

FUNCIONALES NO COMPACTAS Y PUNTOS CRÍTICOS

G. García, J.R. Quintero, C. Rodríguez

Departamento de Matemáticas

Universidad del Valle

H.H. Gómez

Departamento de Matemáticas

Universidad de los Andes

Resumen

En este artículo se explica una idea que puede conducir a la extensión a funcionales no compactos del resultado clásico de Lyusternik-Šnirelman sobre el número mínimo de puntos críticos de funcionales pares en dimensión finita. La extensión es importante porque algunas funcionales en problemas interesantes de la geometría o de la física matemática carecen de compacidad.

Palabras claves:

Condición Palais-Smale, ecuaciones semilineales elípticas, exponente crítico de Sóbolev, métodos variacionales, teoría de Lyusternik-Šnirelman.

INTRODUCCION

Consideremos la función cuadrática $f : x \rightarrow x^T A x$, asociada a la matriz $(n+1) \times (n+1)$ simétrica real A .

Los valores propios $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ de A se pueden caracterizar variacionalmente así :

$$\lambda_i = \inf_{S_i \in \Delta_i} \max_{x \in S_i} f(x) ,$$

donde Δ_i es la familia de esferas i -dimensionales en S^n , el conjunto de los $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ con $x^T x = 1$.

Los valores λ_i son valores críticos de f restringida a S^n , por ejemplo, $\lambda_0 = \min_{x \in S^n} f(x)$ y $\lambda_n = \max_{x \in S^n} f(x)$.

El teorema de Lyusternik-Šnir'elman [D-F-N] da una hermosa generalización de este resultado:

Toda función $f : R^{n+1} \rightarrow R$ par de clase C^1 restringida al borde de cualquier dominio D convexo y simétrico, tiene al menos $(n+1)$ puntos críticos.

La función f es *par* cuando $f(-x) = f(x)$, y D es *simétrico* cuando $x \in D$ implica $-x \in D$.

Además el resultado caracteriza variacionalmente los valores críticos así:

$$c_i = \inf_{A \in \Gamma_i} \max_{x \in A} f(x) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

En este caso Γ_i es una familia especial de subconjuntos compactos simétricos de Σ el borde de D .

En este artículo estudiaremos la extensión de este resultado a dimensión infinita. El problema que hemos escogido es de interés en ecuaciones en derivadas parciales, en geometría diferencial y en física matemática [B-N].

El trabajo de Rabinowitz [Ra] muestra que el teorema de Lyusternik-Šnir'elman puede generalizarse a dimensión infinita cuando las funcionales son compactas en el sentido Palais-Smale (ver la definición más adelante).

El problema que nos interesa involucra funcionales no compactas. Es necesario imaginar, pues, otras técnicas. Este artículo explora una combinación del trabajo del Rabinowitz y del método de Yamabe [Ya]. Las dificultades que hemos encontrado no son triviales, pero las que hemos superado nos indican que también en el caso estudiado un teorema tipo Lyusternik-Šnir'elman debe tenerse.

Antes de entrar a la formulación precisa del problema es importante señalar que, con la identidad de Pohōzaev [Po], puede darse un ejemplo de que en dimensión infinita no todos los puntos críticos predichos por el teorema de Lyusternik-Šnir'elman existen; esto indica que las dificultades del problema planteado son reales y muy interesantes.

PRELIMINARES

Sea $\Omega \subseteq R^n$, $n \geq 3$, un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$ suave. Sea $p \geq 1$, $L_p(\Omega)$ denota el espacio de Banach Real de las funciones p -integrables sobre Ω con la norma

$$\|f\|_{p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$H_0^1(\Omega)$ denota el completado de $C_0^\infty(\Omega)$ con respecto a la norma

$$\|u\|_0 = \|\nabla u\|_2,$$

inducida por el producto escalar

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Sea $I_{\Omega, \lambda, q} : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ la funcional definida por:

$$I_{\Omega, \lambda, q}(u) = \frac{1}{2}(|\nabla u|_2^2 - \lambda|u|_2^2) - \frac{1}{q}|u|_q^q.$$

Cuando $2 \leq q \leq 2^*$, el teorema de encaje de Sóbolev (ver [Br]) garantiza que la funcional $I_{\Omega, \lambda, q}$ está bien definida. El número $2^* = \frac{2n}{n-2}$ es llamado el exponente crítico de Sóbolev. Por otro lado, se tiene

Teorema 1 Si $2 \leq q \leq 2^*$, entonces $I_{\Omega, \lambda, q} \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ y

$$\begin{aligned} \langle I'_{\Omega, \lambda, q}(u), \phi \rangle &= \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \phi - \lambda u \phi - |u|^{q-2} u \cdot \phi) dx \\ &= \int_{\Omega} (-\Delta u - \lambda u - |u|^{q-2} u) \cdot \phi dx, \quad \phi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Para la demostración ver [Ra].

De este resultado es claro que u_0 es un punto crítico de $I_{\Omega, \lambda, q}$ si y sólo si u_0 es una solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{q-2} u & \text{sobre } \Omega \\ u \equiv 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)_{\Omega, \lambda, q}$$

Cuando $\Omega = \mathbb{R}^n$, la condición de frontera se reemplaza por: $u(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$.

2.2 Observacion.

Sea u_0 un punto crítico de $I_{\Omega, \lambda, q}$, entonces

$$\begin{aligned} I_{\Omega, \lambda, q}(u_0) &= \frac{1}{2}(|\nabla u_0|_2^2 - \lambda|u_0|_2^2) - \frac{1}{q}|u_0|_q^q \\ &= \frac{1}{2}(|\nabla u_0|_2^2 - \lambda|u_0|_2^2 - |u_0|_q^q) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)|u_0|_q^q \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)|u_0|_q^q. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en todo punto crítico $I_{\Omega, \lambda, q}(u_0) \geq 0$. Además si $I_{\Omega, \lambda, q}(u_0) > 0$, u_0 es un punto crítico no trivial.

La siguiente condición de compacidad de Palais-Smale (PS) es útil en el estudio de puntos críticos en dimensión infinita.

2.3 Definición

Sea E un espacio de Banach Real, una funcional $\varphi \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisface la condición de Palais-Smale (PS),

si cualquier sucesión $\{u_m\} \subseteq E$ para la cual

$$\{\varphi(u_m)\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ es acotada en } \mathbb{R} \text{ y } \varphi'(u_m) \Rightarrow 0 \text{ (fuertemente) en } (E)^*$$

posee una subsucesión que converge fuertemente en E .

Teorema 2 Si $2 \leq q < 2^*$, entonces $I_{\Omega, \lambda, q}$ satisface (PS). Si $q = 2^*$, no satisface (PS).

Una prueba puede encontrarse en [Ra] y [G-G-Q-R1].

La compacidad de la funcional $I_{\Omega, \lambda, q}$, cuando $2 \leq q < 2^*$, es consecuencia del teorema de encaje de Sóbolev que asegura la compacidad de la inclusión $i: H_0^1(\Omega) \rightarrow L_q(\Omega)$. En el caso $q = 2^*$ la inclusión es solo continua.

Consideremos el número

$$S = \inf \left\{ \frac{|\nabla v|_2^2}{|v|_{2^*}^2} : v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0 \right\},$$

la mejor constante de Sóbolev para la inclusión de $H_0^1(\Omega)$ en $L_{2^*}(\Omega)$. Entonces,

- S existe, es independiente de Ω y depende sólo de n .
- S no se alcanza si Ω es un dominio acotado.
- Para cada $r > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$S = \frac{|\nabla U_{r, x_0}|_2^2}{|U_{r, x_0}|_{2^*}^2},$$

donde,

$$U_{r, x_0}(x) = \frac{(n(n-2)r^2)^{(n-2)/4}}{(r^2 + \|x - x_0\|^2)^{(n-2)/2}} \quad (0.1)$$

Más aún, tales funciones son soluciones del problema $(1)_{\mathbb{R}^n, 0, 2^*}$ y, por lo tanto,

$$I_{\mathbb{R}^n, 0, 2^*}(U_{r, x_0}) = \frac{1}{n} S^{n/2}.$$

A pesar del resultado negativo del teorema 2 es posible obtener compacidad local en el sentido (PS). En efecto,

Teorema 3 $I_{\Omega,\lambda,2^*}$ *satisface la condición (PS) en el siguiente sentido. Para cada sucesión $\{u_m\} \subseteq H_0^1(\Omega)$ tal que $I_{\Omega,\lambda,2^*} \rightarrow c$, donde $c < (1/n)S^{n/2}$, y $I'_{\Omega,\lambda,2^*}(u_m) \Rightarrow 0$ en $(H_0^1)^*$ existe una subsucesión que converge fuertemente en $H_0^1(\Omega)$.*

Esto fue probado en [B-N].

LA IDEA PRINCIPAL

Se conjetura que $I_{\Omega,\lambda,2^*}$ tiene infinitos puntos críticos. De modo que el resultado de Lyusternik-Šnirelman es válido en este caso no compacto. Dicho de otra manera: la ecuación semilineal elíptica en el exponente crítico $(1)_{\Omega,\lambda,q}$ tendría infinitas soluciones débiles y, por regularidad, infinitas soluciones clásicas. Se resolvería así un interesante y difícil problema abierto en ecuaciones en derivadas parciales.

Algunos Resultados Parciales

A continuación describimos la caracterización variacional de los valores críticos de la funcional $I_{\Omega,\lambda,q}$ según [Ra].

Sean $\phi_1, \phi_2, \dots$ y $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ las funciones propias y valores propios de $-\Delta$, respectivamente, y $k_0 = \min\{s : \lambda < \lambda_s\}$.

Supongamos que $V = \langle \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{k_0-1} \rangle$ para $m \geq k_0$, $E_m = \langle e_1, e_2, \dots, e_m \rangle$ donde

$$e_i = \begin{cases} \phi_i, & 1 \leq i \leq k_0 - 1 \\ \varphi_i, & k_0 \leq i \leq m \end{cases}$$

Con $\varphi_i(x) = U_{r_i, x_i}(x) \cdot \eta_{i, x_i}(x)$, y η_{i, x_i} es una función de $\|x - x_i\|$ continua a trozos no creciente tal que: $\eta_{i, x_i}(x) = 1$, $x \in B_{\rho_i}(x_i)$; $\eta_{i, x_i}(x) = 0$, $x \in \Omega - B_{2\rho_i}(x_i)$; $0 \leq \eta_{i, x_i} \leq 1$ en Ω ; $|\nabla \eta_{i, x_i}| < \frac{1}{\rho_i}$; y $B_{2\rho_i} \cap B_{2\rho_j} = \emptyset$ cuando $i \neq j$. Adicionalmente $r < \rho_0$, $\rho_i = \frac{\rho_0}{2^i}$, y $r_i = \frac{r}{2^i}$.

Sea

$$G_m = \{H \in C(D_m, E) : h \text{ es impar, } H \equiv id \text{ sobre } \partial B_{R_m} \cap E\},$$

donde $R_m = R(E_m)$ y $D_m = B_{R_m} \cap E_m$. Consideremos el conjunto de valores de minimax

$$C_{j,q} = \inf_{H \in \Gamma_j} \max_{u \in E} I(u), \quad j \geq k_0,$$

donde $\Gamma_j = \{H(\overline{D_m \setminus Y}) : H \in G_m, m \geq j, Y \in \Sigma, \gamma(Y) \leq m - j\}$, γ es el género de Krasnoselski y Σ es la familia de subconjuntos cerrados simétricos de $E \setminus \{0\}$.

Cuando $q < 2^*$ en [Ra],[G-G-Q-R1] se demuestra que los números $C_{j,q}$, $j \geq k_0$, son valores críticos de la funcional $I_{\Omega,\lambda,q}$. Más aún,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} C_{j,q} = +\infty$$

El anterior hecho implica que el problema $(1)_{\Omega,\lambda,q}$, posee infinitas soluciones no triviales en $H_0^1(\Omega)$. Para $q = 2^*$ y $j > k_0$ se prueba que los $C_{j,2^*}$ son valores críticos de $I_{\Omega,\lambda,2^*}$. Sin embargo, no se sabe si,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} C_{j,2^*} = +\infty.$$

El siguiente estimativo es importante para probar que la solución asociada con $C_{j,2^*}$ es no trivial.

Teorema 4 Si $n \geq 5$, $j \geq k_0$. Entonces

$$C_{j,2^*} < \frac{(j - k_0 + 1)S^{n/2}}{n}.$$

Primero probaremos el siguiente

Lema 1 Si $n \geq 5$, existe $\rho_0 > 0$ tal que para $r < \rho_0$

$$\sup_{v \in w_l(r)} I_{\Omega,\lambda,2^*}(v) < \frac{l}{n} S^{n/2}$$

donde, $w_l(r) = \{v \in H_0^1(\Omega) : v = h + \sum_{i=1}^l t_i \psi_i(x), h \in V, t_i \in \mathbb{R}\}$, $\psi_i = e_{i+k_0+1} = \varphi_{i+k_0-1}$.

Demostración del Lema.

Sea $E_\lambda(v) = |\nabla v|_2^2 - \lambda|v|_2^2$. Un cálculo simple muestra que:

$$\max_{t \in \mathbb{R}} I_{\Omega,\lambda,2^*}(tv) = \frac{1}{n} \left[\frac{E(v)}{|v|_2^{2^*}} \right]^{n/2} \text{ para cada } v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0.$$

Por lo tanto, solo es necesario estimar

$$\sup\{E(v) : v \in w_l(r), |v|_{2^*} = 1\}.$$

Para $v = h + \sum_{i=1}^l t_i \psi_i$, $|v|_{2^*} = 1$, $h \in V$, se tiene que

$$E(v) = E(h) + \sum_{i=1}^l t_i E(\psi_i) + (-2) \sum_{i=1}^l t_i \left[\int_{\Omega} (\Delta h + \lambda h) \psi_i \right].$$

Además como los t_i son acotados independientemente de r , tenemos que

$$\begin{aligned} E(v) &\leq E(h) + \sum_{i=1}^l t_i E(\psi_i) + C_2 |h|_2 r^{\frac{n-2}{2}} \rho_0^2 \\ E(v) &\leq (\bar{\lambda} - \lambda) |h|_2^2 + C_2 |h|_2 r^{\frac{n-2}{2}} \rho_0^2 + A \sum_{i=1}^l t_i^2 \beta_i^2 \end{aligned}$$

donde

$$A = \max_i \frac{E[\psi_i]}{|\psi_i|_{2^*}^2}, \quad \beta_i = |\psi_i|_{2^*} \quad \text{y} \quad \bar{\lambda} = \max\{\lambda_s : \lambda_s < \lambda\}.$$

Por otra parte,

$$\sum_{i=1}^l t_i^{2^*} |\psi_i|_{2^*}^2 = \sum_{i=1}^l t_i^{2^*} \beta_i^2 \leq 1 + f(r), \quad f(r) = C_\gamma \frac{n(n-2)}{n+2}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \max \left\{ \sum_{i=1}^l t_i^2 \beta_i^2 : \sum_{i=1}^l t_i^{2^*} \beta_i^2 \leq 1 + f(r) \right\} &= l \frac{(1 + f(r))^{2/2^*}}{l^{2/2^*}} \\ &= l^{2/n} (1 + f(r))^{2/2^*} \\ &\leq l^{2/n} (1 + f(r)). \end{aligned}$$

Luego,

$$E(v) \leq (\bar{\lambda} - \lambda) |h|_2^2 + C_2 |h|_2 r^{\frac{n-2}{2}} \rho_0^2 + l^{2/n} (1 + f(r)) A.$$

Como

$$A = \max_i \frac{E[\psi_i]}{|\psi_i|_{2^*}^2} = \frac{E[\psi_j]}{|\psi_j|_{2^*}^2} \quad \text{para algún } 1 \leq j \leq l.$$

Entonces de la estimativa de [Es,(4.7), p.639],

$$\frac{E[\psi_j]}{|\psi_j|_{2^*}^2} \leq S + C r^{n-2} \rho_0^{2-n} - \lambda C r_j^2.$$

Se deduce que:

$$\begin{aligned} A(1 + f(r)) &\leq (S + C r^{n-2} \rho_0^{n-2} - \lambda C r_j^2) \left(1 + C r^{\frac{n(n-2)}{n+2}} \right) \\ &\leq S + C r^{\frac{n(n-2)}{n+2}} + C r^{n-2} \rho_0^{n-2} - \frac{\lambda}{4} C r^2. \end{aligned}$$

Sea $B(h, r, C) = (\bar{\lambda} - \lambda) |h|_2^2 + C |h|_2 r^{\frac{n-2}{2}} \rho_0^2$, entonces

$$B(h, r, C) \leq 0 \quad \text{ó} \quad B(h, r, C) \leq \frac{C^2 r^{n-2} \rho_0^4}{(\bar{\lambda} - \lambda)}$$

Reemplazando, se tiene que

$$E(v) \leq \frac{C_2^2 r^{n-2} \rho_0^4}{(\lambda - \bar{\lambda})} + l^{2/n} \left(S + C r^{\frac{n(n-2)}{n+2}} + C r^{n-2} \rho_0^{n-2} - \frac{\lambda}{4j} C r^2 \right).$$

$$\text{Definamos } h(\rho_0) = \frac{C_2^2 r^{n-2} \rho_0^4}{(\lambda - \bar{\lambda})} + C r^{\frac{n(n-2)}{n+2}} + C r^{n-2} \rho_0^{n-2} - \frac{\lambda}{4j} C r^2.$$

Si tomamos $r = \rho_0^{7/2}$. Entonces $h(\rho_0) < 0$ cuando $\rho_0 \rightarrow 0$. De donde,

$$\sup\{E(v) : v \in w_l(r), |v|_{2^*} = 1\} < l^{2/n} S + h(\rho_0)$$

y

$$\max\{I_{\Omega, \lambda, 2^*}(v) : v \in w_l(r)\} < \frac{1}{n} (l^{2/n} S)^{n/2} = \frac{l}{n} S^{n/2}$$

Demostración del Teorema

En la definición de $C_{j, 2^*}$ tomamos $H \equiv id_{D_m} \in G_m$, $m = j$, $Y = \phi$, y $E_m = w_l(r)$. Como $j = m = k_0 - 1 + l$, o sea $l = j - k_0 + 1$ tenemos que,

$$\max_{E_m} I_{\Omega, \lambda, 2^*}(v) < \frac{j - k_0 + 1}{n} S^{n/2} \text{ y } C_{j, 2^*} < \frac{j - k_0 + 1}{n} S^{n/2}$$

Por otro lado,

Lema 2 Sea $B'_R = B_R \cap E_{k_0 m}$, donde $E_{k_0 m}$ es el subespacio generado por $e_{k_0}, \dots, e_m$. Si $A \subset B'_R$ y $\gamma(A) \geq l$, entonces

$$\max_{u \in A} E_\lambda(u) \geq R^2 l^{2/n} T.$$

donde $T = \min \left\{ \frac{E(e_k)}{|e_k|_{2^*}^2} : k_0 \leq k \leq m \right\}$.

Demostración

Obsérvese primero que

$$\begin{aligned} E_\lambda(u) &= E_\lambda \left(\sum_{k_0}^m u_k e_k \right) \\ &= \sum_{k_0}^m E(e_k) u_k^2 \\ &= \sum_{k_0}^m \frac{E(e_k)}{|e_k|_{2^*}^2} u_k^2 |e_k|_{2^*}^2 \\ &\geq T \sum_{k=k_0}^m u_k^2 |e_k|_{2^*}^2. \end{aligned}$$

Ahora aplicando los multiplicadores de Lagrange calculamos los valores críticos de la función $f(u_1, \dots, u_k) = \sum_{k=k_0}^m u_k^2 |e_k|_{2^*}^2$ sujeta a la restricción $\sum_{k=k_0}^m u_k^2 |e_k|_{2^*}^2 = R^{2^*}$. Estos, ordenados de menor a mayor son:

$$R^2 < 2^{2/n} R^2 < \dots < (m - k_0)^{2/n} R^2 < (m - k_0 + 1)^{2/n} R^2.$$

Por el teorema clásico de Lyusternik-Šnir'elman sabemos que f tiene al menos $(m - k_0 + 1)$ puntos críticos, cuyos valores críticos están caracterizados así:

$$C_1 \leq C_2 \leq \dots \leq C_{m-k_0+1},$$

donde,

$$C_j = \inf_{\gamma(A) \geq j} \max_{u \in A} f(u).$$

Por lo tanto, si $\gamma(A) \geq l$

$$R^2 l^{2/n} \leq \max_{u \in A} f(u),$$

de lo que se deduce el lema.

Lema 3 *Bajo la hipótesis del lema 2,*

$$\max\{I(tu) : t \in \mathbb{R}, u \in A\} \geq \frac{l}{n} T^{n/2}$$

Demostración.

Del lema anterior se tiene que

$$\max\{I(tu) : t \in \mathbb{R}, u \in A\} = \frac{1}{n} \left[\max_{u \in A} \left(\frac{E(u)}{|u|_{2^*}^2} \right) \right]^{n/2} \geq \frac{l}{n} T^{n/2}.$$

Además, si $B \in \Gamma_j$, entonces $B = H(\overline{D_m} \setminus Y)$ para algún $m \geq k_0$, $\gamma(Y) \leq m - j$ y H en G_m . Como $H|_{\partial D_m} \equiv id$, tenemos que $B \cap B'_R \supset \overline{\partial B'_R} Y$; por propiedades del género de Krasnoselski, $\gamma(B \cap \partial B'_R) \geq m - k_0 + 1 - (m - j) \geq j - k_0 + 1$. Entonces por los lemas anteriores,

$$\max\{E(u) : u \in B \cap \partial B'_R\} \geq R^2 (j - k_0 + 1)^{2/n} T.$$

Problemas Abiertos y Conclusiones

En el camino esbozado para obtener infinitos valores críticos de $I_{\Omega, \lambda, 2^*}$ o equivalentemente, infinitas soluciones del problema $(1)_{\Omega, \lambda, 2^*}$, surgen algunos problemas naturales.

Problema No. 1

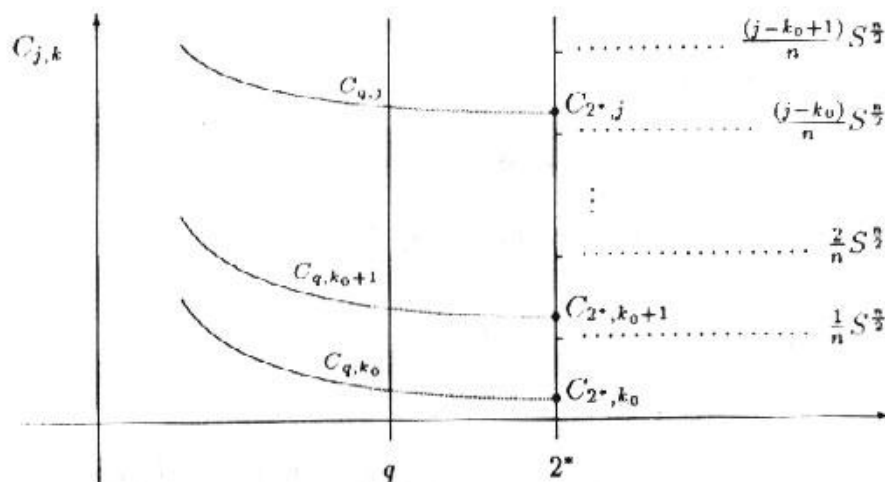
Si $\max\{E(u) : u \in B \cap \partial B'_R\} \geq R^2(j - k_0 + 1)^{2/n}T$. Entonces

$$\max_{u \in B} I_{\Omega, \lambda, 2^*}(u) \geq \frac{(j - k_0 + 1)}{n} T^{n/2}.$$

Nótese que una respuesta afirmativa del problema, junto con la definición de T y la estimativa del teorema 4, implicarían que el estimativo $(\frac{1}{n}) T^{n/2}$ controla el término negativo. Por lo tanto, obtenemos la desigualdad

$$C_{j, 2^*} > \frac{(j - k_0)}{n} S^{n/2}.$$

De ser así el comportamiento de los valores críticos de las funcionales $I_{\Omega, \lambda, q}$ con $2 < q \leq 2^*$ se puede observar en la gráfica siguiente:



De hecho, cuando $j = k_0$ se prueba que

$$0 < C_{k_0, 2^*} < \frac{1}{n} S^{n/2}.$$

Veáse [B-N] o [G-G-Q-R2].

Problema No. 2

Los puntos críticos v_{x_i, r_i} de la funcional $I_{R^n, 0, 2^*}$ de la proposición 2.1 en [St], pueden elegirse en la familia de las funciones positivas

En caso afirmativo, el resultado de Struwe, se simplifica de la siguiente forma:

Sea $n \geq 3$, $c \in \mathbb{R}$, y $\{v_m\} \subseteq H_0^1$ es una sucesión tal que,

$$I_{\Omega, \lambda, 2^*}(v_m) \leq c \text{ y } I'_{\Omega, \lambda, 2^*}(v_m) \Rightarrow 0 \text{ en } (H_0^1)^*. \quad (0.2)$$

Entonces existen una solución v_0 de $(1)_{\Omega, \lambda, 2^*}$, $k \geq 0$ y una subsucesión $\{v_{m'}\}$ tales que

$$v_{m'} \rightarrow v_0 \text{ débilmente en } H_0^1(\Omega)$$

$$I_{\Omega, \lambda, 2^*}(v_{m'}) \rightarrow I_{\Omega, \lambda, 2^*}(v_0) + \frac{k}{n} S^{n/2}.$$

Si el dominio Ω es una bola y $0 < \lambda < \lambda_1$, donde λ_1 es el primer valor propio de $-\Delta$ (Laplaciano). El resultado es cierto (Ver [CSS]).

Además, si (v_m) satisface (3.2) y $I_{\Omega, \lambda, 2^*}(v_m) \rightarrow c$ con $c \notin \{\frac{k}{n} S^{n/2}, k \in \mathbb{N}\}$ entonces, $I_{\Omega, \lambda, 2^*}(v_0) > 0$. Por 2.2, obtenemos un punto crítico no trivial.

Por otro lado, de la solución afirmativa de los problemas No.1, No.2, se deduciría

Si $j \geq k_0$ y $n \geq 5$, existen soluciones no triviales $U_{j, 2^*}$ de $(1)_{\Omega, \lambda, 2^*}$ y k_j entero no negativo tales que

$$C_{j, 2^*} = I_{\Omega, \lambda, 2^*}(U_{j, 2^*}) + \frac{k_j}{n} S^{n/2}.$$

Más aún, en [G-G-Q-R2] usando la técnica del método de Yamabe se demuestra que:

Si $j = k_0$ y $n \geq 5$, $U_{k_0, q} \Rightarrow U_{k_0, 2^*}$ cuando $q \rightarrow 2^*$ y $k_{k_0} = 0$. Además,

$$C_{k_0, 2^*} = I_{\Omega, \lambda, 2^*}(U_{k_0, 2^*}) = \lim_{q \rightarrow 2^*} I_{\Omega, \lambda, q}(U_{j, q}).$$

Nuestro último problema, basado en lo anterior es:

Problema No. 3

Si $j \geq k_0$ y $n \geq 5$ entonces $U_{j, q} \Rightarrow U_{j, 2^*}$ cuando $q \rightarrow 2^*$ y $k_j = 0$.

Este resultado implicaría que:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} I_{\Omega, \lambda, 2^*}(U_{j, 2^*}) = +\infty.$$

Y, por lo tanto, que el problema $(1)_{\Omega, \lambda, 2^*}$ posee infinitas soluciones.

Referencias

- [Br] Brézis H., *Análisis Funcional. Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, 1983.
- [B-N] Brézis H. and Nirenberg L., *Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XXXVI, pp. 437-447 (1983).

- [C-S-S] Cerami G., Solimini S., and Struwe M.; *Some Existence Results for Super-linear Elliptic Boundary Value Problems Involving Critical Sobolev Exponent*, (Preprint).
- [Es] Escobar J., *Positive Solutions for Some Semilinear Elliptic Equations with Critical Sobolev Exponents*, Communications on Pure And Applied Mathematics, Vol. XL, 623-657 (1987).
- [D-F-N] Dubrovin B., Fomenko A., y Nóvikov S, *Geometría Moderna*, Editorial Mir, Moscú, 1987.
- [G-G-Q-R1] García G., Gómez H., Quintero J. R. y Rodríguez C., *Infinitas Soluciones a un Problema Semilineal Elíptico antes del Exponente Crítico de Sóbolev*, (enviado para su publicación en *Lecturas Matemáticas*, Revista de La Sociedad Colombiana de Matemáticas).
- [G-G-Q-R2] García G., Gómez H., Quintero J. R. y Rodríguez C., *Una solución vía el Método de Yamabe de un Problema Semilineal Elíptico en Exponente Crítico de Sóbolev*, (sometido para publicación). Rev. Colombiana de Matemáticas.
- [Po] Pohožaev S.J., *Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$* , Soviet Math. Doklady, t.6, 1965, p. 1408-1411.
- [Ra] Rabinowitz, P., *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, CBMS, AMS, 1984
- [St] Struwe M., *A Global Compactness Result for Elliptic Boundary Value Problems Involving Limiting Nonlinearities*, Math 2, 187, 1984, p. 511-557.
- [Ya] Yamabe H., *On a Deformation of Riemannian structures on Compact Manifolds*, Osaka Math. J. 12 (1960), pp. 21-37