



Del Teorema De Bayes Como Herramienta A La Probabilidad Inversa Como Noción:
Un Estudio Histórico-Epistemológico

Eylin Marilyn Landázuri Segura

201157722

Universidad Del Valle

Norte Del Cauca

Licenciatura En Educación Básica Con Énfasis En Matemáticas

Santander De Quilichao

2016



Del Teorema De Bayes Como Herramienta A La Probabilidad Inversa Como Noción:
Un Estudio Histórico-Epistemológico

Eylin Marilyn Landázuri Segura

Trabajo de grado como requisito para optar por el título de Licenciada en Educación Básica
con Énfasis en Matemáticas

Director:

Mg. Diego Díaz Enríquez

Universidad Del Valle

Norte Del Cauca

Licenciatura En Educación Básica Con Énfasis En Matemáticas

Santander De Quilichao

2016

*A quienes amo
Dios,
Mis padres:
Yenny Segura y Marcos Landázuri
Mi amiga y confidente:
Daian Fuenmayor
Y Mi abuela:
Nohemy Olmedo*

Agradecimientos

A mi director, Diego Díaz por su apoyo y ayuda incondicional durante todo este proceso y mi formación profesional. A mis evaluadores: el profesor Rubén Darío Corrales por sus sugerencias para la delimitación del problema, la profesora Mónica Andrea Aponte por estar siempre al pendiente de mi bienestar profesional y por sus aportes durante la realización de este trabajo; y al profesor Daniel Arbeláez por sus aportes a la delimitación de los capítulos, por sus conocimientos compartidos y por ser el mejor en el área, Descansa en Paz.

A mis compañeros y profesores del programa, por permitir que cada día aprendiera más de ellos y por su apoyo durante todo este camino de formación profesional. A los directivos por siempre darme una voz y mensaje de aliento y por confiar siempre en mí.

A mis amigos y familiares, en especial a mi primo Yonny Andrés Ángulo y a la Familia Fuenmayor Nariño por sus aportes a mi trabajo de investigación, sus constantes acompañamientos y mensajes de aliento.

Y Gracias, especialmente a DIOS.

Contenido

Resumen.....	8
Introducción	9
1. Aspectos metodológicos de la investigación.....	17
2. Fundamentación Histórica Del Cálculo De Probabilidades	23
3. El Surgimiento De Un Teorema.....	28
3.1. De lo particular a lo general del Cálculo de Probabilidades en el <i>Ars Conjectandi</i> ...	28
3.1.1 Una situación muy particular, la inversión de un problema.	30
3.2. La reducción de las observaciones en “ <i>The doctrine of chances</i> ”.....	33
3.3. Bayes y la probabilidad inversa.....	34
3.4. La generalización del Teorema de Bayes	40
4. Algunas Incidencias Del Teorema De Bayes En Cuestiones Morales, Sociales Y Educativas.....	42
4.1 El Teorema de Bayes como herramienta determinante en casos jurídicos, médicos y tecnológicos.....	42
4.1.1 Bayes, la probabilidad inversa y las consecuencias en casos jurídicos	42
4.1.2 Consecuencias médicas. El caso de las mamografías	45
4.1.3 Los filtros de Spam.	47
4.2 Algunas pautas para la enseñanza del Teorema de Bayes en la Educación Básica....	48

4.2.1 La matematización de sucesos de la vida cotidiana: las falacias fiscales, casos médicos y los filtros de Spam.	51
4.2.2 El juego de balotas y urnas	53
Conclusiones	57
Bibliografía	62

Tabla de figuras

Figura 1. Teorema de Bayes.....	10
Figura 2. Distribución Binomial	21
Figura 3. Algunos hitos en la consolidación del cálculo de probabilidades	23
Figura 4. Certeza objetiva	29
Figura 5. Certeza Subjetiva	29
Figura 6. Solución de Bernoulli al problema de las balotas. (Bernoulli, 1713, pág. 238)	32
Figura 7. Proposición 3 (Bayes, 1764).....	36
Figura 8. Probabilidad Condicional	36
Figura 9. Proposición 5 (Bayes, 1764).....	37
Figura 10. Probabilidad Condicional caso inverso	37
Figura 11. "Mesa de billar" propuesto por (Bayes, 1764).....	38
Figura 12. Diagrama de partición de mamografías positivas.....	47
Figura 13. Problema de urnas y balotas	53

Resumen

[Del Teorema De Bayes Como Herramienta A La Probabilidad Inversa Como Noción: Un Estudio Histórico-Epistemológico]

Desde hace tiempo se viene discutiendo sobre la importancia de la historia de las matemáticas y en especial del cálculo de probabilidades en los currículos de matemáticas, el estudio de la probabilidad y la estadística es poco trabajada en Colombia, las investigaciones realizadas en este campo son escasas por no decir inexistente, lo que hace que su desarrollo y evolución no se dé como se espera y como lo plantea el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en sus Lineamientos Curriculares y en sus Estándares Básicos De Competencias En Matemáticas. Es por esta razón, que este trabajo se enfoca en un problema histórico de evolución internalista de la noción de probabilidad inversa que tiene relación con el trayecto de la herramienta del surgimiento del Teorema de Bayes, combinando así aspectos históricos- epistemológicos. La metodología de investigación trabajada es desde lo planteado por (Schubring, 2005) en el que propone la hermenéutica como guía metodológica para la interpretación y análisis de textos históricos. Teniendo en cuenta estos aspectos, se habla de una posible motivación del uso del método Bayesiano como apoyo en la toma de decisiones de los estudiantes de la educación básica. Hablar más allá de la evolución de la noción de probabilidad inversa abre el campo a posteriores investigaciones, cuestión que se escapa del objetivo de este trabajo.

Palabras Claves: Historia, Probabilidad, Teorema de Bayes, Educación Básica, Toma de decisiones, epistemología.

Introducción

Ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las Matemáticas.

E.T. Bell (1985).

La historia de la probabilidad y sobre todo del cálculo de probabilidades tiene sus comienzos a mediados del siglo XVII con Cardano quien en su *Líber de Ludo Aleae* introdujo ideas probabilísticas en el análisis matemático de los juegos de azar. Posteriormente Tartaglia, Galileo, Pascal, Fermat, Huygens, los Bernoulli, De Moivre, Laplace y otros contribuyeron al desarrollo de la teoría de la probabilidad a través del análisis de dichos juegos aportando teoremas, axiomas y definiciones tanto a las matemáticas como al cálculo de probabilidades.

Uno de los matemáticos que ha aportado a esta es el reverendo Thomas Bayes(1701-1761), que a través de sus múltiples intereses por las diferentes ciencias y disciplinas escribe variados artículos sobre matemáticas y probabilidad, su ensayo *An Essay Toward Solving a Problem in the Doctrine of Chances*, publicado tres años después de su muerte por su amigo Richard Price, está dirigido a resolver el problema de hacer inferencias sobre el parámetro de la binomial, que Jacobo Bernoulli y De Moivre habían dejado pendiente de resolver(Giron, 1994)

Este ensayo consta de una extensa introducción y apéndice escrito por Richard Price, un problema central, dos secciones, siete definiciones, diez proposiciones y tres reglas; el problema a resolver por Bayes (1764) es:

PROBLEMA: *Dado el número de veces que un suceso ha ocurrido y el de veces que no ha ocurrido, se requiere calcular la probabilidad de que la probabilidad de su ocurrencia en un solo experimento esté entre cualesquiera dos valores prefijados (pág. 376).*

Bayes procede a dar solución a este problema a través de sus siete definiciones, diez proposiciones y tres reglas, cuyo procedimiento se conoce como lo que hoy llamaríamos

axiomático, demostrando las proposiciones a partir de sus definiciones. Así es conocida la proposición 5 de dicho ensayo como el Teorema de Bayes (Giron, 1994); este teorema permite calcular probabilidades finales a partir de los conocimientos de las probabilidades iniciales y de los datos obtenidos experimentalmente(Diaz, 2007) dicho de otra forma por Serrano (2003):

Tenemos un suceso B (los datos) y queremos saber si ha sido producido por una de las causas $A_1, A_2, \dots, A_n$ (una serie de hipótesis científicas rivales; son las posibles causas de B). Se conocen las probabilidades $P(A_1), P(A_2), \dots, P(A_n)$, es decir la probabilidad inicial de cada una de las hipótesis rivales, así como las probabilidades $P(B/A_1), P(B/A_2), P(B/A_n)$ o verosimilitud de obtener los datos B dependiendo de cuál de las hipótesis es cierta. Entonces, la probabilidad $P(A_i/B)$ (probabilidad final de que la hipótesis A_i sea la verdadera, una vez que hemos obtenido los datos B) viene dada por la siguiente expresión:

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B/A_i)P(A_i)}$$

Figura 1. Teorema de Bayes

Este teorema según algunos historiadores han creado controversia sobre si se le debe atribuir a Bayes o Laplace, dado que este último en su *Mémoire sur la probabilité des causes par les évènements* 1774, presenta una versión discreta de Teorema de Bayes y que hasta la fecha es utilizado en los libros de texto.

Bayes en (Gomez Villegas, Giron Gonzales, Martinez Garcia, y Rios Insua, 2001) dice que “la probabilidad de cualquier suceso es el cociente entre el valor en el que uno espera dependiendo de la ocurrencia del suceso que debe ser calculado, y el valor de la cosa esperada una vez que ésta ha ocurrido”(pág. 65). Esta interpretación de la probabilidad lleva a definirse como una aproximación subjetiva de esta, la cual ha dividido la definición de probabilidad en

dos, una frecuentista y bayesiana, la primera plantea la probabilidad como la frecuencia relativa de un experimento aleatorio, es decir se interpreta la probabilidad como un evento netamente objetivo, a mayor número de ensayos o repeticiones de un experimento, su frecuencia relativa se estabiliza bajo las mismas condiciones del experimento, en un número llamado probabilidad del evento A ; y la segunda plantea la probabilidad de un experimento netamente subjetivo, dado desde la creencia de las personas de la posible ocurrencia de dicho experimento.

Desde la aparición de la definición subjetiva de la probabilidad, esta se dividió en dos y por ende surgieron dos corrientes de la historia del cálculo de probabilidades, que permitió el surgimiento de varios de los teoremas y métodos que hoy son de gran importancia para las matemáticas, y de nuevos conocimientos para la estadística y la inferencia. Además de que dicha subjetividad del teorema de Bayes es implementado como método inductivo en el razonamiento de las personas, propios de la Psicología donde se tomen decisiones.

Todos estos acontecimientos que han surgido desde la necesidad social y humana las cuales son base importante en la comprensión de las matemáticas y de sus ramas; el estudio de la historia de las matemáticas es relativamente nuevo en Colombia y por ende su enseñanza; aprender y enseñar aspectos históricos como el surgimiento de un teorema como el de Bayes y su aplicabilidad es de gran importancia para comprender el entramado teórico y socio-cultural de las matemáticas.

De acuerdo a lo establecido en los estándares básicos de competencias en matemáticas del Ministerio de Educación Nacional:

Se hace necesario comenzar por la identificación del conocimiento matemático informal de los estudiantes en relación con las actividades prácticas de su entorno y admitir que el aprendizaje de las matemáticas no es cuestión relacionada únicamente con aspectos

cognitivos, sino que involucra factores de orden afectivo y social, vinculados con contextos de aprendizaje particulares. Estas consideraciones se amplían con la visión del carácter histórico y contingente de las matemáticas, consideradas ahora como un cuerpo de prácticas y de realizaciones conceptuales y lingüísticas que surgen ligadas a un contexto cultural e histórico concreto y que están en continua transformación y reconstrucción como otros cuerpos de prácticas y saberes.(MEN, pág. 34)

Por lo tanto, se hace necesario conocer los procesos causales que llevaron a las nociones matemáticas a lo que son, su importancia tanto para los profesores como para los estudiantes y comprender que no son un todo acabado y abstracto.

La historia de las matemáticas en la comunidad educativa ha quedado relegada de los currículos en matemáticas, pero hacen alarde de la importancia de los aspectos socioculturales que han dado paso a las teorías matemáticas y lo que dichos aspectos son de vital valor en el aprendizaje de estas y en este caso de la probabilidad y estadística.

Las matemáticas son, ante todo, una actividad humana; una construcción social compleja edificada durante miles de años en arduos procesos de interrelación cultural. Esto significa que las matemáticas se encuentran ineludiblemente ligadas a su historia; una historia que da cuenta de su desarrollo conceptual, sobre la base de que tal desarrollo tiene lugar en medio de complejas dinámicas sociales (Anacona, 2003, pág. 32)

Es por esta razón, que la historia de las matemáticas y las matemáticas deben ir ligadas entre sí, que juntas fomente una mejor educación matemática, un óptimo aprendizaje y una mejor calidad de la enseñanza. Es por esto, que el objetivo de este trabajo esta direccionado a realizar un estudio histórico-epistemológico de la noción de la probabilidad inversa desde el surgimiento

del Teorema de Bayes como herramienta, y cómo este es un hecho pertinente en la Educación Matemática.

Es así que a partir de este estudio histórico-epistemológico pretende evidenciar los aportes en Educación Matemática ya que permite como plantea Anacona (2003) tener un conocimiento sobre los diversos aspectos y conceptos que han incidido en la construcción de una teoría y a formarse una idea más completa del discurso matemático en la que aparecen otros elementos constitutivos de las matemáticas y su actividad, los cuales generalmente se ocultan bajo una presentación acabada y netamente formal.

Por ejemplo, el estudio del cálculo de probabilidades tiene sus orígenes en los primeros tiempos en el que los soldados echaron suertes por las vestiduras de Jesús y luego esta tuvo su evolución conceptual a partir de los múltiples sucesos de la época, por lo tanto conocer los orígenes de estas nociones como la probabilidad lleva que el estudiante se familiarice con éste y observe que no es una construcción abstracta sino que surge desde constructos sociales y culturales específicos.

Por ende, el estudio histórico-epistemológico es de gran importancia para la Educación Matemática pues el estudiante y el futuro docente deben tener una visión más profunda de las matemáticas y de su actividad, de tal manera que los lleva entender su composición, finalidad, utilidad y sus relaciones con el entorno.

La historia de la probabilidad y la estadística no solamente conlleva a conocer las bases teóricas que han fundamentado dicha disciplina, sino que implica conocer su contexto cultural y social, así se comprende las causas que la originaron, cómo ha sido aplicada y cómo ha ayudado al desarrollo de la sociedad.

El conocimiento de la historia desarrolla una visión más dinámica de todas aquellas nociones que han surgido y que son vitales en la evolución de la humanidad, el ser humano vive en constante aprendizaje a medida que crece, evoluciona a medida que el conocimiento evoluciona. Dicha visión es la que se debe fomentar en las primeras y posteriores etapas del aprendizaje del niño permitiéndole mostrar que todo conocimiento ha tenido limitaciones y cambios para su constitución como lo plantea el MEN en los lineamientos curriculares de matemáticas plantean que:

Las instituciones educativas deben fomentar el estudio de la historia en todas las asignaturas como base de conocimiento nuevo; las matemáticas son primeramente basadas en una historia, en una necesidad cultural y social, una construcción humana y una ciencia humana. Al ser la historia de las matemáticas el pilar del saber matemático, enseñar dicha historia debe ser lo principal en todo currículo de matemáticas, ya que no son solamente conceptos abstractos y acabados sino un constructo socio cultural que llevan a crear una enseñanza integral y significativa de estas. (MEN, 1998, pág. 15)

El MEN propone un currículo de matemáticas integral en el que se tiene en cuenta “la naturaleza, justificación y génesis tanto del conocimiento matemático como de los objetos de las matemáticas, las aplicaciones de éstas en la ciencia y en la tecnología, y el hacer matemático a lo largo de la historia” (MEN, 1998, pág. 12) los cuales conllevan a formar un ser matemáticamente competente.

A través de los estándares el MEN propone distintos procesos y pensamientos que desarrollan dicho ser competente en matemáticas y en el cual se tiene presente los aspectos mencionados anteriormente; en sus procesos plantea que se deben desarrollar en el estudiante la habilidad de razonar, comunicar, modelar, resolver, formular y conjetura problemas matemáticos y no

matemáticos; y en sus pensamientos expone que ser competente en matemáticas, este debe pensar de manera lógica, numérica, espacial, métrica, variacional y aleatoriamente. Este último aspecto (pensar aleatoriamente) es el que abre un andamiaje al campo de la incertidumbre, a la toma de decisiones, a aspectos reales y de la vida diaria.

La probabilidad y la estadística contemplada en el pensamiento aleatorio plantean que desarrollar y adquirir conocimientos propios de esta disciplina, lleva a crear en el estudiante un espíritu de investigación y exploración, a buscar estrategias que le permitan dar respuestas a sucesos y eventos que necesitan la experimentación o la intuición, es decir, a tomar decisiones. Es así que desarrollar pensamiento aleatorio significa resolución de problemas (MEN, 1998).

El Teorema de Bayes y sobre todo la probabilidad inversa permite que los estudiantes logren desarrollar la capacidad de razonar intuitivamente, por medio de la toma de decisiones, ya que esta, como se menciona en la problemática se basa en la creencia de las personas según sus experiencias, lo cual al momento de dar solución a un problema es importante dicho razonamiento.

Batanero (2001) en su documento *Didáctica de la Estadística* realiza una comparación de las diferentes concepciones sobre aleatoriedad y probabilidad, menciona que hay situaciones que la concepción frecuentista de la probabilidad no es pertinente, como por ejemplo saber la probabilidad de aprobar un examen de conducción, difiere de la probabilidad de que caiga 6 lanzando un dado; dado que el primero, si se pide dar una probabilidad, está sujeto a condiciones anteriores y de la perspectiva de cada participante (concepción subjetiva de la probabilidad), pero el segundo está determinado por una serie de experimentos que daría como resultado $1/6$, cuyo resultado es el esperado y no da paso a desarrollar conocimiento intuitivo.

Esta concepción subjetiva de la probabilidad presentada por Batanero lleva a plantearse que desarrollar conocimiento intuitivo está ligado a las creencias y experiencias de cada persona y que por ende es más significativo para el estudiante a la hora de aprender un concepto nuevo.

Es así que surgen algunos interrogantes referentes a la historia misma de la probabilidad como: ¿Es el Teorema de Bayes un acercamiento a los cálculos probabilísticos? Y además ¿Cómo llegó a constituirse el Teorema de Bayes en Probabilidad Inversa? ¿Por qué dicho teorema no es trabajado como lo planteó Bayes en su ensayo, sino como la definición de Laplace en su *Théorie Analytique des Probabilités* publicado en 1812? Y la siguiente pregunta referente a la educación como: ¿Se puede considerar el método bayesiano como un modelo de resolución de problemas? Estos interrogantes han dado paso a la siguiente pregunta directriz

¿Cómo llegó a constituirse la noción de probabilidad inversa a partir del surgimiento del Teorema de Bayes como herramienta, desde su aparición en el año 1764 como un hecho importante en la Educación Matemática?

1. Aspectos metodológicos de la investigación

En el aspecto metodológico que se lleva a cabo en este trabajo y teniendo en cuenta las metodologías trabajadas en la historia de las matemáticas, se realiza un análisis histórico-epistemológico que permita dar cuenta de la constitución de la noción de probabilidad inversa a partir del surgimiento del Teorema de Bayes, con la finalidad de entrever el entramado teórico, social y cultural de dicha noción.

Schubring en su libro “Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century France and Germany” publicado en el 2005, plantea un enfoque metodológico basado en una visión internalista de la historia de las matemáticas, según Schubring (2005) dice que él:

Enfoque "internalista", concibe el desarrollo como base de elementos intrínsecos a los conceptos. Además, es obvio que exclusivamente enfoques externalistas no ofrecen mayor poder de explicación que los enfoques internalistas, al menos no en el caso de los análisis a largo plazo de la formación de conceptos” (pág. 2)

Esta visión internalista además de ofrecer una mejor explicación de la evolución de los conceptos matemático, también desarrolla aspectos epistemológicos de las ciencias; este nuevo enfoque es a lo que Schubring llama a la hermenéutica como guía metodológica de las ciencias, esta plantea que:

De hecho, una metodología establecida como la de la hermenéutica es indispensable para la interpretación de un texto: incluso un texto matemático histórico no hablará por sí mismo; no puede ser descifrado por así decirlo en un nivel microscópico solo, sino que debe ser analizado de forma simultánea macroscópicamente, con referencia explícita al conocimiento

disponible para los contemporáneos, de cómo veían los problemas, ya las metodologías científicas a su disposición (Schubring 1986a, 83. Cita tomada de (Schubring, 2005))

En este sentido, se realizó a partir de tres fases:

En la primera fase se realizó una búsqueda y revisión bibliográfica de referentes históricos y teóricos, a partir de dos autores que le dan sentido a aspectos determinantes en el momento de efectuarse un estudio alrededor el Teorema de Bayes su filiación con la probabilidad inversa, y los factores morales y sociales que impregnan un estudio de este tipo.

El primero de ellos es el canadiense Ian Hacking, filósofo de la ciencia que utiliza la historia para describir de manera singular *el surgimiento de la probabilidad* en su libro que lleva el mismo nombre “*El Surgimiento De La Teoría De La Probabilidad*” (1995) y que algunos autores afirman, es una investigación centrada en la *Arqueología del Saber* de Michel Foucault ya que busca las precondiciones, la prehistoria del concepto, las distintas formas de pensamiento, avances y retrocesos de lo que hoy denominamos probabilidad.

El segundo y no menos importante es, el danés Anders Hald a quien se le atribuye ser el fundador de la moderna tradición danesa en estadística. Actuario y estadístico profesional, da un acento a los aspectos estadísticos y probabilísticos conjugándolos con los aspectos históricos. Alude también, aunque no de manera filosófica, al carácter dual de la probabilidad y centra su estudio bajo una notación propia, tal vez pensando en el tipo de lector que tendrían sus obras. Hald realizó múltiples obras que han aportado a la estadística, la probabilidad y a la historia de las mismas, una de sus obras más importantes y para efectos de este trabajo, es el publicado en 1990 y 1998 titulado *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*.y *A History of Probability and Statistics and Their Applications from 1750 to 1930*. Se podría atreverse a pensar que fueron hechos para aquellas personas que desean revalidar la

introducción de la historia en casi todos los niveles de escolaridad en matemáticas y estadística. Los ejercicios propuestos al final de cada capítulo, las demostraciones y el lenguaje matemático actual, lo hace un texto de consulta para la formación de profesores y estudiantes.

Además de estos dos grandes filósofos e historiadores y en la búsqueda de autores que han realizado investigaciones y aportes a la historia de la probabilidad, se encuentra de manera bastante significativa la escuela Española A.H.E.P.E. (Asociación de Historia de la Estadística y Probabilidad de España), quienes desde 2001 han organizado eventos cada dos años acerca de los principales acontecimientos y personajes influyentes en la historia de la probabilidad y estadística, tanto española como mundial. Se destacan por sus intereses similares y por su constante asistencia a dicho evento, Gregoria Mateos y Aparicio Morales, los cuales presentan en su artículo “Historia De La Probabilidad (Desde Sus Orígenes A Laplace) Y Su Relación Con La Historia De La Teoría De La Decisión” publicado en la primera edición del A.H.E.P.E (2002) en *Historia De La Probabilidad Y La Estadística*, un resumen de los orígenes de la probabilidad y los juegos de azar, dicho artículo es uno de los referentes importantes en el rastreo de la historia de la probabilidad, dado que presenta la teoría desde sus comienzos, la fundamentación de dicha teoría desde Pascal hasta Laplace y la relación de dicha teoría con la teoría de decisiones. Del cual solo se tomará su primer apartado al cual titulan *La Teoría Del Azar En Sus Comienzos*, que enriquece este trabajo.

En la fundamentación de la probabilidad inversa, también existen algunos autores que han realizado múltiples investigaciones alrededor de esta, y que, como se ha mencionado anteriormente son pilar de este trabajo.

A nivel internacional, se menciona al español Miguel Gómez Villegas que ha realizado variados artículos y trabajos en torno a la probabilidad y la doctrina del azar, y de la

probabilidad inversa y el Teorema de Bayes como el publicado en 1994 “El problema de la probabilidad inversa: Bayes y Laplace” en el cual presenta la constitución del teorema de Bayes en probabilidad inversa y porqué se ha atribuido a Laplace, también su artículo titulado “Cómo la aproximación Bayesiana a la Inferencia pasó a ser Frecuentista” en el que se pone de manifiesto cómo la primera aproximación que se hizo a un problema de inferencia fue bayesiana, y el motivo y los personajes que hicieron que la aproximación pasara a ser frecuentista y su trabajo de mayor referencia realizado en el año de 2001 titulado “El ensayo encaminado a resolver un problema en la doctrina del azar” que es la primera traducción del ensayo de Bayes con algunos comentarios de algunos historiadores surgidos a raíz de este.

A nivel nacional, se tiene a Gabriel Yáñez Canal, el cual ha participado constantemente en congresos y simposios, como el Simposio del Noroccidente Colombiano en el que gracias a sus estudios en educación estadística, ha realizado variados artículos referentes a la probabilidad y estadística, en especial a la probabilidad condicional y al teorema de Bayes.

Posterior a estas investigaciones se realizó un recorrido histórico como preámbulo al Teorema de Bayes, así se mencionaron algunos acontecimientos que dieron paso a dicho teorema y su establecimiento como probabilidad inversa, para ello, principalmente se describe la prehistoria del cálculo de probabilidades a partir de algunos autores mencionados anteriormente, luego se menciona cómo el ensayo realizado por Thomas Bayes da solución al problema propuesto por Jacobo Bernoulli y De Moivre y los aportes finales de Laplace a la probabilidad inversa iniciada por Bayes.

Para ello el antecedente más directo es el problema que se aborda en el ensayo de Bayes propuesto por Jacobo Bernoulli (1654-1705) en el *Ars Conjectandi* en que se introduce el concepto de la esperanza moral de un suceso, como un intento de determinar la probabilidad de

un suceso asociado a un experimento del tipo éxito o fracaso en función del número de veces que ha sido observado en n repeticiones; el problema es recogido más tarde por Abraham De Moivre (1667-1754) en su libro *Doctrine of Chances* en el que el cociente r/n , donde r es el número de veces que se ha observado el suceso en n repeticiones, se debe aproximar a la probabilidad de éxito θ (notación actual) (Gómez Villegas M. , 2001).

Ambos tratan el problema de forma directa, es decir, tanto Bernoulli como De Moivre abordan la solución de este a partir del conocimiento de la probabilidad de éxito θ o de fracaso $(1-\theta)$ de un suceso dado sus repeticiones. Estas aseveraciones son propias de una visión frecuentista de la probabilidad en el que es necesaria una cantidad n de repeticiones de un suceso, para que la probabilidad de que ocurra se acerque a lo observado. Es así que se hace necesario para efectos de este trabajo analizar las soluciones dadas por estos, con el fin de contrastar y corroborar según algunos historiadores los métodos utilizados, y a los cuales se les ha ubicado en la categoría de ser probabilidades frecuentista.

Pero es hasta antes de Thomas Bayes que la concepción de la probabilidad era vista de esta manera, este problema es retomado en su ensayo *An Essay Toward Solving a Problem in the Doctrine of Chances*, al cual es llamado como problema inverso, en el que lo aborda como un problema de inferencia en el que se pretende conocer la causa θ por su efecto r . En su expresión actual lo que hace Bayes es calcular

$$P\{a < \theta < b | X = r\}$$

Figura 2. Distribución Binomial

siendo X una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y θ . Para dar sentido a esta expresión, Bayes necesita introducir una probabilidad inicial sobre θ y definir la densidad condicional $\pi(\theta|r)$.(Gómez Villegas M. , 2001)

Este método implementado por Bayes es lo que se conoce como el Teorema de Bayes, el cual años más tarde es mejorado por Laplace (1749-1827) y publicado en su *Mémoire sur la probabilité des causes par les évènements* (1774); además Laplace retoma el problema de J. Bernoulli y De Moivre en su *Théorie Analytique des Probabilités* (1812) y obtiene además de lo planteado por Bayes, la distribución final para modelos más generales que el binomial.

Conocer y analizar dicho teorema y ensayo a trasfondo, permite entender las estrategias utilizadas por estos, lo controversial de dicho ensayo, y además comprender porque se cataloga el teorema de Bayes como un teorema de probabilidades inversas, con el fin de enriquecer la importancia de la historia de las matemáticas y sobre todo de un campo nuevo como lo es la probabilidad y la estadística.

Finalmente se analizaron los aportes de algunos investigadores que afirman que el Teorema de Bayes como método de razonamiento inductivo es determinante en la toma de decisiones de los estudiantes y en algunos otros aspectos diferentes al campo de la Educación Matemática, a lo que se efectuaron algunas reflexiones correspondientes a las investigaciones realizadas y desarrolladas en el trabajo que permitieron contribuir a la historia del cálculo de probabilidades y a la educación matemática.

2. Fundamentación Histórica Del Cálculo De Probabilidades

La historia del cálculo de probabilidades presenta un gran avance en cuestión de nuevas nociones y de conocimientos, que hoy en día son utilizados en varias áreas del conocimiento humano, dichas nociones han surgido por diferentes factores que ya han sido mencionados; en este capítulo y en el siguiente se pretende realizar un recorrido histórico del surgimiento del cálculo de probabilidades desde Pascal hasta Laplace, tiempo en el cual surgieron diferentes teoremas de gran impacto para las Matemáticas.

Dicho recorrido histórico se puede resumir en el siguiente cuadro cronológico:

Pierre Fermat y Blaise Pascal “El problema del reparto” “Tratado del Triangulo Aritmético” “La apuesta de Pascal	1654		Christian Hyugens “De Ratiociniis in Ludo Aleae”
		1657	
Pierre de Montmort “Essai d'analyse sur les Jeux de hasard”	1708		
		1713	Jacobo Bernoulli “Ars Conjectandi”
Abraham De Moivre “The Doctrine of Chances”	1738		
		1764	Thomas Bayes “An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances
Pierre Simón Laplace “Ensayo Filosófico sobre las probabilidades”	1814		

Figura 3. Algunos hitos en la consolidación del cálculo de probabilidades

El inicio del cálculo de probabilidades se da a mediados del siglo XVII, con autores como Pierre Fermat (1601-1665) Blaise Pascal (1623-1662).

Pierre Fermat, nacido cerca de Montauban, próximo a Toulouse, en 1601 y murió en Castres el 12 de enero de 1665. Conocido como el “padre de la teoría de los números” y por su teorema “el último teorema de Fermat” que consiste en verificar la existencia de un número n entero que sea mayor que 2, cuya solución de la ecuación $X^n + Y^n = Z^n$, sea posible con números enteros positivos; teorema que fue demostrado 350 años después de su formulación. Pero Fermat también es conocido por compartir correspondencia con otros matemáticos, uno de ellos es Blaise Pascal con el cual son conocidos por la solución del problema del Reparto.

Blaise Pascal, nació el 19 de junio de 1623 en Clermont- Francia y murió el 19 de agosto de 1662, en París, con 39 años. Conocido por su correspondencia entre él y Pierre Fermat motivada por los problemas propuestos por el caballero de Meré, problemas relacionados con la duración del juego, el problema de la ruina en los juegos de azar y el famoso *Problema Del Reparto, de los puntos o de la división del juego*, problemas que lo hacen merecedor de ser mencionado en este trabajo.

Dicho problema reza de la siguiente manera en (Hald, 1990)

Dos jugadores, que identificaremos con las letras A y B , juegan a un juego de puro azar. Apuestan cada uno de ellos una cantidad monetaria K sobre el siguiente juego a S partidas: lanzar una moneda perfecta, de forma independiente, una serie de veces, denominadas partidas, de tal manera que una partida es ganada por el jugador A cuando sale cara y por el jugador B en el otro caso, cuando sale cruz. Gana el juego, y por tanto la cantidad total apostada, $2K$, el jugador que logre en primer lugar ganar S partidas. Por alguna razón (Pascal señala que ambos jugadores están de acuerdo en que se pueda presentar dicha situación) el juego es interrumpido cuando al jugador A le faltan a partidas para ganar, $a < S$, y b partidas al jugador B , $b < S$. En ese caso decimos que el juego ha sido interrumpido en la situación (a, b) .

En ese momento surge el problema de cómo repartir el total apostado, 2K, entre ambos jugadores.

Cuya respuesta se puede encontrar en su libro titulado *El triangulo Aritmético*. Pero Pascal también es conocido por su famosa apuesta por la creencia en Dios más conocido como *La apuesta de Pascal*, dicha apuesta hace uso de razonamientos probabilísticos sobre la teoría de decisiones, y se resume de la siguiente manera en (Hacking, 1995)

El argumento está dirigido al tipo de persona que, no estando convencido por las pruebas de la religión y, mucho menos, por los argumentos de los ateos, se mantiene suspendido entre un estado de creencia y uno de descreimiento... se toma como premisa del argumento que o *bien* no hay Dios, o *bien* hay un Dios cuyas características son correctamente informadas por la iglesia... “Dios es o no es” es la expresión que hace Pascal a su partición... El problema de la decisión está constituido por dos posibles cursos de acción. Si Dios no existe, ambos cursos de acción están a la par. Usted vivirá su vida y de ningún de los dos modos sufrirá malos efectos debido a alguna intervención sobrenatural. Pero si Dios existe, entonces, apostar a que no le traerá la condena. Apostar que Dios existe puede llevarle la salvación. La salvación es mejor que la condena. Por lo tanto, la apuesta “Dios existe” domina la apuesta “No existe”. El problema de la decisión se resuelve por el argumento del dominio. (págs. 87-88)

He aquí uno de los primeros indicios de probabilidad inversa (bayesiana), el cual presenta una dualidad en la concepción de la noción de probabilidad de Pascal, dado que inicialmente en el problema del reparto el autor al dar solución a este hace uso de la noción de probabilidad frecuentista por medio del uso del cálculo combinatorio, métodos basados en la experimentación constante y en la teoría de los juegos de azar; en cambio en la apuesta de Pascal se da solución a

esta por medio de la creencia del sujeto en cuestión, ya que dado en este caso, la experimentación repetitiva no da cabida y credibilidad en la respuesta.

Como afirma (Carranza, 2010)

No vamos a discutir cuestiones teológicas que visten el problema. Lo que estamos interesados en este argumento de la noción de probabilidad. Noción que demuestra una naturaleza completamente diferente al problema anterior (*problema de los puntos*). Veremos que Pascal aplica las ideas centrales del concepto de probabilidad Bayesiana a pesar de que en el momento no la interpretaba, ni la frecuentista era parte de sus reflexiones. Pero ¿cómo se puede hablar de probabilidad bayesiana, si aquel término no está presente en el juicio de Pascal? (pág. 19)

Vemos que en el tiempo de Pascal las nociones que utiliza al momento de solucionar sus problemas antagónicos, tienen diferentes conceptos de probabilidad, pero debe recalcarse que dicha apuesta dio los primeros inicios de probabilidad subjetiva.

Poco tiempo después aparece **Christian Hyugens**, nace en París el 14 de abril de 1629, en La Haya (Holanda), y muere el 8 de julio de 1695 en la misma ciudad. A mediados del siglo XVII tiene conocimiento del trabajo realizado por Pascal y Fermat que lo llevan a escribir su famoso tratado *De Ratiociniis in Ludo Aleae* (Sobre los razonamientos de los juegos de azar), primer libro impreso considerado por algunos historiadores como el primer aporte al cálculo de probabilidades, este consta de 14 proposiciones, cinco problemas y dos apéndices; las primeras tres proposiciones las dedica a explicar y manejar la noción de esperanza matemática, las siguientes seis a el problema del reparto, para dos y tres jugadores y las últimas proposiciones a resolver problemas para dos, tres y más dados.

Con respecto a sus primeras tres proposiciones, es la primera vez que se introduce la noción de esperanza matemática, noción crucial en la teoría de decisiones al resolver un problema de juego en el que tiene que asignar un valor a éste, combinando las cantidades que se pueden ganar con las probabilidades de ganarlas (A.H.E.P.E, 2002).

Además sus cinco problemas, dos sin resolver por Huygens son los que dan paso a crear nuevos tratados e inspiran a autores como Montmort, D'Moivre, J. Bernoulli entre otros a resolverlos y copilar sus resultados en ensayos y tratados que posteriormente serán fundamentales en la consolidación del cálculo de probabilidades.

El tratado más cercano lo encontramos con **Pierre Rémond De Montmort**, nace el 27 de octubre de 1678, en París y muere en la misma ciudad, el 7 de octubre de 1719, conocido por su obra *Essai d'analyse sur les jeux du hasard* publicado en Paris en 1708, el cual está constituido por cuatro partes, la primera contiene la teoría de las combinaciones, la segunda juegos de cartas, la tercera juegos de dados y la cuarta incluye la solución a varios problemas sobre juegos de azar y entre ellos se encuentran los cinco problemas de Huygens. Este ensayo ha recibido múltiples elogios por varios científicos de la época, ya que fue el primero en dar a conocer algunas ideas, que los grandes científicos discutían, pero que nadie osaba publicar. Científicos como Leibniz, Daniel y Nicolás Bernoulli alagan el trabajo realizado por Montmort, Huygens y por Jacobo Bernoulli, y les permitieron hacer grandes contribuciones al cálculo de probabilidades y a la matemática misma.

3. El Surgimiento De Un Teorema.

En la historia de la Educación Matemática el surgimiento de un nuevo concepto, noción y teorema está dado por diferentes factores, como la necesidad de encontrar una nueva fórmula a algún problema, la solución de un juego o por la creación de unas nuevas fórmulas a partir de otras (Formulas Generatrices). En este capítulo se retoma la historia del surgimiento del cálculo de probabilidades desde su punto más alto con Jacobo Bernoulli hasta su consolidación con Laplace y además se hace énfasis en las diversas soluciones que se le ha dado al problema inverso propuesto por J. Bernoulli en su *Ars Conjectandi* y que dio origen al Teorema de Bayes.

3.1. De lo particular a lo general del Cálculo de Probabilidades en el *Ars Conjectandi*

El cálculo de probabilidades tomo su punto más alto con **Jacobo Bernoulli**. Jacobo nace en Basilea, el 27 de diciembre de 1654, y muere en la misma ciudad, el 16 de agosto de 1705, estudió teología por imposición de su padre, graduándose en Basilea en 1676. Más tarde recaló en Holanda, Francia e Inglaterra, donde estudia matemáticas, astronomía y física contra la voluntad de su padre. Regresa a la Universidad de Basilea en 1683 en la que obtiene la cátedra de matemáticas, en 1687.

No fue hasta la aparición de Jacobo con su *Ars Conjectandi* (1713) que la teoría del Cálculo de probabilidades tomó fuerza e interés por los diferentes científicos de la época. Jacobo tardó alrededor de 20 años en la elaboración de este libro y aunque demostró el teorema de la ley de los grandes números en 1692, no quedó satisfecho y retardó su publicación. El *Ars Conjectandi* fue publicado años después de su muerte por su sobrino Nicholas Bernoulli, cuya obra está constituida en cuatro partes:

- I. El tratado *De Ratiociniis in ludo Aleae* de Huygens con comentarios de J. Bernoulli.
- II. Ensayo sobre las combinaciones y permutaciones.

III. Uso de las combinaciones a varios problemas de juegos de azar.

IV. Uso y aplicaciones de sus resultados a cuestiones morales, económicas y políticas.

Las primeras tres partes de dicha obra son de gran interés para la historia de la probabilidad pero se sale de los objetivos de este trabajo, la IV parte aunque incompleta, es de gran aporte tanto al cálculo de probabilidades como a la dualidad de la probabilidad, ya que como dice (Hacking, 1995) “se le ha atribuido la paternidad de la primera concepción subjetiva de la probabilidad a Bernoulli. Sin embargo, Richard von Mises (1951), lo consideró frecuentista”(pág. 177)

Dicha atribución, hace a Jacobo Bernoulli pieza importante en este trabajo, dado que al introducir su término *Probabilitas*, la concepción de probabilidad toma otro rumbo. Concepción que se puede evidenciar al comienzo de la cuarta parte de su obra, en la que anuncia que “la probabilidad es el grado de certeza y difiere de la certeza absoluta como la parte difiere del todo”(Bernoulli, 1713, pág. 211)

Jacobo divide a la certeza en dos tipos, una en objetiva y la otra en subjetiva, las define de la siguiente manera (Bernoulli, 1713)



Omnia, quæ sub Sole sunt vel fiunt, præterita, præsentia five futura, in se & objectivè summam semper certitudinem habent.

Figura 4. Certeza objetiva

Todo lo que se beneficia bajo el sol de ser o llegar a ser, pasado, presente o futuro, posee siempre en sí mismo y objetivamente una certeza total

d Illa
de quibus revelatione, ratione, sensu, experientia, *αὐτοψία* aut aliter
ita constat, ut de eorum existentia vel futuritione nullo modo dubitare possimus, summa & absoluta certitudine gaudent. (

Figura 5.Certeza Subjetiva

Aquello que por revelación, razón, sensación, experiencia, testimonio de nuestros ojos es de tal modo evidente que no podamos de ninguna manera dudar de su existencia presente o futura, disfruta de una certeza total y absoluta.

Se puede ver que J. Bernoulli a pesar de que tenía dos concepciones distintas de probabilidad, definidas desde la noción de certeza, hace que más adelante dar solución a la inversión de uno de sus grandes problemas que lo llevaron a la consolidación del *Teorema de Bernoulli* o la tan famosa *Ley de los Grandes Números* no se diera satisfactoriamente.

3.1.1 Una situación muy particular, la inversión de un problema.

La IV parte del *Ars Conjectandi* realiza grandes contribuciones al cálculo de probabilidades las cuales se presentan en cinco capítulos, en los primeros tres capítulos Jacobo presenta sus criterios de probabilidad a cuestiones morales, sociales y civiles, definiendo desde su perspectiva nociones de Certeza, tanto moral como objetiva, su concepción de probabilidad, necesidad y contingencia como se mencionan algunos anteriormente; en los capítulos precedentes propone un problema particular en el esquema de urnas y balotas al cual aparte de mostrar su solución haciendo uso de la ley de los grandes números, presenta además su demostración.

Como lo expresa (Landro y Gonzales, 2012)

La contribución fundamental de Bernoulli consistió en: **i)**...demostrar que el aprendizaje a partir de la experiencia era cuantificable a través de un proceso de transformación de la experiencia objetiva en un grado de creencia subjetivo. **ii)**... procurar establecer el nexo entre las probabilidades *a priori* o de inferencia directa (definidas a partir de un razonamiento que va “de las causas a los efectos”, de la hipótesis de simetría de los resultados posibles al concepto de equiprobabilidad) y las probabilidades *a posteriori* o de inferencia inversa (definidas a partir de un razonamiento que va “de los efectos a las causas”) mediante la creación de un nuevo modelo de causación que convirtiera a la teoría matemática de la probabilidad en la columna vertebral de la inferencia inductiva (págs. 36-37)

En su segundo aporte expresado por Landro y Gonzales(2012), desde el nexo entre la probabilidad a priori y la probabilidad a posteriori se presenta el siguiente problema, que es fundamental en la consolidación en el Teorema de Bernoulli y que posteriormente nos incumbe en este trabajo, el Teorema de Bayes.

El problema se presenta de la siguiente manera en (Bernoulli, 1713):

Para ilustrar esto con un ejemplo supongo que tengo una urna con 3000bolas blancas y 2000 bolas negras, que alguien ha puesto allí y que yo, sin conocer tales números, trato de averiguar la proporción de bolas blancas y negras, mediante un experimento reiterado que consiste ensacar una bola al azar, observar su color y reponerla a la urna, con el fin de no disminuir el número de bolas de la urna, y se anota el número total de bolas blancas y negras. La cuestión es, ¿se puede hacer esto de modo que sea diez veces, cien veces, mil veces, etc., más probable (es decir, que sea moralmente cierto) que el número de bolas blancas y negras elegidas estén en la misma razón 3:2 que las bolas de la urna, que estén en otra razón diferente? (Ars Conjectandi, pág. 226)

Este problema J. Bernoulli lo relaciona a cuestiones sociales como, la probabilidad de que una persona presente síntomas similares a otras, dado que tienen la misma enfermedad, percepción dada desde su concepción de los grados certeza de un evento. La solución a dicho problema lo presenta en el último capítulo de su obra, pero sin antes introducir la demostración a su teorema (Ver la demostración moderna del Teorema de Bernoulli en Hald, 1990, pág.259-262). Y además lo particulariza para varios casos.

r . Idcirco si ratio inter numeros casuum r , per experimenta determinanda, sit ex. gr. fefquialtera, pro r & s non pono 3 & 2, sed 30 & 20, vel 300 & 200 &c. sufficiat pofuille $r \propto 30$, $s \propto 20$, & $s \propto r + s \propto 50$, ut limites fiant $\frac{r+1}{s} \propto \frac{31}{50}$, & $\frac{r-1}{s} \propto \frac{29}{50}$; & statuatur infuper $e \propto 1000$: sic fiet ex Scholii præfcripto, pro terminis ad

finiftram:

$$m > \frac{Lc \cdot s - 1}{Lr + 1 - Lc} \propto \frac{4 \cdot 2787536}{142405} < 301$$

$$m \propto ms + \frac{mrs - rs}{s+1} < 24728$$

dextram:

$$m > \frac{Lc \cdot r - 1}{Ls + 1 - Lc} \propto \frac{4 \cdot 4623980}{211893} < 211$$

$$m \propto ms + \frac{mrs - rs}{s+1} \propto 25550$$

Unde per ibi demonstrata inferitur, quòd institutis 25550 experimentis multo plus millies verifimilius fit, rationem quam numerus fertilium observationum obtinebit ad numerum omnium, intra hos limites $\frac{31}{50}$ & $\frac{29}{50}$ casuram, quàm extra. Atque eodem pacto, posita $e \propto 10000$, aut $e \propto 100000$ &c. cognoscetur, idem plus decies millies probabilius fore, si fiant experimenta 31258; & plus quàm centies

Figura 6. Solución de Bernoulli al problema de las balotas. (Bernoulli, 1713, pág. 238)

En resumidas, Jacobo desea mostrar que para cualquier probabilidad dada es más probable que la proporción, obtenida mediante pruebas de reposición frecuente caerá en un intervalo cerrado a razón de 3 a 2 (Bernoulli, 1713) en el que obtener de un $\varepsilon = 1/50$ casos y $t^2 = 1000$ posibilidades, se necesitaran $n = 25550$ observaciones para que suceda, es decir, que según Jacobo se podría asegurar que la $P(29/50 \leq X/25550 \leq 31/50) > 1000/1001$ posibilidades, de igual forma como dice en su último párrafo de la figura 6, demuestra que para $t^2 = 10000$ posibilidades se necesitaran $n = 31258$ observaciones, y para $t^2 = 100000$ posibilidades se necesitaran $n = 36966$ observaciones (Landro y Gonzales, 2012).

En esta demostración se ve que Jacobo intenta realizar una extensión a su teorema, al presentar un planteamiento inverso a la solución del problema, pero pensar inversamente no implica que se esté realizando a cabalidad, dado que realizar tal cantidad de observaciones para tener la certeza de un evento, deja de ser intuitivo y pasa a ser experimental, y la concepción de probabilidad pasa de ser subjetiva a ser objetiva. Esta percepción de la probabilidad de Jacobo no le permitió obtener una justificación rigurosa de su teorema y un fundamento a la teoría inferencia intuitiva derivada de la concepción de probabilidad inversa.

Este acercamiento, aunque fallido permitió desarrollar un nuevo teorema que fue el primer teorema del límite y que posteriormente fue realizado por Abraham D' Moivre al reducir la frecuencia relativa de las observaciones de las causas establecidas del problema inverso propuesto por J. Bernoulli.

3.2. La reducción de las observaciones en “*The doctrine of chances*”

Anteriormente se vio como el cálculo de probabilidades logró consolidarse y tener importancia frente a la comunidad científica con el Ars Conjectandi, además las primeras percepciones de probabilidad subjetiva y el surgimiento de los primeros acercamientos al teorema del límite. Ahora con D' Moivre se cierra dicho periodo de consolidación del cálculo de probabilidades y empieza la era de la inferencia estadística, al refinar el Teorema de Bernoulli al obtener la aproximación normal de la distribución binomial.

Abraham D' Moivre nace en Vitry (en Champagne), el 26 de mayo de 1667, y muere en Londres, el 27 de noviembre de 1754. Estudia humanidades en la Universidad Protestante de Sedan, donde lo enviaron a los 11 años y donde demostró su capacidad para las matemáticas. En 1718 publica en Londres su obra titulada *The Doctrine of Chances or a Method of Calculating the Probabilities of Events in Play* con posteriores ediciones en 1738 y 1756.

La tercera edición consta de un prefacio, una extensa introducción con definiciones y teoremas elementales, 74 problemas de probabilidad seguido de 33 problemas en la matemáticas de seguros, algunas tablas y un apéndice. Entre el problema 73 y 74 de probabilidad se encuentra, sin numeración, el resultado de la aproximación normal de la distribución binomial titulado *A method of approximating the Sum of the Terms of the binomial $(a+b)^n$ expanded into a Serie* traducido del latín al inglés por el mismo D' Moivre del original *Approximatio adsummam terminorum binomii $(a+b)^n$ in seriem expansi* publicado años atrás en 1733.

Anteriormente Jacobo intentó para un caso particular, la inversión de su teorema mostrando una cantidad muy elevada de observaciones para que dicha causa θ fuera favorable, D' Moivre a través de la aproximación Normal de la distribución binomial, logra reducir como dice (Landro y Gonzales, 2012)

El número de observaciones requerido para poder afirmar que el cociente $Y_n = X_n/n$ está contenido en un intervalo dado alrededor del verdadero valor θ con un cierto grado de confiabilidad y concluir que dicho grado de confiabilidad aumenta en forma proporcional a la raíz cuadrada del número de observaciones independientes realizadas.(pág. 41)

Dicha reducción al número de observaciones permitió un gran avance a la solución y justificación de la inversión de Teorema de Bernoulli y también a la generalización del teorema central de límite, pero no logró ir más allá de los parámetros de la binomial ni utilizó su aproximación para hacer inferencias inversas.

3.3. Bayes y la probabilidad inversa.

Vemos que tanto Bernoulli como D' Moivre fueron grandes piezas en el cálculo de probabilidades pero no lograron resolver el problema de la inferencia inductiva, en la medida que no consiguieron solucionar la cuestión fundamental del mismo: la inversión de la probabilidad

(Landro y Gonzales, 2012) no fue hasta Thomas Bayes que se logró dicha inversión y la solución al problema propuesto por estos.

Thomas Bayes, nace en Londres, en 1702, y fallece el 7 de abril de 1761, en Tumbidge Wells (Inglaterra), se conoce muy poco de la vida de este gran matemático, pero sus contribuciones al cálculo de probabilidades y a la teoría de la probabilidad fueron cruciales. Como se ha mencionado a lo largo de este trabajo Bayes es conocido por su famoso teorema del conocimiento de las causas a posteriori dado las causas a priori, es decir, pasar de la probabilidad de inferencia directa $P(Y_n|\theta)$ concepción de los frecuentista a la probabilidad indirecta o inversa $P(\theta|Y_n)$.

El problema a resolver por Bayes data en su ensayo titulado *An Essay toward solving a problema in the doctrine of chances* publicado en 1764 en el cual se consideraba a θ como una variable aleatoria con probabilidad “a priori” conocida, a partir de la cual era posible la caracterización de probabilidades de la variable condicionada $(\theta|Y_n)$ basada en un conjunto finito de observaciones (Landro y Gonzales, 2012). El problema expuesto en la introducción de este trabajo reza de la siguiente manera:

Dado el número de veces que un suceso ha ocurrido y el de veces que no ha ocurrido, se requiere *calcular* la probabilidad de que la probabilidad de su ocurrencia en un solo experimento esté entre cualesquiera dos valores prefijados (Bayes, 1764, pág. 376)

Y se desarrolla en dos secciones, en la primera sección introduce siete definiciones en las que figura la concepción de probabilidad y de eventos independientes, la definición de probabilidad se encuentra contemplada en la introducción de este trabajo y a continuación se presenta el concepto de independencia estocástica “Varios sucesos son independientes cuando la ocurrencia de cualquiera de ellos no aumenta ni disminuye la probabilidad de los restantes.” (Bayes, 1764,

pág. 376). Esta definición junto con la de probabilidad, evidencia claramente la concepción subjetiva de Bayes, concepción claramente racional y no vista desde la creencia personal.

Seguido de estas definiciones se presentan 7 de 10 proposiciones, en las cuales cabe resaltar algunas que son cruciales en la fundamentación del teorema de Bayes y de la consolidación de la noción de probabilidad inversa, las cuales se desarrolla desde una manera axiomática de las matemáticas, entre ellas se menciona la proposición 3 sobre eventos consecutivos

P R O P. 3.
The probability that two subsequent events will both happen is a ratio compounded of the probability of the 1st, and the probability of the 2d on supposition the 1st happens.

Figura 7. Proposición 3(Bayes, 1764)

Proposición 3. La probabilidad de que dos sucesos consecutivos ocurran es el cociente que resulta de multiplicar la probabilidad del primero y la probabilidad del segundo bajo la suposición de que ocurra el primero. Desde la notación moderna se puede expresar de la siguiente forma:

Dados dos eventos E_1 y E_2 , ordenados consecutivamente, se verifica que

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$$

Figura 8. Probabilidad Condicional

Esta proposición se continúa con la *Proposición 5* que puede ser considerada como una versión subjetiva de la Proposición 3, establecida en forma independiente de esta.

P R O P. 5.

If there be two subsequent events, the probability of the 2d $\frac{b}{N}$ and the probability of both together $\frac{P}{N}$, and it being 1st discovered that the 2d event has happened, from hence I guess that the 1st event has also happened, the probability I am in the right is $\frac{P}{b}$.

Figura 9. Proposición 5 (Bayes, 1764)

Que en notación moderna, se expresa de la siguiente forma:

Dados dos eventos E_1 y E_2 , consecutivos, se verifica que

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

Figura 10. Probabilidad Condicional caso inverso

Esta proposición según las anotaciones de Richard Price, Bayes en su demostración da respuesta análogamente a la siguiente pregunta ¿Cuáles la probabilidad de que un cierto suceso, cuando ocurre, estará acompañado por otro que se determinará al mismo tiempo?, Price lo define en términos de esperanza de un suceso determinado, desde el valor de esperanza de ambos sucesos, es decir, la probabilidad de que, cuando uno de los dos sucesos ocurre, el otro también ocurrirá, es la misma que la probabilidad de éste. (Bayes, 1764, pág. 381)

La proposición 5 es considerada por algunos investigadores e historiadores como Girón y Landro como el teorema de Bayes, además es la base de la demostración de la proposición 9, la cual se encuentra en la sección II de su ensayo y es la que da solución al problema inverso a resolver.

La sección II la introduce con un ingenioso mecanismo conocido como la “mesa de billar” de Bayes de la cual empieza a partir de dos postulados (la solución se dará desde el planteamiento de (Landro y Gonzales, 2012) y (Giron, 1994)):

- I. Hacer rodar una bola ($b1$) sobre un plano horizontal limitado por un cuadrado (ABCD) de modo que la probabilidad de que la misma se detenga en un punto particular, sea la misma para todos los puntos del plano;
- II. Hacer rodar n veces una segunda bola ($b2$), tomando en consideración la frecuencia (X) del evento M : que $b2$ se detenga a la derecha de $b1$.

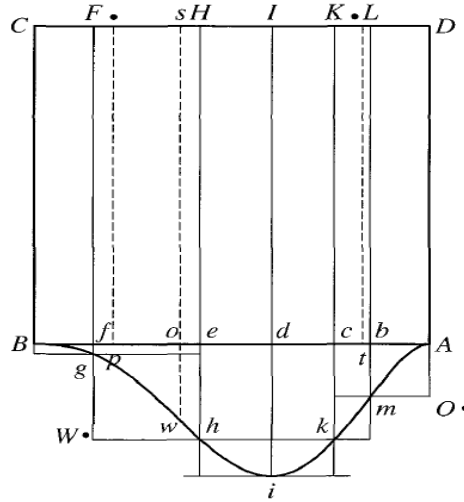


Figura 11. "Mesa de billar" propuesta por (Bayes, 1764)

Supóngase que el área del cuadrado ABCD sea igual a 1 y que el punto A tenga coordenadas (0,0) y sea θ la abscisa del punto del plano en el que se detuvo $b1$. De acuerdo con estas hipótesis, Bayes postula que la variable, que representa al punto en que ha de detenerse cada bola, esta uniformemente distribuida en el cuadrado ABCD y que θ está uniformemente distribuida en el intervalo (0,1). Entonces, para todos los valores de θ tales que $0 < b < \theta < f < 1$, se verificará:

- a) *Lema 1*: La probabilidad de que un punto θ caiga entre dos puntos cualesquiera de la línea AB es la razón de las distancia entre los dos puntos y la longitud de toda la línea AB., es decir, $p(b < \theta < f) = f - b$;
- b) *Proposición 8*:

$$P[(b < \theta < f) \cap (X = p)] = \int_b^f \binom{n}{p} \theta^p (1 - \theta)^{n-p} d\theta$$

c) *Corolario:* Haciendo $b = 0$ y $f=1$ resulta

$$P(X = p) = P((0 < \theta < 1) \cap (X = p)) = \int_0^1 \binom{n}{p} \theta^p (1 - \theta)^{n-p} d\theta = \frac{1}{n+1} \forall p$$

Finalmente se obtiene, haciendo uso de la proposición 5

d) *Proposición 9:*

$$\begin{aligned} P(b < \theta < f | X = p) &= \frac{P(b < \theta < f) \cap (X = p)}{P(X = p)} \\ &= \frac{\int_b^f \binom{n}{p} \theta^p (1 - \theta)^{n-p} d\theta}{\int_b^f \binom{n}{p} \theta^p (1 - \theta)^{n-p} d\theta} \end{aligned}$$

Justamente después de esta proposición Bayes agrega un “*scholium*” intentando generalizar el resultado anterior, pensando que el mismo razonamiento utilizado para resolver este problema podía ser aplicado a cualquier variable cuyos resultados pudieran ser considerados simétricos de cualquier prueba.

e) *Scholium:*

$$P((0 < \theta < 1) | M^*) = \frac{\int_b^f \binom{n}{p} \theta^p (1 - \theta)^{n-p} d\theta}{\int_0^1 \binom{n}{p} \theta^p (1 - \theta)^{n-p} d\theta} = \frac{n!}{p! (n-p)!} \int_b^f \theta^p (1 - \theta)^{n-p} d\theta$$

Así, para Bayes, esto significaría que “el no conocer nada” en las n pruebas los posibles valores de la observación X serían equiprobables, dado su distribución marginal para cualquier suceso M^* .

Se evidencia que la concepción de probabilidad de Bayes, es muy diferente a la de Bernoulli y D' Moivre, dicha concepción le permitió a Bayes dar solución al problema de hacer inferencias sobre el parámetro de la binomial pero la justificación teórica de la extensión del teorema de inversión propuesta por Bayes se limita solo al caso de la distribución binomial de la variable condicionante X .

3.4. La generalización del Teorema de Bayes

Fue **Pierre Simón Laplace** quien logró realizar una generalización a lo planteado por Thomas Bayes en su *Memoire sur la probabilité des causes par les évènements* publicado en 1774. Laplace nace en Beaumont-en-Auge, Calvados, Francia, el 23 de marzo de 1749, en la más absoluta miseria, y muere el 5 de marzo de 1827, en París. Su capacidad intelectual le permitió tocar diversas ciencias como la astronomía, la mecánica celeste, la probabilidad, el cálculo y las ecuaciones diferenciales.

Sus aportes a la probabilidad y al cálculo de probabilidades se presentan en sus diversas publicaciones, las cuales incorporaría en su obra titulada *Théorie Analytique des Probabilités* publicada en 1812, reeditada en 1814 y 1820, este trabajo contempla varios problemas resueltos por este, como el famoso problema del reparto, la generalización del teorema del límite, los parámetros de la binomial o el problema de la duración del juego; define conceptos tales como probabilidad, media aritmética y geométrica, trata el teorema de Bernoulli y su gran aporte a la teoría de la probabilidad: el problema de los mínimos cuadrados.

Además presenta su demostración del principio para la estimación de las probabilidades de las causas por las que puede haber sido producido un suceso observado, este principio, el de probabilidad inversa, publicado primeramente en su *Memoire sur la probabilité des causes par*

les évènements y demostrado años después en su *Théorie Analytique des Probabilités* reza de la siguiente manera

Si un suceso se puede producir por un número n de causas diferentes, entonces las probabilidades de esas causas dado el suceso son entre sí como la probabilidad del suceso dadas las causas, y la probabilidad de las causas dado el suceso es igual a la probabilidad del suceso dadas las causas, dividida por la suma de todas las probabilidades del suceso dada cada una de las causas. (Laplace, 1774, pág. 623)

Esto es a lo que ahora se le denomina la versión discreta del Teorema de Bayes, cuando todas las causas son inicialmente equiprobables, expresándolo de forma axiomática se tiene:

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$, son las n causas y E es el suceso, las causas son sucesos disjuntos y su unión da el total, entonces el principio establece que:

$$\frac{P(A_i|E)}{P(A_j|E)} = \frac{P(E|A_i)}{P(E|A_j)}$$

o

$$P(A_i|E) = \frac{P(E|A_i)}{\sum_{j=1}^n P(E|A_j)}$$

Como el teorema de Bayes afirma

$$P(A_i|E) = \frac{P(E|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(E|A_j)P(A_j)}$$

El principio de Laplace es equivalente al teorema de Bayes cuando las probabilidades a priori son iguales, $P(A_i) = 1/n$, las probabilidades se simplifican. Aunque pareciera que no es tan

general como lo propuesto por Bayes, se debe tener en cuenta que para Laplace las causas, se pueden dividir en varias causas equiprobables (Giron, 1994).

Esta definición de Laplace es la que actualmente se trata en los libros de textos, dado que evidencia la esencia del teorema de Bayes y es menos confusa que la original. He aquí donde nace la pregunta, ¿porque no se denomina teorema Bayes- Laplace?, la comunidad científica tendrá sus razones.

4. Algunas Incidencias Del Teorema De Bayes En Cuestiones Morales, Sociales Y Educativas

El Teorema de Bayes no se quedó solamente en el año de su surgimiento, este creó una nueva metodología de inducción e inferencia que dio paso al desarrollo de un nuevo tema, la inferencia Bayesiana, anteriormente vimos cómo se da dicho surgimiento, ahora se presenta cómo este sirve de herramienta en varias situaciones de la vida cotidiana y en cuestiones educativas.

4.1 El Teorema de Bayes como herramienta determinante en casos jurídicos, médicos y tecnológicos.

Dichas situaciones hacen uso de este teorema para dar juicios de razón a un suceso determinado como el veredicto en un crimen, las causas de una enfermedad o determinar si un mail es Spam o no.

4.1.1 Bayes, la probabilidad inversa y las consecuencias en casos jurídicos

El uso de fórmulas y nociones probabilísticas son actualmente importantes en muchos casos judiciales, según el tipo de crimen que se ha realizado y del tema a tratar; es en el caso de tomar una decisión en el que el teorema de Bayes sale a relucir y en el que las malas inferencias

estadísticas pueden determinar el futuro de una persona; para ejemplificar lo anteriormente dicho se tienen dos casos que han impactado al mundo entero y en los cuales el uso del teorema de Bayes y de la noción de probabilidad inversa ha sido utilizado indiscriminadamente, y ha creado lo que en el mundo del derecho llaman “Falacias Fiscales”.

El primer caso, se tiene el del famoso deportista estadounidense O.J Simpson acusado en 1995 de matar a su mujer Nicole. Uno de los argumentos fuertes del fiscal era que Simpson golpeaba a su mujer y que los golpeadores suelen llegar al asesinato. Del lado de la defensa, el abogado Alan Dershowitz convenció al jurado de que eso era irrelevante, usando un argumento estadístico falaz. Según Dershowitz, dado que la proporción 1 de 2500 de las mujeres estadounidenses abusadas son luego asesinadas por su abusador, concluye que el argumento del fiscal es estadísticamente irrelevante. Pero Dershowitz estaba mirando el problema al revés, ya que la hipótesis inicial es que Nicole fue asesinada, de modo la pregunta estadística correcta según (Rojo, 2012) es ¿*Dado que una mujer fue asesinada, cuál es la probabilidad de que haya sido víctima de su abusador?*

El otro caso famoso, es el de Sally Clark acusada en 1998 en Inglaterra de matar a sus dos bebés, uno de 11 semanas y el otro de 8 semanas de edad. El caso se trata de la muerte súbita de dos bebés en la misma familia, altamente improbable por el tribunal de Chester que la condenó a cadena perpetua con ocho votos a favor y dos en contra. El tribunal haciendo caso a los planteamientos del pediatra Sir Roy Meadow, el cual plantea que: *“La muerte súbita de un niño es una tragedia. De dos niños es sospechosa. De tres es asesinato, a menos que se pruebe lo contrario”* frase conocida actualmente como la ley de Meadow.

El cálculo realizado por Meadow fue el siguiente:

Sea A = muerte por Síndrome de Muerte Súbita (SMIS) y $P(A) = 1/8543$.

C= Sally es inocente

Por lo tanto, según en Meadow

$$P(C) = P(A) * P(A)$$

Meadow considera cada caso como independiente:

$$P(C) = \frac{1}{8543} * \frac{1}{8543}$$

$$= \frac{1}{73 \text{ millones}}$$

Es decir, la probabilidad de que Sally Clark sea inocente es de 1 en 73 millones, lo que determino la culpabilidad de Sally por la muerte de sus dos bebés.

La gravedad de los cálculos estadísticos utilizados en este caso llamo la atención del Royal Statistical Society (RSS) en el 2001, que se expresaron públicamente ante las fallas del uso de cálculos estadísticos en las cortes; para esto hicieron uso del Teorema de Bayes para presentar sus argumentos mediante un documento en el 2002 al ministro de justicia. En resumen el documento expone que es incorrecto afirmar que los dos eventos (las muertes por SMIS) son independientes, ¿Cómo puede saberse si no hay factores genéticos o ambientales que predispongan a la enfermedad?, a lo que responden que después de una primera muerte por SMIS la probabilidad aumenta de 5 a 10 veces en una segunda muerte por SMIS, además se produjo una clara “falacia del fiscal” dado que las probabilidades de que dos niños mueran en las mismas condiciones se calculó en 1 en 73 millones, a lo que Meadow interpretó como “La probabilidad de inocencia es de 1 en 73 millones”, lo cual no es cierto. Finalmente y lo más grave según el RSS, Meadow tomó valores estadísticos generales, sin tener en cuenta los casos particulares. Después de estas declaraciones del a RSS, Sally Clark quedó en libertad tres años

después, pero fue demasiado tarde ya que debido al tiempo transcurrido en la cárcel, esta abogada quedó destrozada anímicamente y murió tiempo después a causa del alcohol.

Tanto el caso de OJ Simpson como el de Sally Clark evidencian el mal uso de los cálculos probabilísticos y de las malas interpretaciones de los conceptos tratados, que llevan a generar efectos favorables o perjudiciales respectivamente, en las personas implicadas en cada caso. Una buena toma de decisiones evidencia el buen uso de conceptos probabilísticos, de teoremas como el de Bayes y un buen desarrollo de razonamiento intuitivo, competencias importantes en el desarrollo cognitivo y sobre todo matemático de cualquier ser humano.

4.1.2 Consecuencias médicas. El caso de las mamografías

Otra mala interpretación y uso de los cálculos probabilísticos se da también en los diagnósticos clínicos, es el caso de las campañas masivas a favor de la prevención del cáncer de mama, en el que una población se ve sujeta a realizarse pruebas médicas preventivas. Uno de los casos recientemente controvertidos es el de la política de realizar mamografías anuales a las mujeres a partir de los 40 años. Analicemos el caso que una mujer americana de entre 40 y 50 años sin síntomas, tenga cáncer de mama es 0,8 %. Si una mujer tiene cáncer de mama tendrá una mamografía positiva con probabilidad 90%. También el 7% de mujeres sanas dan positivo en la mamografía. Supongamos que una mamografía da positiva, ¿Cuál es la probabilidad de que la mujer en realidad tenga cáncer de mama? (Eddy, 1982)

Para eso se plantean dos casos, el primero “tenerla mamografía positiva, dado que, se tiene cáncer de mama” y el segundo el que se va a estudiar es “tener cáncer de mama, dado que, se tiene la mamografía positiva”, para esto tenemos las siguientes probabilidades:

Sea una muestra de 100.000 mujeres

A_1 = Tener Cáncer de mama y A_2 = No tener Cáncer de mama

B = Mamografía Positiva; además

$P(A_1)$ = Probabilidad de tener cáncer de mama = 800

$P(A_2)$ = Probabilidad de no tener cáncer de mama = 99200

$P(A_1|B)$ Es la probabilidad de tener cáncer de mama dado que la mamografía es positiva (la que se desea hallar)

$P(B|A_1)$ Es la probabilidad de que la mamografía salga positiva dado que se tiene cáncer de mama. = 720

$P(B|A_2)$ Es la probabilidad de que la mamografía salga positiva dado que no se tiene cáncer de mama = 6944

Así tenemos lo siguiente a través de un diagrama de árbol

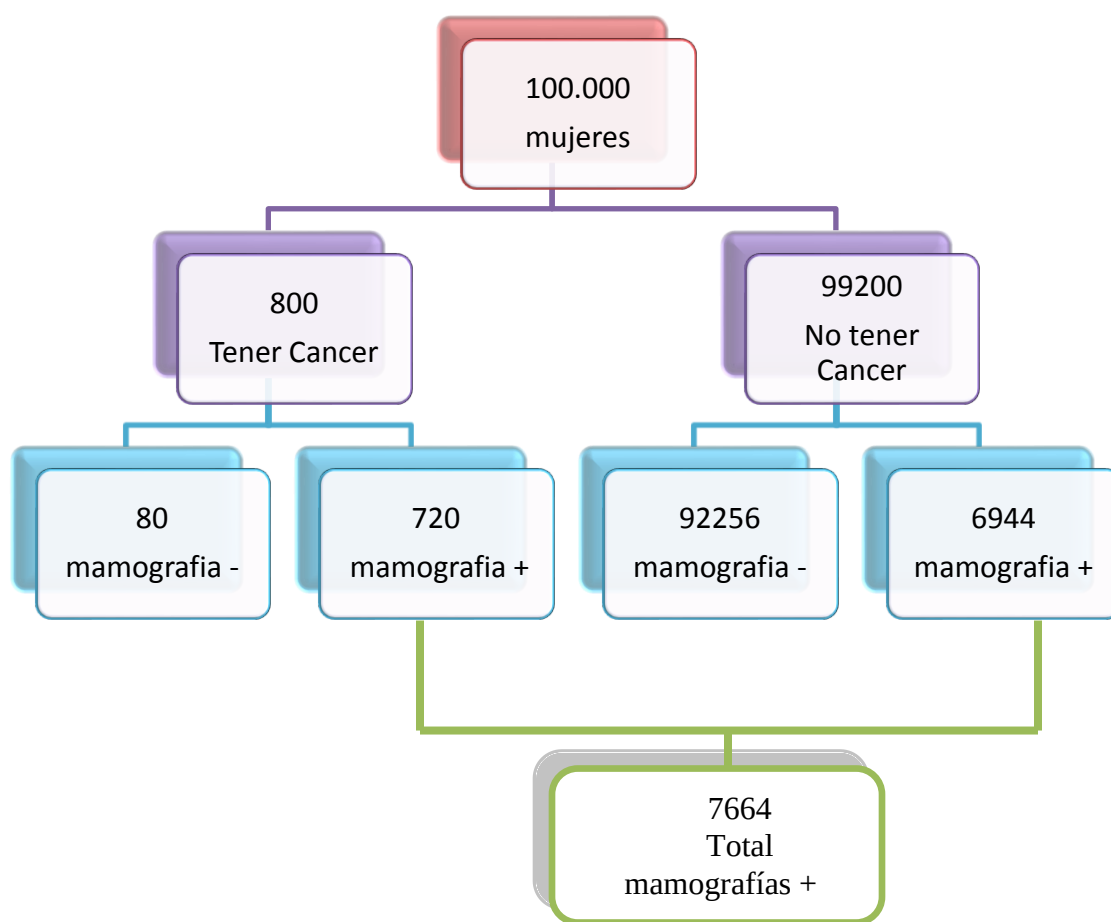


Figura 12. Diagrama de partición de mamografías positivas (Batanero, 2006)

Hasta el momento solo se ha obtenido el número total de mamografías positivas de la muestra de 100000 mujeres, pero aún no se ha resuelto el caso de “tener cáncer de mama, dado que, se tiene la mamografía positiva” el cual a partir de aquí es muy sencillo, aplicando la definición de probabilidad de Laplace -casos favorables sobre casos totales- tendremos:

$$P(A_1|B) = \frac{720}{7664}$$

Que sería de un 9% de posibilidades de que realmente estén enfermas, lo cual no es muy significativo como para dar juicios apresurados de prevención del cáncer de mama, además se dice que las constantes realización de exámenes de mamografía aumenta la probabilidad de cáncer debido a los rayos X (Batanero, 2006), así que antes de tomar una decisión debe tenerse en cuenta si son significativas las probabilidades de riesgo, para evitar cualquier otro efecto secundario debido a un falso positivo.

4.1.3 Los filtros de Spam.

Ya se ha visto la aplicación del Teorema de Bayes en casos judiciales y en medicina, ahora se presenta los usos de este en cuestiones tecnológicas, como lo son los filtros de Spam.

Cada vez que recibimos un mensaje por nuestros correos electrónicos, este pasa por un proceso de clasificación del mensaje, es decir unos filtros, en el que se decide según unas ciertas características si se envía no a mensaje no deseado o Spam. Como el programa no entiende el mensaje, toma una decisión probabilística basada en la frecuencia de aparición de palabras.

Para ejemplificar el funcionamiento de los filtros de Spam, se plantea la siguiente pregunta ¿Dado que el mensaje contiene la palabra “P”, cuál es la probabilidad de que sea un Spam? Haciendo uso del teorema de Bayes el programa calcula:

$P(\text{Spam} \text{ dado } P)$ y toma una decisión en base al valor obtenido. Para ello necesita $P(P \text{ dado Spam})$, $P(P)$ y $P(\text{Spam})$ y a esas probabilidades las saca de experiencias anteriores: estas probabilidades son datos “a priori”. Utilizando la fórmula de Bayes se tiene:

$$P(S|P) = \frac{P(P|S)P(S)}{P(P|S)P(S) + P(P|S^c)P(S^c)}$$

Donde S^c es que el mensaje sea un No Spam, según la probabilidad de que sea o no Spam se determina según la frecuencia de aparición de “P”, como dice Alejandro(2005)

El uso del teorema de Bayes en la clasificación de información, solo se puede realizar con la recolección de información y confección de datos estadísticos; sin estos datos no hay nada que calcular. Los datos estadísticos se obtienen de acuerdo a las palabras tomadas del historial de mensajes SPAM y no SPAM.(pág. 18)

Con estos tres casos del uso del teorema de Bayes en diferentes contextos ratifican que la toma de decisiones depende se quiera o no del conocimiento matemático, de la utilización de fórmulas y teoremas que permiten desarrollar habilidades y reforzar el razonamiento intuitivo.

Así en el siguiente apartado, se presentará algunas pautas para la enseñanza del teorema de Bayes en la educación básica, a partir de la simulación y matematización de los casos anteriormente nombrados y del famoso juego de urnas y balotas propuesto por Jacobo Bernoulli en su *Ars Conjectandi*.

4.2 Algunas pautas para la enseñanza del Teorema de Bayes en la Educación Básica.

La simulación y matematización de casos de la vida cotidiana que hacen uso de conceptos probabilísticos, son una gran herramienta en el desarrollo intuitivo de los alumnos, desde el uso de un teorema como herramienta hasta convertirse en la generalización de esta a manera de

noción a partir del uso contextualizado de dicha herramienta, es así que en este apartado se pretende mostrar como por medio de sucesos de la vida cotidiana y de la simulación de juegos se desarrolla en el alumno la capacidad de inferir y de tomar decisiones.

En los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas colombianos, más exactamente desde el pensamiento aleatorio y sistemas de datos se plantea que se debe desarrollar en el alumno la capacidad de predecir a través de la incertidumbre causada por algunos sucesos que se dan en la vida cotidiana, esto le permite buscar soluciones razonables a problemas en los que no hay una solución clara y segura, desarrollando un espíritu investigativo y explorativo, por medio de juegos, estrategias u otros métodos que le llevan a un buen razonamiento intuitivo (MEN, 2006). Una correcta toma de decisiones lleva a evitar errores fatales, como en las falacias fiscales, a prevenir enfermedades como en el caso de las mamografías o evitar plagios o fraudes como en los correos Spam.

El MEN en sus Estándares básicos de competencias matemáticas presenta unos estándares mínimos a alcanzar por los estudiantes de la educación básica, respecto al pensamiento aleatorio que van desde el grado primero hasta noveno (grados considerados en la educación básica) dichos estándares relacionados a conceptos de la toma de decisiones se detallan de la siguiente manera:

Al finalizar Tercer grado:

- ❖ Explico –desde mi experiencia– la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos cotidianos.
- ❖ Predigo si la posibilidad de ocurrencia de un evento es mayor que la de otro.

Al finalizar quinto grado:

- ❖ Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos.

Al finalizar séptimo grado:

- ❖ Uso modelos (diagramas de árbol, por ejemplo) para discutir y predecir posibilidad de ocurrencia de un evento.
- ❖ Conjeturo acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad.

Al finalizar Noveno grado:

- ❖ Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).

Todos estos estándares mínimos se desarrollan a partir de la realización de varios conceptos propios de la probabilidad y la inferencia tales como, experimento aleatorio, suceso, probabilidad, independencia, variables aleatorias, probabilidades condicionadas y totales, teorema de Bayes, entre otros. Estos muy pocos trabajados en la educación básica debido a su carácter formal y teórico, a la poca formación de los docentes en esta área o por las pocas herramientas epistemológicas que poseen los docentes para enseñar estos conceptos tan complejos.

Por estas razones, se presentan a continuación algunas pautas para la enseñanza de un concepto primordial en la toma de decisiones como lo es el teorema de Bayes, y como este necesita y da paso a otros conceptos propios de la probabilidad.

4.2.1 La matematización de sucesos de la vida cotidiana: las falacias fiscales, casos médicos y los filtros de Spam.

Modelar o Matematizar sucesos de la vida cotidiana y llevarlos al aula de clase no es algo nuevo, en los últimos años y a raíz de las nuevas prácticas docentes y de las teorías de aprendizaje como el constructivismo, la realización de este sistema en las aulas cada día va más en aumento, pero aún existen nociones y conceptos que no se enseñan de esta manera.

La modelación o matematización se puede entender según el (MEN, 2006) como:

La simplificación y restricción de la complejidad de una situación real para reducirla a una situación ya conocida, de tal manera que se pueda detectar fácilmente qué esquema se le puede aplicar, cómo se relaciona con otras y qué operaciones matemáticas pueden ser pertinentes para responder a las preguntas que suscita dicha situación. (pág. 53)

Matematizar los casos mencionados anteriormente no es fácil, con estos no se pretende llevarlos como proyectos al aula de clase, solamente sirven en el aula de clase como contexto introductorio al momento de la enseñanza de la importancia de la probabilidad y del buen manejo de cálculos probabilísticos, con esto una buena forma de trabajo a realizar sería:

- ❖ Describir los casos de las falacias fiscales a manera de cuento, si se realiza en los primeros grados de escolaridad de primero a quinto, a manera de fabulas, cuentos o de puestas en escena.
- ❖ Proponer a los estudiantes realizar investigaciones previas sobre el uso de la estadística y la probabilidad en la vida cotidiana, su importancia y su recorrido en la historia, esto permite crear un contexto óptimo y significativo de los nuevos conceptos a aprender.

- ❖ Resolver dichos casos a raíz de otros métodos diferentes al formalismo del teorema de Bayes, como las técnicas de conteo, los diagramas de árbol, los de tallos y hojas o de proporcionalidad.

Al presentar estos casos a los estudiantes y que estos observen la importancia de una buena toma de decisiones y de un buen manejo de los cálculos probabilísticos, en sucesos determinantes y de uso cotidiano entenderán el porqué de dichos conceptos.

Estas son pautas muy generales, pero necesarias al momento de enseñar un nuevo concepto, además desde los estándares de competencias, el desarrollo de conceptos debe tener una coherencia vertical, horizontal y transversal, es decir, desarrollarse desde los primeros grados de escolaridad hasta los últimos y cada vez con más complejidad, relacionar cada concepto y pensamiento como generatriz de uno nuevo, ya que no solamente es suficiente lo matemático, la axiomática o la realización de algoritmos es necesario la comprensión e interpretación de nociones como la subjetividad de la probabilidad o la inferencia, primordiales en la toma de decisiones, y por ende en las decisiones de la vida cotidiana.

Después de presentarse a manera introductoria los sucesos nombrados anteriormente y como se ha mencionado en reiteradas ocasiones, la resolución de los problemas que han marcado la historia de la probabilidad es de vital importancia para el desarrollo y conceptualización de nuevos conceptos, por ende se sugiere recrear y direccionar la clase de estadística a partir de posibles y nuevas soluciones a los juegos propuestos en los tiempos del surgimiento de la estadística y del cálculo de probabilidades, como el problema de los puntos, la apuesta de pascal, el juego de urnas y balotas de Bernoulli, la mesa de billar de Bayes , entre otros, que han dado paso al surgimiento de cada una de las nociones que hoy en día se trabajan de manera abstracta y formalmente.

Es así, que a continuación se presenta el juego de urnas y balotas de Bernoulli como una gran herramienta para la enseñanza del teorema de Bayes, la conceptualización de la noción de probabilidad subjetiva y como un paso a la inferencia Bayesiana.

4.2.2 El juego de balotas y urnas

Este juego fue propuesto y resuelto por J. Bernoulli en 1713 en su *Ars Conjectandi* y que se encuentra estipulado en los capítulos anteriores, ahora se presenta una versión menos compleja que se puede trabajar en clase.

El Objetivo es: Desarrollar o introducir conceptos propios de la probabilidad como, azar, evento o suceso, técnicas de conteo, estrategias de solución y representación en la solución de una situación problema particular, que permitan la posibilidad de desarrollar competencias propias de las matemáticas y habilidades en otras áreas, en el que una correcta toma de decisiones es fundamental en la solución del problema.

La Situación Problema es: se tiene tres urnas enumeradas con I, II y III cada una, en la urna I se encuentra 4 balotas blancas y 6 rojas, en la urna II se encuentran 5 blancas y 3 rojas y en la urna III se encuentran 8 blancas y 7 rojas como se muestra en la siguiente figura:

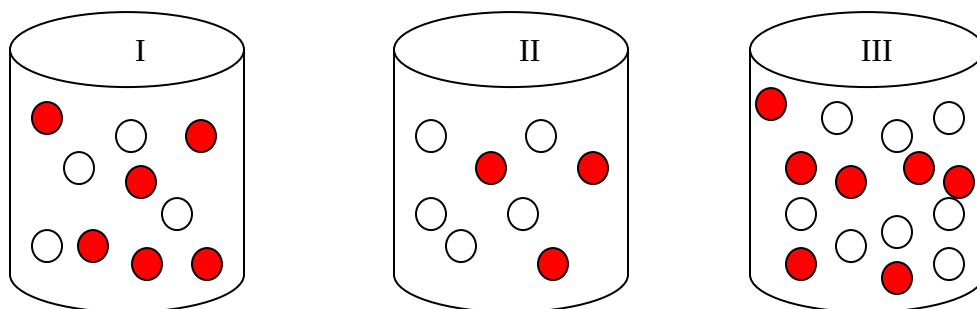


Figura 13. Problema de urnas y balotas

Se escoge una urna al azar y luego una balota de dicha urna se pide calcular (Situación tomada de la clase de análisis exploratorios de datos del 25 de abril del 2014):

- a. La probabilidad de que la balota sea roja
- b. Dada que la balota escogida es roja ¿cuál es la probabilidad que provenga de la urna II?

La solución a la situación es sencilla si se tiene todos los conocimientos previos necesarios para darle solución, conceptos tales, como, suceso, probabilidad, eventos independientes, probabilidad condicional y técnicas de conteo. Para dar solución al inciso *a*. Se realizara de la siguiente manera:

Solución inciso a:

Como en total son 3 urnas la probabilidad de que al extraer una balota de cualquiera de las tres es de $1/3$, ahora en la urna I se tiene un total de 10 balotas de las cuales 6 son rojas, así que la probabilidad de que sea roja en la urna I es de $6/10$; en la urna II se tiene un total de 8 balotas de las cuales 3 son rojas para una probabilidad de $3/8$; y en la urna III se tiene un total de 15 balotas de las cuales 7 son rojas para una probabilidad de $7/15$. Luego para saber cuál es la probabilidad de que la balota sea roja, se suman todas las probabilidades anteriores y se multiplica por la probabilidad de que sea de cualquiera de las tres urnas, así se tiene:

$$\begin{aligned}
 P(R) &= \left(\frac{6}{10} + \frac{3}{8} + \frac{7}{15} \right) * \frac{1}{3} \\
 &= \frac{173}{360} \\
 &= 48\%
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de que sea roja es de un 48%

Solución inciso b:

Se pide hallar la probabilidad de la balota roja provenga de la urna II, para ello se tiene que la probabilidad de que sea roja en la urna II es de $\frac{3}{8}$ es igual a 37,5%, además de se tiene que la probabilidad de sacar una balota de cualquiera de las tres urnas es de $\frac{1}{3}$ es igual a 33,3...%, y también se sabe que la probabilidad de que sea roja es de 48%, por lo tanto, la probabilidad de que sea roja y que provenga de la urna II es igual a la probabilidad de ser roja en el urna II por la probabilidad de sacar una balota de cualquiera de las tres urnas, sobre la probabilidad de que sea roja, es decir,

$$P(U_{II}|R) = \frac{37,5\% * 33,3 \dots \%}{48\%}$$

$$= 26\%$$

Por lo tanto, la probabilidad de que sea de la urna II dado que la balota escogida es roja es de un 26%.

Análisis previo de la situación:

El objetivo de esta situación no es más que la ejercitación del teorema de Bayes, pero como se ha evidenciado en la solución no se presenta dicho teorema de una manera formal, si no haciendo uso solamente de proporcionalidades, y de algunas otras operaciones básicas, así que enseñar un concepto nuevo implica hacer uso de otros, y en los cuales todo esta entrelazado.

Esta situación al involucrar diferentes conceptos da la posibilidad de aplicarlo en el aula de diferentes formas, de una manera muy teórica o haciendo uso de material manipulativo al hacer la simulación de las balotas y las urnas, además permite convertirse en una secuencia didáctica en el que el docente puede enseñar diferentes conceptos a partir de una sola situación uniendo diferentes pensamientos y procesos.

He aquí, una de las formas de matematizar una situación y llevarla al aula de clases, a medida que se va realizando cada vez más este tipo de situaciones, la capacidad de razonar intuitivamente se va desarrollando fuerte y significativamente, así que al momento de tomar una decisión involucraría el uso de todos aquellos conocimientos previos y se evitaría generar errores fatales como los presentados en los apartados anteriores.

Conclusiones

Durante el desarrollo de estos cuatro capítulos se ha mostrado la evolución histórica-epistemológica de la noción de *probabilidad inversa*, desde el surgimiento del teorema de Bayes, en su etapa primitiva con el inicio del cálculo de probabilidades que pasa desde los aportes de Pascal, Fermat, Hyugens, Montmort, por el surgimiento y consolidación de varios teoremas como el de Bernoulli, D' Moivre y Bayes, hasta la consolidación del cálculo de probabilidades por Laplace. Para ello, es necesario detenerse en algunos resultados alrededor del surgimiento del teorema de Bayes que son puntuales y determinantes en la solución del problema directo:

¿Cómo llego a constituirse la noción de probabilidad inversa a partir del surgimiento del Teorema de Bayes como herramienta, desde su aparición en el año 1764 como un hecho importante en la Educación Matemática?

A partir de los resultados obtenidos en cada uno de los capítulos, y de los cuales han dado respuesta a cada uno de los objetivos propuestos se concluye:

El capítulo I tenía como objetivo principal:

- ❖ *Presentar las diferentes investigaciones realizadas alrededor de la noción de probabilidad inversa, donde el teorema de Bayes es determinante en su consolidación.*

Se puede decir en gran medida, que los aportes investigativos alrededor de esta noción enfocados en la educación, a nivel nacional son pocos y a nivel local inexistentes, en contraste a los realizados a nivel internacional, se hace necesario la realización de más investigaciones en el área del cálculo de probabilidades y sobre todo en el campo de la probabilidad inversa, ya que esta aporta en la toma de decisiones y sobre todo en el razonamiento intuitivo de los estudiantes.

Además evidencia la importancia de enfocar las investigaciones en el área de la probabilidad y la estadística, dado que al ser poco trabajado en las aulas de clase los resultados son poco favorables. Las investigaciones realizadas en este entorno, muestran la importancia del teorema de Bayes en otros campos, diferentes al de la educación, además de los avances que existen en otros países y que confirman el éxito de su educación y de sus currículos.

El capítulo II tenía como objetivo principal:

- ❖ *Presentar un breve recorrido histórico del surgimiento del cálculo de probabilidades, desde Pascal hasta Laplace.*

Los objetos que han dado paso a la consolidación del cálculo de probabilidades como los juegos de azar, las apuestas o las suposiciones, han permitido generar grandes contribuciones a la probabilidad, la estadística y las matemáticas en general. Desde el constructo de las necesidades humanas, sean por diversión o por otras razones evidencia la importancia de presentar soluciones a incógnitas que cada día van surgiendo en la mente del ser humano.

Conocer el recorrido histórico de la fundamentación del cálculo de probabilidades y como en el paso de su evolución dio camino al surgimiento de diferentes, teoremas o nociones, permite concretar que el estudio de las matemáticas y sobre todo de la probabilidad, no es un todo acabado. Las nociones que surgen en el momento de la consolidación de un área, o ciencia debido a las inquietudes del ser humano, ponen en juego todos los conocimientos necesarios para su óptimo surgimiento, es el caso de *La Apuesta De Pascal*, en el que la noción de probabilidad bayesiana era utilizado mucho antes de su precursor, noción que fue necesaria para dar respuesta a dicha apuesta hecha por Pascal, a pesar de tener una corriente frecuentista la necesidad de indagar en un nuevo concepto para dar respuesta, muestra la flexibilidad y los diversos

conocimientos que poseía Pascal, y además muestra la dualidad de la noción de probabilidad desde ese tiempo.

Pero que sería si todo conocimiento nuevo no fuera plasmado o escrito como lo hicieron por primera vez Huygens y Montmort, se diría que dichos descubrimientos y aportes fueron en vano, y las matemáticas no tendrían tanta importancia sobre otras ciencias. Huygens al presentar su concepto de esperanza matemática, abre el campo a una nueva forma de ver la probabilidad, por ende se debe considera a Huygens como el precursor de la probabilidad aleatoria al resolver el problemas del reparto a través de la sistematización de sus 14 proposiciones y de su definición de esperanza matemática.

El capítulo III tenía como objetivo:

- ❖ *Contrastar las diferentes soluciones realizadas por D' Moivre, Bayes y Laplace al problema inverso propuesto por Jacobo Bernoulli en su Ars Conjectandi.*

La solución a un problema, como el problema inverso visto desde diferentes perspectivas y enfoques, evidencia los avances de la época y los conocimientos utilizados por Bernoulli, D' Moivre, Bayes y Laplace, al tiempo en el que se consolidaba el cálculo de probabilidades, empieza a surgir una nueva corriente de la probabilidad y el surgimiento de variados teoremas. Bernoulli al proponer su famoso juego de urnas y balotas y la solución por medio de los parámetros de la binomial, lo llevan a crear su ley de los grandes números, desde su visión frecuentista no pudo dar solución como se vio en el desarrollo de este trabajo, a lo que se concluye que aun Bernoulli teniendo grandes conocimientos sobre el área, la necesidad de ampliar el campo de concepciones, le fuera permitido llegar a una solución óptima.

Por su parte, el reverendo Thomas Bayes al dar solución al problema inverso por medio de sus siete definiciones, diez proposiciones y tres reglas, se le hace merecedor de ser considerado como el padre de la probabilidad inversa, de actuales corrientes, como el método Bayesiano y del precursor de la inferencia estadística.

La probabilidad Bayesiana (probabilidad subjetiva) es actualmente aceptada por la comunidad científica, como método de resolución de problemas y como ente importante al momento de inferir y tomar decisiones, pero a pesar del aporte de Bayes al cálculo de probabilidades siguen surgiendo mal interpretaciones en las diferentes áreas en las que se aplica su teorema, evitar esto solo se puede hacer desde la enseñanza temprana de la probabilidad y estadística.

El capítulo IV tenía como objetivo:

- ❖ *Presentar algunas incidencias del Teorema de Bayes en la Educación Matemáticas y en otros campos de la vida.*

El teorema de Bayes ha sido de gran impacto en otros campos de la vida cotidiana que hace de su surgimiento algo importante en la historia del conocimiento matemático y en la historia del ser humano, al ser utilizado como una herramienta de análisis lo lleva a tornarse de herramienta a noción.

La mala interpretación de los resultados obtenidos por la mala utilización de cálculos probabilísticos, con lleva a generar juicios de valor inadecuados y perjudiciales en cualquier decisión, una mala toma de decisiones evidencian el poco conocimiento de herramientas probabilísticas y de conceptos primordiales, de una mala formación en el área de probabilidad y poca capacidad de razonamiento intuitivo.

Razonar intuitivamente es algo inherente del ser humano, desde su instinto natural y desde la observación de fenómenos de su entorno, pero este se refuerza en el momento en el que el bagaje de saberes se va ampliando con el tiempo. Los docentes tenemos la obligación de reforzar dicho razonamiento intuitivo, brindando las herramientas necesarias para afrontar la vida cotidiana, por medio de nuevas formas de enseñanza, involucrando el mundo que rodea a los sujetos de aprendizaje (estudiantes) y generando en el aula centros de aprendizajes significativos.

Así a través de teoremas condicionantes de la toma de decisiones como el de Bayes, y de teorías como la Bayesiana, de maneras de inferir o de metodologías propias de la probabilidad subjetiva, se mejora el conocimiento sobre sucesos inciertos e incluso no repetibles. Permite desarrollar y dar cumplimiento a lo planteado por el MEN, a considerar la probabilidad y la estadística como áreas de conocimiento primordial, el cual no se debe dejar de último en los currículos y darle el lugar y la importancia necesaria en el aula de clases.

El teorema de Bayes incidió en el desarrollo de un nuevo método de decisión y de una nueva área de conocimiento como lo es la inferencia estadística, permite solucionar problemas básicos como la selección de una balota, la predicción del clima o de algo más complejos como la decisión en un juicio, las prevención de enfermedades, o la evolución de sistemas tecnológicos.

Este trabajo abre el campo de próximas investigaciones en el área de la probabilidad y la estadística y sobre todo en su historia, presenta a la comunidad educativa la importancia de realizar más investigaciones y trabajos en torno a esta área, al generar en la comunidad educativa la inquietud del porque el poco trabajo en esta área, y el pensarse en una educación matemática mas integral, vista desde la epistemología, la historia, la didáctica y el auge de las tecnologías.

Bibliografía

- A.H.E.P.E. (2002). *Historia de la estadística y la probabilidad I*. Madrid: Delta Publicaciones.
- A.H.E.P.E. (2013). *Historia de la estadística y la probabilidad VII*. Madrid: Delta Publicaciones.
- Alejandro Lagunes, F. J. (2005). *Sistema de análisis y filtraje de correo masivo no solicitado SPAM*. Mexico: Centro de investigación de estudios avanzados del instituto politecnico nacional.
- Anaconda, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *revista suma*, 8.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: GEEUG.
- Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. En P. F. Lupiáñez, *Investigación en el aula de matemáticas. Estadística y Azar*. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales.
- Bayes, T. (1764). *An Essay toward An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances, with Richard Price's. Foreword and Discussion*. (R. Soc, Trad.) Francia: Phil.
- Bernoulli, J. (1713). *Ars Conjectandi*. Basilea: Thurnisiorum.
- Bolstad, W. (2004). *Introdution to Bayesian statistics*. New York: Wiley.
- Carranza, P. (2010). La Dualite de la probabilité dans l'enseignement de la statistique.une. Universite Paris 7.
- De Moivre, A. (1738). *The Dotrine of Chances or a Method of Calculating the Probabilities of Events in Play* (3 ed.). New York: Chelsea.

- Delgado, R. (2013). Derecho y Probabilidad: Falacias, Fórmula de Bayes y Redes Bayesianas. *MAT2: MATerials MATemàtics*, 1-83.
- Díaz, C. (2007). Viabilidad de la Enseñanza de la Inferencia Bayesiana en el Analisis de datos en Psicología. Granada: Universidad de Granada.
- Díaz, C., & Batanero, C. (2007). *¿Cómo puede el método bayesiano contribuir a la investigación en psicología y educación?* (Vol. 2). Paradigma.
- Eddy, D. M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. En P. S. D. Kahneman, *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (págs. 251-253). New York: Cambridge University Press.
- Giron, J. (1994). Historia del calculo de probabilidades: de Pascal a Laplace. En *Historia de las matematicas* (págs. 113-133). Andalucía .
- Gómez Villegas, M. (2001). El ensayo encaminado a resolver un problema en la doctrina del azar. *Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fis.Nat. (Esp)*, 95(1-2), 81-85.
- Gómez Villegas, M. A. (1994). El problema de la probabilidad inversa: Bayes y Laplace. En d. B. E (Ed.), *Perspectivas actuales de Lógica y Filosofia de Las Ciencias* (págs. 385-396). Madrid.
- Gomez villegas, M. A. (s.f). *Como la aproximacion Bayesiana a la inferencia paso a ser frecuentista*. Madrid: Universidad complutense.
- Gomez Villegas, M. A., Giron Gonzales, J. F., Martinez Garcia, M. L., y Rios insua, D. (2001). *Un ensayo encaminado a resolver un problema en la doctrina del azar*. Recuperado el 20 de enero de 2016, de http://www.rac.es/ficheros/Revistas/REV_20091030_01606.pdf

- Hacking, I. (1995). *El surgimiento de la teoria de la probabilidad*. Barcelona: Gedisa.
- Hald, A. (1990). *A History of Probability and Statistics and their Applications before 1750*. New York: Wiley.
- Landro, A. H., & Gonzales, M. (2012). Bernoulli, De Moivre, Bayes, Price y los fundamentos de la inferencia inductiva. *Cuadernos del CIMBAGE*(15), 33-56.
- Laplace, P. (1774). Mémoire sur la probabilité des causes par les évènements. *Memoires de l'Academie Royale des Sciences Presents Par Divers Savans*, 6, 621-656.
- Laplace, P. (1812). *Théorie Analytique des Probabilités*. Paris: Courcier.
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares en matematicas*. Bogota: Revolucion Educativa.
- MEN. (2006). *Estandares básicos de competencias en matemáticas*. bogotá: Revolucion Educativa.
- Rivadulla, A. (1991). *Probabilidad e Inferencia cientifica*. Barcelona: Anthropos.
- Rojo, A. (2012). *El azar en la vida cotidiana*. Buenos Aires: Siglo Veintiuno.
- Schubring. (2005). *Conflicts between Generalization,Rigor, and Intuition: Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century France and Germany*. New York: Springer.
- Serrano, J. (2003). *Iniciacion a la Estadistica Bayesiana*. Madrid: La muralla.
- Todhunter, I. (1865). *A History of the Mathematical Theory of Probability from the time of Pascal to that of Laplace*. Londres: Macmillan and co.

Yañez, G. (2014). Un acercamiento histórico-didáctico al teorema de Bayes. *Memoria VIII Simposio Nororiental de Matemáticas*. Bucaramanga, Santander: UIS: Universidad De Santander.