



Enseñanza de la transformación de simetría usando tecnologías digitales desde una perspectiva sociocultural

Jessica Lineth Ortiz Rivera
Darlyn Victoria Peña Ramírez

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2022



Enseñanza de la transformación de simetría usando tecnologías digitales desde una perspectiva sociocultural

Jessica Lineth Ortiz Rivera
Darlyn Victoria Peña Ramírez

Marisol Santacruz Rodríguez
Directora del trabajo de grado

UNIVERSIDAD DEL VALLE
FACULTAD DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI
2022

*Dedicado a mis padres, pareja, familiares y
amigos que me apoyaron y motivaron a lo largo
de este camino.*

Jessica Ortiz

*Dedicado a mis padres, a mi pareja, y a todas las
personas que fueron testigos de
mi esfuerzo y que hoy se alegran de mis logros.*

Darlyn Peña

AGRADECIMIENTOS

Mis padres me han enseñado a dar siempre las gracias por las cosas buenas y malas también, pues las malas son enseñanzas. De este modo, en esta tesis quiero agradecer principalmente a Dios por darme la bendición de la vida y la oportunidad de terminar satisfactoriamente mis estudios; a mi amiga y compañera de tesis Darlyn, la cual me acompañó y me dio la mano a lo largo de este camino el cual no fue fácil, en especial en su etapa final; a nuestra directora de tesis Marisol Santacruz por su tiempo, paciencia y por acompañarnos con éxito en esta etapa final.

Agradezco también, a mis padres Ramiro y Amalfy, a mi pareja Juan David, a mis hermanas Johanna y Jihan y demás familiares que me dieron su apoyo incondicional, aunque muchas veces no entendían lo que les hablaba, a esas personitas que me quisieron ver triunfar, pero que por cosas de la vida hoy celebran mis victorias desde el cielo. A todos ustedes, y a los otros tantos que me faltan por nombrar les doy las infinitas ¡Gracias!

Jessica Ortiz

Desde el comienzo anhele este momento, el momento de agradecer, por eso hoy quiero dar gracias en primer lugar a Dios por permitirme culminar de manera exitosa esta etapa de mi vida, a mi amada Univalle por abrirme sus puertas, a nuestra directora Marisol Santacruz por su amor, dedicación, consejos y paciencia a largo de este trabajo.

Agradezco a mis padres Consuelo y Harvey, a mi pareja Anderson Gutiérrez, a mis hermanos Wilson, Nata y Mari, a todos, gracias por su amor y por el apoyo incondicional. Gracias a María Isa por aguantarme cinco años de su vida en la oficina, por las risas y consejos que me fueron formando como persona, a Jess, Geral y Paula por estar siempre presentes en este caminar. A todos, gracias.

Darlyn Peña

RESUMEN

Este trabajo de grado se encuentra en la línea de formación en Tecnologías de la Información y la Comunicación en Educación Matemática de la Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle. En ese sentido, problematiza la enseñanza de la transformación de simetría destacando el papel de los elementos socioculturales y las tecnologías digitales en su aprendizaje.

En el Marco Teórico se toman en consideración algunos elementos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la transformación geométrica de simetría: i) elementos socioculturales en relación con la enseñanza y el aprendizaje de la transformación geométrica de simetría, ii) elementos relacionados con el papel de las tecnologías digitales en la enseñanza de la geometría, iii) posibles errores y/o dificultades en relación con el aprendizaje de la transformación geométrica de simetría, iv) orientaciones curriculares respecto al desarrollo del pensamiento espacial, v) las transformaciones geométricas de simetría desde una perspectiva matemática (definiciones, teoremas y proposiciones), y vi) una revisión de antecedentes locales; todo esto con el fin de inferir categorías de análisis que sustentaran el diseño, implementación y análisis respectivo del experimento de enseñanza.

Por otro lado, se expone el diseño metodológico el cual está conformado por la investigación de diseño enfocada en los experimentos de enseñanza. Posteriormente se presenta el diseño del experimento de enseñanza este contiene las actividades de aprendizaje teniendo en cuenta las categorías de análisis obtenidas del marco teórico, el diseño está compuesto por cuatro actividades de aprendizaje, cada una con su respectiva tarea y finalmente la descripción de las hojas de trabajo.

Posteriormente, se presenta el análisis retrospectivo de la implementación y los resultados obtenidos, en dónde se logra identificar que los estudiantes reconocen los componentes y propiedades de la transformación geométrica de simetría. Se presentan las conclusiones obtenidas a partir del diseño, implementación y análisis retrospectivo del experimento de enseñanza.

Por último, se agregan los anexos referentes a las cinco hojas de trabajo y la rejilla de análisis del diseño del experimento de enseñanza.

Palabras Claves: Transformación geométrica de simetría, elementos socioculturales, tecnologías digitales, experimento de enseñanza.

ABSTRACT

This degree work is in the line of training in Information and Communication Technologies in Mathematics Education of the bachelor's degree in mathematics of the Faculty of Education and Pedagogy of the Universidad del Valle. In that sense, it problematizes the teaching of the symmetry transformation highlighting the role of sociocultural elements and digital technologies in its learning.

Some elements related to the teaching and learning of the geometric symmetry transformation are taken into consideration: (i) sociocultural elements in relation to the teaching and learning of the geometric transformation of symmetry, (ii) elements related to the role of digital technologies in the teaching of geometry, (iii) possible errors and/or difficulties in relation to the learning of the geometric transformation of symmetry, (iv) curricular orientations regarding the development of spatial thinking, (v) geometric transformations of symmetry from a mathematical perspective (definitions, theorems and propositions), and (vi) a review of local antecedents; all this with the purpose of inferring categories of analysis that will support the design, implementation and respective analysis of the teaching experiment.

On the other hand, the methodological design is presented, which is formed by the research design focused on the teaching experiments. Subsequently, the design of the teaching experiment is presented, which contains the learning activities considering the categories of analysis obtained from the theoretical framework, the design is composed of four learning activities, each one with its respective task and finally the description of the worksheets.

Subsequently, the retrospective analysis of the implementation and the results obtained are presented, where it is possible to identify that students recognize the components and properties of the geometric transformation of symmetry. The conclusions obtained from the design, implementation and retrospective analysis of the teaching experiment are presented.

Finally, the annexes referring to the five worksheets and the analysis grid of the design of the teaching experiment are added.

Keywords: Geometric transformation of symmetry, sociocultural elements, digital technologies, teaching experiment.

ÍNDICE

1	Planteamiento y justificación del problema.....	15
1.1.	Sobre el problema de indagación	15
1.2.	Objetivos	19
2	Marco Teórico.....	20
2.1	Algunas consideraciones socioculturales	20
2.2	Sobre el uso de tecnologías digitales en la educación geométrica	23
2.3	El aprendizaje de las transformaciones geométricas de isometría	25
2.4	La mirada curricular sobre las transformaciones geométricas de isometría	27
2.5	La transformación de simetría.....	31
2.5.1	Simetría	32
2.5.2	Traslación.....	35
2.5.3	Rotación	38
2.6	Revisión de antecedentes locales	41
2.7	Hacia la delimitación de categorías de análisis	44
3	Metodología.....	46
3.1	Enfoque metodológico: investigación de diseño.....	46
3.2	Los experimentos de enseñanza	48
3.2.1	Fases del diseño metodológico.....	49
4	Diseño de las actividades de aprendizaje	51
4.1	Organización de las actividades de aprendizaje	51
4.1.1	Actividad de aprendizaje 1: Tarea 1 El balanzón.....	57
4.1.2	Actividad de aprendizaje 2: Tarea 2 La abuela	61
4.1.3	Actividad de aprendizaje 3: Tarea 3 El lagarto	65
4.1.4	Actividad de aprendizaje 4: Tarea 4 La Estrella 1	70
4.1.5	Actividad de aprendizaje 4: Tarea 5 La estrella 2	75
5	Análisis retrospectivo de la implementación.....	79
5.1	Desarrollo de la implementación.....	79
5.2	Análisis retrospectivo actividad de aprendizaje 1	81
5.3	Análisis retrospectivo actividad de aprendizaje 2	88

5.4	Análisis retrospectivo actividad de aprendizaje 3	95
5.5	Análisis retrospectivo actividad de aprendizaje 4	105
5.6	Principales resultados o resumen de los resultados.....	114
	Referente al uso de TD y aspectos socioculturales para el aprendizaje de la transformación de simetría	115
	Diseño de las Actividades de Aprendizaje	118
	Implementación de las Actividades de Aprendizaje.....	119
6	Conclusiones.....	121
	Referencias.....	126
7	Anexos.....	130

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Mochilas con <i>Háku</i> y objeto natural que representan (Aroca, 2007, p. 67)	21
Figura 2 Coherencia vertical y horizontal basado en MEN (2006). Construcción propia.	28
Figura 3 Reflexión de un punto (Godino y Ruiz, 2002).....	33
Figura 4 Reflexión de un punto. (Yaglom, 1962)	33
Figura 5 Reflexión de puntos en una figura. (Yaglom, 1962).....	33
Figura 6 Suma de reflexiones en rectas paralelas. (Yaglom, 1962).....	34
Figura 7 Suma de reflexiones en rectas que se cortan (Yaglom, 1962)	35
Figura 8 Traslación de un triángulo. (Godino y Ruiz, 2002)	35
Figura 9 Traslación de un segmento y un punto. (Clemens, et al., 1998).....	36
Figura 10 Traslación de un punto (Yaglom, 1962)	37
Figura 11 Traslación de puntos en una figura. (Yaglom, 1962)	37
Figura 12 Suma de dos traslaciones (Yaglom, 1962).....	38
Figura 13 Rotación de un rectángulo. (Godino y Ruiz, 2002)	38
Figura 14 Rotación de un punto. (Yaglom, 1962).....	39
Figura 15 Rotación de un conjunto de puntos. (Yaglom, 1962)	39
Figura 16 Suma de una traslación y una rotación (Yaglom, 1962).....	40
Figura 17 Categorías de análisis (Construcción propia)	45
Figura 18 Estructura general de una investigación de diseño (Adaptado de Molina et al. 2011)	48
Figura 19 Organización de las actividades de aprendizaje (construcción propia)	52
Figura 20 Página de inicio Google Sites	55
Figura 21 Presentación de los personajes.....	56
Figura 22 Artesanías comunidad Nasa Yuwe	56
Figura 23 Presentación videos.....	57
Figura 24 Applet del Balanzón.....	57
Figura 25 Tarea del Balanzón	58
Figura 26 Retroalimentación del Balanzón.....	58
Figura 27 Punto 1) Hoja de trabajo 1	59
Figura 28 Punto 2), 3), 4) Hoja de trabajo 1	60
Figura 29 Punto 5) y 6) Hoja de trabajo 1.....	61
Figura 30 Presentación de "La Abuela"	62
Figura 31 Tarea de La Abuela.....	63
Figura 32 Punto 1) ítem a) Hoja de trabajo 2.....	63
Figura 33 Punto 1) Ítem b) y c) Hoja de trabajo 2	64

Figura 34 Punto 2) y 3) Hoja de trabajo 2.....	64
Figura 35 Presentación del chumbe	65
Figura 36 Tarea El Lagarto	67
Figura 37 Punto 1) Hoja de trabajo 3	68
Figura 38 Punto 2) Hoja de trabajo 3	68
Figura 39 Punto 3) Hoja de trabajo 3	69
Figura 40 Punto 5) Hoja de trabajo 3	69
Figura 41 Punto 6) Hoja de trabajo 3	70
Figura 42 Tarea La Estrella parte 1 (Figura Inicial).....	71
Figura 43 Tarea La Estrella parte 1 (Construcción completa)	72
Figura 44 Punto 1) Hoja de trabajo 4	72
Figura 45 Punto 2) Hoja de trabajo 4	73
Figura 46 Puto 3) Hoja de trabajo 4	74
Figura 47 Punto 4) Hoja de trabajo 4	74
Figura 48 Tarea La Estrella parte 2.....	75
Figura 49 Tarea La Estrella parte 2 (Ubicación de los puntos).....	76
Figura 50 Puno 1) Hoja de trabajo 5	77
Figura 51 Puno 2) Hoja de trabajo 5	77
Figura 52 Puno 3) Hoja de trabajo 5	78
Figura 53. Presentación página web e interacción con el Applet.....	82
Figura 54 Producciones de los estudiantes.....	84
Figura 55. Producción respuesta 5) de E2.....	85
Figura 56 Producción respuesta 5) de E3.....	85
Figura 57 Producción respuesta 5) de E5.....	86
Figura 58 Producción respuesta 6) de los estudiantes.....	87
Figura 59 Exploración actividad de aprendizaje 2	89
Figura 60 Construcción de la Abuela de E4 y E5	89
Figura 61 Uso del applet para el desarrollo de la HT.....	90
Figura 62 Producción respuesta 1) de E2.....	91
Figura 63 Producción respuesta 1) de E1.....	92
Figura 64 Producción respuesta 2) de E1.....	93
Figura 65 Producción respuesta 2) de E2.....	93
Figura 66 Producciones de los estudiantes punto 3)	94
Figura 67 Producción tarea 3 E1	96
Figura 68 Producción punto 1) E2	98
Figura 69 Producción punto 1) E4	99

Figura 70 Producciones de los estudiantes punto 2)	100
Figura 71 Producción punto 3) E3	101
Figura 72 Producción punto 3) E2	101
Figura 73 Producción punto 4) E2	102
Figura 74 Producción punto 4) E3	102
Figura 75 Producción punto 5) ES	103
Figura 76 Producción punto 6) ES	104
Figura 77 Producción punto 6) E4	105
Figura 78 Producción punto 1) ES	106
Figura 79 Producción punto 2) primera parte E3.....	107
Figura 80 Producción punto 2) segunda parte E3	107
Figura 81 Producción punto 2) primera parte E4.....	108
Figura 82 Producciones de los estudiantes punto 3)	109
Figura 83 Producción punto 4) segunda parte E1	109
Figura 84 Producciones de los estudiantes.....	111
Figura 85 Producción punto 2) primera parte E3.....	112
Figura 86 Producción punto 2) primera parte E2.....	113
Figura 87 Producción punto 2) primera parte E5.....	113
Figura 88 Producción punto 3) primera parte E1.....	114
Figura 89 Producción punto 3) primera parte E2.....	114
Figura 90 Producción punto 3) primera parte E3.....	114

LISTA DE TABLAS

Tabla 1 Descripción actividades de aprendizaje	52
Tabla 2 Rejilla de análisis	80

1 PLANTEAMIENTO Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

A continuación, presentamos aspectos generales que orientan el planteamiento y justificación del problema de indagación que se propone en este trabajo de grado en Educación Matemática. Se presentan algunas de las problemáticas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la transformación geométrica de simetría en los primeros años de la básica secundaria, el papel de las Tecnologías Digitales (TD) en su aprendizaje y el de los elementos socioculturales en su enseñanza. Finalmente, presentamos el problema de indagación enfocado al diseño e implementación de un experimento de enseñanza de la transformación de simetría en grado séptimo.

1.1. SOBRE EL PROBLEMA DE INDAGACIÓN

Investigaciones en Educación Geométrica (e.g. de Villiers, 1993, Fife et al., 2019) señalan que el aprendizaje de las transformaciones geométricas de isometría es un elemento fundamental en la enseñanza de la geometría en la secundaria (Camargo & Acosta, 2012).

En ese mismo sentido, Moreno-Carretero (1998) señala posibles beneficios que puede llegar a desarrollar un estudiante a través de su aprendizaje de las transformaciones geométricas de isometría, por ejemplo, el *"reconocimiento y valoración de la utilidad de la geometría para conocer y resolver diferentes situaciones relativas al entorno físico"* y la *"confianza en las propias capacidades para percibir el espacio y resolver problemas geométricos"* (p. 149).

Así mismo, Thaqi (2009), citando a Jackson (1975), menciona que una de las razones que fundamenta la enseñanza de las transformaciones geométricas de isometría es de carácter curricular, dado que son aplicaciones de las funciones en la geometría, y este tratamiento es fundamental para todas las matemáticas escolares. En ese mismo sentido, de Villiers (1993) señaló

que el estudio de las transformaciones geométricas de isometría revela la integración del álgebra y la geometría y constituye un eje articulador del currículo escolar.

Un segundo motivo, que justifica su enseñanza y papel central en el currículo, es que las transformaciones proporcionan tareas geométricas estrechamente relacionadas con el desarrollo del pensamiento geométrico, por ejemplo, las habilidades de visualización, la orientación espacial, el razonamiento y la resolución de problemas (Camargo & Acosta, 2012).

En relación con el currículo colombiano, los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) mencionan que el aprendizaje de las transformaciones geométricas de isometría se construye a través de la exploración activa del espacio (Vasco, 1992) y modelación del espacio, que está influenciado por las características cognitivas de los estudiantes y por su entorno físico, social, cultural e histórico.

Adicionalmente, de Villiers (1993) señala que, además de los argumentos curriculares arriba mencionados, otras razones que justifican la enseñanza de las transformaciones geométricas de isometría son de orden cultural y se relacionan con el campo de aplicaciones de las transformaciones geométricas de isometría en actividades relacionadas con el diseño, las artes gráficas, la arquitectura, la ingeniería el uso de computadoras, la carpintería y una amplia gama de problemas del mundo real en distintos contextos sociales, incluidas comunidades indígenas (Aroca, 2007 y Robayo, 2021).

En esa perspectiva, Robayo (2021) considera que el aprendizaje de transformaciones geométricas de isometría como la traslación y simetría axial, desde una perspectiva cultural, puede aportar a los estudiantes una mejor comprensión de los efectos de las transformaciones geométricas de isometría sobre las figuras, además, permite que los estudiantes exploren diferentes tipos de figuras, diferentes a las que acostumbran rutinariamente en clase, con un significado cultural.

Estas consideraciones de orden social y cultural, en relación con la enseñanza de la transformación geométrica de simetría, se traducen en un reto profesional importante para los profesores de matemáticas, al respecto, Arceo (1999) señala cómo, a pesar de que la mayoría de los profesores de matemáticas reconocen que la geometría está fuertemente relacionada con el contexto social y cultural de los estudiantes, se enseña como algo estático y desligado de la realidad.

Así pues, desde un punto de vista sociocultural, la enseñanza de la geometría, y en particular de las transformaciones geométricas de isometría, también incluye una reflexión respecto al papel que juegan las herramientas, incluidas las tecnologías digitales, en la actividad geométrica. En ese sentido, Thaqi (2009) señala que la enseñanza de las transformaciones geométricas de isometría, desde un punto de vista sociocultural, tiene que estar relacionada sobre cómo los estudiantes usan herramientas para desarrollar el pensamiento y actuar en su propio entorno de práctica o contexto social y cultural.

En ese mismo sentido, Radford (2016) destaca que las teorías socioculturales han aportado nuevas posibilidades para llevar el contenido matemático a los estudiantes de tal forma que pueden comprenderse de manera más sencilla las dimensiones sociales y culturales a la que pertenece cada uno de ellos. Así mismo, Radford (2016) señala que la incorporación de elementos socioculturales en la educación matemática es reconocer que los estudiantes son producto de una cultura, la cual influye en su forma de pensar, actuar, sentir, imaginar.

Esta relación entre los aspectos socioculturales y el uso de Tecnologías Digitales (TD) ha sido discutido por Palmas-Pérez -Pérez (2018) quien señala que los conocimientos matemáticos se pueden representar a través de diferentes herramientas que nos ayudan en la reflexión de las ideas matemáticas a un nivel institucional y social y, también, en un nivel didáctico y cognitivo. Es decir, que el uso de TD en la enseñanza de las matemáticas puede llegar a fortalecer la manera

en cómo nos relacionamos con las matemáticas en la vida cotidiana y en contextos sociales y culturales diversos.

Adicionalmente, Palmas-Pérez -Pérez (2018) plantea posibles aportes de las TD a la educación matemática desde una perspectiva cultural, señalando que las TD posibilitan oportunidades de crear un vínculo entre los elementos matemáticos de la cultura con las ideas matemáticas socialmente reconocidas que se movilizan en la computadora, a través de nuevas maneras de hacer matemáticas, y, por ende, nuevas maneras de actuar sobre ellas.

Por otro lado, en relación con el papel de las TD, por ejemplo, la Geometría Dinámica (GD), en el aprendizaje de las transformaciones geométricas de isometría, Battista (2008), citado por Sinclair & Bruce (2015), señala que las TD permiten a los estudiantes investigar las formas y sus transformaciones indagando la esencia de las propiedades (invariantes), más allá que la simple comparación de formas, como se hace en la enseñanza tradicional.

En esa perspectiva, un estudio experimental realizado por Guven (2012) se mostró que la GD tiene efectos positivos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas de isometría, pues permite que el estudiante pueda visualizar las diferentes transformaciones que realiza, recibiendo una retroalimentación inmediata por parte de la computadora, y así, aportar en su comprensión de las transformaciones geométricas de isometría.

Considerando lo anterior, en este trabajo de grado se problematiza la enseñanza de las transformaciones geométricas de isometría, considerando el papel de las tecnologías digitales y elementos socioculturales, para ello se propone una intervención en el aula a través de un experimento de enseñanza (Molina et al, 2011), entendido como una modalidad de investigación de diseño, en la cual se estudian las características de la intervención didáctica y se valida a través del análisis retrospectivo de su implementación.

Así pues, se ha pensado y planteado la siguiente pregunta con la cual pretendemos recoger las ideas mencionadas anteriormente.

¿Qué elementos teóricos y metodológicos fundamentan el diseño, implementación y análisis retrospectivo de un experimento de enseñanza de la transformación geométrica de simetría, para estudiantes de séptimo grado, desde una perspectiva sociocultural?

Como preguntas complementarias, proponemos:

- 1. ¿Qué elementos socioculturales favorecen el aprendizaje de la transformación geométrica de simetría en estudiantes de séptimo grado?*
- 2. ¿Qué papel juega el uso de geometría dinámica en el diseño de un experimento de enseñanza de la transformación geométrica de simetría?*

1.2. OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo general

- Fundamentar el diseño, implementación y análisis retrospectivo de un experimento de enseñanza para la transformación de simetría a partir de elementos socioculturales y el uso de geometría dinámica con estudiantes de séptimo grado.

1.2.2 Objetivos específicos

- Identificar aspectos socioculturales involucrados en el diseño de un experimento de enseñanza para la transformación simetría en grado séptimo.
- Reconocer el papel que juegan las tecnologías digitales en relación con el aprendizaje de la transformación simetría en contextos socioculturales.
- Analizar retrospectivamente el diseño del experimento de enseñanza a partir de su implementación con un grupo de estudiantes de séptimo grado.

2 MARCO TEÓRICO

A continuación, se presentan algunas de las ideas que fundamentan el Marco Teórico que corresponde a una revisión de la literatura especializada, igualmente se presentan algunos antecedentes de trabajos realizados en nuestro contexto local, los cuales nos permiten inferir unas posibles Unidades de Análisis que orienten el experimento de enseñanza. Iniciamos estas consideraciones teóricas a partir de una primera fundamentación respecto a elementos socioculturales en relación con la enseñanza de las transformaciones geométricas de isometría, y posteriormente, se presentan algunos elementos en relación con el papel de las tecnologías digitales en la enseñanza de la geometría.

2.1 ALGUNAS CONSIDERACIONES SOCIOCULTURALES

Desde una perspectiva social y cultural de la enseñanza de las matemáticas, Aroca (2007) señala que el aprendizaje de la geometría escolar se beneficia cuando las ideas que se presentan en el aula gozan de un significado social o cultural para los estudiantes, pues muchas veces éstos no encuentran una relación entre su contexto y el objeto geométrico que se está presentando en la clase.

En ese mismo sentido, Aroca (2007) señala que esta dificultad deviene en parte de la formación de los profesores de matemáticas, en la cual no se profundiza en su comprensión de la relación entre los objetos geométricos, los contextos culturales y sus diferentes formas de expresión social. Así pues, en su práctica, los profesores de matemáticas no logran fomentar en sus estudiantes la capacidad de relacionar sus propias representaciones socioculturales de un objeto

geométrico con las matemáticas occidentales, lo que conlleva a “imponer conceptos matemáticas occidentales” en contextos culturalmente distintos, que muy probablemente impliquen un fracaso en la enseñanza (Aroca, 2007, p. 31). Por ejemplo, en la Figura 1, Aroca (2007) presenta la relación entre el tiempo y el espacio, relacionándolo con los anillos que la culebra le añade a su cascabel cada vez que cierra un ciclo. En general, la Figura 1 muestra las mochilas *Háku*, en donde se forma un friso de traslaciones.



Figura 1 Mochilas con *Háku* y objeto natural que representan (Aroca, 2007, p. 67)

De este modo, en la escolaridad se debería trabajar más en la recuperación de los saberes matemáticos, autóctonos de grupos culturales propios como los indígenas y afrodescendientes, puesto que estos saberes se han ido perdiendo o se encuentran inmersos en la práctica cotidiana gracias a las matemáticas occidentales (Aroca, 2009; Parra y Caicedo, 2009), en este sentido y a falta de un reconocimiento cultural por parte de la sociedad en general, uno de los propósitos de nuestro trabajo es que los estudiantes reconozcan algunas transformaciones geométricas de isometría inmersas en los diseños de artesanías indígenas propias del Norte del Cauca.

Adicionalmente, se busca hacer un breve recorrido por esta cultura, pues como bien lo dice Jaramillo (2011) el conocimiento puede entenderse como una interpretación que hacen los estudiantes sobre su entorno social, puesto que la educación matemática desde una perspectiva sociocultural asume el conocimiento como una actividad social y cultural donde su producción es resultado de diferentes prácticas sociales.

Complementando lo anterior, Robayo (2021) menciona que un enfoque sociocultural puede aportar al diseño de tareas para la clase de matemáticas ya que aporta diferentes posibilidades a los estudiantes de relacionar lo que aprenden con su contexto sociocultural, logrando que el contenido matemático se llene de sentido y significado.

Así pues, Blanco (2011) hace énfasis que en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas no sólo intervienen factores cognitivos o metodológicos, sino que también aspectos sociales y culturales, como hemos mencionado anteriormente los cuales influyen en el desempeño de los estudiantes en la escuela, es decir, que lo social y lo cultural determinan o influyen en cómo los estudiantes aprenden, a qué objetos matemáticos o geométricos les prestan más atención que a otros, cuando a los estudiantes se les presenta una actividad, una tarea o un tema en el cual encuentre mayor vínculo de la matemática o la geometría con la vida cotidiana.

Con respecto a lo mencionado anteriormente, Blanco (2011) considera que los docentes deben tener respeto por la diversidad cultural del país, y en este sentido tener en cuenta aspectos sociales y culturales del entorno de los estudiantes, que deben ser receptivos al pensamiento matemático que circula fuera del salón de clases y retomarlos en la escuela para la enseñanza de las matemáticas escolares.

Adicionalmente, Jaramillo (2011) resalta que en la perspectiva sociocultural de la educación matemática se espera que se haga una recuperación del estudiante y de su desarrollo en el aula de clases, pues como bien señala Abreu (2020) el pensamiento matemático está mediado por herramientas culturales y según el contexto en el que se desarrolle la práctica, un estudiante puede hacer uso de diferentes herramientas culturales para llevar a cabo la resolución de problemas.

En ese mismo sentido, según Planas (2010) diferentes investigaciones han argumentado que lo sociocultural y lo cognitivo se complementa, puesto que no podemos pensar en las

matemáticas como elementos pertenecientes al contexto de un solo individuo sin ubicarlo antes en un contexto con diferentes influencias (históricas, sociales, culturales) que explican sus acciones; de otro lado, no tiene sentido ubicarse en la actividad matemática enfocada en el contexto sociocultural sin considerar las particularidades cognitivas de los individuos. Adicionalmente, los enfoques socioculturales nos recuerdan que los objetos o elementos matemáticos a presentar son fenómenos que se explican con situaciones reales, de tal forma que las acciones sobre las prácticas tienen consecuencias en la construcción teórica (Plana, N. 2010).

Desde otra perspectiva, pero continuando la idea sobre aspectos sociales y culturales y la enseñanza de las matemáticas, Palmas-Pérez -Pérez (2018) señala que las Tecnologías Digitales (TD) permiten que personas en un entorno sociocultural hagan uso de herramientas digitales para su propia actividad matemática, incluso por fuera del contexto escolar. El uso de tecnologías digitales en relación con un contexto social y cultural explícito, facilita la apropiación de ideas matemáticas poderosas en diferentes situaciones de la cotidianidad. Finalmente, Palmas-Pérez -Pérez (2018) citando a Geiger, Goos y Dole (2015) señala que las TD en el aula pueden mejorar la manera en que se relacionan las matemáticas escolares con el contexto fuera del aula.

2.2 SOBRE EL USO DE TECNOLOGÍAS DIGITALES EN LA EDUCACIÓN GEOMÉTRICA

Moreno-Armella (2002) considera que las Tecnologías Digitales (TD) son importantes para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría puesto que fomentan la experiencia geométrica del estudiante proporcionando un ambiente para trabajar de manera directa con los objetos matemáticos, pues el estudiante realiza un “proceso de reificación” de dichos objetos y de las relaciones que se pueden evidenciar. Desde esta perspectiva, Moreno-Armella señala que, en especial para la enseñanza de la geometría, las TD le ofrecen al estudiante la posibilidad de indagar

diferentes relaciones, estructuras y representaciones de los objetos matemáticos a través de la exploración y la manipulación de los objetos mediante la herramienta del arrastre (Moreno-Armella, 2002, pp. 89-90).

Así mismo, Jones (2011) señala que el aprendizaje de la geometría usando TD, promueve la intuición visual que se requiere para poder comprender la experiencia del mundo físico, fortalecer habilidades y capacidades de razonar con respecto a un problema y comprender diferentes propiedades de los objetos, no solo por medio del arrastre sino también a partir de la construcción del objeto geométrico (Hoyles & Jones, 1998).

Adicionalmente, Jones (2011) menciona que el uso de TD para la enseñanza de la geometría se fundamenta en proponer tareas que se deben escoger de manera cuidadosa, sugiriendo que estas sean útiles, interesantes y/o sorprendentes para los estudiantes. Adicionalmente, es oportuno que estas tareas le exijan al estudiante una explicación, justificación y razonamiento de su respuesta final, que se sientan en la capacidad de criticar su propia respuesta y la de sus compañeros, en este sentido la Geometría Dinámica (GD) les permiten a los docentes crear tareas en las cuales se promueva las exigencias mencionadas anteriormente.

Finalmente, Sinclair, et al (2016) mencionan que diferentes investigaciones dan cuenta de que el estudio de figuras a través de la Geometría Dinámica (GD) permite que los estudiantes puedan manipularlas y transformarlas, esto los lleva a tener diversas representaciones de una misma figura y que sea necesario nombrar a cada una de ellas. Adicional a esto, Sinclair, et al (2016) señalan que el hecho de enseñar geometría con el método tradicional impide que los estudiantes visualicen de manera clara las transformaciones de rotación y reflexión y que por ende los estudiantes no tienen la posibilidad de hacer preguntas sobre ello, lo cual se puede mejorar con la implementación de las TD, pues estas proporcionan alternativas dinámicas de representaciones,

permitiendo que los estudiantes puedan tener mayores oportunidades para hacer geometría en la clase.

2.3 EL APRENDIZAJE DE LAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS DE ISOMETRÍA

En relación con el aprendizaje de las transformaciones geométricas de isometría en la escuela, Vasco (1992) señala que la transformación de traslación le resulta más fácil de aprender a los estudiantes, mientras que las principales dificultades se presentan con la transformación de reflexión, debido a que esta transformación no se puede realizar directamente con material concreto, es decir que los estudiantes deben recurrir a la imaginación para la comprensión de dicha transformación, posteriormente señala que los espejos, láminas, calcado de papel entre otros elementos, ayudan al cerebro a interiorizar esta transformación pero no es posible suplantarlos.

En ese mismo sentido, Vasco (1992) hace una invitación a dejar de pintar figuras estáticas en el tablero, y cambiarlo por la exploración del espacio de forma activa, con movimientos del propio cuerpo, objetos, juguetes entre otros elementos que permitan una mejor visualización de estas transformaciones, como ejemplo de lo mencionado anteriormente sería “bailar las rotaciones, los ángulos internos y externos de los triángulos y los cuadriláteros, bailar las traslaciones y los deslizamientos” como lo llama el autor.

En esta perspectiva, Moreno-Carretero (1998) considera que las transformaciones geométricas de isometría están relacionadas con movimientos físicos de objetos geométricos, en ese sentido se entiende que la vida y el movimiento son inseparables, es decir, que los fenómenos naturales y las actividades humanas tienen un elemento en común y es que, los objetos del espacio se mueven de un lugar a otro, es decir, se transforman. En ese sentido, se puede reconocer la diferencia entre fenómeno y concepto matemático, el cual, puede contener diferentes dificultades

como por ejemplo identificar como iguales todas las transformaciones, donde el resultado es el mismo a pesar de que el recorrido que hacen las figuras sea diferente.

Por su parte, Jaime y Gutiérrez (1996) identifican algunos errores y dificultades que pueden presentar los estudiantes en el aprendizaje de las transformaciones geométricas de isometría. En relación con el aprendizaje de la reflexión se pueden presentar dos tipos de errores, el primero está enfocado con la identificación de las propiedades que relacionan a una figura con su imagen a través de una reflexión, es decir, el estudiante no contempla el concepto de equidistancia a los ejes y tampoco la perpendicularidad con respecto a los ejes del segmento o la figura. El segundo error está relacionado con la interpretación gráfica de la reflexión, es decir, el estudiante no logra identificar la transformación cuando los ejes de reflexión no están en posición vertical u horizontal.

Jaime & Gutiérrez (1996) señalan que cuando se hace uso del papel cuadriculado en la enseñanza de la reflexión, las cuadrículas conceden prioridad a los ejes de simetría verticales u horizontales lo cual provoca que los errores incrementen cuando los ejes tienen cierto grado de inclinación y la cuadrícula en este caso se convierte en un distractor.

En conclusión, con relación a las dificultades en el aprendizaje de las transformaciones geométricas de isometría se evidencia que la comprensión de los conceptos como ángulos, equidistancia, entre otros, juega un papel importante para la interpretación de las representaciones gráficas. El tipo de recurso empleado para la visualización de las transformaciones puede generar cierto grado de dificultad para los estudiantes, pues deben hacer un esfuerzo mayor para comprender una transformación.

2.4 LA MIRADA CURRICULAR SOBRE LAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS DE ISOMETRÍA

Una revisión a la propuesta curricular colombiana respecto a las transformaciones geométricas de isometría, remite inicialmente a Vasco (1992) y su propuesta de geometría activa como estrategia pedagógica para la enseñanza de la geometría escolar. Según Vasco (1992) el aprendizaje y la enseñanza de la geometría inicia desde actividades sencillas, como los movimientos del cuerpo, de los objetos y juguetes, puesto que es una forma de acercar a los estudiantes a la idea de movimiento de las figuras en el espacio y en el plano (Vasco, 1992, p. 4). Esta geometría activa propuesta por Vasco (1992) invita a no llenar el tablero de figuras muertas y símbolos estáticos, sino a mantener el aspecto activo y dinámico de la geometría.

En ese mismo sentido, los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) señalan que en la enseñanza de las transformaciones geométricas de isometría se trata entonces de identificar los movimientos que conservan la dirección en el plano, cuales conservan el orden cíclico de sus vértices, la orientación en el plano desde los movimientos del propio cuerpo, todo eso sin antes haber dado una definición verbal ni formal de las transformaciones. Además, mencionan que *“gran parte de la geometría escolar se ha ocupado del movimiento de figuras geométricas desde una posición a otra, y de movimientos que cambian el tamaño o la forma. El estudio de las transformaciones de figuras ha ido progresivamente primando sobre la presentación formal de la geometría, basada en teoremas y demostraciones y en el método deductivo”* (MEN, 1998, p. 40).

Por su parte, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), señalan que la enseñanza de las matemáticas exige una coherencia vertical y horizontal, entendiendo coherencia vertical como la relación de un estándar específico con los demás estándares que corresponden al mismo pensamiento en los otros conjuntos de grado, y, la coherencia horizontal alude a la relación de un estándar específico con los estándares

correspondientes a las otras expresiones del pensamiento matemático que se encuentran en el mismo conjunto de grados.

Teniendo en cuenta lo anterior, para el objetivo central de este trabajo se tendrá en cuenta el siguiente estándar, el cual corresponde al pensamiento espacial en el grupo de grados de sexto a séptimo: “Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte”. (MEN, p 84). Con el fin de esquematizar el análisis curricular se elaboró la Figura 2.2 donde presentamos la coherencia vertical y horizontal en relación con la enseñanza de las transformaciones geométricas de isometría.

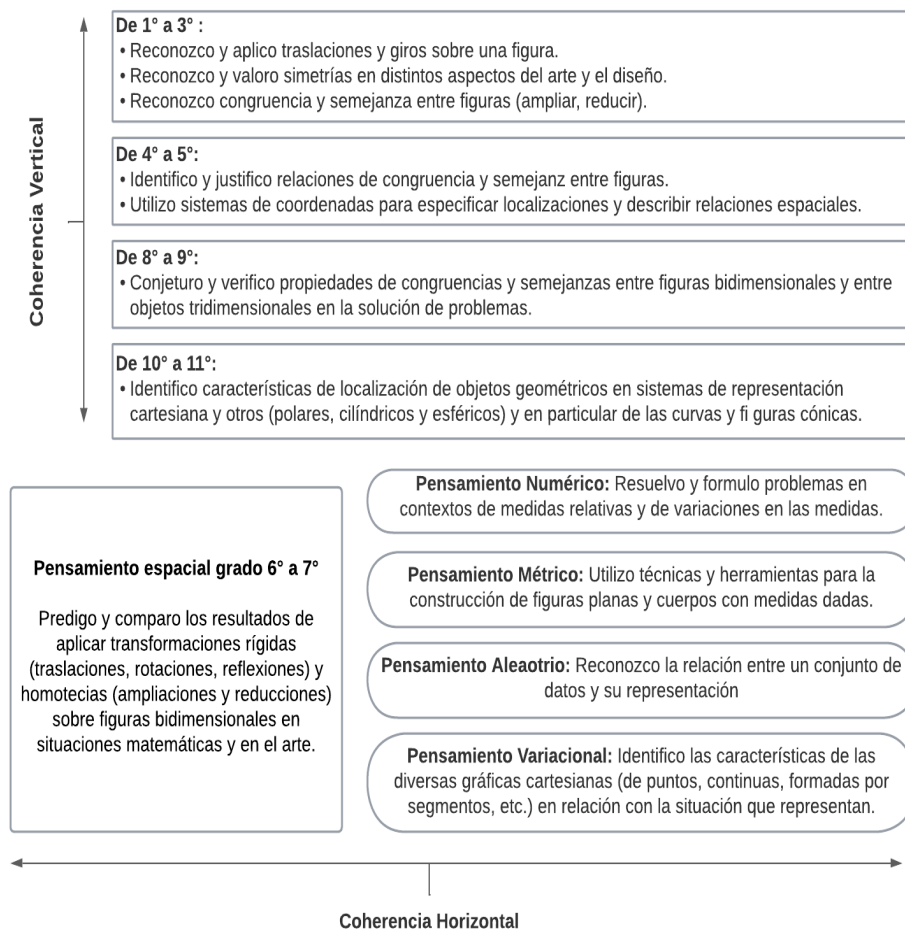


Figura 2 Coherencia vertical y horizontal basado en MEN (2006). Construcción propia.

Como se muestra en la Figura 2, en relación con la **coherencia vertical**, en el conjunto de grados 1° a 3°, los Estándares proponen que los estudiantes reconozcan los efectos de las transformaciones geométricas de isometría como la traslación, rotación y simetría, sobre las figuras geométricas, y así mismo, que logren reconocer la congruencia y semejanza de figuras geométricas como el efecto de dichas transformaciones. En 4° a 5° los estudiantes comienzan a construir argumentos con respecto a la congruencia y semejanza de figuras y además comienzan a hacer uso del plano cartesiano, lo cual es pertinente para aplicar las transformaciones.

Posteriormente, en el conjunto de grados de 8° a 9°, se propone que los estudiantes comiencen con la verificación de propiedades que cumplen la congruencia y semejanza de las figuras. Finalmente, de 10° a 11° se espera que los estudiantes identifiquen características de localización de objetos geométricos haciendo uso del plano cartesiano.

En relación la **coherencia horizontal** en el conjunto de grados 6° y 7°, el pensamiento espacial se relaciona con el pensamiento numérico, puesto que, a partir de las representaciones gráficas de las transformaciones los estudiantes pueden resolver y formular problemas estimando las medidas de las figuras, con el pensamiento métrico los estudiantes comienzan con la construcción de figuras geométricas a partir de diferentes herramientas.

En relación con el pensamiento aleatorio, los estudiantes de grado 7°, pueden reconocer la relación entre los datos de un problema y su representación, en este caso, cuando resuelven problemas geométricos que involucran transformaciones geométricas de isometría, lo cual les permite identificar diferentes datos y/o información necesaria para su resolución, e interactuar con distintas representaciones visuales y simbólicas.

Por último, respecto al pensamiento variacional los estudiantes pueden llegar a reconocer que las transformaciones geométricas de isometría se pueden entender funciones que operan sobre

el plano, es decir, que le asignan a cada punto de una figura inicial un único punto en la figura imagen, y finalmente, brindarles a los estudiantes la posibilidad que, en etapas posteriores de su escolaridad, puedan relacionar las transformaciones geométricas de isometría con sus respectivas representaciones matriciales.

En una revisión de los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) (MEN, 2016), en relación con las transformaciones geométricas de isometría, se espera que los estudiantes de grado séptimo alcancen el siguiente aprendizaje: *“Observa objetos tridimensionales desde diferentes puntos de vista, los representa según su ubicación y los reconoce cuando se transforman mediante rotaciones, traslaciones y reflexiones”* (p. 55), y para lo cual se considera que se cumplan las siguientes evidencias de aprendizaje: *“Establece relaciones entre la posición y las vistas de un objeto [...] reconoce e interpreta la representación de un objeto [...] por último, representa objetos tridimensionales cuando se transforman”*.

Por otro lado, desde una mirada curricular internacional, los estándares de la NCTM (2000) señalan que los estudiantes deben explorar las características de giros y deslizamientos, además, se debe analizar las relaciones entre las composiciones de cada una de las transformaciones, esto puede ayudar a los estudiantes con la comprensión de dichas transformaciones y de sus propiedades. Finalmente, estos estándares señalan que implementar las tecnologías y actividades relacionadas con el arte pueden ayudar a dar sentido a las transformaciones geométricas de isometría y a sus propiedades, puesto que los estudiantes indagan sobre dichas relaciones a través del dibujo, de la medición, la visualización, la clasificación de los objetos geométricos, etc.

Teniendo en cuenta que las transformaciones geométricas de isometría están presentes en muchos ámbitos sociales, la NCTM (2000) (citado en Thaqui, 2009) sugiere su enseñanza desde los primeros años de escolaridad, teniendo en cuenta que los niños adquieren capacidades de

visualización por medio de diferentes experiencias con objetos geométricos que les permite girarlos y realizar dobleces.

Los estándares presentados por la NCTM (2000) señalan que de 6° a 8 ° los estudiantes deben “aplicar las transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas”¹ lo cual los lleva a lograr las siguientes expectativas:

1. Describir tamaños, posiciones y orientaciones de formas bajo transformaciones informales tales como volteretas, giros, deslizamientos y escalas;
2. Examinar la congruencia, similitud y simetría lineal o rotacional de objetos usando transformaciones.

En conclusión, anteriormente se han presentado una serie de orientaciones curriculares las cuales establecen aspectos y conceptos que se deben tener en cuenta en el desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos, como los movimientos, la orientación, entre otros aspectos. adicionalmente brinda elementos a considerar para el desarrollo del diseño de un experimento de enseñanza.

2.5 LA TRANSFORMACIÓN DE SIMETRÍA

A continuación, presentamos algunos aspectos que fundamentan la caracterización de la simetría como transformación geométrica de isometría y su relación con las transformaciones de traslación y rotación. En relación con las transformaciones geométricas de isometría, Clemens, O’ Daffer y Cooney (1998) señalan que: *“La palabra transformación implica que un objeto cambia de alguna manera. En una transformación geométrica, hay que tener en cuenta tres puntos: 1. La figura original. 2. Una regla u operación que describa el cambio, y, 3. La figura que resulta*

¹ Todas las referencias de la NCTM (2000) corresponden a una traducción libre del inglés realizada por las autoras.

después del cambio. El objeto antes del cambio se llama pre imagen y después del cambio, imagen”
(p. 476).

Por su parte, Godino y Ruiz (2002) mencionan que *“una transformación en el plano es un movimiento rígido si y sólo si la distancia entre cualquier par de puntos P y Q es la misma que la distancia entre sus imágenes en dicha transformación, es $PQ = P'Q'$, para todo par de punto P y Q .”*

Adicionalmente, Yaglom (1962)² señala que las transformaciones de isometría, de las cuales hacen parte las simetrías (o reflexiones), las traslaciones y las rotaciones, son un grupo de transformaciones en las cuales se mantiene la congruencia de las figuras planas, es decir a cada punto A se le asigna un solo punto A' y a un punto B un solo punto B' de tal forma que las distancias entre A y B y de A' y B' son iguales

2.5.1 Simetría

Godino y Ruiz (2002) definen una reflexión como un movimiento rígido sobre el cual se debe fijar una recta l en el plano y se halla para cada punto P del otro punto P' tal que el segmento PP' es perpendicular a la recta l y la distancia de P y P' a l es la misma, se dice entonces que l es la mediatriz de dicho segmento. En la Figura 3 se muestra como el punto P se transforma en P' a través de una reflexión que está dada por la recta l .

² Todas las referencias de Yaglom (1962) corresponden a una traducción libre del inglés realizada por las autoras.

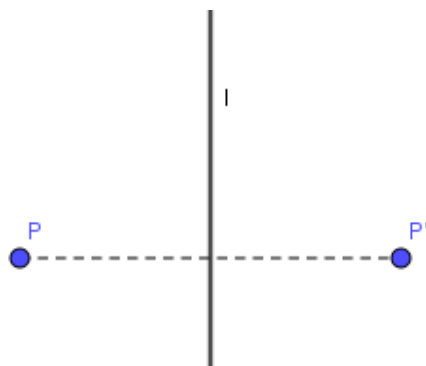


Figura 3 Reflexión de un punto (Godino y Ruiz, 2002).

Según Yaglom (1962), un punto A' es la imagen de un punto A por medio de la reflexión en una recta l la cual es conocida como eje de simetría, si el segmento AA' es perpendicular a la recta l y l es mediatriz del segmento AA' (figura 4). Si el punto A' es la imagen de A en l , entonces, A será la imagen de A' en la misma recta l de manera inversa, por tanto, se dice que A' es simétrico a A con respecto a la recta l (figura 5).

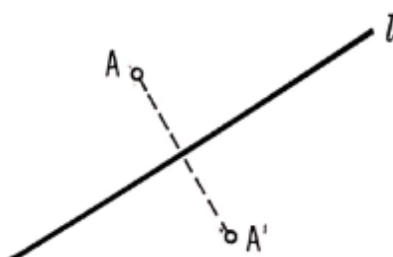


Figura 4 Reflexión de un punto. (Yaglom, 1962)

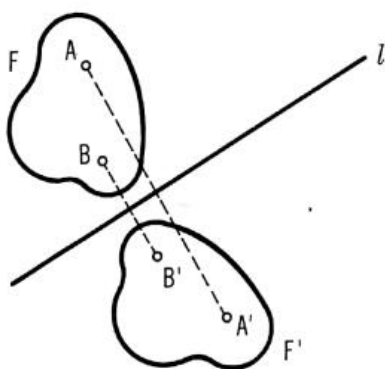


Figura 5 Reflexión de puntos en una figura. (Yaglom, 1962)

En relación con lo anterior Godino y Ruíz (2002) presentan el siguiente teorema en el cual se puede dar cuenta de la igualdad entre las medidas de ángulos y longitud de segmentos respecto a dos figuras relacionadas por una reflexión.

Teorema 2.1 Dada una reflexión sobre una recta se cumple que

- a. La imagen reflejada de un segmento es un segmento de igual longitud.
- b. La imagen reflejada de un ángulo es un ángulo de igual medida.

En ese mismo sentido Yaglom (1962) menciona las siguientes proposiciones y teoremas con respecto a la transformación reflexión:

Proposición 2.1 La suma de dos reflexiones en una misma línea es la transformación identidad (Figura 4).

Proposición 2.2. La suma de dos reflexiones en rectas paralelas es una traslación en la dirección perpendicular a las dos rectas, a lo largo de una distancia igual al doble de la que las separa (Figura 6).

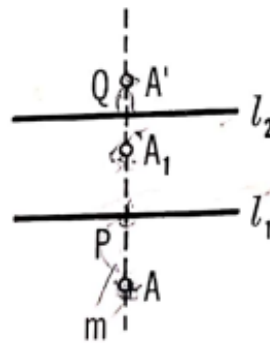


Figura 6 Suma de reflexiones en rectas paralelas. (Yaglom, 1962)

Proposición 2.3. La suma de dos reflexiones en rectas que se cortan es una rotación con centro en el punto de intersección de estas rectas, y que pasa por el doble del ángulo entre ellas (Figura 7).

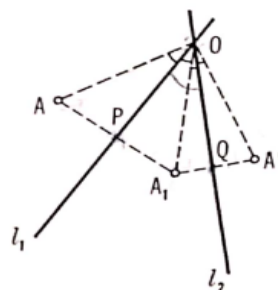


Figura 7 Suma de reflexiones en rectas que se cortan (Yaglom, 1962)

Teorema 2.2 La suma de un número impar de reflexiones es una reflexión o un deslizamiento; La suma de un número par de reflexiones es una rotación o una trans-reflexión.

2.5.2 Traslación

Godino y Ruiz (2002) definen una traslación como un movimiento rígido en donde todos los puntos del plano se desplazan en la misma dirección y en la misma distancia. Una traslación es dada por un vector el cual indica la dirección en la que se desplazan los puntos del plano y además la distancia a la que se deben trasladar.

La figura 8 muestra que el triángulo ABC se transforma en el triángulo $A'B'C'$ como producto de la traslación que está dada por el vector de origen en el punto A y extremo A' .

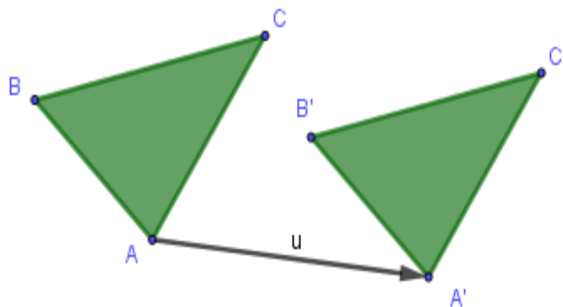


Figura 8 Traslación de un triángulo. (Godino y Ruiz, 2002)

Clemens, O' Daffer y Cooney (1998) definen la traslación como: “Dada una flecha AA' , la **imagen trasladada** de un punto P para la flecha AA' es el punto P' , donde:

- a. $AA' = PP'$
- b. Las flechas AA' y PP' tienen la misma dirección” (P. 484)

La figura 9 muestra que el segmento CD se transforma en el segmento $C'D'$, y el punto P se transforman en P' como producto de la traslación que está dada por el vector de origen en el punto A y extremo A' .

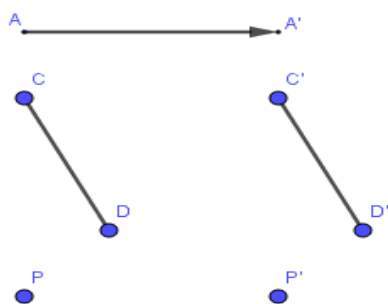


Figura 9 Traslación de un segmento y un punto. (Clemens, et al., 1998)

En ese mismo sentido, para Yaglom (1962) la traslación puede ser expresada como una dirección NN' en el plano, dado un segmento de longitud a . Sea A un punto cualquiera en el plano y sea A' un punto tal que el segmento AA' tiene la dirección NN' y la longitud a (Figura 10). En este caso se dice que el punto A' se obtiene del punto A por medio de la traslación. Así pues, los puntos de una figura F son llevados por la traslación a un conjunto de puntos que forman una nueva figura F' , decimos entonces que la nueva figura F' Se obtiene de F por traslación (Figura 11).

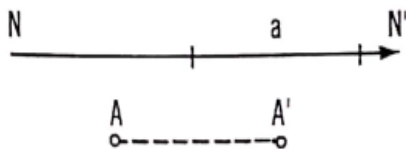


Figura 10 Traslación de un punto (Yaglom, 1962)

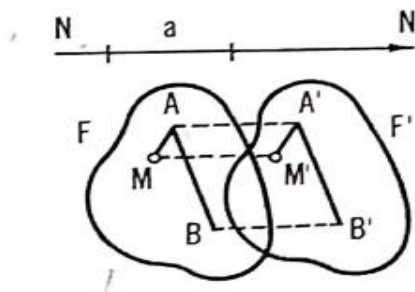


Figura 11 Traslación de puntos en una figura. (Yaglom, 1962)

En relación con lo anterior Godino y Ruiz (2002) presentan el siguiente teorema donde la traslación puede verse como la suma de reflexiones para la cuales se cumplen algunas propiedades:

Teorema 2.3 Si las rectas r y s son paralelas, entonces una reflexión sobre la recta r , seguida de una reflexión sobre la recta s , es una traslación. Además, si A'' es la imagen de A , entonces:

- a. $\underline{AA''} \perp r$
- b. $AA'' = 2d$, donde d es la distancia entre las rectas r y s .

Así mismo, Yaglom (1962) menciona el siguiente teorema relacionado con la suma de traslaciones:

Teorema 2.4 La suma de dos traslaciones es una traslación.

En la figura 12 se muestra el resultado de realizar dos traslaciones una seguida de la otra. Sea $F1$ el resultado de la primera traslación de F y sea F' el resultado de una traslación de $F1$. Existe entonces una sola traslación que lleva a F a la figura F' .

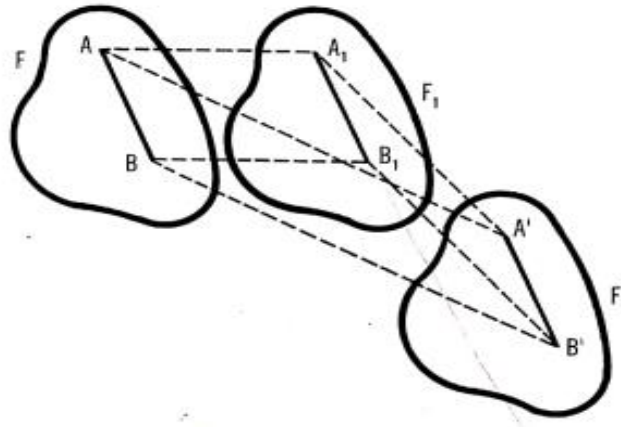


Figura 12 Suma de dos traslaciones (Yaglom, 1962)

2.5.3 Rotación

Clemens, O' Daffer y Cooney (1998) señalan que “una rotación con centro O y ángulo α es una transformación que representa cada punto P de plano en un punto P' :

- P' es el punto central de O , $P' = P$
- si $P \neq O$ entonces $P'O = PO$ y $m\angle POP' = \alpha$.” (p. 488)

La figura 13 muestra cómo el rectángulo $ABCD$ se transforma en el rectángulo $A'B'C'D'$ a través de una rotación con centro O y un ángulo de 120° .

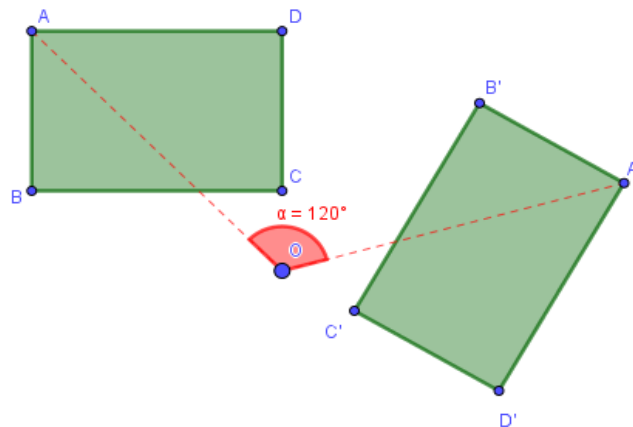


Figura 13 Rotación de un rectángulo. (Godino y Ruiz, 2002)

Según Yaglom (1962) el punto A' se obtiene del punto A mediante un medio giro alrededor de un punto llamado O , si O Es el punto medio del segmento AA' (Figura 14). Así mismo, si el punto A' se obtiene partiendo del punto A mediante un medio giro alrededor del punto O ; esto permite hablar de puntos relacionados por medias vueltas alrededor de un punto dado. Si A' Se obtiene de A por medios giros alrededor de un punto, entonces también se dice que A' se obtiene de A por reflexión en el punto O o que A' es simétrica a A con respecto al mismo punto.

Adicionalmente, el conjunto de los puntos obtenidos de la figura F por un medio giro alrededor del punto O forman la figura F' , obtenida de F por un medio giro y a la misma vez, la figura F Se obtiene de F' , por un medio giro alrededor del punto O (Figura 15).

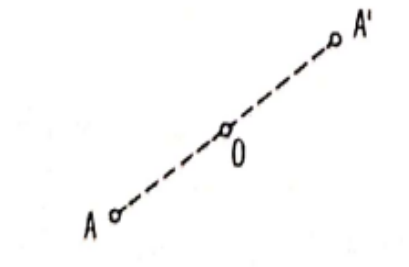


Figura 14 Rotación de un punto. (Yaglom, 1962)

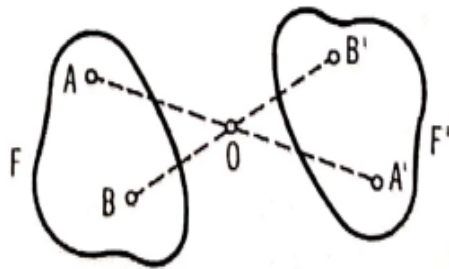


Figura 15 Rotación de un conjunto de puntos. (Yaglom, 1962)

En relación con lo anterior Godino y Ruíz (2002) presentan el siguiente teorema:

Teorema 2.3 Si las rectas r y s se intersecan en el punto O , entonces una reflexión sobre r seguida de una reflexión sobre s , es una rotación. El punto O es el centro de rotación y el ángulo de rotación es 2α , donde α es la medida del ángulo recto o agudo que hay entre las rectas r y s .

Así mismo, Yaglom (1962) señala que: “La suma de una traslación y una rotación sobre un punto O , o de una rotación y una traslación, es una rotación sobre un nuevo punto O' ” (figura 16)(p. 25)

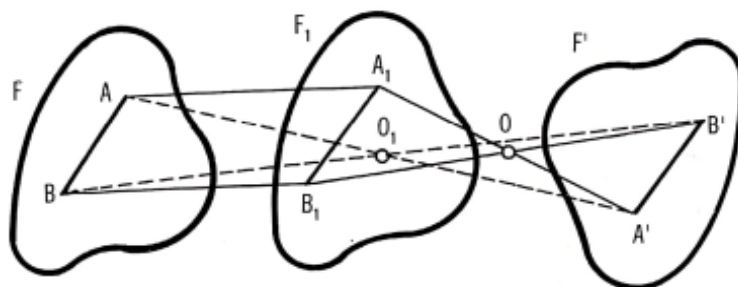


Figura 16 Suma de una traslación y una rotación (Yaglom, 1962)

De acuerdo con lo anterior, se reconocen elementos matemáticos importantes para las transformaciones geométricas de isometría tales como: las propiedades invariantes las cuales permiten evidenciar que los elementos de una figura geométrica no se deforman y conservan sus distancias entre puntos cuando se aplica una transformación, es decir, las figuras se mantienen congruentes. Todo esto nos permite sustentar el diseño del experimento de enseñanza donde se pretende lograr el desarrollo del pensamiento espacial en estudiantes de grado séptimo a partir de las transformaciones geométricas de isometría y sus propiedades.

2.6 REVISIÓN DE ANTECEDENTES LOCALES

En un ejercicio de identificar investigaciones que consideramos importantes tener en cuenta porque brindan algunas recomendaciones para el diseño de propuestas de enseñanza, a continuación, presentamos una revisión de antecedentes locales. Algunos criterios que se tuvieron en cuenta para la selección de los antecedentes fueron: i) trabajos de grado (licenciatura o maestría) del contexto local y/o nacional, ii) trabajos que aborden temáticas asociadas con la enseñanza de las transformaciones geométricas de isometría, el uso de tecnologías digitales y/o integren aspectos socioculturales, y iii) se priorizaron antecedentes que propongan algún tipo de intervención para la enseñanza.

En relación con la enseñanza de las transformaciones geométricas de isometría usando tecnologías digitales, Arcila, Bonilla y Cardona (2012), señalan que muchas de las dificultades de los estudiantes para visualizar y representar objetos geométricos (tanto en el plano como en el espacio) se relaciona con la poca enseñanza recibida de las transformaciones geométricas de isometría. Se identifica que una de las mayores dificultades para el aprendizaje de las transformaciones reside en visualizar sus efectos sobre las figuras. Por lo tanto, que Arcila, Bonilla y Cardona (2012) citando a Villani (2001), señalan que las tecnologías digitales favorecen la visualización matemática y logran ampliar la experiencia geométrica de los estudiantes, a través del uso de construcciones, partiendo de lo más simple, hasta llegar a lo conceptual.

Peña y Riascos (2012) mencionan que *“cuando se hace referencia a la enseñanza y aprendizaje de la geometría de una forma tradicional (lápiz y papel), se encuentra que existe una gran diferencia la hora de trabajar en este entorno y un entorno de geometría dinámica”* (p. 22), pues la geometría dinámica permite que el estudiante manipule los objetos geométricos por medio del arrastre y así evidenciar qué propiedades se conservan. Así mismo, señalan que *“los AGD no*

son sólo una herramienta computacional, sino que son espacios en donde el estudiante tiene más facilidad de explorar, descubrir y argumentar, gracias a que están diseñados de tal forma que permiten manipular la figura sin limitaciones de tiempo ni espacio” (p. 23).

Por su parte, Urbano (2010) estudia la enseñanza de transformaciones geométricas de isometría teniendo en cuenta aspectos socioculturales e integrando tecnologías digitales, propone un diseño de una secuencia de tareas dirigido a estudiantes de grado quinto, en dicho diseño se integra Cabri y la modelación geométrica en las esculturas de San Agustín con el fin de enseñar la simetría axial, facilitando a los estudiantes el acercamiento a la cultura desde diferentes puntos y a la vez apoyados en un AGD. Como resultados se obtuvo que la implementación de un AGD permite a los estudiantes la manipulación de los objetos geométricos por medio del arrastre y así pueden verificar las propiedades.

Gamboa y Ballesteros (2010) analizaron los resultados de un cuestionario aplicado a estudiantes de secundaria para estudiar la percepción sobre el aprendizaje y la enseñanza de la geometría. Una de las respuestas más frecuentes de los estudiantes es que consideran que sus clases de geometría “no son necesarias ni importantes”. Gamboa y Ballesteros (2010) consideran que estos resultados se deben a que las clases de geometría se caracterizan por estar basadas en un sistema tradicional de enseñanza, donde los docentes centran su atención en la aplicación y memorización de fórmulas, lo cual provoca que se dejen de lado los procesos de visualización, argumentación y justificación.

Con respecto a lo anterior Gamboa y Ballesteros (2010) concluyen que la geometría se les ha presentado a los estudiantes por medio de definiciones, fórmulas y teoremas completamente apartados de la realidad, además los ejemplos y ejercicios no tienen relación alguna respecto a su contexto. Esto ha provocado que el aprendizaje de la geometría no sea importante desde la

perspectiva de los estudiantes puesto que no lo ven aplicable en su vida cotidiana. Pues como bien lo mencionan Abrate, Delgado y Pochulu (2006), citados en Gamboa y Ballesteros (2010), si la geometría es enseñada de una manera tradicional y sin elementos socioculturales de contexto, los estudiantes no ven la necesidad de aprender de geometría, y además tienen la percepción de que la geometría es algo difícil y poco útil.

Desde una perspectiva sociocultural, Robayo (2021) propone *“construir una secuencia de tareas para desarrollar el tema de transformaciones geométricas de isometría, haciendo uso de patrones figúrales de la manilla Embera, que además de contribuir al aprendizaje de este contenido, contribuya a desarrollar conciencia sobre valores culturales colombianos y contribuir a construir un país en paz”*, esto considerando que en las instituciones educativas rara vez los docentes tienen en cuenta elementos de la diversidad cultural, en cambio, prefieren situaciones que no están relacionadas con el contexto de los estudiante, lo cual puede perjudicar los procesos de enseñanza y aprendizaje en los estudiantes. Adicionalmente, Robayo (2021) considera que los aspectos socioculturales generan posibilidades de relacionar a los estudiantes con su contexto, y esto permite que los objetos matemáticos estudiados sean ricos en sentido y significado.

En conclusión, en la revisión de algunos antecedentes podemos identificar que las TD son una herramienta que favorecen los procesos de visualización, dado que, los estudiantes pueden observar las diferentes transformaciones que se le aplican a una figura, además, incrementan las experiencias de exploración y de arrastre, así mismo, facilitan las diferentes construcciones que pueden realizar. Adicionalmente, por medio de las TD el estudiante puede dar cuenta de las diferentes propiedades que presentan las figuras y las transformaciones geométricas de isometría. Finalmente, los contextos socioculturales juegan un papel importante en el aprendizaje de las transformaciones

geométricas de isometría puesto que estas se llenan de sentido y significado, además de hacer más interesante el contenido para los estudiantes.

2.7 HACIA LA DELIMITACIÓN DE CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

Tomando como referencia los elementos del Marco Teórico, en esta sección presentamos las categorías de análisis que van a ser tomadas como referencia para el diseño e implementación de un experimento de enseñanza. Para ello, diseñamos un diagrama (ver Figura 17) donde se presentan los elementos que se consideran importantes para tener en cuenta: el aprendizaje de las transformaciones geométricas de isometría, el aprendizaje de la geometría por medio de las TD y los aspectos socioculturales, elementos curriculares que giran en torno al desarrollo del pensamiento espacial para estudiantes de séptimo grado.

Dicho diagrama se divide en tres ítems los cuales son el aprendizaje de las transformaciones geométricas de isometría, transformaciones geométricas de isometría y por último tenemos los aspectos curriculares, estos ítems se dividen a su vez en subtemas.

- **El aprendizaje de la transformación de simetría:** básicamente hace referencia a los errores y dificultades que pueden presentar los estudiantes con respecto a este aprendizaje, adicionalmente como los aspectos socioculturales y las tecnologías digitales permiten superar o minimizar el impacto de dichos errores y dificultades.
- **Aspectos geométricos de las transformaciones geométricas de isometría:** se encuentra la parte matemática, lo que respecta a las propiedades y definiciones específicamente de las transformaciones geométricas de isometría en las cuales nos vamos a centrar.

- **Los aspectos curriculares:** donde encontramos nacionales como los lineamientos curriculares, estándares básicos de competencias y los derechos básicos de aprendizaje e internacionales como el NCTM los cuales nos aportan información curricular para sustentar nuestra propuesta.

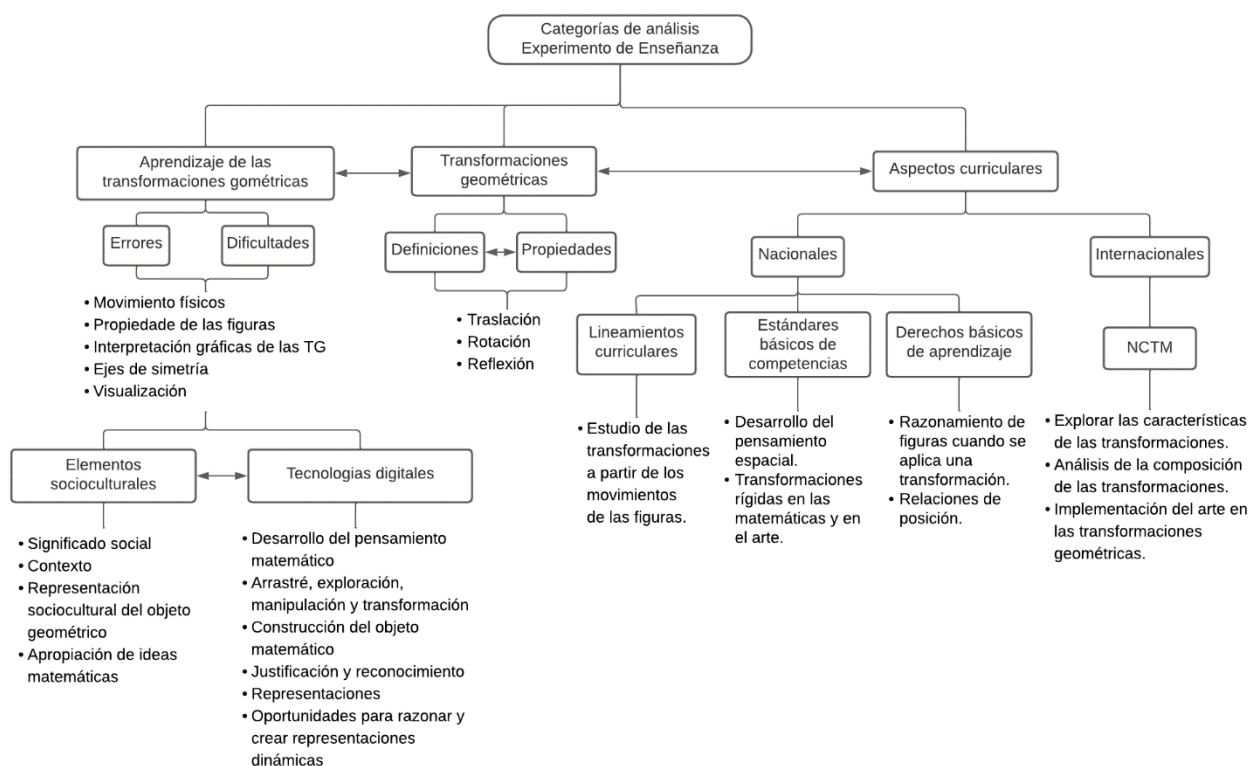


Figura 17 Categorías de análisis (Construcción propia)

3 METODOLOGÍA

En el presente capítulo se presentan algunas ideas que fundamentan la metodología del trabajo de grado el cual está orientado hacia la investigación de diseño en Educación Matemáticas (Molina, et. al 2011) enfocada en el diseño, implementación y análisis de un experimento de enseñanza.

3.1 ENFOQUE METODOLÓGICO: INVESTIGACIÓN DE DISEÑO

En el presente trabajo se abordará la investigación de diseño como enfoque metodológico, entendido como un modelo de investigación principalmente de naturaleza cualitativa, descriptiva e interpretativa sumamente usado en la investigación internacional en Educación Matemática (Molina, et al. 2011). La investigación de diseño tiene como objetivo “analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistemática del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación” (p. 76).

Adicionalmente, Molina et al (2011) señalan que el diseño es un elemento principal para incentivar el aprendizaje, crea conocimiento útil y, además, hace que las teorías de aprendizaje y enseñanza progresen en ambientes complejos, en ese mismo sentido, no se trata solo de crear diseños para lograr aprendizajes, sino que también se busca explicar por qué el diseño funciona y puede ser adaptado a nuevas circunstancias (Molina, et al. 2011).

De acuerdo con Molina et al (2011) la investigación de diseño tiene las siguientes características: i.) Se centran en la caracterización de la situación en toda su complejidad, la mayor parte de la cual no es conocida a priori. Esto se debe a las diferentes variables que se presentan y no pueden ser controladas, es por tanto que es importante señalar cuáles de ellas serán tomadas

como objeto de estudio y cuales son asumidas como elementos que pertenecen al entorno (Molina, et al. 2011). ii.) Persiguen el desarrollo de modelos teóricos empíricamente fundamentados, relativos a un dominio de aprendizaje específico. iii.) El proceso de investigación tiene lugar a través de ciclos continuos de puesta en práctica, análisis y rediseño. iv.) Recolección de registros con el fin de capturar todo el proceso, lo que cada uno de los participantes aprenden a lo largo del desarrollo del experimento. v.) La investigación de diseño implica dos tipos de análisis de datos: análisis continuados que se realizan durante los diferentes ciclos y un análisis final retrospectivo de todos los datos recogidos en el proceso de investigación (p. 77-78).

Con base a lo anterior, Molina et al (2011) señalan que una de las fortalezas de la investigación de diseño es que aporta informes situados sobre el aprendizaje de los estudiantes. Además, desarrolla teorías contextualizadas sobre la enseñanza y el aprendizaje. En ese mismo sentido, se identificaron algunas de las debilidades que tienen dichas investigaciones, una de ellas es que como bien se mencionó anteriormente algunas variables presentes no pueden ser controladas.

Finalmente, Molina et al. (2011) presenta la Figura 18 para esquematizar la estructura general de una investigación de diseño, la cual fue adaptada al experimento de enseñanza particular que se propone en este trabajo de grado:

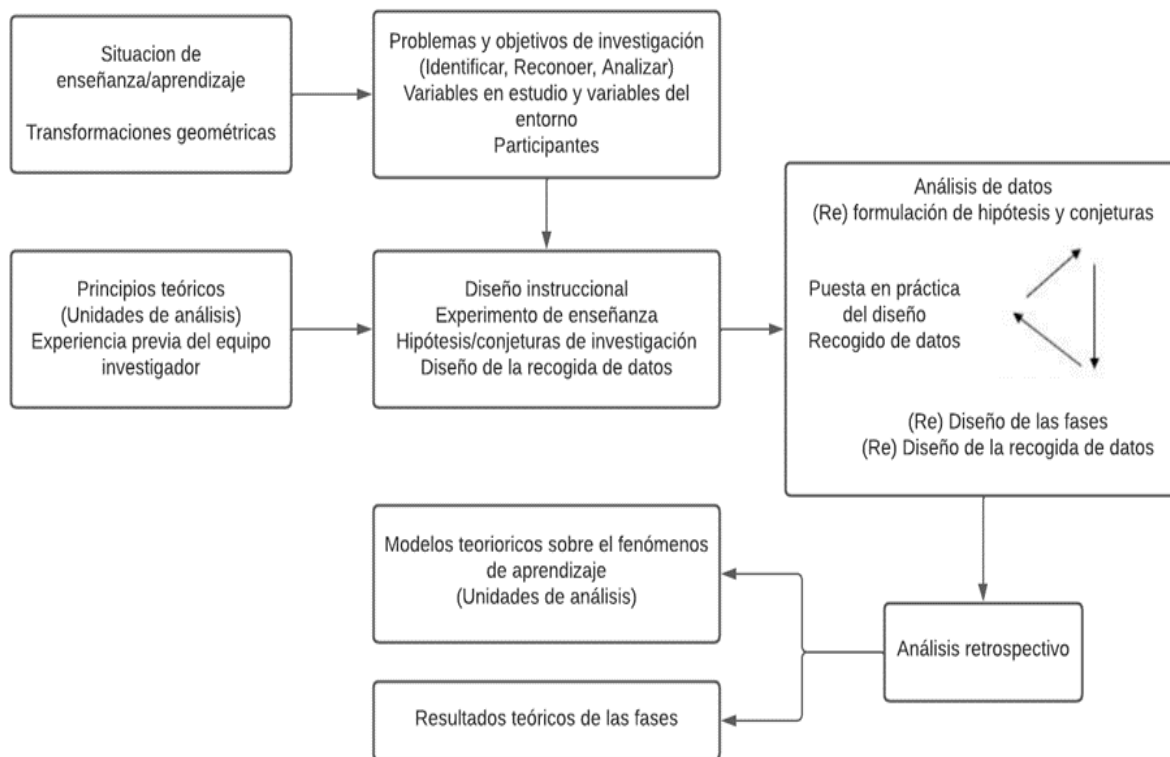


Figura 18 Estructura general de una investigación de diseño (Adaptado de Molina et al. 2011)

3.2 LOS EXPERIMENTOS DE ENSEÑANZA

Siguiendo las percepciones de Molina et. al (2011) un experimento de enseñanza consiste en la secuenciación de intervenciones de enseñanza, en la cual interviene el investigador/profesor. Las intervenciones serán determinadas según los objetivos planteados en la investigación en este caso en relación con el aprendizaje de la transformación de simetría. Con los experimentos de enseñanza se espera que los estudiantes construyan conocimiento y así mismo que los investigadores/profesores construyan conocimiento a partir de la intervención.

En ese mismo sentido, los experimentos de enseñanza deben estar delimitados por unos objetivos de investigación que deben ser planteados desde el momento inicial. El objetivo de dichos experimentos es la elaboración de un modelo de aprendizaje de los estudiantes en relación con un

contenido u objeto en específico en este caso la transformación geométrica de simetría (Molina et al. 2011).

Cobb y Gravemeijer (2008) citado en Molina (2011) señalan que la ejecución de los experimentos de enseñanza está dividida en tres fases: i.) la preparación del experimento, ii.) Experimentación para promover el aprendizaje, es aquí donde se llevan a cabo las intervenciones en el aula, y iii.) La ejecución del análisis retrospectivo de los datos.

En relación con lo anterior, Molina (2011) propone la siguiente tabla 1 para identificar las diferentes fases de un experimento de enseñanza y las acciones que se deben llevar a cabo en cada una de ellas.

3.2.1 Fases del diseño metodológico

Teniendo en cuenta lo anterior, en este apartado presentamos ahora las fases del experimento de enseñanza:

- **Fase 1: Preparación del experimento de enseñanza y diseño del experimento de enseñanza.**

Inicialmente, el experimento se llevará a cabo una revisión de la literatura con el fin de inferir categorías de análisis, que orientan el diseño del experimento de enseñanza, que surge del marco teórico. Adicionalmente, estas categorías de análisis delimitan los objetivos de enseñanza del experimento y el diseño de las tareas matemáticas.

Posteriormente se realizará el diseño del experimento de enseñanza, el cual estará delimitado por unos objetivos, el diseño de la intervención en el aula, las tareas matemáticas y elaboración de hipótesis sobre los posibles resultados

- **Fase 2: Experimentación**

Esta tercera fase se encuentra enfocada en la implementación del experimento y recolección de datos para el respectivo análisis retrospectivo. Para ello se definen unas fuentes de datos con sus respectivos instrumentos y un procedimiento de análisis basado en una rejilla.

- **Fase 3: Análisis retrospectivo**

Por último, se priorizan, clasifican y segmentan los datos para su análisis en la respectiva rejilla y se identifican los resultados del estudio. Adicionalmente, esta fase ofrece la oportunidad de proponer recomendaciones para la enseñanza.

4 DISEÑO DE LAS ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

En este capítulo presentaremos la fundamentación del diseño de las actividades de aprendizaje, sus respectivas tareas y hojas de trabajo para la enseñanza de la transformación de simetría desde una perspectiva cultural.

4.1 ORGANIZACIÓN DE LAS ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

El diseño se organiza en 4 actividades de aprendizaje de la transformación de simetría, cada una compuesta por una tarea (a excepción de la cuarta actividad que tiene dos tareas) para estudiantes de séptimo grado de una Institución Educativa Oficial (IEO) del oeste de la ciudad de Cali. La organización de cada una de estas tareas se explicará con mayor detalle en párrafos más adelante

De manera general, la secuencia de actividades de aprendizaje se enfoca en que los estudiantes puedan identificar la figura inicial a ser transformada y la figura simétrica, reconocer los ejes de simetría y los efectos de la transformación sobre las figuras al interactuar con los diseños de tejidos pertenecientes al pueblo indígena de los *Nasa Yuwe*. Estas actividades de aprendizaje se encuentran en una página web la cual hemos creado en *Google Sites* y haremos más énfasis en párrafos posteriores. A continuación, dejamos el link de la página mencionada anteriormente.

Link: <https://sites.google.com/correounivalle.edu.co/la-reflexion/inicio>

Las actividades fueron pensadas y organizadas mediante una espiral, la cual tiene muchos significados en la *Cosmovisión Nasa*, ya que la espiral representa las etapas de la vida, iniciando en el centro con el nacimiento y continuando con un camino espiral de la vida misma. De este modo, las actividades inician explorando ciertas propiedades de la transformación de simetría que se van desarrollando en espiral, como se muestra a continuación en la Figura 19.

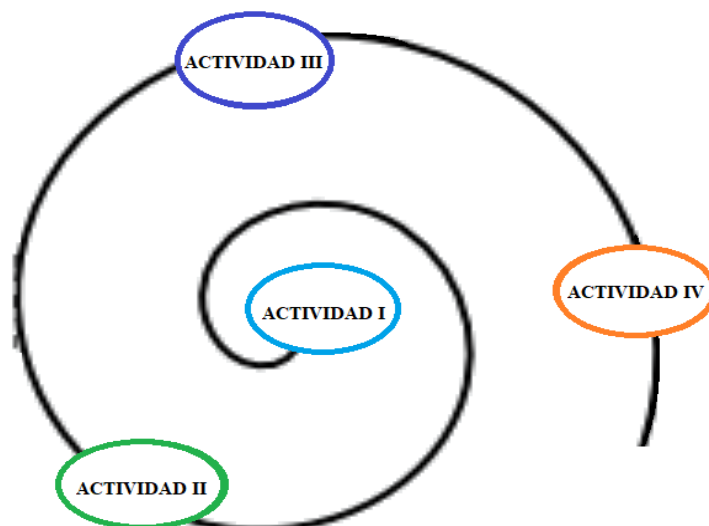


Figura 19 Organización de las actividades de aprendizaje (construcción propia)

A continuación, en la **Tabla 3** se presentan las actividades de aprendizaje en detalle, sus respectivas tareas y la propiedad de la simetría que se trabajó:

Tabla 1 Descripción actividades de aprendizaje

Actividades de aprendizaje	Descripción general de las actividades de aprendizaje	Tareas
Actividad 1: Elementos de la simetría	Se presenta el diseño de un balanzón simétrico. Posteriormente se les presentan tres balanzones los cuales no son simétricos y con ayuda de unos deslizadores deberán reparar estos balanzones logrando que sean simétricos. Con esta primera actividad se busca que los estudiantes identifiquen los elementos geométricos que son característicos de la simetría como figura inicial, eje de simetría y figura final.	T1: El balanzón Esta tarea busca primeramente el acercamiento a los elementos de la simetría. Los estudiantes deberán reconocer que para efectuar una transformación simétrica se debe tener una imagen inicial y un eje de simetría para obtener finalmente una imagen final o imagen simétrica. https://www.geogebra.org/m/ware9xeq
Actividad 2: Las figuras simétricas son congruentes.	Se presenta una imagen con el diseño de “la abuela” propio del pueblo Nasa, y se espera que los estudiantes puedan recrear este diseño partiendo solo de sus figuras iniciales. Los estudiantes deberán organizar	T2: La abuela Esta tarea está enfocada en la propiedad simétrica de la congruencia, es decir, que las figuras transformadas mediante una

	cada figura y los ejes de simetría para efectuar la transformación con ayuda de la herramienta de simetría axial de GeoGebra Con esto se busca que a partir de la exploración los estudiantes identifiquen el movimiento que realiza cada figura y que para aplicar la transformación de la simetría es importante la orientación del eje.	transformación simétrica son congruentes. Por ende, se les pide a los estudiantes que realicen la construcción de este diseño partiendo solo de sus figuras iniciales. Adicionalmente y teniendo en cuenta el trabajo de la tarea anterior el estudiante deberá tener en cuenta el orden en el que se lleva a cabo la aplicación de la transformación. (figura inicial, eje de simetría y figura simétrica) https://www.geogebra.org/m/ucn2xkxr
Actividad 3: Las figuras simétricas son congruentes.	Se inicia con un breve comentario sobre la importancia de los chumbes para el pueblo indígena, luego se presentan las cuatro figuras iniciales que el estudiante requiere para efectuar la construcción del diseño completo de “el lagarto”, para esto los estudiantes se apoyaran de unos deslizadores, es decir, se muestra el diseño completo y otro solo con las figuras iniciales para que ellos con ayuda de los deslizadores identifiquen las figuras, las muevan y las acomoden de tal manera que el diseño quede igual al original. Con esto se busca que los estudiantes reconozcan que las transformaciones se realizan a partir de una figura inicial.	T3: El lagarto En esta tarea al igual que en la tarea anterior se trabaja la propiedad de congruencia con el fin de reforzar lo trabajado anteriormente. Por otro lado, a diferencia de la actividad anterior con esta actividad los estudiantes deberán identificar que al aplicarle la transformación de simetría a una figura esta no cambia, ni en forma ni en tamaño solo cambia la orientación según sea la posición del eje. https://www.geogebra.org/m/u8tqtx
Actividad 4: Un punto puede estar reflejado en dos ejes al tiempo.	Esta actividad se divide en dos tareas la primera consiste en: Presentar una figura inicial para la construcción de “la estrella” mediante un deslizador, los estudiantes deberán observar con atención esta construcción para así poder enumerar los pasos que se necesitaron para esta	T4: La estrella 1 En esta tarea se trabaja la propiedad que dice que un punto se puede reflejar en dos ejes al mismo tiempo. Esto con el fin de que los estudiantes puedan observar e interiorizar que siempre hay que

	construcción del 1 al 6, los cuales fueron escritos previamente y se encuentran en el Applet. Se espera que los estudiantes identifiquen los pasos para aplicar una transformación de simetría y que identifiquen los ejes como elementos cruciales para la aplicación de esta transformación.	buscar la figura más pequeña para aplicar la transformación de simetría en una figura. Como se ha mencionado estas tareas están relacionadas una con la otra, por lo tanto, en esta tarea los estudiantes deberán trabajar con figuras iniciales, ejes de simetría, transformación según la orientación del eje, entre otras cosas. https://www.geogebra.org/m/vrx4kvws
Actividad 4: La distancia de un punto al eje es la misma que del eje al punto imagen.	La segunda tarea de esta cuarta actividad consiste en identificar la ubicación de determinados puntos sobre la misma construcción de “la estrella”. En otras palabras, sobre este diseño, pero en gris se marcarán 5 puntos con 5 colores diferentes y los estudiantes con ayuda de unos deslizadores deberán posicionar los puntos simétricos de estos puntos iniciales, tanto en el eje horizontal como el vertical. Finalmente, se espera los estudiantes reconozcan que cualquier imagen transformada mediante simetría conserva las distancias.	T5: La estrella 2 Por último, esta tarea trabaja la distancia entre puntos y ejes, es decir, que la distancia de un punto al eje es igual a la distancia del eje hacia el punto imagen o punto simétrico. De este modo, los estudiantes reconocerán que la transformación de la simetría conserva la distancia entre punto, eje e imagen. Finalmente, en esta tarea no se trabaja con una figura como tal sino con un punto de toda esta imagen dándole el ultimo nivel de complejidad a toda esta secuencia de actividades. https://www.geogebra.org/m/acgvveaw

Antes de introducir las tareas en la página web dos personajes (ficticios) pertenecientes al pueblo *Nasa Yuwe*, se encargan de realizar una contextualización con respecto a la cultura de este pueblo, ubicación, quien realiza los tejidos, cuáles son los productos tejidos más importantes, entre otras cosas, adicionalmente se encontrarán con tres videos para reforzar lo mencionado en la

narrativa. Los diseños encontrados a lo largo de las cinco tareas son diseños propios del pueblo indígena, cabe aclarar que estos diseños están realizados por nuestra cuenta en la plataforma de GeoGebra, y finalmente se espera que los estudiantes logren identificar la transformación de la simetría con ayuda de estas tareas.

Al ingresar a la página nos encontramos con la imagen de una mujer del pueblo indígena tejiendo, en la esquina superior derecha encontramos los botones de inicio, actividades (el cual se despliega y deja ver las cuatro actividades con sus respectivas tareas), galería y por último referencias como se muestra en la siguiente (**Figura 20**).



Figura 20 Página de inicio Google Sites

Después de esto, dos personajes jóvenes hombre y mujer del pueblo indígena *Nasa Yuwe* los cuales fueron llamados Carlitos y Teresa respectivamente, dan paso a la contextualización y a la narrativa de la página (**Figura 21**).

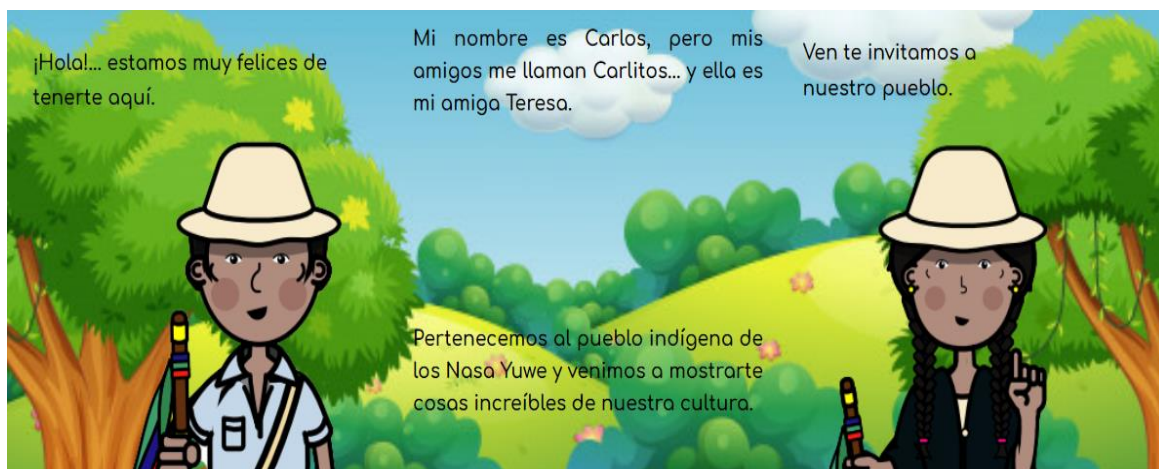


Figura 21 Presentación de los personajes

Luego, Teresa presenta la ubicación de este pueblo mediante un mapa (el norte del cauca) el cual se despliega oprimiendo un botón, posteriormente estos dos personajes comentan con quien viven, cuáles son sus productos tejidos más importantes como lo son los sombreros, las jigras, las jigras kwetanderas y finalmente los chumbes, también mencionan quienes son los encargados de estos tejidos.(Figura 22)

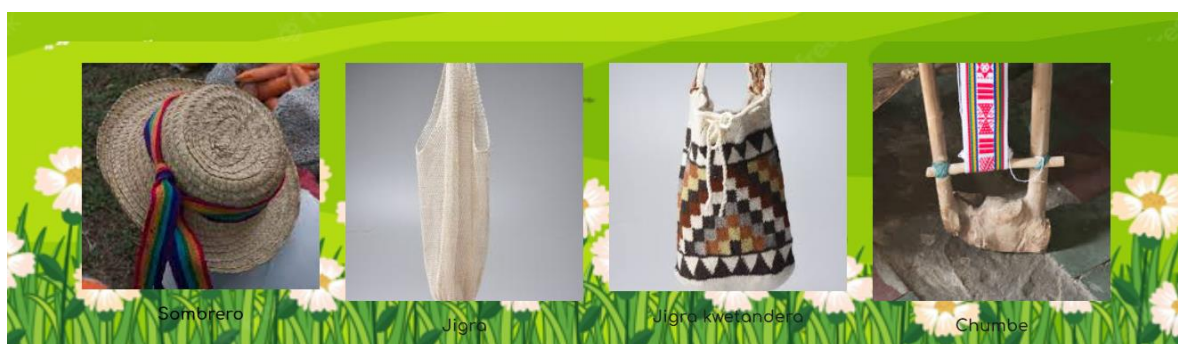


Figura 22 Artesanías comunidad Nasa Yuwe

Finalmente, para concluir y continuar con las actividades se dejan algunos videos (Figura 23) que refuerzan esta información mencionada por los personajes.

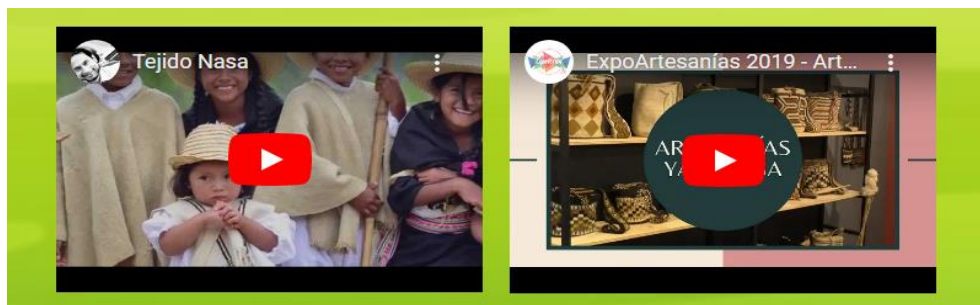


Figura 23 Presentación videos

4.1.1 Actividad de aprendizaje 1: Tarea 1 El balanzón

En la primera tarea de esta secuencia de actividades los estudiantes se encontrarán con el primer símbolo con el cual trabajaran y es llamado balanzón el cual representa “el equilibrio” para el pueblo indígena *Nasa Yuwe*, a partir de esta actividad se empieza a evidenciar la recuperación de grupos culturales como lo mencionan Aroca, 2009; Parra y Caicedo, 2009 en capítulos anteriores. El primer balanzón con el que se encuentran los estudiantes está completamente simétrico como se muestra en la siguiente imagen (ver **Figura 24**).



Figura 24 Applet del Balanzón

Luego de que los estudiantes hayan observado la imagen anterior se pasa a la tarea como tal, en la cual se presentaran tres balanzones los cuales no están simétricos, los estudiantes deberán acomodarlos de tal manera que queden simétricos con ayuda de tres deslizadores respectivamente

asignados (ver **Figura 25**). En este sentido y retomando lo que menciona Palmas-Pérez -Pérez (2018), sobre el uso de las tecnologías digitales en un contexto social y cultural, le damos sentido de modo que ayuda a que los estudiantes se apropien de las ideas matemáticas mediante la manipulación, como se evidencia en esta tarea.

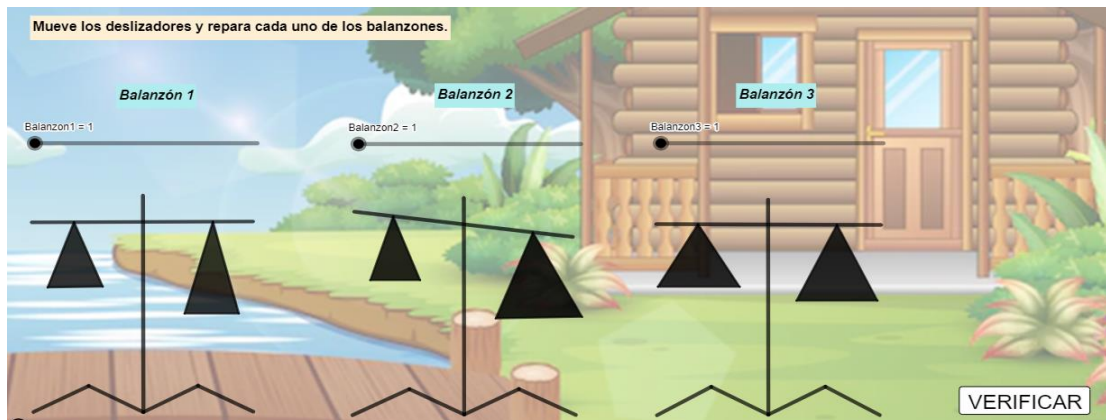


Figura 25 Tarea del Balanzón

Así pues, la manipulación del Applet de GeoGebra y que los estudiantes logren la simetría de los balanzones permiten esta apropiación de las ideas matemáticas. El applet permite verificar las respuestas dadas por los estudiantes como se muestra a continuación (ver **Figura 26**), adicionalmente los estudiantes deben ser conscientes en qué posición cada balanzón queda simétrico pues es información necesaria para la hoja de trabajo correspondiente a esta tarea.

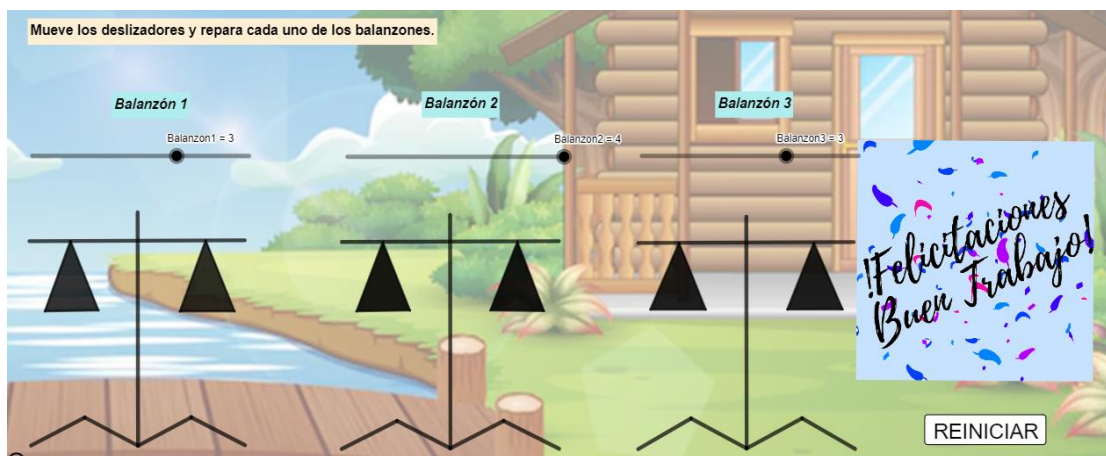


Figura 26 Retroalimentación del Balanzón

Se espera que, al haber introducido la transformación de simetría mediante métodos no tradicionales, permita a los estudiantes lograr la visualización de esta como lo mencionan Sinclair, et al (2016), pues según sus estudios esta es una de las transformaciones en la que presentan más dificultades los estudiantes. A continuación, se presentarán las hojas de trabajo para esta primera tarea, que está compuesta de seis preguntas donde los estudiantes podrán seleccionar, escribir y dibujar sus respuestas con respecto a la organización correcta de los tres balanzones.

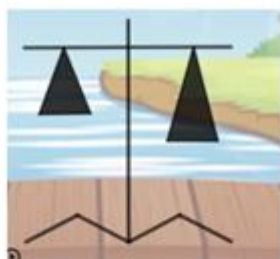
En el primer punto de esta hoja de trabajo (ver **Figura 27**), se les cuestiona a los estudiantes sobre su trabajo en el Applet de GeoGebra, se espera que los estudiantes puedan comentar brevemente cómo llegaron a la respuesta correcta y que justifique la razón por la cual consideran que las posiciones de los balanzones en el Applet son correctas.

1. ¿Cómo sabes que los balanzones quedaron bien? Explica.

Figura 27 Punto 1) Hoja de trabajo 1

En el segundo, tercero y cuarto punto (ver **Figuras 28**) el propósito es el mismo, pues en las tres los estudiantes deben recordar en qué posición cada balanzón es simétrico o se parece al balanzón de la imagen inicial, cada pregunta está respectivamente relacionada con los balanzones que se encuentran en el Applet, el estudiante deberá marcar con una equis (X) en qué posición el balanzón queda simétrico y al igual que en la pregunta anterior se les cuestiona el por qué en esa posición está bien.

2. ¿En qué posición el balanzón 1 queda bien?



- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4

¿Cómo sabes que el balanzón 1 queda bien en esa posición?

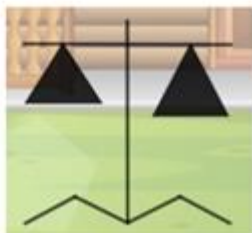
3. ¿En qué posición el balanzón 2 queda bien?



- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4

¿Cómo sabes que el balanzón 2 queda bien en esa posición?

4. ¿En qué posición el balanzón 3 queda bien?



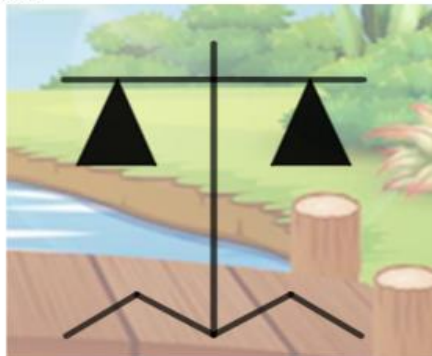
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4

¿Cómo sabes que el balanzón 3 queda bien en esa posición?

Figura 28 Punto 2), 3), 4) Hoja de trabajo 1

En el quinto punto, se muestra la imagen que se presentó al inicio de esta actividad con el fin de que los estudiantes con tres colores específicos (verde, rojo y azul) encierren los tres elementos necesarios para aplicar la transformación de la simetría (imagen inicial, eje de simetría e imagen simétrica). Finalmente, en el sexto y último punto los estudiantes deberán dibujar otros objetos que cumplan con la transformación de la simetría (ver **Figura 29**).

-
5. Encierra con rojo la figura inicial, con verde la figura simétrica y retíñe de color azul el eje de simetría.



6. Dibuja otros objetos simétricos que conozcas.

Figura 29 Punto 5) y 6) Hoja de trabajo 1

4.1.2 Actividad de aprendizaje 2: Tarea 2 La abuela

Posterior a la actividad 1 donde los estudiantes identifican los elementos de simetría, se propone la actividad 2: Tarea 2 la cual consiste en reparar el diseño de “la abuela” empleando ciertas herramientas de GeoGebra que ayudarán a realizar esta construcción satisfactoriamente, para esta tarea se les darán a los estudiantes las figuras iniciales y necesarias para realizar la construcción, así como también los ejes de simetría que deberán organizar de tal manera que sean necesarios, es decir, ya sea horizontal o vertical según la figura que deseen transformar, en este sentido Jaime y Gutiérrez (1996) mencionan que uno de los errores que presentan los estudiantes con respecto a la transformación de la simetría está ligada a los ejes, es decir, cuando no están en posición vertical u horizontal.

Para el caso de esta tarea, los estudiantes tienen la posibilidad de acomodar los ejes de simetría libremente, puesto que los ejes no están sujetos a una orientación como tal, de este modo las TD como dice Moreno-Armella (2002) ofrecen al estudiante la posibilidad de buscar diferentes representaciones de los objetos matemáticos a través de la exploración y la manipulación de los

objetos mediante la herramienta del arrastre, en este caso mediante la exploración y la manipulación deberán acomodar los ejes según sea la conveniencia.

La actividad inicia con la imagen del diseño de “la abuela” el cual está creado por nosotras en un fondo a cuadrícula para simular los puntos de los tejidos de los indígenas (ver **Figura 30**). Este diseño se presenta a color como se muestra a continuación. Después de haber observado la imagen con detalle los estudiantes deberán oprimir el botón “siguiente” para ir a la tarea como tal, Al oprimir el botón se abre otra pantalla y es aquí donde deberán hacer la construcción del diseño anterior con ayuda de la herramienta de simetría axial que suministra GeoGebra.



Figura 30 Presentación de "La Abuela"

En la siguiente imagen (**Figura 31**) se presenta la segunda pantalla de la que se mencionó anteriormente, donde los estudiantes deberán trabajar; aquí encontrarán las figuras iniciales, los ejes de simetría y el diseño que deben recrear, cabe destacar que estas figuras iniciales y el diseño ya no se encuentra a color sino en gris, las figuras para recrear el diseño y los ejes de simetría tienen un movimiento libre, es decir, los estudiantes podrán mover estos elementos en cualquier dirección. El pensamiento matemático está mediado por herramientas culturales como lo afirma Abreu

(2020), así pues, darles a los estudiantes el movimiento libre de estos objetos les permite apoyarse de las herramientas culturales que poseen para dar solución a esta tarea.

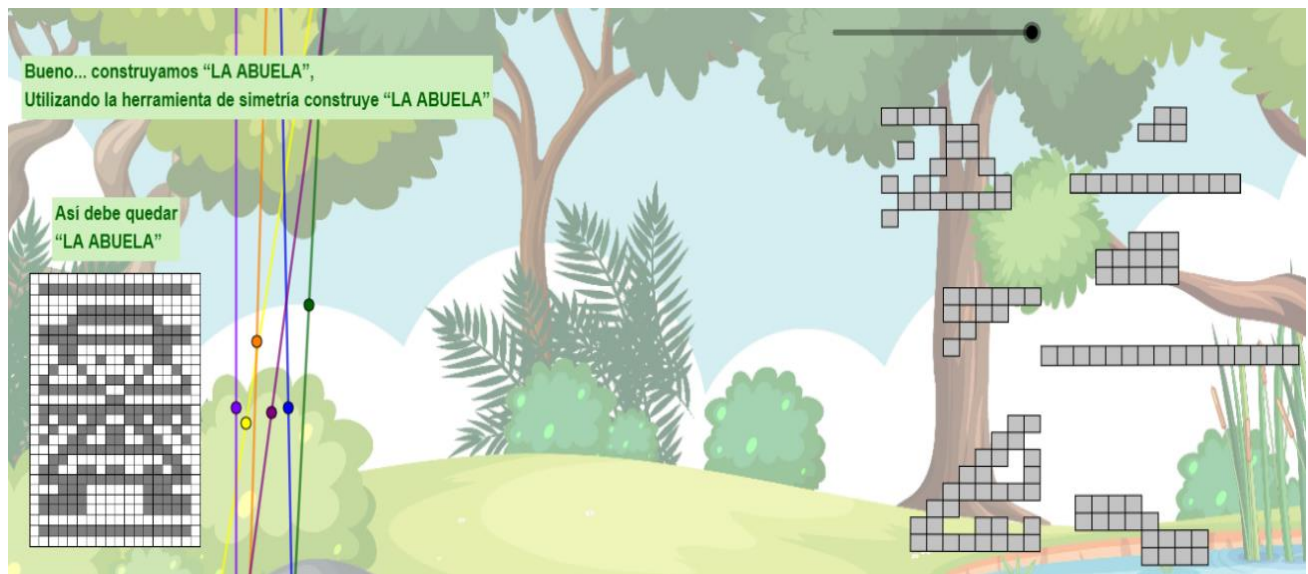
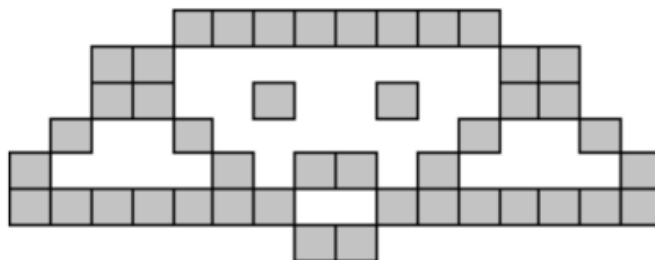


Figura 31 Tarea de La Abuela

A continuación, se presentan las hojas de trabajo para esta segunda tarea, la cual cuenta con tres puntos. El primero esta compuesto por tres items donde los estudiantes deberán dibujar los elementos faltantes para completar la transformación de simetría y escribir el nombre (ver **Figura 32 y 33**).

1. Dibuja y escribe el componente que hace falta en cada una de las imágenes.

a.



En esta figura hacia falta : _____

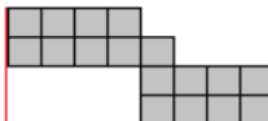
Figura 32 Punto 1) ítem a) Hoja de trabajo 2

b.



En esta figura hacia falta : _____

c.



En esta figura hacia falta : _____

Figura 33 Punto 1) Ítem b) y c) Hoja de trabajo 2

En el segundo punto (ver **Figura 34**), deberán escribir los pasos que se necesitaron para construir el diseño de la abuela en el Applet. Finalmente, en la tercera pregunta los estudiantes deberán dibujar otros objetos que consideren isométricos o que tengan eje de simetría.

2. Escribe cada uno de los pasos que realizaste para crear el diseño de La Abuela.

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____
6. _____
7. _____
8. _____

3. Dibuja otros objetos que conozcas que tengan ejes de simetría.

Figura 34 Punto 2) y 3) Hoja de trabajo 2

4.1.3 Actividad de aprendizaje 3: Tarea 3 El lagarto

Antes de iniciar esta tarea se presenta una breve explicación sobre la importancia de los chumbes para el pueblo indígena Nasa Yuwe, pues Robayo (2021) menciona que los enfoques socioculturales aportan a los estudiantes posibilidades de relacionar lo que aprenden con el contexto sociocultural, por este motivo se brinda una historia previa sobre la importancia de los chumbes y el significado del símbolo con el cual se va a trabajar, esto permite a los estudiantes tener un acercamiento a su cultura y darle significado a lo que van a realizar, también les permite llenar de sentido el contenido matemático que se está trabajando. La **figura 35** hace referencia a la primera pantalla de la actividad.



Figura 35 Presentación del chumbe

La segunda pantalla de esta actividad al igual que en las actividades anteriores corresponde a la tarea, en este mismo sentido, cuando los estudiantes han identificado la congruencia de las figuras relacionadas por una simetría se propone la composición de simetrías. Para ello, esta tarea cuenta con un segmento de cuadrícula para construir el diseño de “el lagarto”; con anticipación se han identificado las cuatro figuras iniciales con las cuales se recrea este diseño completo cada una distinguida con un color diferente y un botón correspondiente al color para evitar confusiones, estos

botones están creados con el fin de que aparezcan los deslizadores correspondientes que ayudarán a los estudiantes a visualizar las figuras y a seleccionar la figura.

Posteriormente, con otro deslizador podrán mover la figura seleccionada y acomodarla de tal manera que quede simétrica con la figura inicial Vasco (1992) nos menciona que los estudiantes presentan más dificultad con la transformación de reflexión, puesto que los estudiantes deben recurrir a la imaginación para comprender esta transformación porque no se puede efectuar con material concreto, los deslizadores están pensados para ayudarle al estudiante a comprender el movimiento que efectúa esta transformación. Cabe mencionar que a medida que se va realizando la construcción van apareciendo los ejes de simetría que faltan en esta construcción.

Toda esta exploración se realizará en un Applet de GeoGebra, pues como menciona Blanco (2011) en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas no sólo intervienen elementos cognitivos o metodológicos, hay otros elementos como lo social y lo cultural que influyen en el aprendizaje de los estudiantes. De este modo, se ha creado un vínculo con respecto a lo cultural y las TD pues en la actualidad son los dos campos con más relevancia y acercamiento a la vida de los jóvenes, adicional a esto como se espera que los estudiantes identifiquen las figuras que componen el diseño que se les presenta, se espera que la manipulación y el movimiento les permita construir todo el diseño.

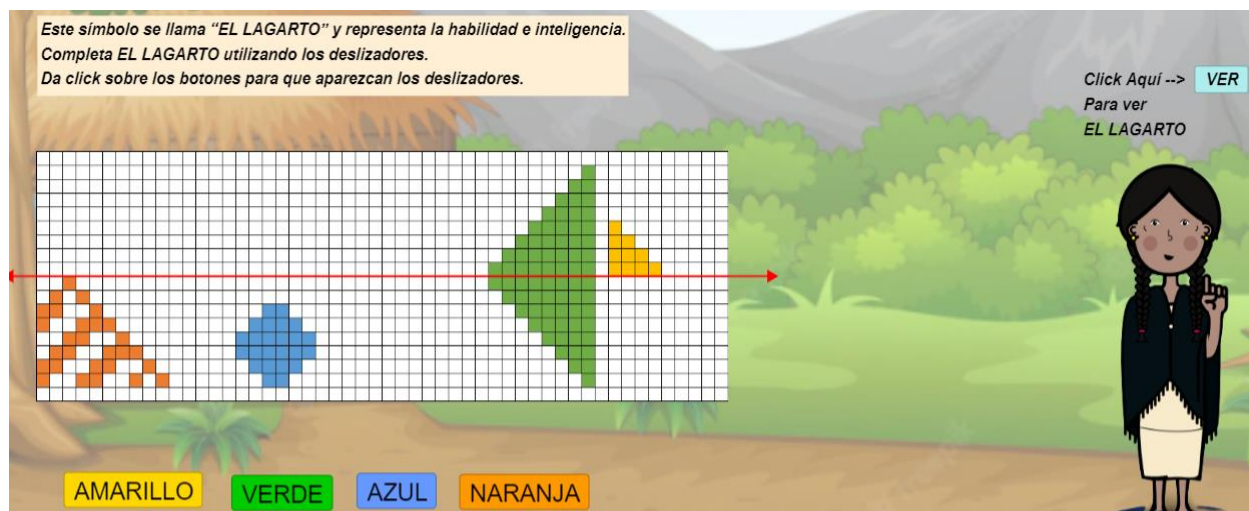


Figura 36 Tarea El Lagarto

A continuación, se presentan las hojas de trabajo para esta tercera tarea la cual consta de seis puntos, donde los estudiantes deberán dibujar, escribir y responder verdadero o falso. En el primer punto los estudiantes encontraran cinco casillas (ver **Figura 37**), por cada una de las casillas deberán dibujar uno de los pasos que se necesitaron para la construcción del diseño del lagarto, esto permitirá a los estudiantes identificar que para efectuar la transformación siempre hay unos pasos determinados, pues esto se continuara trabajando en la siguiente tarea.

1. Dibuja cinco pasos para la construcción del lagarto del pueblo Nasa Yuwe.

Figura 37 Punto 1) Hoja de trabajo 3

En el segundo punto (ver **Figura 38**), al igual que en unas anteriores se les cuestiona a los estudiantes sobre la construcción que acabaron de realizar, pues es muy importante que ellos identifiquen y justifiquen el porqué de su certeza frente a dicha construcción.

2. ¿Cómo te das cuenta que tu diseño del lagarto quedó bien? Explica.

Figura 38 Punto 2) Hoja de trabajo 3

El tercer punto de estas hojas de trabajo es una tabla la cual contiene las cuatro figuras iniciales que se requieren para construir el diseño del símbolo Nasa (ver **Figura 39**), esta pregunta consiste en que el estudiante identifique cuantas veces se transformó la figura inicial y describa cual fue el movimiento realizado por cada figura, es decir, que expliquen cómo fueron los movimientos de esta figura para alcanzar la posición correcta según el diseño.

3. ¿Cuántas veces se debe repetir cada figura para llegar al diseño original?
Completa la tabla.

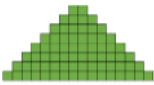
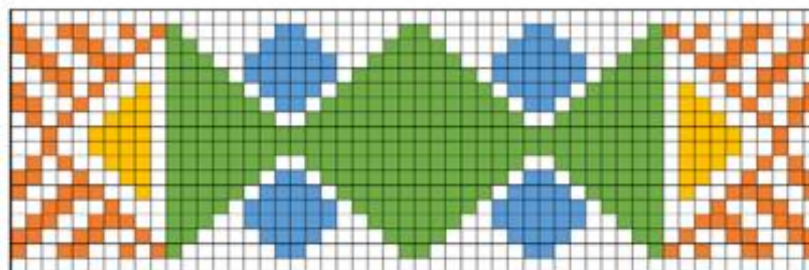
Figura inicial	Cuántas veces que la figura se transforma	Describe cómo esta figura se mueve para configurar el diseño del lagarto completo.
		
		
		
		

Figura 39 Punto 3) Hoja de trabajo 3

El cuarto punto básicamente es que el estudiante piense y escriba un nombre para esta transformación, pues a pesar de que se haya usado la palabra simetría en las tareas anteriores no se les ha dicho con exactitud cuál es la transformación bajo la que están trabajando. En el quinto punto (ver **Figura 40**), los estudiantes encontrarán el diseño del lagarto y deberán dibujar los ejes de simetría verticales y horizontales sobre la figura completa.

5. Con una regla traza los ejes de simetría que pudiste encontrar en el diseño del lagarto.



El Lagarto

Figura 40 Punto 5) Hoja de trabajo 3

Finalmente, en el sexto y último punto (ver **Figura 41**) de estas hojas de trabajo los estudiantes encontraran con una sección de verdadero o falso, compuesta por seis afirmaciones con sus respectivos espacios para que lo llenen con una “V” si la afirmación es verdadera o por el contrario con una “F” si la afirmación es falsa, con esta pregunta pondremos a prueba la capacidad que han tenido los estudiantes para comprender lo que se ha trabajado hasta el momento.

6. Marca con una V los enunciados verdaderos y con una F los enunciados falsos.

- ☐ Los ejes de simetría son líneas curvas.
- ☐ Si trazamos un eje de simetría justo en la mitad del diseño del lagarto este eje me permite ver el opuesto de la imagen inicial.
- ☐ Los ejes de simetría me cambian el tamaño de las figuras que se encuentran en el diseño del lagarto.
- ☐ Los ejes de simetría conservan la distancia entre las figuras del lagarto y sus puntos.
- ☐ Si ponemos un espejo en la mitad del diseño del lagarto, el borde del espejo que está en contacto con el diseño funciona como eje de simetría.
- ☐ Los ejes de simetría son líneas rectas.

Figura 41 Punto 6) Hoja de trabajo 3

4.1.4 Actividad de aprendizaje 4: Tarea 4 La Estrella 1

Esta es la última actividad de este experimento de enseñanza, donde los estudiantes deberán observar la construcción del diseño de “la estrella” con ayuda de un deslizador, a diferencia de las construcciones que han realizado antes, los estudiantes contarán con un deslizador y este les mostrará paso a paso como se hace la construcción, el MEN (1998) menciona que el estudio de las transformaciones de figuras está prevaleciendo sobre el estudio formal de la misma geometría la cual se basa en teoremas y demostraciones, es decir, con esta actividad los estudiantes están realizando demostración de manera inconsciente y sin usar teoremas los cuales pueden complicar un poco el aprendizaje; adicionalmente, con esta tarea se espera que los estudiantes sean más conscientes sobre la simetría tanto en forma horizontal como vertical y los elementos que se emplean para completar su construcción.

En la parte derecha de la pantalla encontrarán seis pasos resumidos, los cuales hacen referencia a la construcción de esta estrella (ver **Figura 42 y 43**), estos pasos están en desorden y los estudiantes deberán enumerarlos del 1 al 6 según corresponda el orden de construcción, por su parte Jones (2011) señala que las TD promueve “la intuición visual”, en este sentido los estudiantes fortalecerán sus habilidades y capacidades de razonar con respecto a un problema, en este caso es observar los movimientos efectuados y lograrlos relacionar con los enunciados a su derecha como se muestra en la siguiente imagen.



Figura 42 Tarea La Estrella parte 1 (Figura Inicial)

Cuando el estudiante haya observado los movimientos, identificado los pasos, analizado el orden correcto en el que se efectúa esta transformación y escrito su respuesta el Applet se encargará de decir si es correcta o no la respuesta, de no estar bien los números se eliminaran y los estudiantes deberán poner nuevamente el orden de correcto de todos los números.

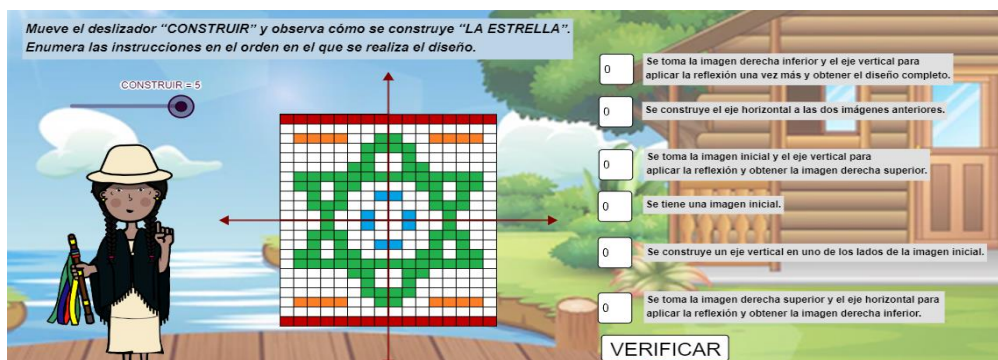


Figura 43 Tarea La Estrella parte 1 (Construcción completa)

Vasco (1992) son hace una invitación a dejar de pintar figuras estáticas en el tablero, este tipo de tareas le permiten al estudiante trabajar sobre objetos que podrán explorar, permitiendo así una mejor visualización de esta transformación de simetría. Las hojas de trabajo para esta penúltima tarea pueden parecer extensas, pero en realidad solo cuentan con cuatro puntos, de los cuales uno de ellos se trabajará con anterioridad en el Applet.

El primer punto cómo se mencionó antes se resuelve en el Applet, el cual es ordenar los pasos de la construcción de la estrella del 1 al 6, pues aquí ya tiene la certeza de que está bien la respuesta que suministraron puesto que el Applet ya se los confirmo (ver **Figura 44**).

1. Enumera el orden en el que se construye el diseño de la estrella.
 - ☐ Se toma la imagen derecha inferior y el eje vertical para aplicar la reflexión una vez más y obtener el diseño completo.
 - ☐ Se construye el eje horizontal a las dos imágenes anteriores
 - ☐ Se toma la imagen inicial y el eje vertical para aplicar la reflexión y obtener la imagen derecha superior
 - ☐ Se tiene una figura o imagen inicial
 - ☐ Se construye un eje vertical en uno de los lados de la imagen inicial
 - ☐ Se toma la imagen derecha superior y el eje horizontal para aplicar la reflexión y obtener la imagen derecha inferior

Figura 44 Punto 1) Hoja de trabajo 4

En el segundo punto se encuentra una tabla con seis casillas para que los estudiantes dibujen los pasos en los que se construyó la estrella (ver **Figura 45**), esta tabla está organizada de la siguiente manera: al lado izquierdo en cada casilla se encuentra una consigna que hace referencia

a cada paso de la construcción, y al lado derecho se encuentra la casilla vacía para que el estudiante dibuje el paso del cual se está haciendo referencia en la casilla de la izquierda.

2. Dibuja cada una de los pasos para construir “La estrella”.

Instrucción	Dibujo
Se tiene una figura o imagen inicial	
Se construye un eje vertical en uno de los lados de la imagen inicial	
Se toma la imagen inicial y el eje vertical para aplicar la reflexión y obtener la imagen derecha superior	
Se construye el eje horizontal a las dos imágenes anteriores.	
Se toma la imagen derecha superior y el eje horizontal para aplicar la reflexión y obtener la imagen derecha inferior.	
Se toma la imagen derecha inferior y el eje vertical para aplicar la reflexión una vez más y obtener el diseño completo.	

Figura 45 Punto 2) Hoja de trabajo 4

En el tercer punto se les cuestiona a los estudiantes sobre la ausencia de uno de los pasos anteriores, es decir, que ocurre con la construcción si falta este paso con el fin de que los estudiantes identifiquen la necesidad del eje de simetría (ver **Figura 46**)

3. ¿Qué pasa si eliminamos el cuarto paso de esta construcción?

Figura 46 Puto 3) Hoja de trabajo 4

En el cuarto punto nuevamente los estudiantes encontraran una tabla con cuatro filas y dos columnas, donde deberán escribir o dibujar los componentes para la construcción de la estrella según corresponda (ver **Figura 47**), en la primera columna se encuentran los nombres de los componentes y en la segunda columna los dibujos, en este sentido si en la primera casilla de la primera fila está el nombre del componente el estudiante deberá realizar el dibujo que corresponda a este componente. Estos componentes están intercalados para que los estudiantes escriban y dibujen.

4. Para la construcción de la estrella necesitamos los siguientes componentes.
Completa la tabla.

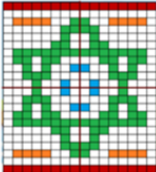
Componente	Representación (Dibujo)
Una figura inicial	
	
Un eje de simetría horizontal	
	

Figura 47 Punto 4) Hoja de trabajo 4

4.1.5 Actividad de aprendizaje 4: Tarea 5 La estrella 2

Para finalizar esta actividad y esta secuencia de actividades tenemos la última tarea, en donde se trabaja con el mismo diseño de la tarea anterior pero esta vez se encuentra en gris y solo algunos puntos a color, cada punto esta diferenciado con un color y anclado con un botón correspondiente al color del punto (ver **Figura 48**), ejemplo: si es punto es rojo habrá un botón rojo y dentro de este la palabra “rojo”; esto con el fin de evitar confusiones al momento de iniciar con la tarea, pues el fin de esta actividad es que los estudiantes identifiquen que cuando una imagen o un punto se transforma mediante una simetría este conserva la distancia de punto a punto sin importar la orientación del eje.

Así pues, teniendo en cuenta lo anterior Moreno-Armella (2002) menciona que las TD fomentan la experiencia geométrica del estudiante, es decir, que permiten trabajar de manera directa con los objetos matemáticos, como se logra evidenciar en esta tarea cuando el estudiante tiene la opción de trabajar directamente con la transformación. A continuación, se muestra la imagen del Applet sobre el que se trabajara.

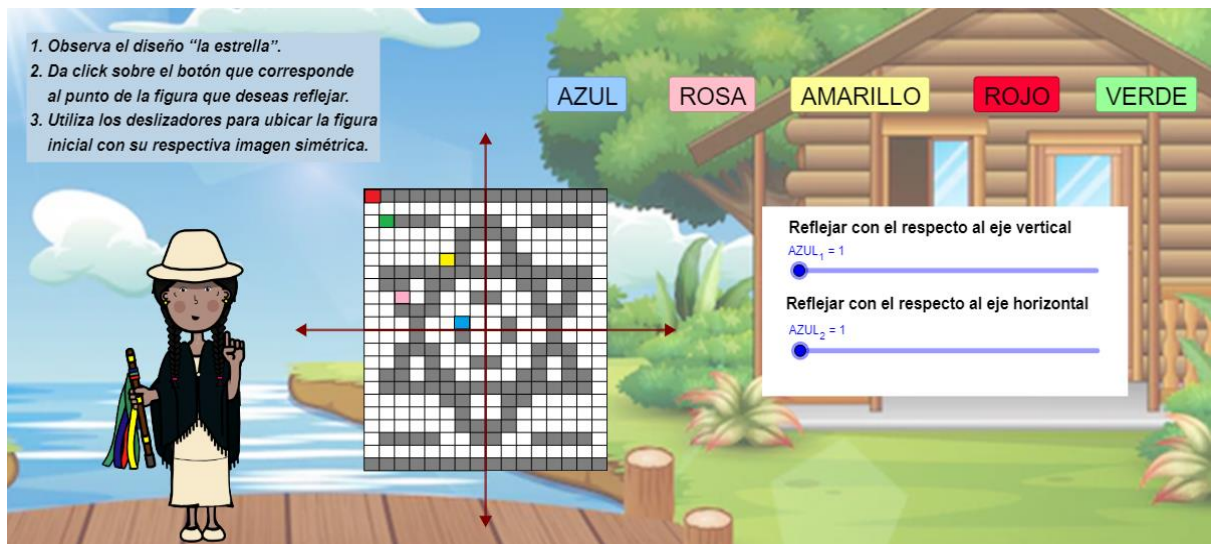


Figura 48 Tarea La Estrella parte 2

Cada botón hace aparecer dos deslizadores los cuales están anclados a cada eje de simetría permitiendo reflejar el punto de forma vertical u horizontal, pues como Jaime y Gutiérrez (1996) dicen, otro de los errores que presentan los estudiantes con respecto a esta transformación, está ligada a las propiedades que relacionan a una figura con su imagen, es decir, el estudiante no comprende el concepto de equidistancia a los ejes, de este modo se ha pensado esta actividad para trabajar sobre esta propiedad y reforzarla.

En este sentido, las TD pueden mejorar la manera en la que se relacionan las matemáticas escolares con el contexto del estudiante como lo señala Palmas-Pérez (2018) citando a Geiger, Goos y Dole (2015), teniendo en cuenta esto los estudiantes deberán mover los deslizadores y acomodar los puntos de manera horizontal y vertical conservando las distancias y de este modo la simetría, pues las TD en este caso el Applet permitirá realizar este trabajo de manera más visual y manipulativa para los estudiantes (ver **Figura 49**).

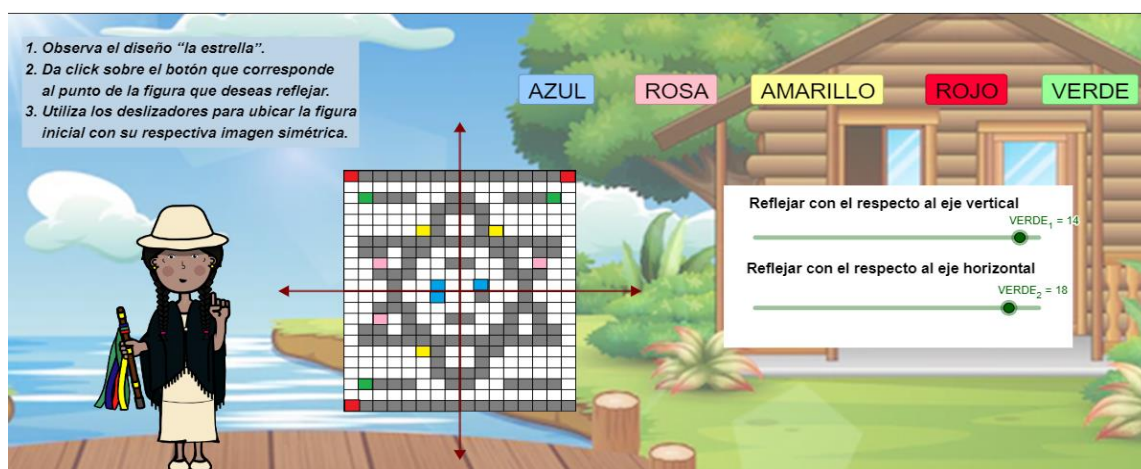


Figura 49 Tarea La Estrella parte 2 (Ubicación de los puntos)

Finalmente, para concluir presentaremos las hojas de trabajo correspondientes a esta última tarea las cuales poseen tres puntos, los estudiantes deberán escribir la distancia de cada punto con respecto al eje, encontrarán nuevamente preguntas de verdadero y falso y por último una cuadrícula donde podrán realizar un dibujo simétrico propio.

En el primer punto (ver **Figura 50**) los estudiantes encontraran una tabla compuesta por cinco columnas y seis filas, en la primera columna se encuentran los nombres de los colores según los puntos del Applet, en las otras casillas se les pregunta a los estudiantes sobre las distancias entre puntos simétricos con respecto a cada eje.

1. Completa la siguiente tabla:

Figura inicial	Distancia respecto al eje vertical	Distancia de su imagen respecto al eje vertical	Distancia respecto al eje horizontal	Distancia de su imagen respecto al eje horizontal
Rojo				
Amarillo				
Verde				
Rosa				
Azul				

Figura 50 Puno 1) Hoja de trabajo 5

El segundo punto es de verdadero y falso, se compone de cinco afirmaciones alrededor de las distancias que se trabajaron en el Applet, cada afirmación tiene su respectiva casilla para que los estudiantes llenen con una “V” si es verdadero y con una “F” si es falso (ver **Figura 51**).

2. Marca con una V los enunciados verdaderos y con una F los enunciados falsos.

- ☐ La distancia del punto amarillo al eje es diferente que del eje al otro punto amarillo.
- ☐ La cantidad de unidades partiendo del punto rojo hasta el eje, son las mismas que al otro lado.
- ☐ La cantidad de unidades del lado derecho de la recta es diferente a la del lado izquierdo de la recta.
- ☐ Si la figura inicial verde está a ocho unidades de distancia al eje horizontal y su imagen está a siete unidades de distancia al mismo eje, podemos decir que las figuras están relacionadas mediante una simetría.
- ☐ Para que las figuras que se encuentran al lado derecho del eje sean iguales a las que se encuentran al lado izquierdo del eje es importante que tengan la misma distancia y orientación.

Figura 51 Puno 2) Hoja de trabajo 5

A modo de cierre el tercer y último punto es un poco más libre, pues es una cuadrícula con los ejes de simétrica marcados previamente y se les pide a los estudiantes que creen su propio diseño de una estrella simétrica, esto con el fin de que los estudiantes por medio de un dibujo “libre” puedan aplicar lo que aprendieron durante todas las tareas (ver **Figura 52**).

3. Utiliza los colores para dibujar tu propia estrella simétrica.

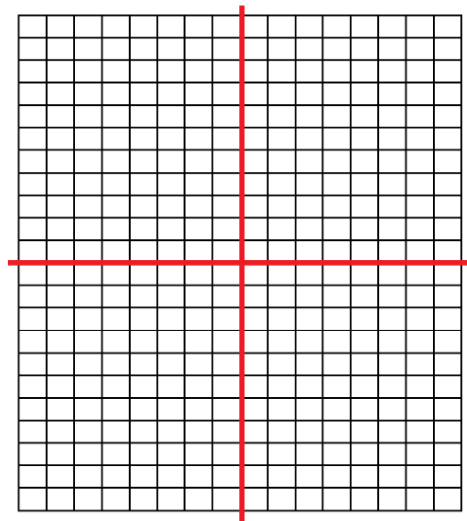


Figura 52 Puno 3) Hoja de trabajo 5

5 ANÁLISIS RETROSPECTIVO DE LA IMPLEMENTACIÓN

En el siguiente capítulo presentamos el desarrollo de la implementación del experimento de enseñanza, la rejilla de análisis, y, finalmente, presentamos los resultados obtenidos a partir del análisis retrospectivo.

5.1 DESARROLLO DE LA IMPLEMENTACIÓN

Inicialmente, para este diseño de actividades se realizó una prueba piloto con el fin de reorganizar y ajustar las diferentes preguntas que se habían planteado inicialmente en la página web y las hojas de trabajo, teniendo en cuenta la participación de los estudiantes de la prueba piloto. Los ajustes que se hicieron fueron pocos, cabe anotar que no quedaron registros de la prueba piloto.

Así pues, como bien se mencionó en el capítulo 4, la implementación se llevó a cabo con estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Oficial de la ciudad de Cali, así pues, en este apartado se dará la información detallada con respecto a los roles de las autoras y la cantidad de participantes.

En ese mismo sentido, para la implementación las autoras tomaron diferentes roles, Darlyn Peña era la encargada de dirigir la mayor parte de la clase y de guiar a los estudiantes para que hicieran un uso adecuado de GeoGebra, sin embargo, ambas autoras estuvieron atentas a las necesidades de los estudiantes para poder obtener registros suficientes, se recolectaron hojas de trabajo, videgrabaciones y fotografías. La implementación tuvo una duración de 2 días, con un total de 6 horas, fue llevada a cabo los días 9 y 10 de noviembre de 2022.

Los estudiantes estuvieron organizados en grupos con el fin de implementar el trabajo en equipo y fomentar la discusión para el desarrollo de las tareas, posterior a ellos cada estudiante dio respuesta a la hoja de trabajo por separado. En el primer día (9 de noviembre) estuvimos las dos primeras horas de clase (7:30am a 9:00am) constamos con la asistencia de 29 estudiantes en grupos entre 3 o 4 estudiantes. El segundo día (10 de noviembre) asistieron 30 estudiantes, la implementación se lleva a cabo en cuatro horas las cuales se dividieron en dos bloques (7:30am a 9:00 am) y (9:30am a 11:00am).

Para el análisis retrospectivo de las actividades de aprendizaje se seleccionaron, priorizaron y segmentaron los datos recogidos mediante las hojas de trabajo y video grabaciones, el análisis se construye a partir de una rejilla elaborada con base al marco teórico (Ver tabla 4). Dicha rejilla de análisis retoma elementos como el uso de las tecnologías y los aspectos socioculturales, el diseño de las Hojas de trabajo y finalmente la implementación del experimento de enseñanza.

Tabla 2 Rejilla de análisis

Categoría de análisis	Criterios de análisis
Uso de tecnologías digitales y aspectos socioculturales para el aprendizaje de la transformación de simetría	¿Los estudiantes reconocen las propiedades de la transformación geométrica?
	¿Los estudiantes reconocen los elementos necesarios para realizar la transformación?
	¿El arrastre permite que los estudiantes den cuenta de las propiedades que cumplen las figuras?
	¿El uso de GeoGebra fue fácil para los estudiantes?
	¿La exploración hizo parte de la interacción del estudiante con GeoGebra?
	¿Las herramientas de GeoGebra fueron fáciles de entender por parte de los estudiantes?
	¿El uso de los aspectos socioculturales permiten que el estudiante relacione el objeto matemático en un contexto real?
	¿El uso de los aspectos socioculturales aportan significado a las figuras utilizadas por los estudiantes?
	¿GeoGebra permite que el estudiante razone y tenga posibilidad de crear representaciones?
	¿El diseño es acorde al nivel educativo de los estudiantes?

Diseño de las Hojas de trabajo	¿Las hojas de trabajo fomenta la discusión entre pares?
	¿Las consignas fueron claras para los estudiantes?
	¿Los conceptos que se utilizan son claros para el estudiante?
Implementación Hojas de trabajo	El estudiante reconoce que las figuras son simétricas
	El estudiante identifica los elementos de la transformación (figura inicial, eje de simetría y figura simétrica)
	El estudiante reconoce otros objetos simétricos
	El estudiante reconoce diferentes objetos que tienen ejes de simetría
	El estudiante da cuenta de los pasos que se deben seguir para realizar la transformación geométrica
	El estudiante describe los movimientos que realizan las figuras
	El estudiante identifica composición de transformaciones
	El estudiante reconoce que los ejes de simetría pueden tener diferentes orientaciones.
	El estudiante reconoce que las figuras relacionadas por una simetría son congruentes
	El estudiante reconoce que la distancia de un punto y su imagen respecto al eje de simetría son iguales.
	El estudiante identifica el orden que se debe llevar a cabo para realizar la transformación

Es importante señalar que, en el desarrollo del análisis de las hojas de trabajo se seleccionan y priorizan algunas de las respuestas de los estudiantes, así mismo, para el análisis se mantendrá en anónimo la identidad de los estudiantes por lo que se tendrá en cuenta la siguiente nomenclatura:

1. **E1, E2, E3, etc.** : Respuestas individuales de los estudiantes.
2. **ES:** Respuestas colectivas.

5.2 ANÁLISIS RETROSPECTIVO ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 1

El desarrollo de la actividad de aprendizaje 1 se llevó a cabo el día 9 de noviembre de 2022, se inicia organizando a los estudiantes en equipos de trabajo, luego se realiza una breve

presentación de las docentes, y posterior a ello se presentan las instrucciones a los estudiantes para iniciar con la actividad de aprendizaje.

Inicialmente, se presenta a los estudiantes la página web donde encuentran la información relacionada con la comunidad Nasa Yuwe, posterior a ello los estudiantes comenzaron a interactuar con el Applet de GeoGebra, primero exploraron las herramientas y luego inician con la realización de la tarea, esta consistía en reparar los balanzones; rápidamente los estudiantes identificaron lo que debían hacer, es decir, lograr que los triángulos quedaran del mismo tamaño, es decir, que las figuras fueran simétricas.

Es importante señalar que, a pesar de que los estudiantes identificaran que la tarea era hacer que las figuras fueran simétricas, ellos no lograban relacionar estas actividades con contenidos previos, manifestaron no haberlo visto antes, por tanto, el acompañamiento de las autoras fue un factor fundamental para que los estudiantes pudieran llevar a cabo un desarrollo óptimo de las actividades de aprendizaje.



Figura 53. Presentación página web e interacción con el Applet

Posterior a la interacción con el Applet se entrega a los estudiantes las hojas de trabajo No. 1. Inicialmente se logra identificar que los estudiantes no presentan dificultades para dar respuesta a las preguntas de la hoja de trabajo. En términos generales, los estudiantes logran identificar que las figuras deben de ser de igual tamaño para que los balanzones estén correctamente contruidos,

es decir, para que las figuras estén relacionadas mediante la transformación de simetría (Yaglom, 1962).

En los puntos 1), 2), 3) y 4) los estudiantes logran justificar por qué consideran que los balanzones quedaron bien reparados argumentando que las figuras quedaban del mismo tamaño y derechas, teniendo en cuenta que se proporcionó una imagen de referencia y a su vez el applet les brindaba figuras en diferentes posiciones y/o tamaños. En ese sentido, las tecnologías digitales otorgaron al estudiante la posibilidad de explorar diferentes representaciones a través de la manipulación del diseño “el balanzón” (Moreno-Armella, 2002).

En ese mismo sentido, los casos particulares de E1, E2 y E3 (**Figura 54**) muestran cómo los estudiante a partir de la exploración que hicieron en GeoGebra logran argumentar que los balanzones quedaron bien porque las figuras eran del mismo tamaño, del mismo peso y a su vez estaban balanceados, posterior a ello, en el punto 2) el estudiante E1 agrega que las figuras quedaron derechas, esto haciendo referencia a la línea horizontal del dibujo, a su vez, los estudiante E2 y E3 en el punto 2) señalan que la figura está equilibrada, es decir, está derecha con respecto al eje de simetría.

De lo anterior podemos inferir que en este caso los estudiantes no presentan una de las dificultades señaladas por Jaime y Gutiérrez (1996) en donde menciona que en algunos casos los estudiantes no contemplan la perpendicularidad con respecto a los ejes de la figura, en este caso, implícitamente, los estudiantes utilizan las palabras “equilibrado” y “derechas” para referirse a la perpendicularidad con respecto al eje de simetría.

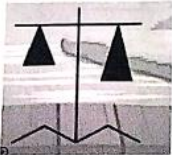
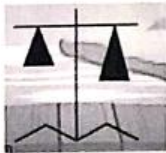
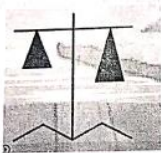
1. ¿Cómo sabes que los balanzones quedaron bien? Explica. <u>Porque quedan balanceados y del mismo tamaño</u> 2. ¿En qué posición el balanzón 1 queda bien?  ☐ 1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ¿Cómo sabes que el balanzón 1 queda bien en esa posición? <u>Porque quedan derechos y del mismo tamaño</u> Producción respuesta 1) y 2) de E1	1. ¿Cómo sabes que los balanzones quedaron bien? Explica. <u>cuando están del mismo peso y el balanzón está equilibrado.</u> 2. ¿En qué posición el balanzón 1 queda bien?  ☐ 1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ¿Cómo sabes que el balanzón 1 queda bien en esa posición? <u>Porque está equilibrado y están del mismo tamaño.</u> Producción respuesta 1) y 2) de E2
1. ¿Cómo sabes que los balanzones quedaron bien? Explica. <u>por que quedan todo equilibrados y organizados</u> 2. ¿En qué posición el balanzón 1 queda bien?  ☐ 1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ¿Cómo sabes que el balanzón 1 queda bien en esa posición? <u>por que a esta equilibrado y tienen el mismo tamaño en ambos triángulos</u> Producción respuesta 1) y 2) de E3	

Figura 54 Producciones de los estudiantes

En el punto 5) se puede evidenciar que algunos de los estudiantes como E2 (**Figura 55**) identifican los tres elementos que componen una transformación, según Clemens, O' Daffer y Cooney (1998) una transformación geométrica se compone de tres puntos: la figura original, una operación que describe el cambio (en este caso la transformación de simetría) y la figura final.

-
5. Encierra con rojo la figura inicial, con verde la figura simétrica y retíñe de color azul el eje de simetría.



Figura 55. Producción respuesta 5) de E2

Por otro lado, algunos estudiantes como E3 (**Figura 56**) a pesar de reconocer el eje de simetría no identifican la figura inicial y figura simétrica, para ello, las autoras intervienen y explican a los estudiantes los elementos que se requieren para llevar a cabo la transformación de simetría.

5. Encierra con rojo la figura inicial, con verde la figura simétrica y retíñe de color azul el eje de simetría.



Figura 56 Producción respuesta 5) de E3

Finalmente, el último punto de la actividad de aprendizaje se pedía a los estudiantes que dibujaran otros objetos simétricos que conocieran, algunos, confundieron la palabra simetría con geometría y empezaron a dibujar figuras geométricas como es el caso de E5 (**Figura 57**).

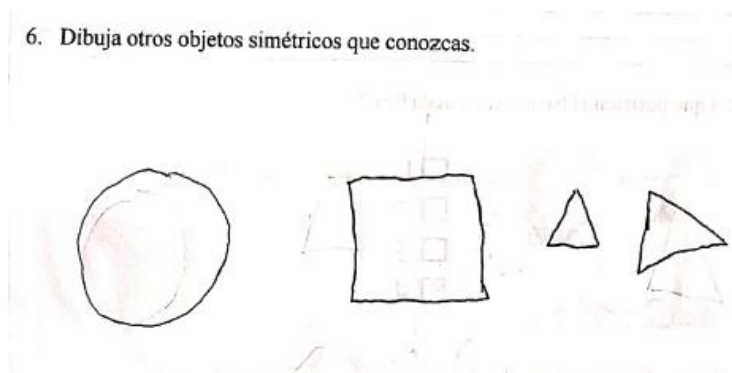


Figura 57 Producción respuesta 5) de E5

Las autoras se percatan de la dificultad que presentan algunos de los estudiantes con las palabras simetría y geometría e intervienen para hacer la aclaración a los estudiantes a lo cual los estudiantes responden de manera verbal señalando los objetos simétricos que observan en el salón de clase, esto se puede evidenciar en el siguiente diálogo:

Autora 2: ¿Qué figuras simétricas podemos observar en el salón?

E1: el gusanito (*señalando la imagen en la puerta*)

Autora 2: si yo parto el gusanito en dos (*coloca la mano en la mitad del gusano*) ¿cómo quedan las dos partes?

ES: diferentes

Autora 2: entonces... ¿es una figura simétrica?

ES: Nooooo

Autora 2: Bueno, entonces que figuras simétricas podemos observar aquí

ES: ... el tablero... la ventana... la puerta

Autora 2: si yo parto el tablero a la mitad

E3: queda igual

E4: una mariposa

Autora 2: muy bien, si partimos una mariposa a la mitad queda igual de un lado ...

E4: y del otro

Luego de la intervención, los estudiantes proceden a terminar las hojas de trabajo, obteniendo así los siguientes resultados para el punto 6), E4 por ejemplo intentan recrear el dibujo del balanzón E2 dibuja uno de los objetos que habían mencionado sus compañeros y finalmente E1 realiza el dibujo de una de las ventanas (ver **figura 58**), indicando verbalmente que “*la varilla de la mitad es el eje de simetría*”

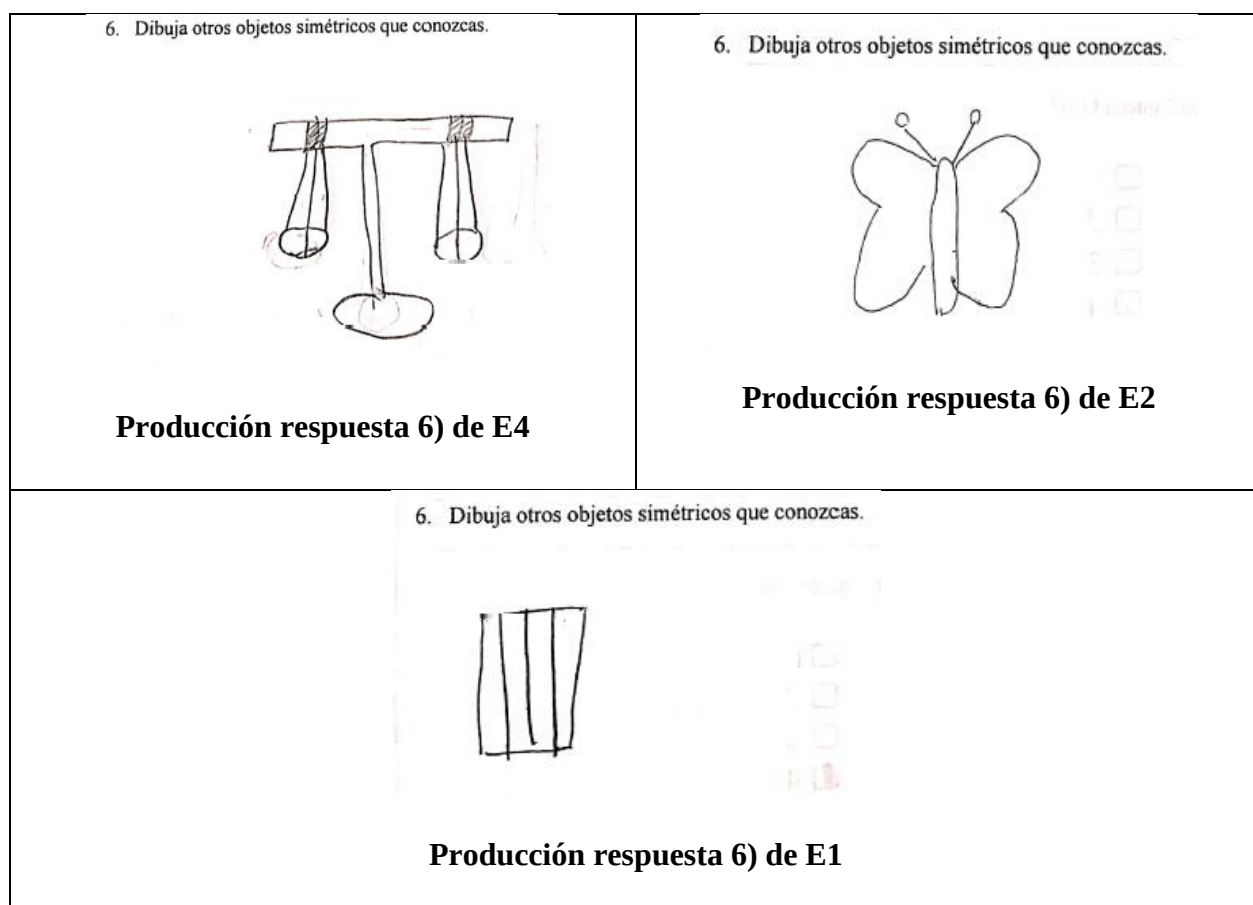


Figura 58 Producción respuesta 6) de los estudiantes

Al finalizar la hoja de trabajo No. 1, se puede decir que a los estudiantes les llamó la atención el hecho de trabajar con GeoGebra y al ver que el deslizador les proporcionaba diferentes respuestas, se generaban discusiones entre ellos entorno a lo que debían hacer, por su parte el

deslizador les permitía regresar y revisar las diferentes opciones de respuesta, lo cual les permitía a los estudiantes tener una mejor visualización del objeto a transformar (Vasco, 1992; Sinclair, et al, 2016; Jones, 2011).

Finalmente, al culminar la actividad de aprendizaje 1 se presenta a los estudiantes el significado del balanzón para la cultura Nasa Yuwe lo cual llamó su atención y generó intereses para indagar en la página web que se había creado, pues era algo que ellos no conocían y no imaginaban que la transformación de simetría estuviera implícita en este tipo de objetos, como bien señala Robayo (2011) el enfoque sociocultural aporta a las actividades de aprendizaje la posibilidad de que el estudiante llene de sentido y significado el contenido matemático que están aprendiendo.

5.3 ANÁLISIS RETROSPECTIVO ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 2

La actividad de aprendizaje 2 se llevó a cabo el mismo día en la tercera hora de clases, para iniciar se presenta a los estudiantes unas diapositivas con el fin de resumir lo que se había trabajado en la actividad anterior, resaltando que la transformación de simetría requiere de tres elementos: figura inicial, eje de simetría y figura imagen. Posteriormente, se pide a los estudiantes que abran la actividad No. 2 (ver **Figura 59**) y se indica que lean la instrucción, para esto, los estudiantes comienzan a explorar las herramientas de GeoGebra lo cual genera un poco de dificultad para ellos, dado que al intentar hacer la figura simétrica de la imagen inicial con la herramienta “simetría Axial” de GeoGebra no seleccionaban bien el orden de los objetos y no obtenían el resultado deseado.



Figura 59 Exploración actividad de aprendizaje 2

En las **figuras 60** se puede observar dos tipos de construcciones que realizaron los estudiantes a partir de una imagen de referencia y la herramienta “simetría axial” de GeoGebra, se puede evidenciar que a pesar de la dificultad inicial los estudiantes logran culminar la tarea 2 de manera optima.

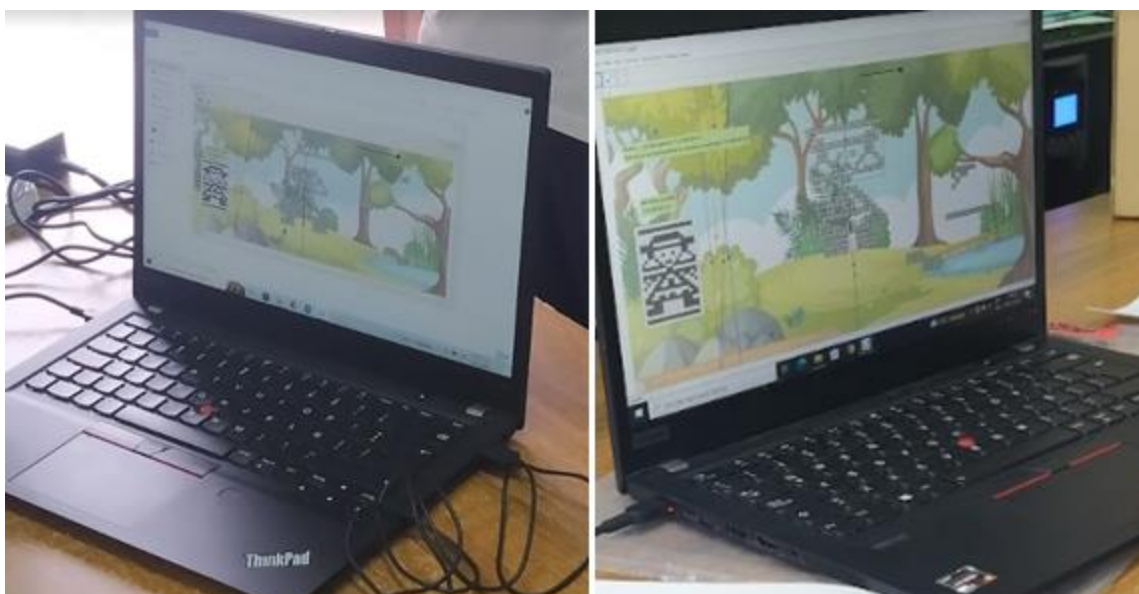


Figura 60 Construcción de la Abuela de E4 y E5

Posterior al trabajo con GeoGebra se entrega a los estudiantes las hojas de trabajo No. 2, inicialmente los estudiantes hacen uso del resultado obtenido en el Applet para poder llevar a cabo el desarrollo de la hoja de trabajo No. 2 (ver **Figura 61**).

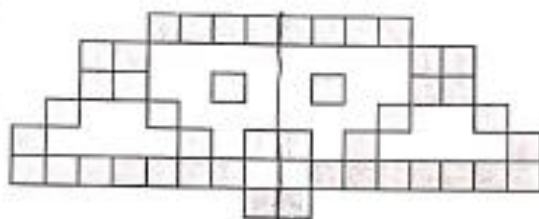


Figura 61 Uso del applet para el desarrollo de la HT

En el punto 1) de la hoja de trabajo se pide a los estudiantes que completen las imágenes con el componente que hace falta, de manera general se obtuvieron buenos resultados, fácilmente los estudiantes lograron identificar el componente faltante y lo agregaban a la construcción, en ese mismo sentido, es oportuno destacar que en el caso particular de E2 (ver **Figura 62**), en el ítem b) y c) considera la equidistancia con respecto al eje de simetría como un elemento pertinente, pues, aunque el trazo no es hecho con regla y no queda preciso, se puede ver que el estudiante de cierta manera intenta conservar la distancia con respecto al eje de simetría (Yaglom, 1962; Godino y Ruiz, 2002).

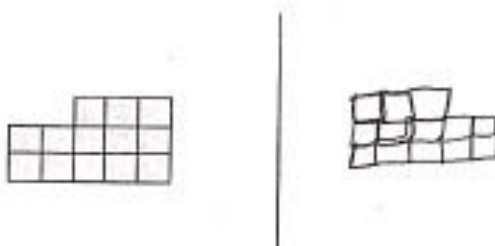
1. Dibuja y escribe el componente que hace falta para completar la simetría en cada una de las imágenes.

a.



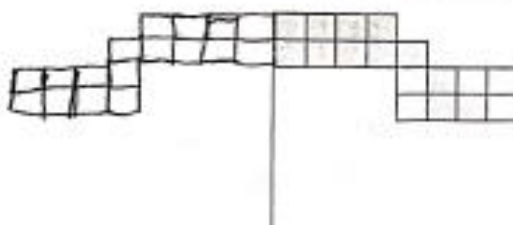
En esta figura hacia falta : el eje

b.



En esta figura hacia falta : la figura faltante

c.

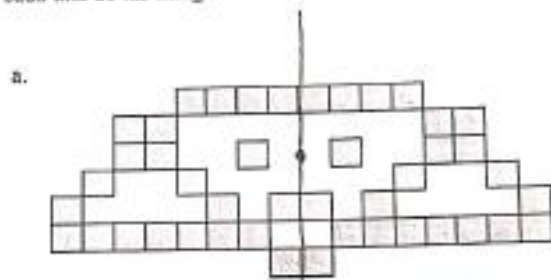


En esta figura hacia falta : la figura faltante

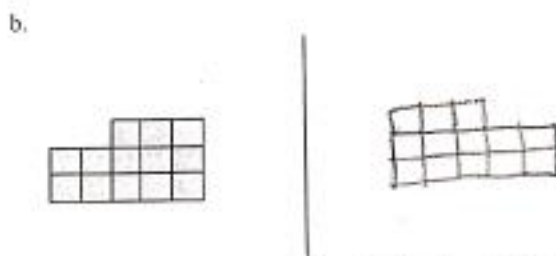
Figura 62 Producción respuesta 1) de E2

Sin embargo, en el caso de E1 (ver **Figura 63**) podemos evidenciar uno de los errores señalados por Jaime y Gutierrez (1996) donde el estudiante no considera el concepto de equidistancia con respecto al eje de simetría como un factor relevante al aplicar la transformación de simetría; en el ítem b) pareciera que lo tiene en cuenta, pero en el ítem c) se puede ver que dibuja la figura inicial a una distancia muy diferente a la de su figura simétrica con respecto al eje de simetría.

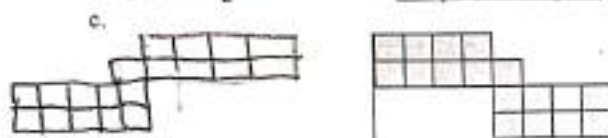
1. Dibuja y escribe el componente que hace falta para completar la simetría en cada una de las imágenes.



En esta figura hacia falta : el eje



En esta figura hacia falta : la figura final



En esta figura hacia falta : figura inicial

Figura 63 Producción respuesta 1) de E1

En terminos generales, los estudiantes identifican de manera clara y acertiva los tres componentes que tiene la transformaci3n de simetría, así mismo, son capaces de describir procesos de construcción a partir de la interacci3n con el Applet lo cual fortalece sus habilidades de razonar con respecto al objeto matemático (Jones, 2011), esto se puede evidenciar en las respuestas de E1 y E2 en el punto 2) de la hoja de trabajo. Por un lado, E1 (ver **Figura 64**) utiliza la palabra “multiplicar” para hacer referencia a que la imagen se refleja y señala la necesidad de utilizar el arrastre para “armar” a “la abuela”; así mismo, podemos ver que el estudiante E2 (ver **Figura 65**)

señala la necesidad de ubicar bien la figura inicial (línea 6, ver **Figura 75**) para obtener la construcción adecuada.

2. Escribe cada uno de los pasos que realizaste para crear el diseño de La Abuela.
1. Primero tuvimos que poner las líneas
 2. luego tuvimos que multiplicar las piezas para
armarla
 3. luego armojamos las piezas para armarla
correctamente

Figura 64 Producción respuesta 2) de E1

2. Escribe cada uno de los pasos que realizaste para crear el diseño de La Abuela.
1. El primer paso fue poner la línea en
la mitad
 2. la segunda fue multiplicarlo
el
 3. el tercero fue empezar a
armarla
 4. El 4 es saber donde
va el eje de simetría
 5. saber donde va la parte
final
 6. saber donde va la parte
inicial
 7. armar la abuela
 8. saber donde va cada cosa

Figura 65 Producción respuesta 2) de E2

En el último punto de la hoja de trabajo No. 2 se pedía a los estudiantes que dibujaran otros objetos simétricos que conocieran, previamente a esto se les dio la contextualización del significado de “la abuela” comentándoles que es uno de los símbolos más importantes para la comunidad *Nasa Yuwe* y que adicional a ello se podía ver reflejada la transformación de simetría, luego de la intervención, los estudiantes entusiasmados comenzaron a realizar dibujos de objetos que ellos conocían y consideraban que tenía ejes de simetría (ver **Figura 66**), en este momento podemos ver la importancia de dotar de significación social y/o cultural los objetos matemáticos a la hora de presentarlos a los estudiantes (Aroca, 2007).

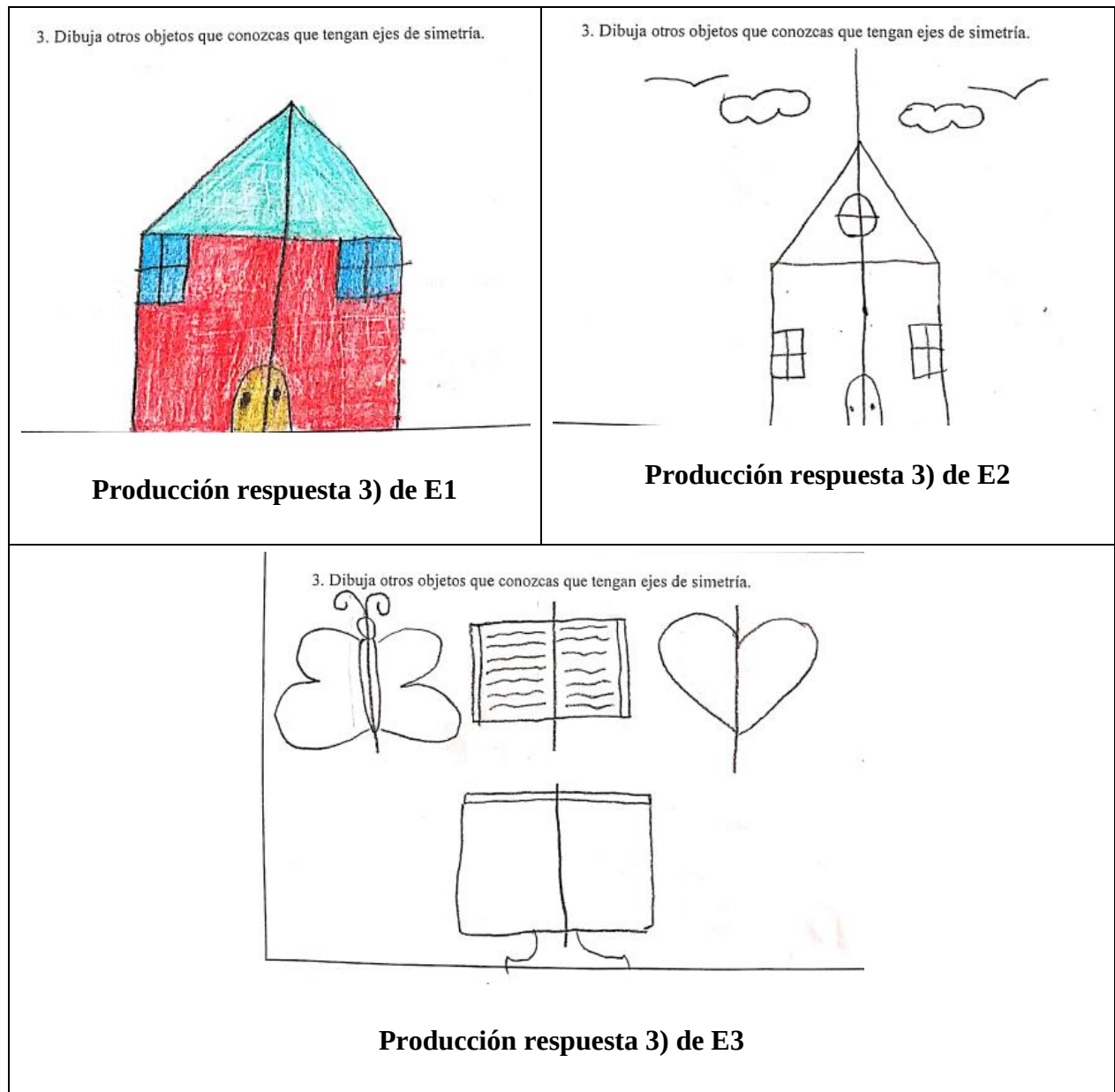


Figura 66 Producciones de los estudiantes punto 3)

Finalmente, se puede identificar que los estudiantes reconocen la simetría como una de las propiedades de la transformación, esto se puede ver implícitamente cuando dibujan objetos y al trazar los ejes de simetría procuran que las figuras queden iguales a ambos lados, es decir, que las figuras sean simétricas o congruentes (Yaglom, 1962).

5.4 ANÁLISIS RETROSPECTIVO ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 3

El desarrollo de esta actividad de aprendizaje se llevó a cabo el día 10 de noviembre de 2022, para este día no había disponibilidad de equipos de cómputo, por tanto, se utiliza el video beam para que en conjunto los estudiantes puedan realizar la tarea propuesta en GeoGebra, previo al inicio de la tarea, la autora retoma algunos de los elementos que se trabajaron en el día anterior y pregunta a los estudiantes sobre lo que habían aprendido. Luego, se recuerda a los estudiantes sobre el uso de las herramientas de GeoGebra y procedemos con la realización de la tarea.

Al iniciar con la tarea se ve la necesidad de la intervención por parte de las autoras para instruir a los estudiantes en lo que debían hacer, luego se propone que alguno de los estudiantes salga al tablero y siga las indicaciones que le dan sus compañeros para completar la tarea, a partir de ello, se obtiene el siguiente dialogo:

Autora 1: Hace falta la otra parte acá ¿no?

ES: Si

Autora 2: entonces... que necesitamos para poder obtener la otra parte

ES: El eje

Autora 2: listo, ¿y ahora?

ES: que se repita la figura allá (*señalando la parte inferior izquierda del “lagarto”*)

[...] Sale uno de los estudiantes adelante

Autora 2: bueno ayudémosle a E1 a construir el lagarto

ES: Listo

E1: ¿cuál coloco? (*comienza a mover el deslizador y aparecen diferentes figuras*)

ES: esa

E2: No esa no, no ven que es más pequeña... muévelo a la otra

E3: Es la última, la más grande

E1: lo voy a dejar aquí (*dejando el deslizador en la posición 3*)... como hago para que se voltee

Autora 1: mueve el deslizador

E1: pero necesitamos que aparezca acá (*señala en la pantalla*)

Autora 1: ok... intenta moviendo el siguiente deslizador

E1 mueve el deslizador y consigue hacer la reflexión de la figura elegida, al terminar, se dan cuenta que no era la correcta (ver **Figura 67**) pues esta era más pequeña que la figura que estaban buscando, a partir de eso se genera el siguiente diálogo

E3: Esa no es, mire ese espacio en la mitad, bórrelo

E1: ya voy (*retrocede los deslizadores*)

ES: eso ahí, déjela ahí (*indicando la posición 4 del deslizador*)

E1: A si, esta si es (*mueven los demás y completa la primera parte*)



Figura 67 Producción tarea 3 E1

De lo anterior podemos observar que existen diferentes factores que juegan un papel importante en el desarrollo de las tareas, uno de ellos es que, el uso de GeoGebra les permitió a los estudiantes retroceder en el error que habían cometido con el fin de corregirlo (ver **Figura 68**), además, les brindó la posibilidad de comparar las diferentes construcciones que iban realizando, pues como sabemos las tecnología digitales permiten la manipulación y transformación de los objetos matemáticos, de tal forma que el estudiante tienen la facilidad de obtener diferentes representaciones y sea más fácil visualizar los efectos de la transformación (Sinclair, et al, 2016).

Podemos observar también que, los estudiantes expresan de manera verbal el concepto de figura simétrica o congruencia cuando mencionan que las figuras deben de ser del mismo tamaño para poder que sea una simetría, es aquí donde se logra alcanzar uno de los objetivos de las actividades de aprendizaje, y adicional a ello, empiezan a incorporar la suma de simetrías (Yaglom, 1962), como podemos observar en el diálogo E1 expresa la necesidad de reflejar la misma figura más de una vez para obtener el “lagarto” completo.

Seguido del trabajo con GeoGebra se entrega a los estudiantes las hojas de trago No. 3; en el punto 1) se pide a los estudiantes que dibujen cinco pasos para la construcción de la abuela, se puede observar que varios de ellos como por ejemplo E2 (ver **Figura 68**) dibujaban el efecto de aplicar la transformación de simetría a cada una de las figuras por separado, es decir que reconoce que el objeto se ha transformado (MEN, 2016), sin embargo, a pesar de que no era lo que se esperaba por parte de las autoras, se puede identificar dos cosas: la primera es que los estudiantes identifican que hay una composición de figuras, es decir, se necesitan más de una figura inicial para construir el “lagarto” y a su vez, cada figura requiere de diferentes ejes de simetría, segundo, se está superando el error cometido anteriormente con respecto a la equidistancia, esta superación

ha sido por su propia cuenta, pues hasta el momento las autoras no han intervenido para explicar esta propiedad.

1. Dibuja cinco pasos para la construcción del lagarto del pueblo Nasa Yuwe.

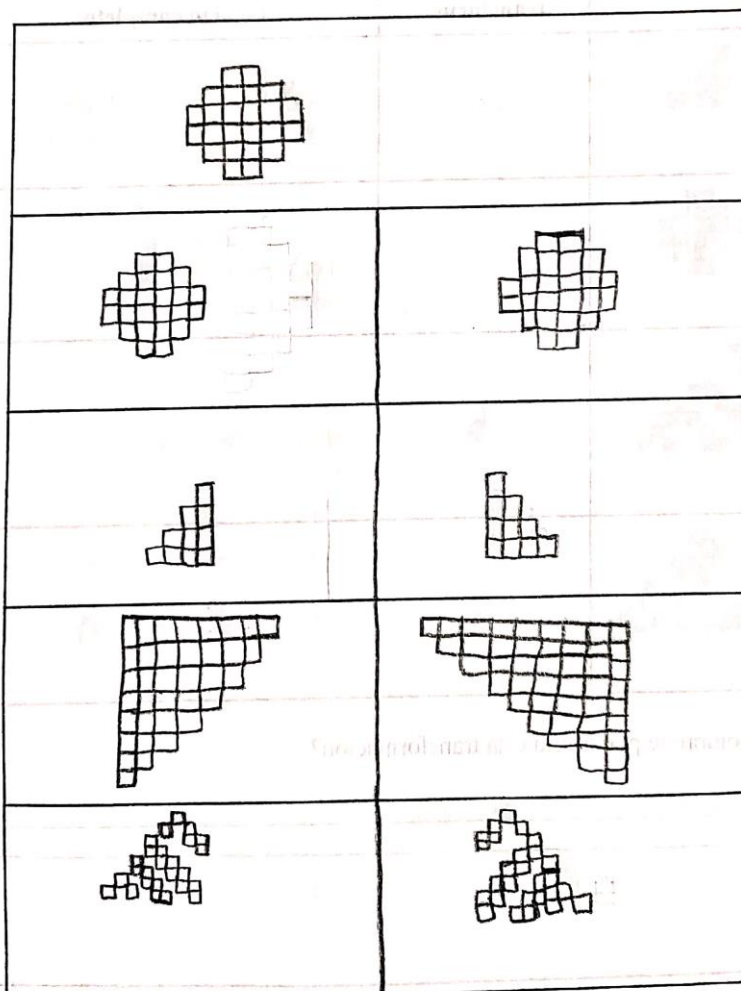


Figura 68 Producción punto 1) E2

Ahora bien, podemos observar que en el caso de E4 (ver **Figura 69**) ha desarrollado la habilidad de hacer una representación gráfica de los procesos de construcción, en los registros tomados por las autoras se logró identificar que para llevar a cabo el desarrollo de la actividad el estudiante E4 manipuló el applet para devolverse e ir dibujando cada parte que iba saliendo cuando

movía los deslizadores, en ese sentido, se está logrando que el estudiante prediga y compare el resultado de aplicar la transformación de simetría sobre figuras bidimensionales (MEN, 2006).

1. Dibuja cinco pasos para la construcción del lagarto del pueblo Nasa Yuwe.

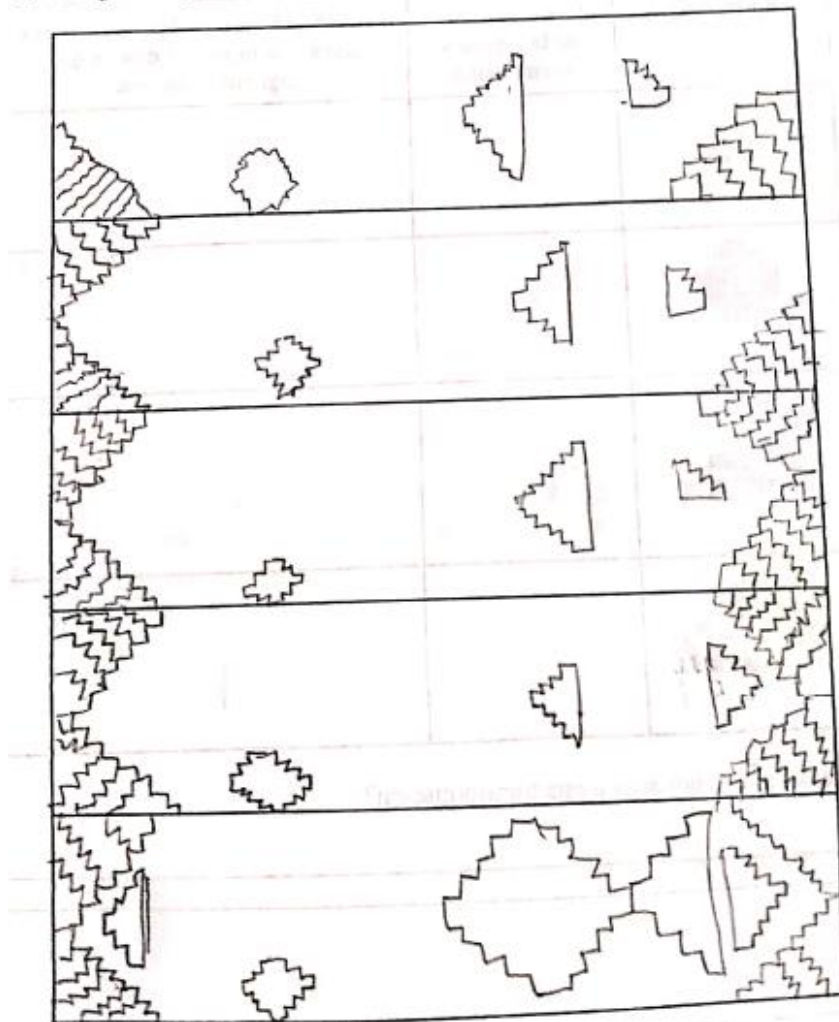


Figura 69 Producción punto 1) E4

En el punto 2) se pide a los estudiantes que expliquen cómo se dan cuenta que la construcción quedó bien elaborada a lo que varios respondían que estaba bien porque había quedado igual a la imagen de referencia, sin embargo, tenemos dos casos E1 y E3 (ver **Figura 70**) particulares donde la justificación gira en torno a elementos como ángulo, posición, longitudes,

perpendicularidad, y finalmente, el uso de los ejes; se puede observar que los estudiantes están teniendo una apropiación del lenguaje matemático para la construcción de sus explicaciones.

2. ¿Cómo te das cuenta que tu diseño del lagarto quedó bien? Explica. Por la misma posición angular, largo ancho y balance.
Producción punto 2) E1
2. ¿Cómo te das cuenta que tu diseño del lagarto quedó bien? Explica. Viendo que todo combina y coincide con la imagen y los ejes
Producción punto 2) E3

Figura 70 Producciones de los estudiantes punto 2)

En el punto 3) se pedía a los estudiantes que completaran la tabla, esto con el fin de que identificaran que la figura inicial hacia más de una simetría, por tanto, se puede ver que el estudiante E3 (ver **Figura 71**) señala el movimiento de la figura en términos de orientaciones, y aunque solo en dos ocasiones usa la palabra “refleja” se puede decir que el estudiante habla del movimiento como una simetría que hacen las diferentes figuras; sin embargo, a la hora de contar la cantidad de veces que se mueve la figura el estudiante comete el error de contar la figura inicial pues indica que se mueve 4 veces, cuando en realidad la figura se transforma solo 3 veces como lo indica E2 (ver **Figura 72**).

3. ¿Cuántas veces se debe repetir cada figura para llegar al diseño original?
Completa la tabla.

Figura inicial	Cuántas veces que la figura se transforma	Describe cómo esta figura se mueve para configurar el diseño del lagarto completo.
	4 Veces	Se movio hacia arriba la de la Derecha y Izquierda
	4 Veces	Se movio ala Derecha abajo izquierda y se refleja
	4 Veces	estaba ala esquina izquierda y subio ala Derecha y se movio por los rincones
	4 Veces	esta forma veia de esta ba ala Derecha y se movio al medio y ala izquierda

Figura 71 Producción punto 3) E3

3. ¿Cuántas veces se debe repetir cada figura para llegar al diseño original?
Completa la tabla.

Figura inicial	Cuántas veces que la figura se transforma	Describe cómo esta figura se mueve para configurar el diseño del lagarto completo.
	3	se Reflejaron
	3	se Reflejaron
	3	se Reflejaron
	3	se Reflejaron

Figura 72 Producción punto 3) E2

En el punto 4) se pide a los estudiantes que le den un nombre a esta transformación, por un lado, se tiene la respuesta de E2 (ver **Figura 73**) donde utiliza la palabra rotación para referirse al movimiento que hace la figura, para esto fue necesario la intervención de las autoras con el fin de rectificar lo que quería decir el estudiante, esto se puede evidenciar en el siguiente diálogo:

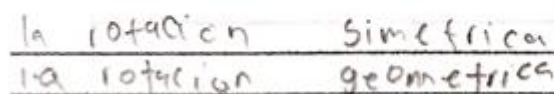
Autora 1: a que te refieres con rotación

E2: al movimiento que hace la figura profe

Autora 1: ¿como si colocáramos un espejo? ¿o como si girara la figura?

E2: como si colocáramos un espejo

4. ¿Qué nombre le pondrías a esta transformación?

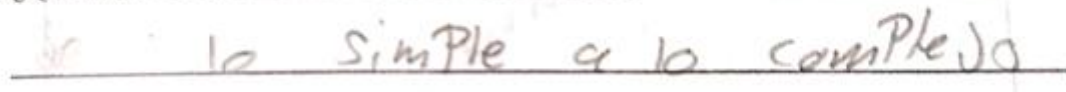


la rotación simétrica
la rotación geométrica

Figura 73 Producción punto 4) E2

Por otro lado, con la respuesta de E3 (ver **Figura 74**) se puede identificar que el trabajo con GeoGebra permite que el estudiante visualice y amplie su experiencia geométrica (Arcila, Bonilla y Cardona, 2012), en este caso con respecto a la simetría, pues como bien se mencionó anteriormente, el applet mostraba partes de una figura y el estudiante debía utilizar los deslizadores para completarla, es aquí donde el estudiante parte de algo básico como las figuras iniciales a algo más conceptual que es la construcción del “lagarto” donde implícitamente se puede ver la composición de simetrías.

4. ¿Qué nombre le pondrías a esta transformación?



lo simple y lo complejo

Figura 74 Producción punto 4) E3

En el punto 5) se pide a los estudiantes que tracen los ejes de simetría que pueden encontrar en “el lagarto”, en ese sentido se obtiene que todos los estudiantes identifican cuatro ejes de simetría (ver **Figura 75**) esto se debe a que se guiaron con los ejes que iban apareciendo cuando manipulaban el Applet, lo cual no es correcto, pues en la figura completa solo existen dos ejes de simetría.

Con lo anterior podemos dar cuenta de una de las dificultades presentadas por Vasco (1992), donde señala que para los estudiantes muchas veces no es tan fácil identificar la transformación de simetría y a pesar de tener las herramientas tecnológicas en este momento el estudiante debe recurrir a la imaginación, es decir, el estudiante no tiene de manera clara la representación gráfica de la transformación y se le dificulta tener claridad a la hora de señalar los ejes de simetría (Jaime y Gutiérrez, 1996).

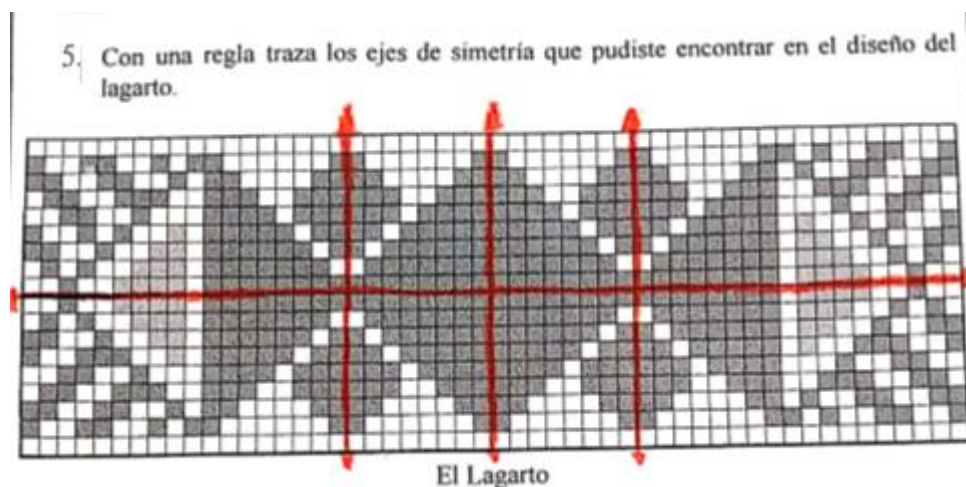


Figura 75 Producción punto 5) ES

Finalmente, en el punto 6) los estudiantes deben marcar como verdadero o falso diferentes enunciados, en algunos casos fue necesaria la intervención de las autoras para aclarar y precisar sobre algunos de los enunciados, sin embargo, las producciones de los estudiantes en su mayoría fueron satisfactorias (ver **Figura 76**), es decir, los estudiantes logran identificar varias de las

propiedades de la simetría tales como la equidistancia, la congruencia y a su vez, identifican diferentes formas de ver el eje de simetría, es aquí donde se puede evidenciar que las tecnologías digitales permiten que los estudiantes tengan una mejor visualización de las diferentes propiedades que tiene la transformación de simetría (NTCM, 2000; Peña y Riascos, 2012).

6. Marca con una V los enunciados verdaderos y con una F los enunciados falsos.
- ☐ Los ejes de simetría son líneas curvas.
 - ☒ Si trazamos un eje de simetría justo en la mitad del diseño del lagarto este eje me permite ver el opuesto de la imagen inicial.
 - ☐ Los ejes de simetría me cambian el tamaño de las figuras que se encuentran en el diseño del lagarto.
 - ☒ Los ejes de simetría conservan la distancia entre las figuras del lagarto y sus puntos.
 - ☒ Si ponemos un espejo en la mitad del diseño del lagarto, el borde del espejo que está en contacto con el diseño funciona como eje de simetría.
 - ☒ Los ejes de simetría son líneas rectas.

Figura 76 Producción punto 6) ES

Por otro lado, se tienen respuestas como la de E4 (ver **Figura 77**) donde podemos ver que el estudiante aún no tiene presente la congruencia como una propiedad entre las figuras relacionadas por una transformación de simetría, aquí podemos ver reflejada unas dificultades presentadas por Vasco (1992) donde señala que muchas veces el estudiante debe recurrir a la imaginación para poder visualizar lo que sucede con la transformación de simetría y dado que, en este punto los estudiantes no utilizaron el applet para el desarrollo del punto 6) no fue fácil identificar dicha propiedad.

6. Marca con una V los enunciados verdaderos y con una F los enunciados falsos.

- ☐ Los ejes de simetría son líneas curvas.
- ☒ Si trazamos un eje de simetría justo en la mitad del diseño del lagarto este eje me permite ver el opuesto de la imagen inicial.
- ☒ Los ejes de simetría me cambian el tamaño de las figuras que se encuentran en el diseño del lagarto.
- ☒ Los ejes de simetría conservan la distancia entre las figuras del lagarto y sus puntos.
- ☒ Si ponemos un espejo en la mitad del diseño del lagarto, el borde del espejo que está en contacto con el diseño funciona como eje de simetría.
- ☒ Los ejes de simetría son líneas rectas.

Figura 77 Producción punto 6) E4

En términos generales, se logra identificar que los estudiantes reconocen la necesidad de tener más de un eje de simetría en diseños como “el lagarto” y que implícitamente esto es reconocer la suma de simetrías como un factor importante para llevar a cabo la construcción, adicional a ello, reconocen la congruencia y equidistancia como propiedades de la simetría (Yaglom, 1962).

5.5 ANÁLISIS RETROSPECTIVO ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE 4

La actividad de aprendizaje 4 se llevó a cabo el mismo día 10 de noviembre en las últimas horas de clase, para este momento tampoco se cuenta con la disponibilidad de los equipos de cómputo y se utiliza la misma dinámica de la actividad anterior.

Dado que los estudiantes ya tienen idea sobre el manejo de GeoGebra se procede a iniciar con la tarea No 4, esta tarea consistía en observar lo que sucedía cuando el deslizador se movía e identificar el orden en el que iba realizando la construcción, esta tarea la desarrollaron de manera grupal y para tener el registro de lo que hacían los estudiantes en la hoja de trabajo se colocan los mismos enunciados en el punto 1) y nuevamente deben enumerar el orden de la construcción, en este caso las TD fortalece la visualización y el razonamiento con respecto problemas de construcción (Jones, 2011).

En ese sentido, podemos afirmar que los estudiantes identifican tanto los componentes como el orden en el que se debe de realizar la transformación de simetría (ver **Figura 78**) esto teniendo en cuenta lo señalado por Yaglom (1962).

1. Enumera el orden en el que se construye el diseño de la estrella.
 - 6 Se toma la imagen derecha inferior y el eje vertical para aplicar la reflexión una vez más y obtener el diseño completo.
 - 4 Se construye el eje horizontal a las dos imágenes anteriores
 - 3 Se toma la imagen inicial y el eje vertical para aplicar la reflexión y obtener la imagen derecha superior
 - 1 Se tiene una figura o imagen inicial
 - 2 Se construye un eje vertical en uno de los lados de la imagen inicial
 - 5 Se toma la imagen derecha superior y el eje horizontal para aplicar la reflexión y obtener la imagen derecha inferior

Figura 78 Producción punto 1) ES

En el punto 2) se pide a los estudiantes que realicen la representación gráfica del enunciado, obteniendo resultados satisfactorios como es el caso de E3 (ver **Figura 79 y 80**), para este momento los estudiantes han adquirido habilidades para interpretar situaciones tanto gráficas como verbales de la transformación de simetría, es decir, son capaces de asignar el enunciado a una acción o asignar una representación gráfica a un enunciado, como bien lo señalan los DBA (MEN, 2016) esta es una de las evidencias que se cumplen cuando el estudiantes está alcanzando el aprendizaje con respecto a la transformación de simetría.

2. Dibuja cada una de los pasos para construir “La estrella”.

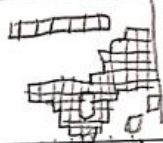
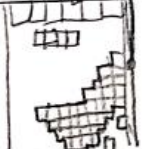
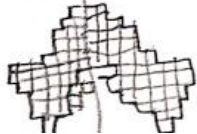
Instrucción	Dibujo
Se tiene una figura o imagen inicial	
Se construye un eje vertical en uno de los lados de la imagen inicial	
Se toma la imagen inicial y el eje vertical para aplicar la reflexión y obtener la imagen derecha superior	

Figura 79 Producción punto 2) primera parte E3

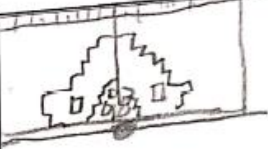
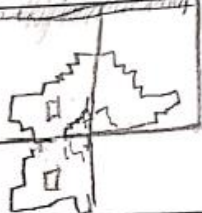
Se construye el eje horizontal a las dos imágenes anteriores.	
Se toma la imagen derecha superior y el eje horizontal para aplicar la reflexión y obtener la imagen derecha inferior.	
Se toma la imagen derecha inferior y el eje vertical para aplicar la reflexión una vez más y obtener el diseño completo.	

Figura 80 Producción punto 2) segunda parte E3

Sin embargo, en el caso de E4 (ver **Figura 81**) se puede evidenciar una dificultad de visualización, pues al tener una figura inicial y un eje de simetría no es fácil identificar los cambios que sufre la figura, pues el estudiante debe recurrir a su imaginación y termina dibujando la misma figura inicial sin hacer la simetría (Vasco, 1992).

2. Dibuja cada una de los pasos para construir "La estrella".

Instrucción	Dibujo
Se tiene una figura o imagen inicial	
Se construye un eje vertical en uno de los lados de la imagen inicial	
Se toma la imagen inicial y el eje vertical para aplicar la reflexión y obtener la imagen derecha superior	

Figura 81 Producción punto 2) primera parte E4

En el punto 3) los estudiantes argumentan la necesidad de tener un eje simetría para poder ejecutar la transformación, es decir, si no existe el eje no hay imagen simétrica, esto se puede evidenciar en las respuestas de E1 y E2 (ver **Figura 82 y 96**) dado que luego de manipular el Applet lo identifica y como bien lo señala Jones (2011) el uso de las TD promueve la intuición visual y la capacidad de razonar sobre diferentes situaciones problemas.

3. ¿Qué pasa si eliminamos el cuarto paso de esta construcción?

lo que pasaría es que no estaría completa sino estaría las 2o imágenes faltantes

Producción punto 3) E1

3. ¿Qué pasa si eliminamos el cuarto paso de esta construcción?

no se podrían duplicar las imágenes o reflejar

Producción punto 3) E2

Figura 82 Producciones de los estudiantes punto 3)

Finalmente, en el punto 4) los estudiantes deben completar la tabla con representaciones tanto gráficas como verbales, en este momento, se han obtenido buenos resultados, pues los estudiantes como E1 (ver **Figura 83**) han adquirido la habilidad y capacidad de identificar los componentes de la transformación de simetría y a su vez son capaces de realizar una representación gráfica y verbal de cada uno de ellos (MEN,2016).

4. Para la construcción de la estrella necesitamos los siguientes componentes.
Completa la tabla.

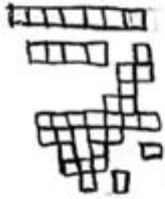
Componente	Representación (Dibujo)
Una figura inicial	
eje vertical	
Un eje de simetría horizontal	
imagen final	

Figura 83 Producción punto 4) segunda parte E1

Finalmente, se presenta a los estudiantes la tarea No 5, dicha tarea y sus respuestas registradas en las hojas de trabajo se obtuvieron de forma grupal, pues como se mencionó anteriormente solo se contaba con el dispositivo de las autoras y el video beam de la institución.

En esta tarea los estudiantes debían escribir de manera numérica la distancia del punto al punto simétrico según el eje de simetría, pues el Applet cuenta con cuadrículas las cuales permiten identificar las unidades de distancia, en ese sentido, se logra evidenciar en las siguientes imágenes (ver **Figura 84**) las respuestas obtenidas en las hojas de trabajo por parte de dos estudiantes E1 y E2, que han identificado de forma casi satisfactoria cuantas unidades hay de los ejes a los puntos iniciales, y de igual manera cuantas unidades se mueve el punto simétrico con respecto al eje horizontal y vertical.

1. Completa la siguiente tabla:

Figura inicial	Distancia respecto al eje vertical	Distancia de su imagen respecto al eje vertical	Distancia respecto al eje horizontal	Distancia de su imagen respecto al eje horizontal
Rojo	7	7	10	10
Amarillo	2	2	6	6
Verde	6	6	8	8
Rosa	5	5	2	2
Azul	1	1	0	0

Producción punto 1) primera parte E1

1. Completa la siguiente tabla:

Figura inicial	Distancia respecto al eje vertical	Distancia de su imagen respecto al eje vertical	Distancia respecto al eje horizontal	Distancia de su imagen respecto al eje horizontal
Rojo	7	7	10	10
Amarillo	2	2	5	5
Verde	6	6	8	8
Rosa	5	5	2	2
Azul	1	1	0	0

Producción punto 1) primera parte E2

Figura 84 Producciones de los estudiantes

Con este ejercicio se buscaba que los estudiantes reconocieran la equidistancia en la cual se basa esta tarea, de este modo y teniendo en cuenta lo mencionado por Jones (2011) este ejercicio les permitió a los estudiantes justificar y razonar con respecto a sus respuestas y las de sus compañeros, esto se puede evidenciar en el siguiente dialogo. Cabe aclarar nuevamente que esta tarea se resolvió de forma grupal.

Autora 1: ¿Cuántas unidades se movió el punto rosa?

E3: Seis

E1: No, mire bien, son solo cinco unidades

Autora 1: E3, porque dices que son seis unidades

(E3 sale al tablero y cuenta)

E3: Mire profe, uno, dos, tres, cuatro, cinco y seis

E4: Pero es que el punto rosa no se cuenta, se cuentan solo los grises ¿verdad profe?

En la segunda pregunta de esta hoja de trabajo se manejan cinco afirmaciones donde los estudiantes deberán llenar en cuadro con una “V” o con una “F” si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Estas afirmaciones giran en torno al concepto de equidistancia tomando como referencia la imagen trabajada en el Applet, Godino y Ruiz (2002) mencionan que la distancia entre cualquier par de puntos p y q es la misma entre sus imágenes transformadas, así pues, se logra evidenciar que el estudiante E3 (ver **Figura 85**) reconoce la equidistancia como propiedad.

2. Marca con una V los enunciados verdaderos y con una F los enunciados falsos.

- ☐ La distancia del punto amarillo al eje es diferente que del eje al otro punto amarillo.
- ☒ La cantidad de unidades partiendo del punto rojo hasta el eje, son las mismas que al otro lado.
- ☐ La cantidad de unidades del lado derecho de la recta es diferente a la del lado izquierdo de la recta.
- ☒ Si la figura inicial verde está a ocho unidades de distancia al eje horizontal y su imagen está a siete unidades de distancia al mismo eje, podemos decir que las figuras están relacionadas mediante una simetría.
- ☒ Para que las figuras que se encuentran al lado derecho del eje sean iguales a las que se encuentran al lado izquierdo del eje es importante que tengan la misma distancia y orientación.

Figura 85 Producción punto 2) primera parte E3

Por el contrario, los estudiantes E2 y E5 no han logrado tener claridad con respecto a esta propiedad (ver **Figura 86** y **87**), pues aún tienen dificultades y se evidencia con las respuestas que dieron; estas dificultades o errores como lo mencionan Jaime y Gutiérrez (1996) se basan en el hecho de que los estudiantes siguen sin comprender o tener claridad con respecto al concepto de equidistancia entre puntos iniciales, ejes y puntos simétricos.

2. Marca con una V los enunciados verdaderos y con una F los enunciados falsos.

- ☒ La distancia del punto amarillo al eje es diferente que del eje al otro punto amarillo.
- ☒ La cantidad de unidades partiendo del punto rojo hasta el eje, son las mismas que al otro lado.
- ☐ La cantidad de unidades del lado derecho de la recta es diferente a la del lado izquierdo de la recta.
- ☒ Si la figura inicial verde está a ocho unidades de distancia al eje horizontal y su imagen está a siete unidades de distancia al mismo eje, podemos decir que las figuras están relacionadas mediante una simetría.
- ☒ Para que las figuras que se encuentran al lado derecho del eje sean iguales a las que se encuentran al lado izquierdo del eje es importante que tengan la misma distancia y orientación.

Figura 86 Producción punto 2) primera parte E2

2. Marca con una V los enunciados verdaderos y con una F los enunciados falsos.

- ☐ La distancia del punto amarillo al eje es diferente que del eje al otro punto amarillo.
- ☒ La cantidad de unidades partiendo del punto rojo hasta el eje, son las mismas que al otro lado.
- ☐ La cantidad de unidades del lado derecho de la recta es diferente a la del lado izquierdo de la recta.
- ☒ Si la figura inicial verde está a ocho unidades de distancia al eje horizontal y su imagen está a siete unidades de distancia al mismo eje, podemos decir que las figuras están relacionadas mediante una simetría.
- ☒ Para que las figuras que se encuentran al lado derecho del eje sean iguales a las que se encuentran al lado izquierdo del eje es importante que tengan la misma distancia y orientación.

Figura 87 Producción punto 2) primera parte E5

Por ultimo en la tercera pregunta los estudiantes tienen la posibilidad de dibujar una estrella simétrica (ver **Figura 88, 89 y 90**) a lo que optan por replicar la estrella con la cual se trabajó en el Applet, sin embargo observando con un poco de detalle estos dibujos los estudiantes no logran obtener una estrella completamente simétrica pues les faltan puntos por pintar para que esto pase, al transcribir este diseño la cuadrícula de la estrella jugo el papel de distractor al momento de contar

las unidades, así pues se podría concluir que los estudiantes lograron de cierto modo un acercamiento a la construcción completa de una figura simétrica.

3. Utiliza los colores para dibujar tu propia estrella simétrica.

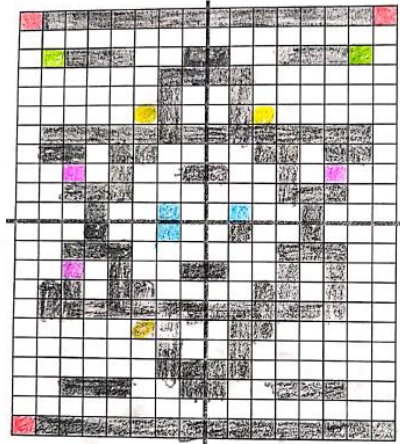


Figura 88 Producción punto 3) primera parte E1

3. Utiliza los colores para dibujar tu propia estrella simétrica.

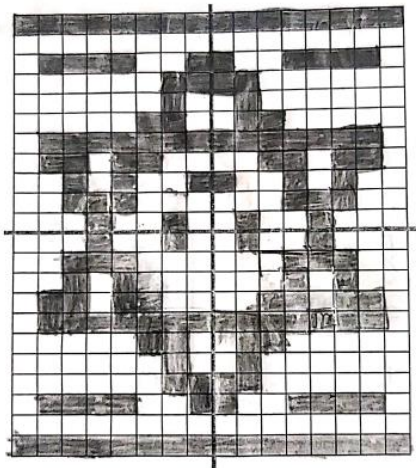


Figura 89 Producción punto 3) primera parte E2

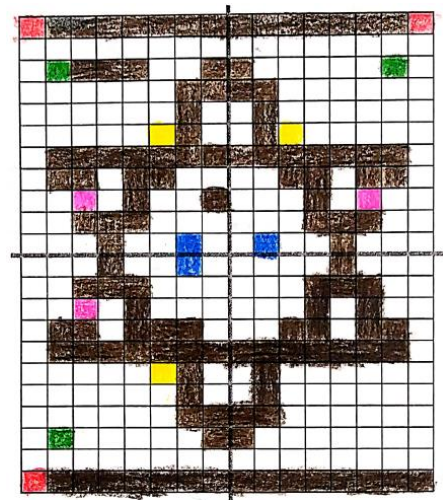


Figura 90 Producción punto 3) primera parte E3

5.6 PRINCIPALES RESULTADOS O RESUMEN DE LOS RESULTADOS

A modo de cierre, este apartado contiene los principales resultados obtenidos a partir del análisis retrospectivo del experimento de enseñanza recogido de la implementación. Para esto

hemos creado una rejilla de análisis (ver Anexo 2) la cual permitirá identificar los elementos cruciales del marco teórico. Cabe aclarar que hemos usado las sigas HT para referirnos a las hojas de trabajo de manera general. Considerando el análisis retrospectivo que se presentó anteriormente, basado en los resultados recopilados de la implementación obtuvimos los siguientes aspectos generales.

Referente al uso de TD y aspectos socioculturales para el aprendizaje de la transformación de simetría

- En las respuestas de las HT-1 los estudiantes relacionan la igualdad entre figuras con el hecho de que estén equilibradas, tengan el mismo peso o incluso se llega a mencionar que tengan el mismo tamaño, esto para dar cuenta de que están relacionadas por medio de la transformación de simetría. De este modo y teniendo en cuenta que el símbolo con el cual se trabajó en esta tarea es un “balanzón” las respuestas fueron delimitadas por la imagen de referencia, esta es una acción cultural como lo menciona Aroca (2007), los docentes de matemáticas imponen conceptos propios de las matemáticas occidentales, impidiendo así que los estudiantes tengan la capacidad de crear sus propias representaciones, considerando lo anterior podemos decir que si el símbolo con el cual se realizó esta tarea hubiera sido otro, las respuestas (palabras empleadas por los estudiantes) hubieran cambiado por completo.
- En las HT se puede evidenciar que los estudiantes señalan o mencionan en diferentes ocasiones, los elementos necesarios para realizar la transformación de simetría, incluso cuando no se les pide que lo hagan, de este modo Palmas-Pérez - Pérez (2018) menciona que el uso de las TD relacionadas con un contexto social y

cultural le facilitan al estudiante la apropiación de las ideas matemáticas, esto se logra evidenciar a lo largo del experimento de enseñanza, pues en cada dialogo en el que se requiere hacer énfasis sobre algún elemento lo nombran sin problema y tiene claridad sobre este.

- El arrastre le permite a los estudiantes dar cuenta de las propiedades que cumplen las figuras, pues cuando están trabajando en GeoGebra pueden observar que las figuras conservan la distancia con respecto al eje de simetría, por ejemplo: en la tarea dos, cuando los estudiantes deben construir el diseño de "la abuela" y reflejaban una de las figuras iniciales si acercaban está figura al eje de simetría su imagen también lo hacía, Moreno-Armella (2002) considera que las TD fomentan la experiencia geometría en el estudiante, permitiéndole así trabajar directamente con los objetos matemáticos en este caso los elementos de la simetría, pues les permiten evidenciar la relación entre estos.
- El uso de GeoGebra presentó algunas dificultades para los estudiantes específicamente en el uso de las herramientas, puesto que no habían trabajado antes con esta aplicación, sin embargo, con la ayuda de las autoras poco a poco fueron interactuando y explorando este recurso logrando así adaptarse a él, superando dichas dificultades y permitiéndole a los estudiantes completar las tareas.
- Los aspectos socioculturales permitieron que los estudiantes relacionarán los objetos matemáticos en un contexto real, como lo menciona Aroca (2007) el aprendizaje de la geometría se fortalece cuando se le asigna un significado social o cultural a los elementos matemáticos en este caso a la simetría, pues muchas veces cuando el estudiante no encuentra una relación entre el objeto geométrico y el

contexto sociocultural no ven la necesidad de aprenderla y la consideran como algo difícil y poco útil (Abrate, Delgado y Pochulu, 2006) De este modo, cuando se les presentó a los estudiantes el contenido que se iba a trabajar y se relacionó con los tejidos del pueblo indígena Nasa Yuwe, los estudiantes mencionan que antes no habían pensado en que esta transformación la pudieran encontrar en algo de "la vida real".

- Los aspectos socioculturales le aportan significado a las figuras utilizadas por los estudiantes, pues dejan de ver las transformaciones como algo alejado de su realidad y empiezan a reconocer que muchos objetos pueden estar relacionados mediante estas transformaciones geométricas y que a su vez tienen un significado cultural, así como lo fundamenta Robayo (2021) al relacionar lo que aprenden los estudiantes con su contexto sociocultural, logran que estos contenidos se llenen de sentido y significado.
- El uso de TD, especialmente de GeoGebra permite que el estudiante razone y tenga la posibilidad de crear representaciones, pues en varias ocasiones se pudo evidenciar que los estudiantes realizaban diferentes construcciones para llegar a la tarea que se le solicitaba y esto les permitía observar y reconocer en qué aspectos estaban fallando. Por ejemplo, en la construcción del diseño de "la abuela" los estudiantes debían hacer uso de la herramienta "reflexión axial", en algunas ocasiones preguntaban cómo debían hacer para lograr reflejar la imagen puesto que la herramienta no funcionaba, cuando encuentran la manera correcta de aplicar esta transformación satisfactoriamente, nos permite caer en cuenta de que los estudiantes

han logrado reconocer el orden en el que se debe efectuar una construcción sin necesidad de que lo exprese verbalmente.

Diseño de las Actividades de Aprendizaje

- Las hojas de trabajo fueron diseñadas acorde al nivel educativo en el que se encuentran los estudiantes teniendo como referencia los EBC (MEN, 1998) en ese sentido la mayor parte de estos comprendieron las consignas y los conceptos aquí utilizados, logrando así llevar a cabo la realización de las tareas.
- Las hojas de trabajo fomentan la discusión entre estudiantes, es decir, a pesar de que no todo el trabajo fue individual, los estudiantes buscaron y obtuvieron un espacio el cual les permitía discutir, cuestionar y debatir con sus compañeros sobre las posibles respuestas encontradas.
- En algunas ocasiones las consignas no fueron del todo claras para los estudiantes, pues hubo momentos en los que fue necesaria la intervención de las autoras para explicar algunos enunciados o dar ejemplos, logrando así que los estudiantes tuvieran claridad y evitar ambigüedades, pero en términos generales los estudiantes lograban completar la tarea luego de la explicación.
- Particularmente, desde el comienzo de la implementación logramos identificar que los estudiantes confundían y/o no tenían claridad sobre los términos de "figura simétrica" con "figura geométrica". Cabe aclarar que esto ocurrió desde antes de iniciar con la primera HT, pero fue más evidente en el último punto de esta misma hoja, cuando se les pide a los estudiantes que dibujen otros objetos simétricos que conocieran pues terminaron dibujando figuras geométricas.

Implementación de las Actividades de Aprendizaje

- Con los resultados de las HT-1 se observó que los estudiantes reconocieron que para que las figuras quedarán simétricas debían ser a lo que ellos llaman de "igual tamaño", "estar balanceadas" o incluso que tuvieran la "misma forma". Los estudiantes crearon sus propias definiciones a lo que se refiere con la transformación de simetría desde el primer momento.
- Los estudiantes identificaron los elementos necesarios para la transformación de la simetría, los cuales son la figura inicial, el eje de simetría y la figura simétrica. Los estudiantes en su mayoría reconocen estos elementos de manera más rápida, sin embargo, otros estudiantes confundieron el eje de simetría con cualquier línea recta que aparece en el dibujo y no tenían claridad de su papel en la transformación.
- Los estudiantes logran reconocer que las figuras son simétricas si y sólo si al partirlas a la mitad se obtienen dos partes iguales, y que esto aplica para diferentes objetos siempre y cuando cumplan con lo mencionado anteriormente, esto lo podemos observar en los dibujos que realizan los estudiantes a lo largo de las HT.
- En su mayoría los estudiantes dan cuenta de manera verbal y escrita, en GeoGebra como en las HT que los pasos para ejecutar la transformación geométrica de simetría, son siempre los mismos y en el mismo orden: requieren de una imagen inicial, un eje de simetría para obtener así la imagen final, permitiendo así realizar una construcción. Además, identifican el orden de una construcción permitiéndoles así ordenar los pasos necesarios para llevar a cabo la construcción en la tarea que se les pedía de manera satisfactoria.

-
- Los estudiantes describen los movimientos que realizan las figuras. La mayor parte de los estudiantes describen el movimiento como desplazamiento y no como "la reflexión"
 - Los estudiantes reconocen que los ejes de simetría pueden tener diferentes orientaciones, pues los estudiantes logran expresar tanto verbal, como de manera escrita y gráfica los diferentes ejes de simetría que puede tener una misma figura.
 - Los estudiantes logran reconocer que las figuras relacionadas mediante una simetría son congruentes, esto se evidencia cuando los estudiantes plantean en sus repuestas que las figuras eran iguales de forma, tamaño y distancias, es decir, que reconocen satisfactoriamente en términos general la congruencia como una propiedad de la simetría.
 - Los estudiantes identifican que la distancia de un punto y su imagen respecto al eje de simetría son iguales, esto se logra evidenciar con los ejercicios de "verdadero o falso" de la última HT, pues los estudiantes expresan que las figuras "debían estar ambas a la misma distancia del eje" o que de lo contrario no serían "iguales" o simétricas, así pues, podemos afirmar que los estudiantes lograron interiorizar otra propiedad de la simetría.

6 CONCLUSIONES

En este trabajo de grado se propuso como objetivo general fundamentar el diseño, implementación y análisis retrospectivo de un experimento de enseñanza para la transformación de simetría a partir de elementos socioculturales y el uso de geometría dinámica con estudiantes de séptimo grado.

Con respecto a lo anterior, se logró identificar que para el diseño de un experimento de enseñanza es importante tener en cuenta diferentes aspectos, como por ejemplo lo relacionado con el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela, los posibles errores y dificultades que pueden presentar los estudiantes, así mismo, fue importante tener en cuenta elementos curriculares como Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA, 2017), estos referentes nos aportan categorías de análisis tanto para el diseño de las actividades de aprendizaje, como para analizar las producciones de los estudiantes.

En ese orden de ideas, fue oportuno la revisión de antecedentes tanto locales como internacionales donde se haya trabajado las transformaciones geométricas con TD y/o elementos socioculturales, esto nos ayudó a la identificación de diferentes factores que se debían tener en cuenta a la hora de diseñar las actividades de aprendizaje, y a su vez la identificación de las posibles dificultades que podían presentar los estudiantes a la hora de trabajar con TD, elementos socioculturales y transformaciones geométricas (Urbano, 2010; Gamboa y Ballesteros; 2010).

De este modo, en relación con el primer objetivo específico “Identificar aspectos socioculturales involucrados en el diseño de un experimento de enseñanza para la transformación de simetría en grado séptimo”. Se logró relacionar los elementos artesanales del pueblo *Nasa Yuwe*

con la transformación de simetría, pues en varios de sus diseños está plasmada dicha transformación y esto nos ayudó a que los estudiantes encontraran una relación cultural con el contenido geométrico que se estaba trabajando, al igual que les ayudó a relacionarlo con elementos de su cotidianidad.

En términos generales, los estudiantes lograron poner en práctica la identificación de la transformación de simetría en elementos de su entorno esto a través del desarrollo de las diferentes hojas de trabajo donde se pedía a los estudiantes que dibujaran objetos simétricos u objetos que tuvieran ejes de simetría que no necesariamente estuvieran relacionados con las artesanías del pueblo *Nasa Yuwe*.

En relación con el segundo objetivo específico el cual era “reconocer el papel que juegan las tecnologías digitales en relación con el aprendizaje de la transformación de simetría en contextos socioculturales”. Se logró evidenciar que las tecnologías digitales aportan diferentes herramientas a los estudiantes para la comprensión de la transformación de simetría, por ejemplo, les permitió construir y deconstruir los diferentes diseños del pueblo *Nasa Yuwe*, brindando así facilidad de visualizar los efectos de la transformación sobre una figura dada.

Sin embargo, se debe de ser muy cuidadoso, pues en algunas ocasiones se identificó que el uso de GeoGebra era un distractor para los estudiantes pues cuando se les pide crear algo de manera libre, ellos se rigen a recrear lo que el applet les muestra porque aparentemente es “lo que está bien”.

Finalmente, posterior a la implementación y al análisis retrospectivo del experimento de enseñanza consideramos que es importante trabajar las actividades desde la construcción de los diseños utilizando las herramientas propias de GeoGebra, pues en la mayor parte de las actividades planteadas, los estudiantes “construían” a partir de los deslizadores, sin embargo, a la hora de

utilizar la herramienta de “simetría axial” los estudiantes presentaban dificultades con el orden de construcción que debían ejecutar.

Por otro lado, es oportuno fortalecer y mejorar el uso del lenguaje matemático en las diferentes consignas planteadas en las hojas de trabajo, en algunas ocasiones se identificó cierta dificultad para comprender lo que se estaba pidiendo; así mismo, ajustar la extensión de las hojas de trabajo precisando un poco más en los elementos importantes para que los estudiantes no se desmotiven; con respecto al trabajo en clase, se vieron mejores resultados al igual que mayor participación cuando los estudiantes trabajaron de manera grupal, el hecho de poder interactuar entre todos con el applet sin temor a equivocarse permite un desarrollo óptimo de las tareas; es importante señalar que el uso adecuado de herramientas como GeoGebra generan motivación en los estudiantes logrando mejor disposición y participación por parte de ellos.

Adicionalmente, consideramos por un lado que, el uso de los elementos socioculturales aportan significado social y cultural a la transformación de simetría y permite que el estudiante la relacione con elementos de su propio entorno lo cual facilita la visualización de esta misma, sin tener que recurrir a la imaginación. Por otro lado, el uso de las tecnologías digitales en este caso, el uso de GeoGebra permitió que los estudiantes se centraran en la identificación de los componentes y propiedades de la transformación de simetría.

Adicionalmente, el diseño y la implementación del Experimento de Enseñanza nos permitieron identificar que cuando se proponen actividades de aprendizaje usando tecnologías digitales, relacionándolo con lo sociocultural nos dimos cuenta de que la atención de ellos se centró en querer aprender en cómo se utilizaban los applets y eso los motivó a desarrollar de manera óptima las diferentes tareas.

Para cerrar el capítulo de conclusiones consideraciones que de este trabajo quedan pendientes por realizar los siguientes puntos:

- Continuar la secuencia de actividades enfocada a las transformaciones geométricas faltantes, como rotación y traslación teniendo en cuenta los mismos diseños de tejidos del pueblo indígena *Nasa Yuwe* u otro pueblo indígena propio del territorio colombiano, permitiendo así el rescate y divulgación de las culturas indígenas de nuestro país.
- Diseñar actividades de aprendizaje dónde los estudiantes tengan la posibilidad de crear un diseño propio y luego lo puedan recrear en GeoGebra, permitiéndoles así cuestionarse cómo hacerlo.

De lo anterior nos surge la siguiente pregunta

¿Qué pasaría si, en lugar de suministrar los diseños o figuras con los que se debe trabajar, se les da herramientas a los estudiantes para que identifique estas transformaciones en el contexto y trabajar directamente con ellas?

A modo de reflexión, este trabajo y la implementación permitió darnos cuenta de que como docentes no debemos predisponernos frente a un grupo de estudiantes o un estudiante en particular, o por el contrario llegar al salón de clases pensando que el trabajo con los estudiantes no será el mejor porque nos dejamos llevar de los comentarios que se reciben por parte de los demás docentes, pues aunque los estudiantes no sean "el mejor grupo" de la institución debemos de darles la oportunidad de conocerlos y empezar una relación desde cero. En nuestro trabajo esto fue lo que nos ayudó a obtener buenas relaciones y resultados por parte de los estudiantes, pues no pusimos en duda sus capacidades.

Finalmente, consideramos que el respeto, la confianza y las buenas relaciones que podemos construir con nuestros estudiantes son un factor fundamental que nos llevan a obtener mejores resultados en el desarrollo de nuestras clases, motivarlos a querer aprender, plantear preguntas que los hagan pensar más allá del salón de clase.

REFERENCIAS

- Acosta, M., & Camargo, L. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (N° 32), pp. 4-8.
- Abreu, G. (2020) Cultural Diversity in Mathematics Education. Encyclopedia of mathematics educations.
- Arceo, E. (1999). ¿Problemas de geometría o problemas con la geometría? *Educación Matemática*, 11(1), 25-45.
- Arcila, J., Bonilla, J., & Cardona, G. (2012). *Caracterización del uso de las transformaciones de Isometría mediante el diseño de una secuencia de problemas abiertos de construcción geométrica con CABRI 3D* (Trabajo de Grado). Santiago de Cali: Universidad del Valle.
- Aroca, A. (2007). *Una propuesta de enseñanza de geometría desde una perspectiva cultural* (Tesis de maestría). Santiago de Cali: Universidad del Valle, http://etnomatematica.org/articulos/Tesis_maestria_Aroca.pdf
- Blanco (2011). La postura sociocultural de la educación matemática y sus implicaciones en la escuela. *Revista Educación y Pedagogía*. Vol. 23. núm. 59.
- Clemens, S. O. (1998). *Geometría*. México, D.F: Addison Wesley Logman.
- De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon* 26, 15-30.
- www.researchgate.net/publication/280527242 EL PAPEL Y LA FUNCION DE LA DEMOSTRACION EN MATEMATICAS

-
- Fife, J., James, K., & Bauer, M. (2019). *Una progresión de aprendizaje para las transformaciones geométricas de isometría*. Informe de Investigación, Princeton.
- Gamboa, R., & Ballesteros, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare*, XIV(2), 125-142.
- Godino, J. & Ruiz. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Granada, Universidad de Granada.
- Güven. (2012). Uso de software de geometría dinámica para mejorar la comprensión de los estudiantes de octavo grado sobre la geometría de transformación. *Revista de Australasia de Tecnología Educativa*, 364-382.
- Hoyles, Celia and Jones, Keith (1998) Proof in dynamic geometry contexts. In, *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. (An ICMI Study) London, GB. Springer, pp. 121-128.)
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1996). El grupo de las isometrías del plano. Madrid: Síntesis.
- Jaramillo, D. (2011). La educación matemática en una perspectiva sociocultural: tensiones, utopías, futuros posibles. *Revista Educación Y Pedagogía*, 23(59), 13–36.
- Jones, K. (2011). *The Value of Learning Geometry with ICT: Lessons from Innovative Educational Research*. University of Southampton, UK.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas*. Bogotá: MEN, Revolución Educativa, Colombia Aprende.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Bogotá: MEN.

Molina, M et al. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, [en línea], 2011, Vol. 29, n.º 1, pp. 75-88, <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/243824>

Moreno-Carretero, M. (1998). *Didáctica de la matemática en la educación secundaria. Manual para la formación inicial del profesorado de secundaria*. Universidad de Almería, servicio de publicaciones.

Moreno-Armella, (2002). *Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización*.

NTCM. (2000). *Principios y estándares para la Educación Matemática*, Sevilla: Sociedad Andalucía de Educación Matemática, Thales.

Palmas-Pérez -Pérez, S. (2018). La tecnología digital como herramienta para la democratización de ideas matemáticas poderosas. *Revista Colombiana de Educación*, (74), 109-132.

Peña, J. & Riascos, C. (2012). *Aprendizaje de la transformación de Rotación en una secuencia didáctica que integra CABRI GEOMETRY II PLUS en 5º de Educación Básica*. Trabajo de Grado. Buenaventura: Universidad del Valle.

-
- Planas, N. (2010). Las teorías socioculturales en la investigación en educación matemática: reflexiones y datos bibliométricos. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 163-195). Lleida: SEIEM
- Robayo, L. (2021). *Transformaciones geométricas de isometría en el plano, con proyección cultural y aporte a la paz*. Bogotá, DC.: Universidad Pedagógica Nacional.
- Sinclair, N., & Bruce, C. (2015). Nuevas oportunidades en la enseñanza de la geometría en la escuela primaria. *Educación Matemática*, (47), 319-329.
- Sinclair et al. (2016). *Recent reasearch on geometry education: an ICME-13 survey team report*. ZDM: International Journal on Mathematics Education.
- Thaqui, X. (2009). *Aprender a enseñar transformaciones geométricas de isometría en primaria desde una perspectiva cultural (Tesis doctoral)*. Universitat de Barcelona, Barcelona, España. Obtenido de <http://hdl.handle.net/2445/41437>
- Urbano (2010). *Un diseño de tareas que integra AGD y las representaciones geométricas en las esculturas de San Agustín para la enseñanza de la simetría axial en grado quinto*. Trabajo de grado. Cali: Universidad del Valle.
- Vasco, E. (1992). Geometría activa y geometría de las transformaciones. En *Didácticas de las matemáticas*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Yaglom I.M. (1962). *Geometric Transformadons*. New Mathematical Library, Random House, New York.

7 ANEXOS

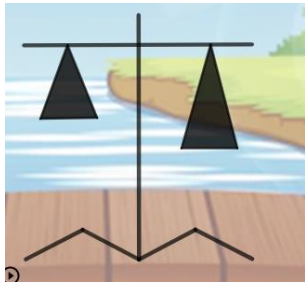
Anexo 1 Actividad 1 Hoja de Trabajo No. 1

Fecha: _____

Nombres completos: _____

1. ¿Cómo sabes que los balanzones quedaron bien? Explica.

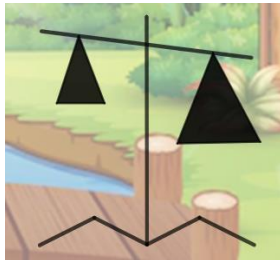
2. ¿En qué posición el balanzón 1 queda bien?



- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4

¿Cómo sabes que el balanzón 1 queda bien en esa posición?

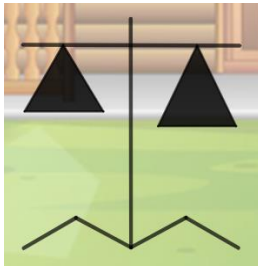
3. ¿En qué posición el balanzón 2 queda bien?



- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4

¿Cómo sabes que el balanzón 2 queda bien en esa posición?

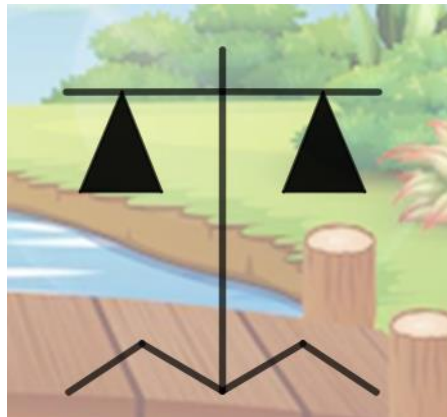
4. ¿En qué posición el balanzón 3 queda bien?



- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3
- ☐ 4

¿Cómo sabes que el balanzón 3 queda bien en esa posición?.

5. Encierra con rojo la figura inicial, con verde la figura simétrica y retíñe de color azul el eje de simetría.



6. Dibuja otros objetos simétricos que conozcas.

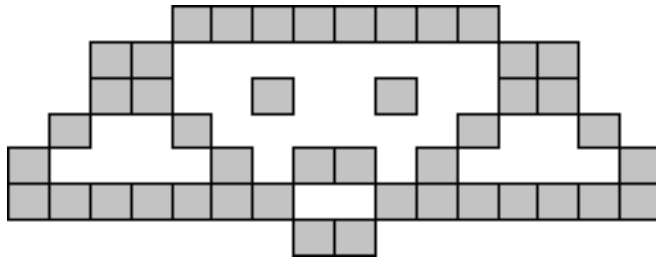
Actividad 2
Hoja de Trabajo No. 2

Fecha: _____

Nombres completos: _____

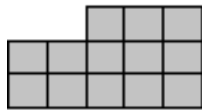
1. Dibuja y escribe el componente que hace falta para completar la simetría en cada una de las imágenes.

a.



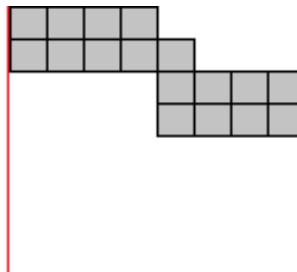
En esta figura hacia falta : _____

b.



En esta figura hacia falta : _____

c.



En esta figura hacia falta : _____

2. Escribe cada uno de los pasos que realizaste para crear el diseño de La Abuela.

1. _____

2. _____

3. _____

4. _____

5. _____

6. _____

7. _____

3. Dibuja otros objetos que conozcas que tengan ejes de simetría.

Actividad 3
Hoja de Trabajo No. 3

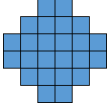
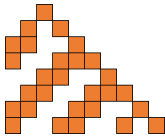
Fecha: _____

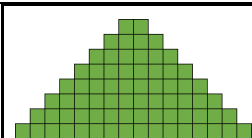
Nombres completos: _____

1. Dibuja cinco pasos para la construcción del lagarto del pueblo Nasa Yuwe.

2. ¿Cómo te das cuenta que tu diseño del lagarto quedó bien? Explica.

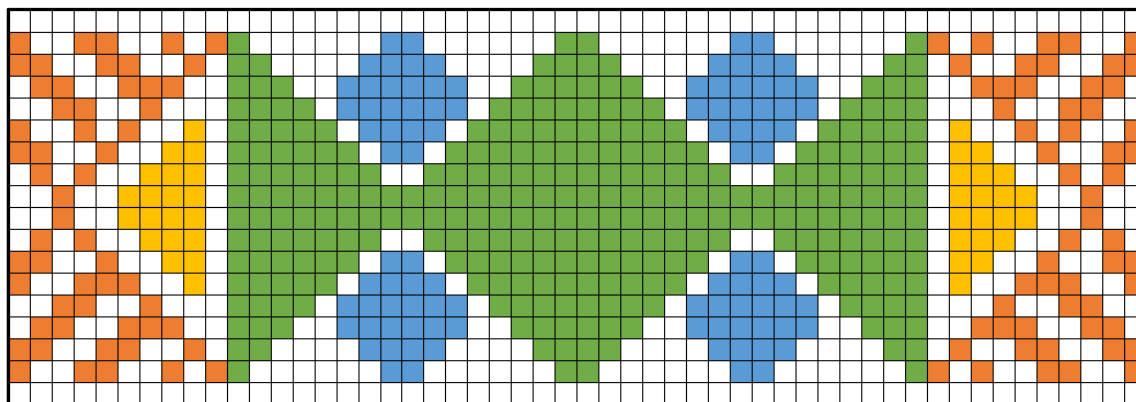
3. ¿Cuántas veces se debe repetir cada figura para llegar al diseño original?
Completa la tabla.

Figura inicial	Cuántas veces que la figura se transforma	Describe cómo esta figura se mueve para configurar el diseño del lagarto completo.
		
		
		



4. ¿Qué nombre le pondrías a esta transformación?

5. Con una regla traza los ejes de simetría que pudiste encontrar en el diseño del lagarto.



El Lagarto

6. Marca con una V los enunciados verdaderos y con una F los enunciados falsos.

- ☐ Los ejes de simetría son líneas curvas.
- ☐ Si trazamos un eje de simetría justo en la mitad del diseño del lagarto este eje me permite ver el opuesto de la imagen inicial.
- ☐ Los ejes de simetría me cambian el tamaño de las figuras que se encuentran en el diseño del lagarto.
- ☐ Los ejes de simetría conservan la distancia entre las figuras del lagarto y sus puntos.
- ☐ Si ponemos un espejo en la mitad del diseño del lagarto, el borde del espejo que está en contacto con el diseño funciona como eje de simetría.
- ☐ Los ejes de simetría son líneas rectas.

Actividad 4
Hoja de Trabajo No. 4

Fecha: _____

Nombres completos: _____

1. Enumera el orden en el que se construye el diseño de la estrella.
 - Se toma la imagen derecha inferior y el eje vertical para aplicar la reflexión una vez más y obtener el diseño completo.
 - Se construye el eje horizontal a las dos imágenes anteriores
 - Se toma la imagen inicial y el eje vertical para aplicar la reflexión y obtener la imagen derecha superior
 - Se tiene una figura o imagen inicial
 - Se construye un eje vertical en uno de los lados de la imagen inicial
 - Se toma la imagen derecha superior y el eje horizontal para aplicar la reflexión y obtener la imagen derecha inferior
2. Dibuja cada una de los pasos para construir “La estrella”.

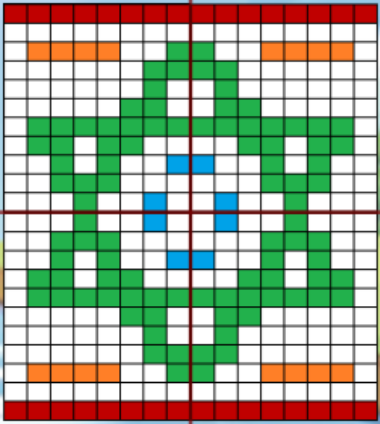
Instrucción	Dibujo
Se tiene una figura o imagen inicial	

Se construye un eje vertical en uno de los lados de la imagen inicial	
Se toma la imagen inicial y el eje vertical para aplicar la reflexión y obtener la imagen derecha superior	
Se construye el eje horizontal a las dos imágenes anteriores.	
Se toma la imagen derecha superior y el eje horizontal para aplicar la reflexión y obtener la imagen derecha inferior.	
Se toma la imagen derecha inferior y el eje vertical para aplicar la reflexión una vez más y obtener el diseño completo.	

3. ¿Qué pasa si eliminamos el cuarto paso de esta construcción?

4. Para la construcción de la estrella necesitamos los siguientes componentes.

Completa la tabla.

Componente	Representación (Dibujo)
Una figura inicial	
	↕
Un eje de simetría horizontal	
	

Actividad 4
Hoja de Trabajo No. 5

Fecha: _____

Nombres completos: _____

1. Completa la siguiente tabla:

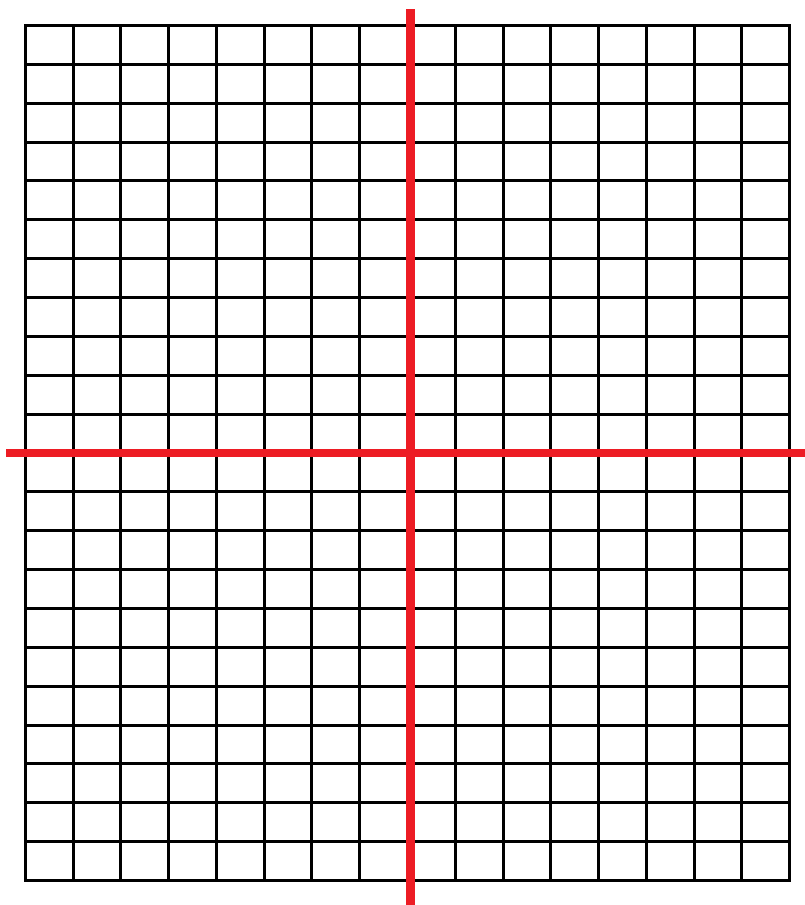
Figura inicial	Distancia respecto al eje vertical	Distancia de su imagen respecto al eje vertical	Distancia respecto al eje horizontal	Distancia de su imagen respecto al eje horizontal
Rojo				
Amarillo				
Verde				
Rosa				
Azul				

2. Marca con una V los enunciados verdaderos y con una F los enunciados falsos.

- ☐ La distancia del punto amarillo al eje es diferente que del eje al otro punto amarillo.
- ☐ La cantidad de unidades partiendo del punto rojo hasta el eje, son las mismas que al otro lado.
- ☐ La cantidad de unidades del lado derecho de la recta es diferente a la del lado izquierdo de la recta.

- Si la figura inicial verde está a ocho unidades de distancia al eje horizontal y su imagen está a siete unidades de distancia al mismo eje, podemos decir que las figuras están relacionadas mediante una simetría.
- Para que las figuras que se encuentran al lado derecho del eje sean iguales a las que se encuentran al lado izquierdo del eje es importante que tengan la misma distancia y orientación.

3. Utiliza los colores para dibujar tu propia estrella simétrica.



Anexo 2. Rejilla de análisis

Categoría de análisis	Criterios de análisis	Análisis
Uso de tecnologías digitales y aspectos socioculturales para el aprendizaje de la transformación de simetría	¿Los estudiantes reconocen las propiedades de la transformación geométrica?	En la mayoría de las respuestas de las HT los estudiantes relacionan que las figuras sean iguales, estén equilibradas e incluso que tengan el mismo tamaño para dar cuenta de que están relacionadas por una reflexión. Adicional a ello, reconocen que la transformación de simetría conserva la distancia entre los puntos.
	¿Los estudiantes reconocen los elementos necesarios para realizar la transformación?	Si, en las HT se puede evidenciar que lo señalan en diferentes ocasiones, incluso cuando no se les pide que lo hagan señalan la figura inicial, el eje de simetría y la figura imagen.
	¿El arrastre permite que los estudiantes den cuenta de las propiedades que cumplen las figuras?	Si, cuando los estudiantes están trabajando en GeoGebra pueden observar que las figuras conservan la distancia con respecto al eje de simetría, por ejemplo: si acercaban la figura inicial al eje de simetría su imagen también lo hacia.
	¿El uso de GeoGebra fue fácil para los estudiantes?	Se presentaron algunas dificultades dado que antes no habían trabajado con la aplicación, sin embargo, poco a poco se fueron adaptando y ya fue más fácil para ellos realizar las tareas.
	¿La exploración hizo parte de la interacción del estudiante con GeoGebra?	Si, en varias tareas el estudiante debía explorar el applet para poder encontrar las herramientas que lo llevarían a realizar la tarea asignada.

	¿Las herramientas de GeoGebra fueron fáciles de entender por parte de los estudiantes?	En algunas ocasiones los estudiantes presentaron dificultad para utilizar las herramientas de GeoGebra, sin embargo, con la ayuda de las docentes se lograban superar dichas dificultades y los estudiantes completaban las tareas.
	¿El uso de los aspectos socioculturales permiten que el estudiante relacione el objeto matemático en un contexto real?	Si, cuando se presentó a los estudiantes el contenido que se iba a trabajar y se relacionó con los tejidos de la comunidad Nasa Yuwe, lo estudiantes mencionaban que antes no habían pensado en que esta transformación la pudieran encontrar en algo de "la vida real" luego esto, les ayudo a que lo relacionaran con objetos de su cotidianidad.
	¿El uso de los aspectos socioculturales aportan significado a las figuras utilizadas por los estudiantes?	Si, pues dejan de ver las transformaciones como algo alejado de su realidad y empiezan a reconocer que muchos objetos pueden estar relacionados con las transformaciones geométricas y que a su vez tienen un significado cultural.
	¿GeoGebra permite que el estudiantes razone y tenga posibilidad de crear representaciones?	Si, en varias ocasiones se pudo evidenciar que los estudiantes realizaban diferentes construcciones para llegar a la tarea que se solicitaba y esto les permitía observar y reconocer en qué aspectos estaban fallando sin necesidad de elijarlo todo lo construido, si no simplemente corregir. Así mismo, cuando se usa la herramienta "reflejar" los estudiantes deben hacer la correcta elección de la figura y el eje, lo cual, nos da cuenta de que el estudiantes reconoce el orden que debe de tener una construcción si necesidad de que lo exprese verbalmente.
Diseño de las Hojas de trabajo	¿El diseño es acorde al nivel educativo de los estudiantes?	Si, en la mayoría de los estudiantes comprendían los conceptos utilizados logrando así llevar a cabo la realización de las tareas.
	¿Las hojas de trabajo fomenta la discusión entre pares?	A pesar de que el trabajo fue individual, los estudiantes tenían el espacio para discutir con sus compañeros las posibles respuestas.
	¿Las consignas fueron claras para los estudiantes?	En algunas ocasiones hubo la necesidad de explicar algunos enunciados, pero en términos generales los estudiantes lograban completar la tarea luego de la explicación.

	¿Los conceptos que se utilizan son claros para el estudiante?	No, los estudiantes en un principio confundían los términos de "figura simétrica" con "figura geométrica".
Implementación Hojas de trabajo	El estudiante reconoce que las figuras son simétricas	Se observó que los estudiantes reconocen que para que las figuras quedaran bien construidas debían ser "iguales de tamaño", "estar balanceadas", "misma forma".
	El estudiante identifica los elementos de la transformación (figura inicial, eje de simetría y figura simétrica)	Los estudiantes en su mayoría reconocen los elementos necesarios para realizar la transformación de simetría, sin embargo, algunos de ellos confundían el eje de simetría con cualquier línea recta que aparecía en el dibujo.
	El estudiante reconoce otros objetos simétricos	En un primer momento, algunos estudiantes confunden los objetos simétricos con objetos geométricos, entonces, en la mayor parte de sus respuestas dibujaban figuras como triángulos, círculos y cuadrados. Luego cuando se aclara la diferencia entre los conceptos, empiezan a dibujar otro tipo de figuras, como mariposas, ventanas, puertas, etc.
	El estudiante reconoce diferentes objetos que tienen ejes de simetría	Si, los estudiantes logran identificar que las figuras son simétricas si al partirlas a la mitad se obtienen dos partes iguales, eso lo podemos observar en los dibujos que realizan los estudiantes.
	El estudiante da cuenta de los pasos que se deben seguir para realizar la transformación geométrica	Si, los estudiantes dan cuenta tanto verbal como escrito de los pasos que se deben realizar para llegar a la construcción, así mismo, lograron ordenar los pasos cuando se les daba en un orden equivocado.
	El estudiante describe los movimientos que realizan las figuras	La mayor parte de los estudiantes describen el movimiento como desplazamiento y no como "la reflexión"
	El estudiante identifica composición de transformaciones	Si, en las tareas los estudiantes identificaron que una misma figura puede estar reflejada al mismo tiempo con respecto a ejes diferentes.
	El estudiante reconoce que los ejes de simetría pueden tener diferentes orientaciones.	Los estudiantes logran expresar tanto verbal, escrito y gráficamente los diferentes ejes de simetría que puede tener una misma figura.
	El estudiante reconoce que las figuras relacionadas por una simetría son congruentes	Cuando los estudiantes planteaban sus repuestas hacían alusión a que las figuras eran iguales de forma, tamaño y distancias, es decir, que reconocen en términos general la congruencia como una propiedad de la simetría.

	El estudiante reconoce que la distancia de un punto y su imagen respecto al eje de simetría son iguales.	Si, cuando se planteaban hipótesis de verdadero o falso los estudiantes expresaban que las figuras "deben de estar ambas a la misma distancia del eje" y de lo contrario señalaban que no estaban relacionadas por una transformación de simetría.
	El estudiante identifica el orden que se debe llevar a cabo para realizar la transformación	Los estudiantes señalaban tanto en GeoGebra como en las hojas de trabajo que cuando se va a realizar una simetría primero se debe de tener una figura inicial, luego el eje de simetría y finalmente la figura final o figura imagen, lo cual, nos permite señalar que los estudiantes identificaron el orden de las construcciones.