad de que un ciudadano lea el País es conservador.”

Esta producción evidencia, en relación con la comprensión objeto matemático, *una confusión entre probabilidad conjunta y condicional*. El profesor de matemáticas en formación resuelve el ejercicio comparando probabilidades conjuntas para calcular una condicional. En consecuencia, no reconoce la necesidad de normalizar los valores respecto a la probabilidad total de leer El País $P(E)$. Este error se puede vincular con la falacia de la condicional transpuesta, donde se asume que $P(A|E)$ puede resolverse observando $P(E|A)$ o simplemente $P(A \cap E)$.

Con relación a las representaciones, el profesor en formación se mantiene en el registro simbólico numérico (conjuntas), pero no realiza la conversión al registro

condicional requerido, lo que produce una *ruptura entre la coordinación entre registros*. Mientras el enunciado verbal demanda el cálculo de una condicionalidad, el tratamiento formal se reduce a operaciones con probabilidades conjuntas. No uso el diagrama de árbol como herramienta para determinar las probabilidades para justificar el paso a la condicionalidad. Por lo tanto, hay una *desarticulación entre registros verbal y simbólico*, ya que en un primer instante habla de porcentajes, luego de proporciones de la población y después usa conjuntas (registro simbólico), pero no integra los tres registros para dar una respuesta coherente.

La segunda respondió: “Yo creo que sería la afiliación política conservadora la más probable que lea el país ya que el 80% de esa población lee este periódico. Según los cálculos la afiliación política más probable que lea el País es la liberal ya que el 52% de esta población lee este periódico, esto es por la división del porcentaje del 55% que tiene afiliación liberal y el 40% de esta población lee el periódico.”

En este caso, respecto a la comprensión del objeto matemático, se observa un *sesgo en la falacia de las tasas de base*. El profesor en formación combina de manera intuitiva el tamaño del grupo (55% de liberales) con la tasa de lectura (40%), pero lo hace mediante una división directa que no corresponde a la fórmula de Bayes. Así, confunde porcentajes de población con probabilidades condicionales, sin reconocer la estructura. Esta dificultad muestra una *falla en la formalización en probabilidad condicional*, pues el cálculo se basa en reglas informales de proporcionalidad.

En cuanto a las representaciones, hay una *ruptura de coordinación entre registros*. El profesor en formación usa el registro verbal y un registro numérico informal, sin embargo, no articula ambos para construir la estructura de $P(A|E)$, sino que opera con

porcentajes sueltos, sin pasar ni al registro formal ni al gráfico. No logra coordinar el significado de los números con la pregunta condicional del ejercicio. Los porcentajes se manejan como comparaciones absolutas de frecuencia relativa, no como probabilidades condicionales.

- Ejercicio 3, c.

En este apartado se pedía justificar por qué las probabilidades de las ramas que emergen de un nodo en el diagrama de árbol siempre suman 1. Todos lograron dar una idea general, pero se evoca a respuestas un poco ambiguas o que menos formales. Una de las respuestas es: *“Pero creería que es porque representan la totalidad de los posibles sucesos en cada caso. Es decir, que cada conjunto de ramas muestra todas las opciones que pueden ocurrir, y por eso sus probabilidades deben sumar 1.”*

En términos de la comprensión del objeto matemático, la respuesta muestra una *comprensión parcial del principio de probabilidad total*. Si bien el profesor de matemáticas en formación reconoce la noción de totalidad y afirma que las ramas representan todas las opciones posibles, no formaliza la explicación en términos de los conceptos de eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos que fundamentan la ley de la probabilidad. Es decir, se queda en un nivel más intuitivo, sin apelar la estructura formal que sustenta el resultado.

Respecto al uso de registros de representación, la dificultad radica en la *permanencia en el registro verbal*. Aunque el profesor en formación fórmula una idea verbal aceptable, no utiliza de manera explícita la estructura del diagrama de árbol para justificar la respuesta. El diagrama aparece en su explicación solo como un trasfondo implícito, pero no como herramienta semiótica para argumentar. El profesor en formación no coordina los registros para fundamentar con claridad el principio probabilístico.

- Ejercicio 3, d.

Para este inciso se solicitó justificar cómo el diagrama de árbol ayuda al cálculo de la probabilidad total de que un ciudadano lea el periódico *El País*, y además explicar qué cambiaría en el diagrama si se añadiera un nuevo grupo político (por ejemplo, un grupo ambientalista que representa el 5% de los ciudadanos, de los cuales el 90% lee *El País*). La mayoría de los profesores en formación reconoce la importancia del diagrama de árbol como herramienta para los cálculos e interpretación en probabilidad condicional, además de realizar el ejemplo de que pasaría al adicionar una nueva afiliación. Hay dos respuestas que los profesores de matemáticas en formación no expresaron lo mismo:

Un primer profesor en formación mencionó:

“Porque este diagrama de arbol representa mejor como se produce cada caso. Así podemos identificar más fácilmente cada pregunta y calcular las probabilidades totales, ya que debemos contar con todos los casos posibles del problema. En este ejercicio por ejemplo, el evento principal es que la persona lea el periodico el pais y el diagrama nos permite ver todas las formas en que eso puede ocurrir. Por otro lado, si le aumenta un nivel de grupo politico, las probabilidades totales cambiarían ya que se debe contar con los porcentajes que nos brinda este grupo. Esto es necesario para poder resolver bien el estudio de las personas que leen el periodico el pais.”

Esta respuesta evidencia que el profesor en formación comprende verbalmente la necesidad de reestructurar el espacio muestral al añadir una nueva categoría, pero su argumentación se mantiene en un plano descriptivo, sin formalizar cómo se modificarían las ramas de árbol ni cómo se redistribuirían las probabilidades. La dificultad radica en una

falla en la formalización probabilística, reconoce la importancia del ajuste del espacio muestral y en el uso de la representación se observa *permanencia en el registro verbal*, pues no se apoya en el registro gráfico para mostrar cómo se alteraría la estructura del árbol, se mantiene en un solo registro (verbal-descriptivo)

Un segundo profesor en formación respondió: “*Pues no me ayudó para nada la verdad, no obtuve ningún valor concluyente.*”

Aquí se observa una dificultad más profunda: *Desconexión total con el objeto matemático de la probabilidad condicional y la probabilidad total*. El profesor en formación no reconoce la función del diagrama de árbol como herramienta para organizar y calcular probabilidades condicionales ni totales. Esta respuesta refleja una desconexión con el objeto matemático y, en términos del uso de representaciones, una *ausencia de conversión entre registros*, ya que no logra articular el diagrama con el enunciado verbal ni con cálculos de probabilidad condicional (registro simbólico).

4.2 Resultados de la fase II: Clasificación y caracterización de dificultades

El análisis de la Fase I permitió identificar un conjunto de dificultades, algunas de las cuales aparecieron de manera recurrente en las respuestas de los profesores de matemáticas en formación. Las dificultades asociadas a la comprensión del objeto matemático que se identificaron en la primera fase de análisis fueron once. Estas son: *Dificultad en no reconocer y formalizar la condicionalidad, confusión entre probabilidad condicional y conjunta, visión reducida de la estructura compuesta del experimento, visión reducida del espacio muestral (de la estructura compuesta del experimento), comprensión parcial de la estructura condicional del experimento, confusión en la articulación entre condicionalidad y totalización, falacia de las tasas de base, no reconocimiento de la estructura condicional*

y compuesta del experimento, falla en la formalización en probabilidad condicional, comprensión parcial del principio de probabilidad total y por último, desconexión total con el objeto matemático de la probabilidad condicional y la probabilidad total.

Y las dificultades que se identificaron asociadas al uso de representaciones fueron ocho.

Estas son: permanencia en el registro verbal, Uso ambiguo en la notación de $P(c)$ que refleja una confusión semiótica, tratamiento parcial del registro gráfico, conversión inadecuada entre registros, ruptura en la conversión entre registros, ausencia de acceso a los registros de representación, desarticulación entre registros verbal y simbólico y, por último, Ausencia de conversión de registros.

En la Fase II, se llevó a cabo el proceso de clasificación, que consistió en pasar de la descripción puntual de las dificultades a una identificación de patrones generales. A partir de estas recurrencias se sintetizaron los hallazgos iniciales y se agruparon en categorías más amplias.

La clasificación se estructuró en torno a los dos ejes definidos en el marco teórico: las dificultades relacionadas con la comprensión del objeto matemático de la probabilidad condicional y aquellas vinculadas al manejo de registros de representación. Sin embargo, el análisis mostró que no siempre existe un cruce directo entre ambos ejes: en algunos casos la relación es clara, mientras que en otros las dificultades se reducen principalmente a vacíos conceptuales en torno al objeto matemático.

Este procedimiento, apoyado de la tabla de doble entrada, permite organizar las dificultades recurrentes y derivarlas en cuatro categorías generales, cada una compuesta por diferentes tipos de dificultades evidenciadas en la Fase I.

4.2.1 Tratamiento gráfico incompleto del diagrama de árbol

En esta categoría se agruparon las dificultades en que los profesores de matemáticas en formación logran inicial la construcción o interpretación del diagrama de árbol (registro gráfico), pero no consiguen articularlo con el cálculo formal de la probabilidad (registro simbólico). Se relacionan con las siguientes dificultades detectadas en la fase I: *comprensión parcial de la estructura condicional del experimento* (ej. Ejercicio 2.a), en que no se representan o se omiten todos los casos del experimento. *Tratamiento parcial del registro gráfico* (ej. Ejercicio 1.c y 2.a), utiliza una misma etiqueta para situaciones diferentes. *Visión reducida de la estructura compuesta del experimento*, al reducir situaciones condicionales a un solo paso (ej. Ejercicio 1.c).

Estas dificultades se agrupan porque todas reflejan un tratamiento gráfico incompleto: el diagrama de árbol no llega a expresar la estructura condicional del experimento. El profesor de matemáticas en formación reconoce el recurso gráfico, pero lo usa de manera estático y parcial, sin aprovecharlo como herramienta organizadora del espacio muestral

4.2.2 Ambigüedad semiótica y de notación en la condicionalidad

Esta categoría incluye las respuestas en que el profesor de matemáticas en formación tiende a un mal uso de los símbolos probabilísticos o una confusión en la interpretación de la notación condicional. Se tuvieron en cuenta: *Uso ambiguo de la notación de $P(C)$* (ej. 1.c), un profesor en formación empleo $P(c)$ para dos eventos distintos. *Confusión entre probabilidad conjunta y condicional* (ej. 2.c y 3.b), se interpreta el cálculo de una probabilidad condicional como si fuera una suma de

probabilidades, o se usan intersecciones para responder preguntas de condicionalidad.

Ruptura en la conversión entre registros, el profesor en formación a la hora de convertir el registro gráfico al simbólico no lo traslada correctamente, ya que opera los valores como independientes. Se evidencia una confusión semiótica pues la barra condicional, la interpreta como una operación de suma, cambiando totalmente el significado (ej. 2.c).

Esta categoría recoge las dificultades porque todas muestran una ruptura en el manejo semiótico del registro simbólico, los profesores de matemáticas en formación conocen símbolos, pero no coordinan sus significados. El problema es semiótico, ya que asignan significados equivocados a las notaciones formales, lo que genera ambigüedad.

4.2.3 Insuficiencia conceptual en condicionamiento y ley de probabilidad total

Esta categoría integra las dificultades relacionadas con la comprensión del objeto matemático en sí mismo, es decir, refleja varios vacíos. Algunas de las dificultades que se presenta en estas categorías son: *Confusión entre probabilidad condicional y conjunta*, (ej. 1.c; 2.c; 3.b), los profesores de matemáticas en formación mezclan la definición formal de condicional con la intersección, es decir, usa sumas o productos sin el denominador adecuado. El patrón común es no reconocer que la condicional requiere ajustar el espacio muestral. *Confusión en la articulación entre condicionalidad y totalización* (ej.2.b) el profesor en formación sabe que hay condicionalidad, pero al intentar totalizar (usando la fórmula de la probabilidad total) no articula ambas nociones y no formalizan, por ejemplo, suman probabilidades sin ponderarlas con los nodos iniciales. *Falacia de las tasas de base*, los profesores en formación privilegian la proporción de un subgrupo sin ponderar por el peso

poblacional total, refleja un sesgo sistemático (ej. 2.c; 3.c; 3.b). *No reconocimiento de la estructura condicional del experimento* (ej. 1.b; 1.d; 2.a y 3.a). Los profesores en formación no perciben que cada etapa del experimento modifica el espacio muestral. Esto lleva a simplificaciones: tratar el proceso como independiente o reducirlo a un único evento. *Falla en la formalización en probabilidad condicional* (ej. 3.b y 3.d). Aunque los profesores de matemáticas en formación identifican la condicionalidad de la situación, no logran expresar ni aplicar la fórmula de manera adecuada, quedando en algo más explicativo sin sustento matemático.

Se agrupan porque todas apuntan a una insuficiencia conceptual, los profesores en formación conocen el contexto y hasta construyen el diagrama de árbol, pero no logran aplicar de manera formal los cálculos en probabilidad condicional. En ocasiones se apoyan en heurísticas o intuiciones aditivas que generan sesgos sistemáticos. A diferencia de las demás categorías, en esta tercera no se encontraron asociaciones claras con dificultades en el uso de representación. Esto se debe a que las dificultades encontradas corresponden únicamente a vacíos conceptuales en la comprensión objeto matemático.

4.2.4 Dificultades en la articulación entre registros de representación

En esta categoría se seleccionaron las respuestas en que el problema no era por la comprensión del objeto matemático o símbolo, sino la incapacidad de coordinar entre registros diferentes (verbal, gráfico y simbólico). Se relacionan con las siguientes dificultades: *Permanencia en un único registro*, especialmente verbal (ej. 1.b, 1.d, 3.b y 3.c), el profesor en formación expresa la condicionalidad solo con palabras, pero no lo traduce a un cálculo formal o usa el diagrama de árbol. *Ruptura en la conversión entre*

registros (ej. 1.c, 2.a, 2.c y 3.b) Hay un intento de conversión de un registro a otro, pero no hay congruencia, en el caso del 2.a el árbol está parcialmente correcto, pero al traducir al cálculo formal no pondera correctamente las ramas. *Conversión inadecuada entre registros* (ej. 3.d), el profesor en formación realiza el diagrama de árbol, pero cuando pasa a resolver el cálculo formal no logra concretarlo. *Ausencia de acceso a los registros de representación* (3.a) El profesor de matemáticas en formación no utiliza ninguno de los registros para dar la respuesta, no intenta ni dar explicación en un único registro.

Se agrupan porque se identifica una incapacidad de los profesores de matemáticas en formación para articular de manera adecuada los diferentes registros de representación. Se observa que, aunque reconocen parcialmente el fenómeno de la probabilidad condicional y hasta emplean el diagrama de árbol, su desempeño queda limitado porque no logran coordinar ni convertir los registros de forma coherente.

Capítulo V: Conclusiones y recomendaciones

El presente capítulo expone las conclusiones derivadas del análisis realizado en las fases I y II de la presente investigación; y las recomendaciones para tener en cuenta para futuras investigaciones en relación con el aprendizaje de la probabilidad condicional.

Las conclusiones retoman hallazgos relevantes en torno a las dificultades de los profesores de matemáticas en formación frente a la probabilidad condicional y el uso de diagramas de árbol.

En primer lugar, se presentan las conclusiones asociadas al primer objetivo específico de la investigación, que agrupan los resultados obtenidos de la Fase I de análisis,

en la que se identificaron de manera puntual las dificultades expresadas en las respuestas de los profesores de matemáticas en formación

Posteriormente, se presentan las conclusiones asociadas al segundo objetivo específico de la investigación que agrupan los resultados obtenidos de la Fase II, en la que las dificultades identificadas en la fase I del análisis fueron clasificadas en categorías generales que permiten más adelante una caracterización más amplia de estas.

Se exponen las conclusiones asociadas al objetivo general de la investigación y así poder responder a la pregunta de investigación.

Finalmente, como recomendaciones se destacan aportes, implicaciones educativas y posibles proyecciones del estudio.

5.1 Conclusiones asociadas al primer objetivo específico de la investigación:

Identificar las dificultades de los profesores de matemáticas en formación asociadas al uso de los diagramas de árbol

En relación con el primer objetivo, se logró identificar las dificultades que emergieron de las respuestas de los profesores de matemáticas en formación. Estas dificultades están vinculadas a la comprensión del objeto matemático de la probabilidad condicional y al uso de registros de representación, en particular en la construcción y manejo de diagramas de árbol.

- a. Dificultades relacionadas con la comprensión del objeto matemático:** Se identificaron once dificultades las cuales son: *Dificultad en no reconocer y formalizar la condicionalidad, confusión entre probabilidad condicional y conjunta, visión reducida de la estructura compuesta del experimento, visión reducida del*

espacio muestral (de la estructura compuesta del experimento), comprensión parcial de la estructura condicional del experimento, confusión en la articulación entre condicionalidad y totalización, falacia de las tasas de base, no reconocimiento de la estructura condicional y compuesta del experimento, falla en la formalización en probabilidad condicional, comprensión parcial del principio de probabilidad total y por último, desconexión total con el objeto matemático de la probabilidad condicional y la probabilidad total.

Lo obtenido en la Fase I mostró que, aunque algunos profesores de matemáticas en formación lograron aproximaciones correctas, presentan vacíos conceptuales al abordar la probabilidad condicional, persistiendo una falla en reconocer la condicionalidad, diferenciar la probabilidad conjunta y condicional y articular la estructura de los experimentos aleatorios. Esto evidencia que la comprensión conceptual no está consolidada, lo cual se convierte en un obstáculo central para el razonamiento probabilístico.

- b. Dificultades relacionadas con el uso de representaciones:** Se identificaron ocho dificultades con relación al uso de representaciones. Estas son: *permanencia en el registro verbal, Uso ambiguo en la notación de $P(c)$ que refleja una confusión semiótica, tratamiento parcial del registro gráfico, conversión inadecuada entre registros, ruptura en la conversión entre registros, ausencia de acceso a los registros de representación, desarticulación entre registros verbal y simbólico y, por último, Ausencia de conversión de registros.*

Se identificó una marcada tendencia a permanecer en un único registro (verbal) y a rupturas en la conversión entre registros. Estos hallazgos sugieren que los profesores en formación no logran transitar de manera fluida entre distintas formas

de representación, lo que limita la comprensión del objeto matemático. Además, el uso ambiguo de notación y la ausencia de conexiones entre registros ponen de manifiesto una debilidad para en un futuro enseñar probabilidad condicional.

5.2 Conclusiones asociadas al segundo objetivo específico de la investigación:

Clasificar las dificultades de los profesores de matemáticas en formación

asociadas al uso de los diagramas de árbol

En la Fase II el análisis se orientó al segundo objetivo de la investigación, el cual es clasificar las dificultades de los profesores de matemáticas en formación, asociadas al uso de los diagramas de árbol. Dichas dificultades fueron previamente identificadas en la Fase I, posteriormente a partir de la tabla de doble entrada que cruzó las dificultades vinculadas a la comprensión del objeto matemático con aquellas relacionadas con los registros de representación. Se lograron reconocer patrones recurrentes que dieron lugar a la construcción de cuatro categorías generales de las dificultades:

5.2.1 Tratamiento gráfico incompleto del diagrama de árbol

Se evidenció que, aunque los profesores de matemáticas en formación reconocen el valor del diagrama de árbol como herramienta para organizar la información probabilística, pero se queda en un uso parcial y estático. La dificultad principal radica en que no logran articular la representación gráfica con el cálculo formal, lo que se traduce en una pérdida de la estructura condicional del experimento. En esta categoría se incluyeron las dificultades de: *comprensión parcial de la estructura condicional del experimento, tratamiento parcial del registro gráfico y visión reducida de la estructura compuesta del experimento.*

5.2.2 Ambigüedad semiótica y de notación en la condicionalidad

Se constató que un grupo de dificultades tienen su origen en el manejo inadecuado de los símbolos probabilísticos, lo que genera rupturas en la comprensión del objeto matemático. Los profesores de matemáticas en formación tienden a usar notaciones ambiguas, a confundir operaciones probabilísticas y a asignar significados erróneos a los símbolos formales usados en probabilidad condicional. Este comportamiento se refleja en las dificultades de: *uso ambiguo en la notación de $P(c)$, confusión entre probabilidad condicional y conjunta y ruptura en la conversión entre registros*.

5.2.3 Insuficiencia conceptual en condicionamiento y ley de la probabilidad total

El análisis mostró que gran parte de las dificultades responden a vacíos conceptuales en torno al objeto matemático. Los profesores de matemáticas en formación no logran ajustar el espacio muestral en situaciones condicionales, presentan dificultades para articular la condicionalidad con la probabilidad total y, en muchos casos, recurren a razonamiento aditivos o heurísticos que producen sesgos sistemáticos. Esta categoría agrupa las dificultades de: *confusión entre probabilidad condicional y conjunta, confusión en la articulación entre condicionalidad y totalización, falacia de las tasas de base, no reconocimiento de la estructura condicional del experimento y falla en la formalización en probabilidad condicional*.

5.2.4 Dificultades en la articulación entre registros de representación

Finalmente, se encontró que otra parte de las dificultades proviene en la capacidad de coordinar de manera coherente los distintos registros de representación (verbal, gráfico y simbólico). Aunque los profesores de matemáticas en formación pueden iniciar la respuesta en uno de los registros de representación, la conversión hacia otros registros suele ser

incompleta o incorrecta, lo que limita la resolución de los problemas. Esto coincide con lo señalado por Duval (1999), en cuanto a que la comprensión matemática requiere coordinar distintos registros; sin esta articulación, los significados permanecen fragmentados. Este hallazgo confirma la relevancia de considerar la teoría de registros de representación semiótica como marco para diseñar estrategias de enseñanza que integren de manera coherente las distintas formas de representación. En esta categoría se incluyen las dificultades de: *permanencia en un único registro (especialmente verbal), ruptura en la conversión entre registros, conversión inadecuada entre registros y ausencia de acceso a los registros de representación.*

5.3 Conclusiones asociadas al objetivo general de la investigación:

Caracterizar las dificultades de los profesores de matemáticas en formación asociadas al uso de los diagramas de árbol

El objetivo general de esta investigación es caracterizar las dificultades de los profesores de matemáticas en formación, en el aprendizaje de la probabilidad condicional, asociadas al uso de los diagramas de árbol. A partir del análisis desarrollado en dos fases complementarias, fue posible avanzar desde la identificación de dificultades puntuales de cada una de las respuestas de los profesores de matemáticas en formación, hacia la construcción de categorías más amplias que permiten dar visión integral del fenómeno estudiado.

En términos generales, los resultados muestran que las dificultades de los profesores en formación no son hechos aislados, sino que responden a patrones recurrentes a lo largo de la actividad en cada uno de los ejercicios que combinan vacíos conceptuales en torno al objeto matemático de la probabilidad condicional con limitaciones en el manejo de

representaciones semióticas. Esta interacción entre los dos ejes de análisis permite comprender que las dificultades en cálculos o justificaciones no dependen únicamente en la falta de dominio de fórmulas, sino también en la articulación de diferentes registros de representación (verbal, simbólico y gráfico) en la resolución de problemas.

A continuación, se presentan las características de cada una de las categorías establecidas sobre las dificultades de los profesores de matemáticas en formación, de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, en el aprendizaje de la probabilidad condicional, asociadas al uso de los diagramas de árbol:

5.3.1 Tratamiento gráfico incompleto del diagrama de árbol

Las siguientes características que se identifican en esta categoría de las dificultades de los profesores de matemáticas en formación, son:

- Construyen o interpretan parcialmente el diagrama de árbol.
- Presentan dificultades para articular el diagrama de árbol con el cálculo formal de la probabilidad condicional.
- Reconocen gráficamente la situación de los ejercicios planteados, pero al trasladarla al registro simbólico realizan operaciones inadecuadas.

5.3.2 Ambigüedad semiótica y de notación en la condicionalidad

En esta categoría se presentan las siguientes características de las dificultades de los profesores de matemáticas en formación:

- Ubican probabilidades condicionales en niveles inadecuados del árbol.
- Confunden expresiones como $P(A|B) \times P(A)$ con $P(A \cap B)$.

- Presentan vacíos en la articulación entre notación simbólica y representación gráfica.
- Elaboran diagramas de árbol incompletos.
- Muestran sesgos probabilísticos en sus respuestas.

5.3.3 Insuficiencia conceptual en condicionamiento y ley de probabilidad total

Las características que se identifican en esta categoría de las dificultades de los profesores en formación son:

- Construyen correctamente el diagrama, pero no lo utilizan de manera efectiva en el cálculo o justificación.
- No diferencian entre probabilidad simple y condicional.
- No aplican adecuadamente las fórmulas, como la ley de probabilidad total.

5.3.4 Dificultades en la articulación entre registros de representación

En esta categoría las características identificadas en las dificultades de los profesores de matemáticas en formación son:

- Reconocen parcialmente los cambios en el espacio muestral, o no los reconocen.
- Logran formalizar el cálculo probabilísticamente.
- Las respuestas permanecen en un único registro (generalmente verbal) sin articularlo con el simbólico y el gráfico.

5.4 Discusiones y/o recomendaciones

Los hallazgos de esta investigación evidencian que el aprendizaje de la probabilidad condicional, asociada al uso del diagrama de árbol, requiere un abordaje más profundo en la

formación de profesores de matemáticas. El desarrollo de esta investigación es relevante porque visibiliza los errores y sesgos de los profesores de matemáticas en formación que, de no ser atendidos, podrían replicarse en futuras prácticas docentes.

Desde una perspectiva educativa, se recomienda fortalecer los espacios de formación de didáctica en probabilidad, que promuevan no solo el dominio técnico, sino también la capacidad de interpretar y coordinar diversos registros de representación en situaciones incertidumbre.

En este sentido, es pertinente que los programas de formación incorporen propuestas de enseñanza en las que el diagrama de árbol se trabaje no solo como una representación ilustrativa, sino como una herramienta operativa para organizar y formalizar la información. Esto permitirá desarrollar un pensamiento probabilístico más sólido, menos dependiente de fórmulas mecánicas y más orientado hacia la comprensión de los fenómenos aleatorios.

En el caso particular de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle, se observa una limitación importante en los procesos de formación inicial, ya que solo cuentan con un curso de estadística en el plan de estudios, el cual resulta insuficiente para abordar de manera adecuada la amplitud y complejidad de los temas de probabilidad. El estudio de la probabilidad suele ubicarse al final del curso y la probabilidad condicional se trabaja de forma breve y superficial lo que restringe la posibilidad de trabajar diferentes representaciones, estrategias y contextos de aplicación. Esta situación refleja una carencia curricular que dificulta la consolidación del pensamiento probabilístico en los profesores en formación y plantea la necesidad de repensar la distribución de los contenidos de probabilidad en el programa de la licenciatura.

Para finalizar, este estudio muestra que es necesario fortalecer la formación en probabilidad dentro de los programas de licenciatura. No se trata solo de enseñar procedimientos, sino de ofrecer a los profesores en formación la posibilidad de construir un pensamiento probabilístico que les permita interpretar, representar y explicar situaciones de incertidumbre. Atender estas limitaciones curriculares y didácticas es clave para que la enseñanza de la probabilidad en las escuelas no se reduzca en fórmulas y así evitar que las dificultades detectadas en los profesores en formación se reproduzcan en la práctica profesional.

REFERENCIAS

- Batanero, C., Contreras, J., Díaz, C., & Cañadas, G. (2013). Definición de la probabilidad y probabilidad condicional: Un estudio con futuros profesores. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 8(1), 75–91. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p75>
- Batanero C., Contreras M., & Carmen D. (2012). Sesgos en el Razonamiento Sobre Probabilidad Condicional e Implicaciones Para la Enseñanza. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 12(2), 1–13. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=607972985002>
- Contreras, J. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Universidad de Granada.
- Díaz, C., Contreras, J., Batanero, C., & Roa, R. (2012). Evaluación de Sesgos en el Razonamiento sobre Probabilidad Condicional en Futuros Profesores de Educación Secundaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 26(44), 1207–1225.
- Díaz, R., López, C., Montes, A., & Rodríguez, D. (2016). *Probabilidad Condicional* [Universidad de los Andes]. <http://funes.uniandes.edu.co/23845/>
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (2nd ed.). Programa Editorial Universidad del Valle. <https://programaeditorial.univalle.edu.co/gpd-semiosis-y-pensamiento-humano-9789587655278-63324cdb0f6b3.html>

- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de La RSME*, 9(1), 143–168.
- Gómez, A., & Correa, M. (2012). *Incidencia de algunos aspectos semióticos en el aprendizaje de la probabilidad condicional, por parte de estudiantes de la educación media*. Universidad del Valle.
- León, J., Sosa, L., & Carillo, J. (2020). Conocimiento del profesor sobre el aprendizaje en probabilidad condicional: un estudio de caso. *PNA*, 15(1), 1–25.
- Mendenhall, W., Beaver, R., & Beaver, B. (2006). *Introducción a la probabilidad y estadística* (13th ed.). <http://latinoamerica.cengage.com>
- Naya, S., Ríos, M., & Zapata, L. (2012). La Estadística en la Enseñanza Preuniversitaria. *La Gaceta de La RSME*, 15(2), 355–368.
- Roldán, A., Batanero, C., & Beltrán, P. (2018). El diagrama de árbol, un recurso intuitivo en Probabilidad y Combinatoria. *Epsilon - Revista de Educación Matemática*, 100, 49–63.
- Sampieri, R., Fernández, C., & Baptista, M. del P. (2010). *Metodología de la investigación* (J. Mares, Ed.; 5th ed.).
- Tauber, L., Alvarado, H., Zapata, L., Pinto, J., & Huerta, A. (2019). Experiencias de enseñanza sobre probabilidad y estadística. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 32(1), 316–326.