Vol. XX, No 2, Diciembre (2012)
Matemáticas: 69–73

**Matemáticas:
Enseñanza Universitaria**

Sobre el grupo fundamental de ciertas vecindades regulares

Carlos Mario Parra
Universidad Nacional de Colombia

Juan Fernando Valencia
Universidad Nacional de Colombia

Recibido Nov. 21, 2011 Aceptado Ago. 23, 2012

Abstract

In this paper we present a modern proof of a classical result of PL topology, which is cited widely without justification. Specifically we first prove that given a polyhedron P with a regular neighbourhood N, such that the codimension of the pair (P, N) is greater than or equal to 3, then it follows that $\pi_1(N) \cong \pi_1(N \setminus P)$. As a consequence we deduce that, under the same hypothesis, $\pi_1(P) \cong \pi_1(\partial N)$.

Keywords: Markov Theorem, Polyhedron, Regular Neighbourhood

MSC(2000): 57Q40, 57Q05

Resumen

En este artculo ofrecemos una demostración moderna de un resultado clásico de la topología PL, el cual se cita en varias referencias sin demostración. Específicamente mostramos que, si P es un poliedro y N es una vecindad regular de P tal que la codimensión de (P, N) es mayor o igual a 3, entonces $\pi_1(N) \cong \pi_1(N \setminus P)$. Finalmente concluimos que, bajo las mismas hipotesis, $\pi_1(P) \cong \pi_1(\partial N)$.

Palabras y frases claves: Teorema de Markov, Poliedros, Vecindad Regular

1 Introducción

Uno de los problemas clasicos en topología es determinar el rango de aplicación de los procedimientos algorítmicos en la descripción y clasificación de las variedades topológicas. En este sentido, una pregunta fundamental es el denominado Problema del Homeomorfismo, el cual indaga por la existencia de un procedimiento que determine si dos representaciones dadas, corresponden a variedades homeomorfas. En esta generalidad, A.A. Markov ofreció una respuesta negativa para variedades PL de dimensión $n \geq 4$ (Ver por ejemplo [1] y [4]).

La solución de Markov está relacionada con el denominado Problema del Isomorfismo, el cual consiste en decidir cuándo dos grupos finitamente presentados, son isomorfos. Dicho problema fué resuelto, en sentido negativo y de manera independiente, por P. S. Novikov y W. W Boone, en 1955 (Ver por ejemplo [6]). Estos dos resultados de imposibilidad algorítmica, se apoyan en uno de los pilares fundamentales de la teoría de la computación, a saber: La insolubilidad del Problema de la Parada, establecido por Alan Turing en 1936.

Una pregunta relacionada, planteada por H. Poincaré a comienzos del siglo pasado, trata de la existencia de un procedimiento para reconocer la esfera n-dimensional. La solución negativa de Markov se aplicaba a variedades escencialmente diferentes de la n-esfera, lo cual dejó abierta la pregunta original de

Poincaré. Dicha dificultad fué superada en los años 60 por Novikov, quien demostró que, para $n \geq 5$, la n-esfera no se puede reconocer algorítmicamente entre las variedades suaves (ver por ejemplo [10]).

En los últimos años, han aparecido exposiciones modernas de los resultados de Markov y Novikov, accesibles a los lectores con un conocimiento básico de topología combinatorica, como aparece por ejemplo en [8] y [2]. Sin embargo, en dichas exposiciones, se hace uso implícito de un resultado que relaciona el grupo fundamental de un poliedro con el de una vecindad regular correspondiente. La idea de este artículo es presentar una exposición detallada de dicho resultado, teniendo en cuenta su importancia y el hecho de que las referencias usuales del area no ofrecen una demostración detallada.

2 Propiedades de los grupos de homotopía

En esta sección supondremos que se conoce la definición de todos los grupos de homotopía en un espacio punteado y la de todos los grupos de homotopía de pares de espacios punteados. En esta primera parte enunciaremos un par de propiedades de estos grupos. Para mayores detalles recomendamos al lector ver [5] y [7].

Teorema 1. *Sean (X, Y) un par de espacios, con un punto base $x_0 \in Y$. Entonces existe un secuencia exacta*

$$\begin{aligned} \cdots \to \pi_n(Y) \to & \pi_n(X) \to \pi_n(X,Y) \to \pi_{n-1}(Y) \to \cdots \\ & \to \pi_1(Y) \to \pi_1(X) \to \pi_1(X,Y) \to \pi_0(Y) \to \pi_0(X), \end{aligned}$$

denominada secuencia exacta de los grupos de homotopía del par (X, Y).

Demostración. Ver [5], teorema 7.2.18. □

Definición 1. *Un par de espacios (X, A) en la categoría PL es r-conexo si toda función $f : (P, Q) \to (X, A)$ es homotópica a una función sobre A, donde P es un poliedro cualquiera de dimensión menor o igual a r.*

Teorema 2. *Sean (X, A) un par de espacios en la categoría PL. Si A es conexo por arcos entonces (X, A) es r-conexo sí y sólo sí $\pi_i(X, A) = 0$ para todo $i \leq r$.*

Demostración. Ver [8], apéndice A.6. □

3 Algunos resultados fundamentales de la topología PL

A continuación enunciamos dos resultados básicos de la topología combinatórica que usaremos en la exposición.

Teorema 3. *Sea N una vecindad regular de Y en X. Entonces N es PL-homeomorfa al poliedro Cilindro(Φ), correspondiente a cierta función PL $\Phi : \partial N \to Y$.*

Demostración. Ver [2], Teorema 3.5. □

Teorema 4. *Supongamos que $X_0 \subset X$ y Y son poliedros en el interior de un PL-Manifold M, con $\dim(X \setminus X_0) = p$, $\dim(Y) = q$ y sea $\epsilon : M \to (0, \infty)$ una función continua. Entonces existe una ϵ-isotopía H de X en M, que permanece fija, tanto en X_0 como por fuera de la correspondiente ϵ-vecindad de X, tal que $\dim(H_1(X \setminus X_0) \cap Y) \leq p + q - n$.*

Demostración. Ver [2], Teorema 4.2. □

4 Lemas preliminares

A continuación desmostramos algunos resultados preliminares que usan técnicas básicas de la topología PL y la topología algebraica.

Lema 1. *Sean Y, N_1 y N_2 poliedros. Supongamos que $N_1 \subset intN_2$ son ambas vecindades regulares de Y en $\mathbb{R}^n$, entonces $N_1 \setminus Y \cong N_2 \setminus Y$.*

Demostración. Por el teorema de unicidad de las vecindades regulares (ver [8], teorema 3.24) existe una isotopía $H : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \times [0,1]$ que fija al conjunto Y (es decir $H(Y, s) = (Y, s)$ para todo $s \in [0,1]$) y tal que $H_1(N_1) = N_2$, donde $H(s, 1) = (H_1(s), 1)$. Sea $h = H_1|_{N_1 \setminus Y}$, entonces como H_1 es un homeomorfismo se sigue que h tambien lo es h sobre su imagen. Pero claramente $h(N_1 \setminus Y) = N_2 \setminus Y$, puesto que se cumple $H_1(Y) = Y$ y $H_1(N_1) = N_2$. □

Lema 2. *Sean Y, N_1 y N_2 poliedros. Supongamos que $N_1 \subset intN_2$ son ambas vecindades regulares de Y en $\mathbb{R}^n$ y codim$(N_1, Y) \geq 3$, entonces el par $(N_1, N_1 \setminus Y)$ es 2-conexo.*

Demostración. Sean $Q \subset P$ poliedros de dimensión menor o igual a 2 y $f : (P, Q) \to (N_1, N_1 \setminus Y)$ una función PL, entonces $f(Q) \subset f(P)$ son poliedros de dimensión menor o igual a 2, con $f(Q) \subset N_1 \setminus Y$ y $f(P) \subset N_1 \subset \text{int}N_2$. Por el teorema de unicidad de las vecindades regulares (ver [8], teorema 3.24) existe una isotopía $H : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \times [0,1]$ que fija al conjunto Y y tal que $H_1(N_2) = N_1$.

Por el teorema 3.2, aplicando posición general a los poliedros $f(Q) \subset f(P)$ y Y, los cuales están en el interior del manifold N_2, existe una isotopía $G : N_2 \times [0,1] \to N_2 \times [0,1]$ que fija al conjunto $f(Q)$ y tal que $\dim(G_1(f(P) \setminus f(Q)) \cap Y) \leq 2 + \dim Y - \dim N_2$. Ahora como $\text{codim}(N_1, Y) \geq 3$ y $\dim N_2 = \dim N_1$ se sigue que $\dim(G_1(f(P) \setminus f(Q) \cap Y) < 0$, lo cual significa que $G_1(f(P) \setminus f(Q) \cap Y = \emptyset$. Por otro lado, como $G_1(f(Q)) = f(Q) \subset N_1 \setminus Y$ entonces $G_1(f(P)) \subset N_2 \setminus Y$.

Definamos $F : P \times [0,1] \to N_1$ por $F(p,t) = H_t(G_t(f(p)))$ y notemos que F es una homotopía, puesto que H y G son isotopías. Además, ya que $F(p, 0) = H_0(G_0(f(p))) = H_0(f(p)) = f(p)$ se sigue que $F_0 = f$. Ahora como $H_1(N_1) = N_2$ obtenemos que $F_1(P) = H_1(G_1(f(P))) \subset N_1$. Más aún, puesto que H fija a Y y $G_1(f(P)) \subset N_2 \setminus Y$, obtenemos que $F_1(P) \subset N_1 \setminus Y$, y por tanto f es homotópica a la función $F_1 : P \to N_1 \setminus Y$. En conclusión $(N_1, N_1 \setminus Y)$ es 2-conexo. □

Lema 3. *Sean Y y N poliedros. Supongamos que N es una vecindad regular de Y en $\mathbb{R}^n$ y codim$(N,Y) \geq 3$, entonces $\pi_1(N) \cong \pi_1(N \setminus Y)$.*

Demostración. Sea N_1 una vecindad regular de Y de tal modo que $N_1 \subset \text{int}N$. Por el lema anterior, el par $(N_1, N_1 \setminus Y)$ es 2-conexo y por tanto $\pi_1(N_1, N_1 \setminus Y) = \pi_2(N_1, N_1 \setminus Y) = 0$ (teorema 2.3). Ahora, por el teorema 2.1, obtenemos que $\pi_1(N_1) \cong \pi_1(N_1 \setminus Y)$. Además, por propiedades de las vecindades regulares, se sigue que $N_1 \cong N$. Por otro lado, el lema 4.1 implica que $N \setminus Y \cong N_1 \setminus Y$, de donde obtenemos que $\pi_1(N) \cong \pi_1(N_1) \cong \pi_1(N_1 \setminus Y) \cong \pi_1(N \setminus Y)$. □

Lema 4. *Sean Y un poliedro y N una vecindad regular de Y. Entonces $N \setminus Y \cong \partial N \times [0,1)$*

Demostración. Por el teorema 3.1 existe una función PL, que denotamos por $\Phi : \partial N \to Y$ y un PL homeomorfismo correspondiente $h : N \to \text{Cilindro}(\Phi)$. Como N es una vecindad regular de Y entonces, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que h fija a Y. Ahora notemos que $N = (N \setminus Y) \cup Y$ y $\text{Cilindro}(\Phi) = (\partial N \times [0,1]) \cup Y/\sim$, donde $(x,1) \sim \Phi_1(x)$ para todo $x \in \partial N$. Por lo tanto $h(N \setminus Y) = \partial N \times [0,1)$, lo cual nos permite concluir que $N \setminus Y \cong \partial N \times [0,1)$. □

5 Teorema principal

Después de los lemas anteriores, enunciamos el resultado principal.

Teorema 5. *Sean Y y N poliedros conexos por arcos. Supongamos que N es una vecindad regular de Y en $\mathbb{R}^n$ y codim$(N,Y) \geq 3$, entonces $\pi_1(Y) \cong \pi_1(\partial N)$.*

Demostración. Por los lemas 4.3 y 4.4 $\pi_1(N) \cong \pi_1(N \setminus Y) \cong \pi_1(\partial N \times [0,1))$. Dado que N es una vecindad regular de Y y $\partial N \times 0$ es un retracto de deformación de $\partial N \times [0,1)$, entonces $\pi_1(N) \cong \pi_1(Y)$ y $\pi_1(\partial N \times 0) \cong \pi_1(\partial N \times [0,1))$. Así concluimos que $\pi_1(Y) \cong \pi_1(\partial N)$. □

Referencias

[1] Boone, W. W. Haken, W. y Poénaru, V. .: On Recursively Unsolvable Problems in Topology and their Classification, Contributions to Math. Logic. North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 37-74.

[2] John, L. Bryant.: Piecewise linear topology, Handbook of geometrical topology, Elsevier Science B.V., pp. 219-259.

[3] Chernansky, A. V. y Leksine, V. P. .: Unrecognizability of manifolds, Ann. of Pure and Applied Logic. 141(2006), pp. 325-335.

[4] Markov, A.A.: Insolubility of the problem of homeomorphy, Proc. Internat. Congr. Math.(1958), pp. 300-306.

[5] C.R.F. Maunder.: Algebraic topology, Cambridge University Press, Cambridge 1980.

[6] Miller III, C. F. .: Decision problems for groups - survery and reflections, Proceedings of Workshop on Algorithms, Word Problems and Classification in Combinatorial Group Theory, MSRI Publications, Springer-Verlag, 1990.

[7] Joseph J. Rotman.: An introduction to algebraic topology, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1988.

[8] C.P Rourke y B.J Sanderson.: Introduction to piecewise-linear topology, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1972.

[9] M.A. Stan'ko.: Markov's theorem and algorithmically non-recognizable combinatorial manifolds, Izvestiya. Mathematics 68 (2004), pp. 207-224.

[10] Volodin I. A., Kuznetsov V. E., Fomenko A. T. .: The problem of discriminating algorithmically the standard three-dimensional sphere, Russian Math. Surveys. 29:5, (1974), pp. 71-172.

Dirección de los autores
Carlos Mario Parra — Escuela de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, Medellín-Colombia
e-mail: `cmparra@unal.edu.co`
Juan Fernando Valencia — Escuela de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, Medellín-Colombia
e-mail: `jfvalenca@unal.edu.co`