



Un acercamiento al desarrollo del pensamiento variacional desde la perspectiva del
isomorfismo de medida: una experiencia en el laboratorio de matemáticas

Daniel Stiven Gil Grueso

Jarol Valencia Gonzalez

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
2019



Un acercamiento al desarrollo del pensamiento variacional desde la perspectiva del
isomorfismo de medida: una experiencia en el laboratorio de matemáticas

Daniel Stiven Gil Grueso

Código 201604268

Jarol Valencia González

Código 201604269

Informe final presentado como requisito parcial para optar al título de Magister en
Educación, énfasis en Educación Matemática

Dirigido por
Mg. Jorge Enrique Galeano Cano

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
2019

Un acercamiento al desarrollo del pensamiento variacional desde la perspectiva del isomorfismo de medida: una experiencia en el laboratorio de matemáticas

DEDICATORIA

A César Manuel Valencia Mosquera,

Ariana Sofía Valencia Mosquera

Daniel Matías Gil Díaz

AGRADECIMIENTOS

En el desarrollo de este trabajo de investigación, para optar al título de Magister En Educación Con Énfasis En Educación Matemática, fue necesario contar con el apoyo de muchas personas, a las cuales queremos agradecer.

Primeramente, darle gracias a Dios, por siempre estar a nuestro lado, guardándonos de todo mal y peligro en cada viaje realizado. Además, por darnos la sabiduría para alcanzar tan anhelada meta.

A nuestros familiares en especial a Sonia Iris González Rosero y Danny Grueso Castro, por el amor y apoyo incondicional. Por mostrarnos que el esfuerzo, dedicación y sacrificio son el camino al éxito.

A nuestro tutor Jorge Enrique Galeano, quien, con su disposición, dirección y conocimiento, nos orientó hacia nuestro objetivo, culminar con nuestra propuesta de investigación de la mejor manera.

A nuestros profesores, quienes, con su profesionalismo, conocimientos y don de gente, aportaron significativos saberes para nuestra formación académica.

A nuestros compañeros por permitirnos entrar en sus vidas y por compartir tantos momentos especiales durante estos dos años de formación.

Finalmente, y de manera muy especial, agradecer al Ministerio de Educación Nacional por permitirnos hacer parte de tan selecto grupo beneficiarios del programa becas para la excelencia docente. Programa que hizo posible nuestro sueño de seguir cualificándonos profesionalmente.

A todos, infinitas gracias.

RESUMEN

La presente indagación, muestra los resultados de la aplicación de una serie de Fichas de trabajo, en el marco del laboratorio de matemáticas a dos grupos de estudiantes del grado sexto, pertenecientes a la I. E República de Venezuela de Buenaventura. Tales Fichas se vinculaban con la multiplicación como Isomorfismo de medida, basadas en situaciones problemas contextualizadas al entorno próximo de los estudiantes, como una alternativa que genere acercamientos significativos al desarrollo del pensamiento Variacional desde lo numérico. Para obtener dichos resultados, se analizaron las heurísticas usadas por los estudiantes en la resolución de las situaciones presentes en las Fichas.

De estos resultados se identificaron algunos rasgos característicos del pensamiento Variacional, tales como: detección de regularidades, reconocimiento de un patrón numérico, relaciones funcionales, procesos de generalización y el uso de diferentes registros de representación (tabular, diagramas, lenguaje natural), lo que permitió ubicar a la mayoría (88%) de los estudiantes en el Nivel 1 de algebrización; con lo cual se pudo corroborar el acercamiento de los mismos al pensamiento Variacional.

Palabras claves: Pensamiento Variacional, Isomorfismo de Medidas, Patrones Numéricos, Laboratorio de Matemáticas, Matematización, Niveles de Algebrización.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	10
CAPÍTULO I	13
ASPECTOS GENERALES DE LA INDAGACIÓN	13
1.1 Planteamiento del problema	13
1.2 Marco contextual.....	15
1.3 Objetivos.....	18
1.3.1 Objetivo General	18
1.3.2 Específicos	18
1.4 Justificación	19
CAPÍTULO II.....	22
MARCOS DE REFERENCIA.....	22
2.1 Antecedentes	22
2.2 Pensamiento variacional.....	25
2.3 Estructura multiplicativa	35
2.3.1 Isomorfismo de medida.....	36
2.3.2 Isomorfismo de medida y pensamiento variacional.....	39
2.4 Matemización.....	41
2.5 Laboratorio de matemáticas	43
2.5.1 Estructura del Laboratorio de Matemáticas	49
2.5.2 Laboratorio de Matemáticas de la IERV	49
CAPÍTULO III.....	51
DESCRIPCIÓN METODOLÓGICA	51
3.1 Configuración de una Estrategia Metodológica.....	52
3.2 Estrategia de diseño y aplicación de las fichas de laboratorio	57
3.3 Ficha X (chonta-costos)	61
3.3.1 Análisis Parcial Ficha X (Chonta-Costos).....	63
3.3.2 Rediseño Ficha X	67
3.3.3 Ficha X' (Chonta-Costo).....	69
3.3.4 Análisis Parcial Ficha X' (Chonta-Costos).....	70
3.4 Ficha y (Plasti-vasos)	74
3.4.1 Análisis Parcial Ficha Y (Vasos).....	77
3.4.2 Rediseño Ficha Y	81
3.4.3 Ficha Y' (Aguacoco).....	83

3.4.4	Análisis Parcial Ficha Y' (Aguacoco)	85
3.5	Ficha z (a otro nivel)	89
3.5.1	Análisis Parcial Ficha Z (A otro nivel).....	91
3.5.2	Rediseño Ficha Z.....	94
3.5.3	Ficha Z' (A otro nivel)	96
3.5.4	Análisis Parcial Ficha Z' (A otro nivel)	98
CAPÍTULO IV		103
MODELO DE ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LAS IMPLEMENTACIONES		103
4.1	Modelo.....	103
4.1.1	Pensamiento Numérico/Variacional (p).....	105
4.1.2	La Matematización (M).....	107
4.1.3	La rejilla de análisis.....	108
4.2	Análisis General de los Resultados de las Implementaciones.....	109
4.2.1	Ausencia de procedimientos multiplicativos	110
4.2.2	Presencia de un patrón como generador de una secuencia de números	116
4.2.3	Operadores verticales	120
4.2.4	Multiplicación como función	123
CAPITULO V		129
CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES.....		129
5.1	Conclusiones	129
5.2	Algunas reflexiones.....	133
Referencias bibliográficas.....		135
ANEXOS.....		141
ANEXO 1. PORCENTAJE DE ESTUDIANTES POR NIVELES DE DESEMPEÑOS 2015		141
ANEXO 2. PORCENTAJE DE ESTUDIANTES POR NIVELES DE DESEMPEÑOS 2016		142
ANEXO 3. PORCENTAJE DE ESTUDIANTES POR NIVELES DE DESEMPEÑOS 2017		142
ANEXO 4. ESTRUCTURA DE LAS FICHAS DEL LABMAT DE LA IERV		144
ANEXO 5. FICHA X (CHONTA-COSTOS)		149
ANEXO 6. FICHA X' (CHONTA-COSTOS).....		150
ANEXO 7. SOPORTE FICHA X' (CHONTA-COSTO).....		152
ANEXO 8. FICHA Y (PLASTI-VASOS).....		155
ANEXO 9. SOPORTE FICHA Y (PLASTI-VASOS)		156
ANEXO 10. FICHA Y' (AGUA-COCO)		159
ANEXO 11. SOPORTE FICHA Y' (AGUA-COCO).....		160
ANEXO 12. FICHA Z (A OTRO NIVEL)		162

ANEXO 13. SOPORTE FICHA Z (A OTRO NIVEL).....	163
ANEXO 14. FICHA Z' (A OTRO NIVEL).....	168
ANEXO 15. SOPORTE FICHA Z' (A OTRO NIVEL)	169
ANEXO 16.1 evidencias APLICACIONES FICHA x (chonta-costo).....	173
ANEXO 16.2 evidencias APLICACIONES FICHA x (chonta-costo).....	174
ANEXO 16.3 evidencias aplicaciones FICHA x (chonta-costo).....	175
ANEXO 16.4 evidencias aplicaciones FICHA x (chonta-costo).....	176
ANEXO 17.1 evidencias aplicaciones FICHA y (plasti-vasos)	177
ANEXO 17.2 evidencias aplicaciones FICHA y (plasti-vasos)	178
ANEXO 17.3 evidencias APLICACIONES FICHA y (plasti-vasos).....	179
ANEXO 18.1 evidencias aplicaciones FICHA z (a otro nivel)	180
ANEXO 18.2 evidencias aplicaciones FICHA z (a otro nivel)	181
ANEXO 18.3 evidencias aplicaciones FICHA z (a otro nivel)	182
ANEXO 19.1 evidencias aplicaciones FICHA x' (chonta-costos).....	183
ANEXO 19.2 evidencias aplicaciones FICHA x' (chonta-costos).....	184
ANEXO 19.3 evidencias aplicaciones FICHA x' (chonta-costos).....	185
ANEXO 20.1 evidencias aplicaciones FICHA y' (agua-Coco).....	186
ANEXO 20.2 evidencias APLICACIONES FICHA y' (agua-Coco).....	187
ANEXO 20.3 evidencias aplicaciones FICHA y' (agua-Coco).....	188
ANEXO 21.1 evidencias aplicaciones FICHA z' (a otro nivel)	189
ANEXO 21.2 evidencias aplicaciones FICHA z' (a otro nivel)	190
ANEXO 21.3 evidencias APLICACIONES FICHA z' (a otro nivel)	191

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 1. ISOMORFISMO DE MEDIDA	37
TABLA 2. REJILLA DE ANÁLISIS	109
TABLA 3. USO DE PROCESOS ADITIVOS	115
TABLA 4.....	127

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

ILUSTRACIÓN 1. RESULTADOS DE LA PRUEBA SABER 2015 - 2017. ELABORACIÓN PROPIA A PARTIR DE LOS DATOS DEL ICFES.....	13
ILUSTRACIÓN 2. AUSENCIA DEL RAZONAMIENTO ALGEBRAICO.....	31
ILUSTRACIÓN 3. NIVEL INCIPIENTE DE ALGEBRIZACIÓN	32
ILUSTRACIÓN 4. NIVEL INTERMEDIO DE ALGEBRIZACIÓN	33
ILUSTRACIÓN 5. LOS TRES PROBLEMAS DEL ISOMORFISMO DE MEDIDA.	38
ILUSTRACIÓN 6. FICHA X (CHONTA-COSTOS).....	62
ILUSTRACIÓN 7. SUMAS ITERADAS	64
ILUSTRACIÓN 8. CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD	65
ILUSTRACIÓN 9. DIFERENTES TIPOS DE REPRESENTACIONES PARA ESTABLECER RELACIONES ENTRE CANTIDADES	66
ILUSTRACIÓN 10. FICHA X' (CHONTA-COSTOS)	69
ILUSTRACIÓN 11. DIÁLOGO 1. FRAGMENTO DE VIDEO 2018_03_06	71
ILUSTRACIÓN 12. USO IMPLÍCITO DE LA MULTIPLICACIÓN COMO FUNCIÓN.....	71
ILUSTRACIÓN 13. USO IMPLÍCITO DE UNA DE LAS PROPIEDADES DE LA LINEALIDAD.....	72
ILUSTRACIÓN 14. RELACIÓN ENTRE CANTIDADES	73
ILUSTRACIÓN 15. FICHA Y (PLASTI-VASOS)	75
ILUSTRACIÓN 16. MULTIPLICACIÓN COMO FUNCIÓN	78
ILUSTRACIÓN 17. DIÁLOGO 2. FRAGMENTO TOMADO DEL ARCHIVO DE VIDEO 2018_02_01_11	79
ILUSTRACIÓN 18. DIÁLOGO 3. FRAGMENTO TOMADO DEL ARCHIVO DE VIDEO 2018_02_01_11	80
ILUSTRACIÓN 19. FICHA Y' (AGUACOCO).....	84
ILUSTRACIÓN 20. MULTIPLICACIÓN COMO FUNCIÓN	86
ILUSTRACIÓN 21. LA DIVISIÓN COMO BÚSQUEDA DE LA UNIDAD	87
ILUSTRACIÓN 22. USO IMPLÍCITO DE LA PROPIEDAD DE LA LINEALIDAD	88
ILUSTRACIÓN 23. FICHA Z (A OTRO NIVEL)	90
ILUSTRACIÓN 24. SUMAS ITERADAS	92
ILUSTRACIÓN 25. MULTIPLICACIÓN.....	93
ILUSTRACIÓN 26. FICHA Z' (A OTRO NIVEL).....	97
ILUSTRACIÓN 27. RELACIÓN FUNCIONAL.....	99
ILUSTRACIÓN 28. DIVISIÓN PARTITIVA	100
ILUSTRACIÓN 29. MULTIPLICACIÓN COMO FUNCIÓN	100
ILUSTRACIÓN 30. MODELO TRIANGULAR	104
ILUSTRACIÓN 31. SUMAS ITERADAS, TOMADO DE LA FICHA X.....	112
ILUSTRACIÓN 32. SUMAS ITERADAS	113
ILUSTRACIÓN 33. PROPIEDAD DISTRIBUTIVA	114
ILUSTRACIÓN 34. USO IMPLÍCITO DE LA PROPIEDAD DE LA LINEALIDAD	115
ILUSTRACIÓN 35. ACTIVIDAD 1 FICHA Z	117
ILUSTRACIÓN 36. USO DE UN PATRÓN NUMÉRICO.....	117
ILUSTRACIÓN 37. USO DE DIFERENTES TIPOS DE REPRESENTACIONES	119
ILUSTRACIÓN 38. LA DIVISIÓN COMO BÚSQUEDA DE LA UNIDAD	121
ILUSTRACIÓN 39. ANÁLISIS ESCALAR	122

ILUSTRACIÓN 40. ANÁLISIS ESCALAR	122
ILUSTRACIÓN 41. MULTIPLICACIÓN COMO FUNCIÓN	124
ILUSTRACIÓN 42. DIVISIÓN COMO BÚSQUEDA DE LA UNIDAD	125
ILUSTRACIÓN 43. OPERADOR FUNCIONAL	126
ILUSTRACIÓN 44. TRANSFORMACIONES LINEALES	127
ILUSTRACIÓN 45. MULTIPLICACIÓN COMO FUNCIÓN	128
ILUSTRACIÓN 46. COVARIACIÓN ENTRE CANTIDADES	130

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de investigación es auspiciado por el Ministerio de Educación Nacional, a través del programa Becas para la Excelencia Docente, del cual hacemos parte.

De acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional (en adelante, MEN) (1998, 2006), uno de los cinco tipos de pensamiento matemático es el pensamiento Variacional. Este pensamiento a lo largo de la formación básica y media ha sido abordado tradicionalmente desde el grado octavo hasta el grado undécimo; los estudiantes que se enfrentan por primera vez en el grado octavo a este proceso encuentran diversos tipos de dificultades, entre estas dificultades sobresalen las que están relacionadas con el paso de lo numérico a lo algebraico, con el uso de la simbología algebraica y todas las generalidades que esta permite, tal como lo manifiesta Castro (2012).

Lo anterior, ha dado paso a múltiples investigaciones tales como la de Kieran y Filloy (1989), entre otras, en las cuales se exponen algunas dificultades que los estudiantes presentan en el paso de la aritmética al álgebra. Una de estas se asocia con el uso indiscriminado de las reglas operacionales que se dan en la aritmética; otra se evidencia, en el modo de ver y entender el signo igual; además, a la carencia de habilidades de los estudiantes para expresar formalmente los métodos o procedimientos que usan en la resolución de problemas.

Ahora bien, la no vinculación de elementos relacionados al pensamiento Variacional en la básica primaria es el sustento que da origen a esta propuesta de indagación. Con el fin de

delimitar el objeto de estudio, se decidió diseñar un conjunto de Fichas de trabajo¹ en el marco del laboratorio de matemáticas (en adelante, LabMat), siendo este una estrategia pedagógica que busca, mediante la experimentación y el trabajo autónomo, desarrollar pensamiento matemático (Arce et al. 1999).

En relación con el LabMat, del cual se está construyendo una versión en la IERV con una estructura similar del Laboratorio de Matemáticas de la Universidad del Valle, en la que su elemento principal son las mesas (ver 2.6) las cuales a su vez contienen Fichas de trabajo, para efectos de esta indagación la propuesta de trabajo se encuentra inscrita en la mesa del pensamiento Numérico-Variacional.

Teniendo en cuenta lo anterior se diseñaron, rediseñaron y se aplicaron tres Fichas de trabajo, las cuales tuvieron como base la multiplicación como Isomorfismo de medida (Vergnaud, 2000) pues se asume que esta perspectiva puede incidir para que se asimilen de manera comprensiva otros objetos matemáticos vinculados a la multiplicación, tales como proporción, razón o función lineal, lo cual ha de contribuir para obtener acercamientos significativos al pensamiento Variacional, dado que el estudio del Isomorfismo de medida, de acuerdo con autores como Vergnaud (2000) o Puig y Cerdán (1988), es una estructura que abarca los problemas de proporcionalidad simple directa entre dos magnitudes M_1 y M_2 .

Esta propuesta permitió rastrear, en los procedimientos usados por los estudiantes en la resolución de las Fichas, algunos elementos característicos del pensamiento Variacional. Tales procedimientos se categorizan según los niveles de algebrización propuestos por Godino, J., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2014).

¹ Entiéndase Ficha de trabajo como un conjunto de actividades matemáticas que apuntan a ser desarrolladas autónomamente por los participantes en una de las mesas del LabMat.

Los resultados de esta indagación se presentan organizados en cinco capítulos, los cuales se describen brevemente a continuación: en el primer capítulo, se presenta el planteamiento del problema, el marco contextual, los objetivos y la justificación; el segundo capítulo presentan los marcos de referencia, en este se exponen los antecedentes, conceptos asociados al Pensamiento Variacional, a las Estructuras Multiplicativas (Isomorfismo de Medidas), la Matematización y al Laboratorio de Matemáticas; en el tercer capítulo se presenta la metodología con la cual se fundamentó el trabajo; el cuarto capítulo tiene que ver con el modelo y los análisis de los resultados obtenidos en el marco del LabMat; finalmente se presentan las conclusiones y consideraciones finales.

CAPÍTULO I.

ASPECTOS GENERALES DE LA INDAGACIÓN

En este capítulo se presentan los aspectos que direccionaron este trabajo. Aspectos tales como: planteamiento del problema, marco contextual, objetivos (general y específicos) y la justificación; los cuales permitieron perfilar y delimitar la presente indagación.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

De acuerdo con la interpretación de los resultados en la prueba Saber Quinto hechos por el Instituto Colombiana para el Fomento de la Educación Superior (ICFES), realizadas en los últimos tres años 2015, 2016 y 2017 , se encontró para los estudiantes de la IERV que el nivel de insuficiencia (Ilustración 1) en el desempeño de la prueba de matemáticas siempre estuvo sobre el 60% y en el componente Numérico Variacional en los años 2015 y 2017 se ubicaron en el nivel débil, pero, en el 2016 se ubicaron en el nivel muy fuerte. Lo anterior, indica que no hay una regularidad en los resultados de los años ya mencionados, por tanto, se requiere de una intervención didáctico-pedagógica, la cual conduzca a resultados más estables y positivos.

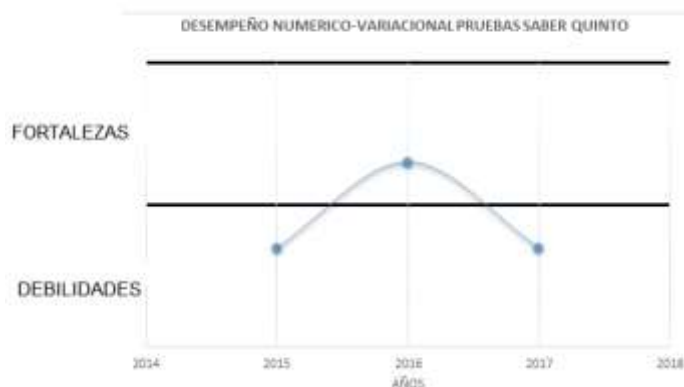


Ilustración 1. Resultados de la Prueba Saber 2015 - 2017. Elaboración propia a partir de los datos del ICFES

Estos resultados son un indicador que invita a que se aborde la enseñanza de la variación y el cambio mucho antes de llegar a los grados octavo y noveno, que son los grados en que tradicionalmente se inicia su estudio mediante la enseñanza del álgebra. Así mismo, en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), se recomienda que el estudio del álgebra sea iniciado pronto en el currículo de matemáticas, a través de situaciones de la vida cotidiana en las que se reflejan fenómenos de variación y cambio.

Ahora bien, en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se continúan presentando diversas dificultades que obstaculizan el buen desempeño de los estudiantes. Muchas de las dificultades se encuentran asociadas a la enseñanza fragmentada de los contenidos matemáticos (MEN 1998), por ejemplo, las operaciones aritméticas (adición, sustracción, multiplicación y división), a la enseñanza tardía de conceptos vinculados con el pensamiento Variacional, a los métodos y estrategias que le permiten al docente poner en juego los elementos conceptuales que pretende desarrollar. Esto, hace evidente que se requiere mejorar las prácticas de enseñanza o en su efecto buscar diferentes estrategias, las cuales conduzcan a mejorar los procesos de aprendizaje.

En el caso de la multiplicación de números naturales, algunos docentes utilizan estrategias que limitan su enseñanza, por ejemplo, Orozco (2009) resalta algunas de esas estrategias, las cuales son: una adición repetida de sumandos iguales, el aprendizaje de las tablas de multiplicar y las formas de desarrollar el algoritmo de la multiplicación. Desde este punto de vista, el aprendizaje de la multiplicación es poco significativo para los estudiantes, debido que no vinculan aspectos propios de la operación, los cuales están estrechamente relacionados con conceptos tales como la división, la proporcionalidad, entre otros.

Ante esto, es importante tener en cuenta el concepto de proporcionalidad en la enseñanza de la aritmética, dado que conduce al razonamiento proporcional, que a su vez da cuenta de la covariación entre cantidades, la cual se encuentra muy relacionada con el pensamiento Variacional. Lo anterior, invita a considerar la multiplicación como una estructura, debido a que de esta forma, se genera una relación entre diversos conceptos matemáticos, que a su vez establecen un vínculo con los pensamientos Numérico y el Variacional.

Lo anterior se relaciona con lo expuesto por Vergnaud (2000), el cual considera que las estructuras multiplicativas conllevan a la comprensión de diversos objetos o conceptos matemáticos, tales como, las ideas de proporción, razón, función, entre otros. Estos conceptos, permiten dar cuenta del pensamiento Variacional, que en últimas es el concepto que fundamenta esta indagación. Todo lo anterior, permite plantear la siguiente pregunta de indagación:

¿Qué tipo de actividades relacionadas con las estructuras multiplicativas en el caso del Isomorfismo de medida se pueden diseñar en el Laboratorio de Matemáticas que contribuyan al desarrollo del pensamiento Variacional, en los estudiantes de grado sexto de la IERV?

1.2 MARCO CONTEXTUAL

La Institución Educativa República de Venezuela (IERV) está localizada sobre el casco urbano en el sector de la Isla Cascajal del Distrito de Buenaventura, del Departamento del Valle del Cauca, se encuentra a una altitud de 2 metros sobre el nivel del mar.

La IERV, de carácter público, con 55 años de servicio a la comunidad atiende grupos de preescolar, básica primaria, básica secundaria, media técnica y educación para adultos (nocturna

y sabatino). Las cuales se dan en tres jornadas académicas: Secundaria: 6:45 a.m. a 12:45 p.m.; Primaria: 12:45 p.m. a 5:45 p.m.; Nocturna: 6:00 p.m. a 9:00 p.m.

La población estudiantil de la IERV (niños, niñas, jóvenes y adultos), en el año 2018 se encontraban matriculados en total 1.237 estudiantes a la fecha, los cuales están distribuidos en cuatro sedes (incluyendo a la principal), de las cuales se describe la ubicación a continuación, donde están ubicadas cada una:

La sede principal, está ubicada en la dirección Cra 11 calle 2 N° 1-04 subida del barrio Viento Libre. La sede Policarpa Salavarrieta, está ubicada en el barrio Viento Libre. Nelson Mandela, está ubicada detrás de la Iglesia Sagrado Corazón de Jesús (barrio Firme) y finalmente la sede Bartolomé de las Casas, está ubicada en el barrio Alfonso Lleras Camargo.

Ahora bien, los estudiantes que convergen son de estrato socioeconómicos 1 y 2 que viven en su mayoría en zonas costeras (comunidades 1, 2, 3 y 4), un gran porcentaje de sus habitantes son afrodescendientes y una minoría indígena, además las familias son en su mayoría disfuncionales, debido a que sus padres se encuentran fuera del país por temas laborales o de seguridad, en otros casos por situaciones de la violencia que se vive en estos sectores se han desplazado. Cabe resaltar, que muchos de los estudiantes se encuentran en extra edad de acuerdo al grado que cursan y, presentan falencias académicas conforme al análisis arrojado por los diagnósticos realizados por los docentes.

De esta manera, la formación de sus estudiantes la Institución promueve valores institucionales de autoestima, amistad, solidaridad, respeto, justicia, responsabilidad, comunicación y democracia, aspectos que se destacan dentro del LabMat, en el que se movilizan

una diversidad de aprendizajes y en los que es necesario hacer uso de la cooperación entre sus participantes, permitiendo que los lazos de amistad se fortalezcan. Ya que el intercambiar información permite que las comunicaciones fluyan naturalmente como parte de las actividades que se promueven en el laboratorio.

Por otro lado, la IERV está conformada por 37 docentes, distribuidos en los diferentes niveles educativos así: 4 en preescolar, 22 en la Básica Primaria y 11 en la Básica Secundaria y Media. En cuanto a los profesores de matemáticas, la Institución cuenta con dos profesores en secundaria (vinculados al proceso de formación por parte de las becas del Ministerio de Educación Nacional), que actualmente son estudiantes de la Maestría en Educación con Énfasis en Educación Matemática de la Universidad del Valle, estos profesores se encuentran en proceso de trabajo de grado.

Este estudio se realizó durante el año lectivo 2018 en la IERV, con dos cursos mixtos del grado sexto jornada mañana; uno de la sede principal y el otro de la sede San Bartolomé de las Casas, con estudiantes cuyas edades oscilan entre 11 a 15 años, a los que se realizó la implementación de tres Fichas de Laboratorio de Matemáticas inicialmente, y con el otro curso los rediseños de estas.

Por otro lado, el LabMat se utiliza como una estrategia que motiva y genera aprendizajes significativos en los estudiantes. Vale la pena aclarar, que la propuesta del LabMat es independiente de los procesos curriculares, sin embargo, se puede utilizar como una alternativa que sirva de ayuda a los procesos desarrollados en el aula de clases. Claro está, que esta propuesta puede adaptarse al aula de clases si el docente así lo desea, con la intención de reforzar el contenido o para la introducción de este.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo General

Desarrollar una propuesta metodológica, vinculada al Laboratorio de Matemáticas, en la que se planteen situaciones problemas relacionadas con las estructuras multiplicativas en el caso de Isomorfismo de medida, que permita un acercamiento al desarrollo del pensamiento Variacional en los estudiantes de grado sexto de la Institución Educativa República de Venezuela.

1.3.2 Específicos

- Identificar los elementos relacionados con la multiplicación como Isomorfismo de medida, para diseñar situaciones en el marco del Laboratorio de Matemáticas, en el que la resolución de problemas contextualizados, permita evidenciar aspectos vinculados a la variación y el cambio (proporción, patrón etc).
- Caracterizar algunos rasgos del pensamiento Variacional a partir de los resultados obtenidos en la aplicación de las situaciones en el Laboratorio de Matemáticas.
- Categorizar los avances de los estudiantes con relación al desarrollo del pensamiento Variacional desde la multiplicación como Isomorfismo de medida.

1.4 JUSTIFICACIÓN

Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006) plantean que el desarrollo del pensamiento Variacional debe abordarse a lo largo de toda la educación básica y media, iniciando su estudio con el reconocimiento de regularidades y la identificación de un patrón ya sea numérico o geométrico. Sabiendo esto, aún en muchas instituciones educativas se acercan a este pensamiento en el grado octavo, debido a que tradicionalmente se aborda este pensamiento desde el estudio del lenguaje algebraico, es decir, en la enseñanza del álgebra.

Con respecto a lo manifestado, Azarquiél (1993) propone, que se deben abordar procesos aritméticos, que generen pensamiento algebraico (Variacional), debido, a que la adquisición de dicho pensamiento se da en estrecha relación con el trabajo aritmético que se suscita en los primeros años de la educación básica.

Lo anterior permite establecer que la puesta en escena de las estructuras multiplicativas, en el caso del Isomorfismo de medida, en el marco del Laboratorio de Matemáticas puede ser una alternativa que posibilita un acercamiento en comprensión y el desarrollo del pensamiento Variacional.

De igual forma, el MEN a través de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), establece que uno de los núcleos conceptuales matemáticos en los que está involucrada la variación son los modelos matemáticos, en los que se resalta el tipo de variación multiplicativa. Por tanto, se sugiere abordar el pensamiento Variacional mucho antes de llegar al grado octavo,

partiendo de lo aritmético. Este último, entendido como un medio que posibilita el acercamiento ha dicho pensamiento.

Hay que mencionar, además, que la generalización desarrollada a través del uso de patrones y regularidades, representa un elemento fundamental del pensamiento Variacional, pues, da la oportunidad de poner en práctica situaciones relacionadas con las estructuras multiplicativas, que logran generar acercamientos con la variación y el cambio, para que desde este punto de vista las situaciones planteadas en los primeros años escolares puedan abordar conceptos que aproximen a los estudiantes al pensamiento Variacional desde lo numérico.

Sin embargo, hay docentes que, al enseñar las operaciones de multiplicación y división, continúan haciéndolo de manera fragmentada, privilegiando los algoritmos, lo que conlleva, a que los estudiantes presenten dificultades en su comprensión a la hora de enfrentarse a situaciones que tengan que ver con dichas operaciones o con otros conceptos que tengan relación con los mismos.

Desde lo curricular, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) a través de los Estándares Básicos de Competencias de primero a séptimo grado, destaca entre los procesos generales la resolución de problemas en situaciones multiplicativas. De lo anterior, se debe mencionar que la teoría de los campos conceptuales expuesta por Vergnaud (1983), se encuentra en sinergia con lo expuesto por el MEN, debido a que centra su atención en las estructuras de tipo multiplicativas, lo que aporta elementos fundamentales para el desarrollo de esta propuesta de indagación.

Por otro lado, para el desarrollo de esta propuesta se tuvo en cuenta una metodología de tipo cualitativa, para la cual se tomaron algunos elementos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995) y de los Experimentos de Enseñanza vista desde Cobb et al. (2003) y Molina et al. (2011). Cabe señalar, que estas metodologías se destacan por el diseño, la planeación, las implementaciones, y los análisis de las actividades; por ende, se abordaron aspectos de ambas metodologías en la constitución de una metodología particular para este trabajo; la cual se determinó ejecutar en tres etapas: etapa 1, planeación y diseño de las Fichas; etapa 2, experimentación en el LabMat; y la etapa 3 de análisis y producción de la documentación.

Lo descrito anteriormente, permite sintetizar la justificación de esta propuesta de indagación, la cual pretende generar un acercamiento al desarrollo del pensamiento Variacional a través de las estructuras multiplicativas examinadas desde Vergnaud (1983) y los niveles de algebrización Godino et al, (2014), en estudiantes de grado sexto de la IERV. A ellos se les presentó una serie de actividades matemáticas que posibilitaron la comprensión de las estructuras multiplicativas en el caso del Isomorfismo de medida, en el marco del LabMat en el cual la manipulación y la experimentación de materiales didácticos, generaron aprendizajes matemáticos significativos. Además, hay que decir, que los niveles de algebrización propuestos Godino et al, (2014), permitieron rastrear características fundamentales del pensamiento Variacional, a partir de las resoluciones de las Fichas de LabMat por parte de los participantes (estudiantes).

CAPÍTULO II

MARCOS DE REFERENCIA

En este capítulo, se presentan los conceptos teóricos que fundamentan esta indagación. En la primera parte se presentan algunos trabajos que dieron luces para la formulación de esta indagación (Antecedentes). Luego, se abordan algunas características del pensamiento Variacional basadas en los trabajos de Vasco (2003); Godino et al, (2014) y MEN (1998). En la tercera parte se considera importante exponer y analizar algunas definiciones alrededor de las Estructuras Multiplicativas, específicamente el caso de Isomorfismo de medida, vistas desde la postura de Vergnaud (2000); en la cuarta parte se presenta la Matematización. Para finalizar, se presenta un breve recorrido por algunas de las concepciones sobre los laboratorios de matemática y se describe el LabMat como ha sido considerado en esta indagación.

2.1 ANTECEDENTES

La enseñanza de situaciones problemas que requieren de la multiplicación para su solución, es uno de los tantos objetivos de la educación básica primaria y básica secundaria.

En concordancia, se han adelantado muchos trabajos de investigación que presentan no solamente la importancia y utilidad de la multiplicación, sino que también, establecen propuestas que podrían ser más significativas a la hora de presentarla en el aula de clases. De igual forma, presentan el vínculo de este concepto con otros conceptos de la educación matemática, tales como: función, proporcionalidad, división entre otros. Es por ello, que se revisaron algunas fuentes que se enmarcan en el estudio de la multiplicación y los demás elementos antes

mencionados, las cuales buscan mejorar los aprendizajes de los estudiantes. Por ende, se consideraron las siguientes investigaciones:

En primer lugar, la tesis hecha por Obando (2015) se enmarca en el campo del razonamiento proporcional o razonamiento multiplicativo, permite la comprensión de nuevos escenarios para el conjunto de problemáticas asociadas al aprendizaje o la enseñanza de los objetos de conocimiento razón, proporción y proporcionalidad (RPP).

Para el desarrollo de esta investigación se plantearon dos propósitos: el primero caracterizar los sistemas de prácticas matemáticas de dos grupos de estudiantes de los grados 3^o y 4^o de la Educación Básica Primaria, con respecto a los objetos de conocimiento matemático razón, proporción y proporcionalidad; el segundo propósito se centró en indagar por las configuraciones epistémicas para dichos sistemas de prácticas matemáticas.

Los aspectos metodológicos de este trabajo se organizaron en dos etapas: la primera etapa un proceso de participación en las clases de matemáticas de estudiantes de tercero y cuarto de primaria de una institución educativa de la ciudad de Cali, la cual tenía como idea observar y caracterizar la interacción conjunta entre profesor y estudiante; y la segunda en un estudio histórico-epistemológico de prácticas matemáticas en épocas y lugares diferentes.

Uno de los elementos encontrados en la tesis destaca el lugar central de las magnitudes y la medición de cantidades de magnitud en los procesos de estudio de razones, proporciones y proporcionalidad, y de la noción de razón como uno de los fundamentos en las conceptualizaciones relativas a lo multiplicativo y los números racionales.

Esta indagación aporta elementos importantes a este trabajo dado que resalta las dificultades que se presentan en la enseñanza de la multiplicación, y cómo a través de estas dificultades se pueden generar propuestas que permitan abordar la multiplicación desde una punto de vista un poco más amplio, desde esta perspectiva la multiplicación como Isomorfismo de medida contribuye a potenciar el análisis de la covariación entre cantidades.

En segundo lugar, la investigación realizada por Botero (2006) estuvo centrada en la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo, a través de situaciones que permitieron interpretar y representar variaciones conjuntas de dos espacios de medida; este trabajo se realizó bajo la metodología de Ingeniería Didáctica, la cual permitió involucrar a los estudiantes en la realización de situaciones problema encaminadas a cualificar los procesos de construcción del pensamiento multiplicativo.

Entre los resultados sobresale que si a los estudiantes se les propone la realización y el análisis de situaciones en las que se presenta la covariación de dos magnitudes, puede facilitar la inserción de diferentes tipos de representación, tanto para las actividades aditivas iniciales como para las multiplicativas, esto logró un avance significativo en la conceptualización de las estructuras multiplicativas.

Este trabajo brinda elementos significativos dado que a partir de situaciones problema en las que el estudiante interactúa con la variación simultánea de cantidades, facilita el paso desde un pensamiento aditivo, hacia uno multiplicativo y además permite que los estudiantes puedan identificar patrones y regularidades en dichas variaciones. Con base en estos resultados iniciales se configuran los demás elementos que se presentan a continuación.

2.2 PENSAMIENTO VARIACIONAL

Los Estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2006) establecen que el pensamiento Variacional está vinculado con el reconocimiento, la percepción, la identificación, la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos. Así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. Esta concepción, se encuentra fuertemente ligada al proceso de generalización, debido a que este proceso se fundamenta en la detección de regularidades o patrones que conlleven a la formulación de una expresión verbal o escrita que dé cuenta de la situación.

El grupo Azarquiel (1993), desde lo cognitivo, establece que el proceso de generalización requiere tres pasos bien diferenciados:

- La visión de la regularidad, la diferencia, la relación.
- Su exposición verbal.
- Su expresión escrita, de la manera más concisa posible.

Desde esta perspectiva, el desarrollo del pensamiento Variacional está permeado de estructuras conceptuales que fundamentan el estudio de la variación y el cambio, siendo más notorio en la básica secundaria que en la básica primaria, debido a que es en la básica secundaria, especialmente en el grado octavo, que por tradición se inicia el estudio de la variación y el cambio desde los sistemas algebraicos, los cuales para algunos son vistos como la generalización de las estructuras numéricas.

Autores como Banerjee (2008) citado por Castro (2012) expresa que “el álgebra es desarrollada sobre la aritmética, ya que tiene la necesidad de sistematizar y describir propiedades, operaciones y procesos generales para resolver una clase de problemas” (p.80). En efecto, los esfuerzos por establecer diversas conexiones entre la aritmética y el álgebra se han enmarcado desde distintas perspectivas tales como las relaciones numéricas que incluyen la aritmética generalizada, estructuras abstraídas de cálculos, relaciones funcionales, el uso de patrones y la generalización de patrones entre otros. Siendo la aritmética uno de los medios que puede posibilitar la intelección de los objetos o símbolos algebraicos y los tratamientos de estos, tal como lo plantea Banerjee (2008) citado por Castro (2012, p.80)

Con relación en lo antes expuesto, los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN, 2006) proponen que:

Las actividades de generalización de patrones numéricos, geométricos y de leyes y reglas de tipo natural o social que rigen los números y las figuras involucran la visualización, exploración y manipulación de los números y las figuras en los cuales se basa el proceso de generalización. Esta es una forma muy apropiada de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar al séptimo y octavo grado. Estas actividades preparan a los estudiantes para la construcción de la expresión algebraica a través de la formulación verbal de una regla recursiva que muestre cómo construir los términos siguientes a partir de los precedentes y el hallazgo de un patrón que los guíe más o menos directamente a la expresión algebraica. (p. 67)

En razón de lo expuesto, se puede establecer el vínculo entre el pensamiento Numérico y el pensamiento Variacional debido a que el estudio de las regularidades o patrones numéricos permiten identificar y visualizar la forma en que se comporta una secuencia numérica, y que a

partir de esta, los estudiantes logren describir de manera verbal o escrita el comportamiento de las cantidades, si aumentan o disminuyen y la forma en que lo hacen. Además, que puedan predecir posibles resultados llegando a la construcción de procesos de generalización.

Cabe señalar que el pensamiento Variacional permite identificar regularidades provenientes del contexto sociocultural, de situaciones propias de las matemáticas o de otras ciencias, en las que se puedan establecer modelos de variación y cambio. Así pues, para Vasco (2003), “el verdadero propósito del pensamiento Variacional es la modelación matemática y tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad”. (p. 7)

Desde este punto de vista, Vasco (2003) define la modelación como el arte de elaborar modelos, estos modelos deben de ser los encargados de simular los subprocesos que ocurren en la realidad. Así que, basados en la idea de establecer modelos, es importante identificar ciertos momentos que den cuenta del acercamiento por parte de los estudiantes al pensamiento Variacional. De igual forma, Vasco presenta un esquema en el cual se reconocen varios momentos que permiten evidenciar los avances en el pensamiento Variacional, estos se establecen no necesariamente en ese orden estricto:

- El momento de captación de patrones de variación; lo que cambia y lo que permanece constante.
- Creación de un modelo mental.
- Momento de echar andar un modelo.
- Revisión del modelo

Lo anterior, permite categorizar los avances por parte de los estudiantes en la adquisición del pensamiento Variacional, y como estos, de forma directa o indirecta, hacen uso de dichos procesos cuando se enfrentan a una situación de variación y cambio.

Es preciso subrayar, que el desarrollo del pensamiento Variacional es progresivo, este debe ser abordado en todos los niveles de la educación básica y media, para adquirir las competencias necesarias en dicho pensamiento matemático. El MEN (2006), indica que “el desarrollo del pensamiento Variacional, dadas sus características, es lento y complejo”. (p.68). Por ende, es fundamental abordar dicho pensamiento, mucho antes de llegar a la básica secundaria, tal como lo plantean Godino y Font (2003), quienes expresan que el razonamiento algebraico se debe enseñar desde los primeros niveles de educación básica primaria hasta los niveles de secundaria, buscando desarrollar de manera progresiva el uso del lenguaje, el simbolismo y que logren comunicar sus principales características. Entre las que se destacan generalizar, formalizar patrones y describir regularidades.

Ahora bien, para desarrollar el pensamiento Variacional en la escuela es necesario enfrentar al estudiante a situaciones problemas contextualizados. Tales situaciones deben describir fenómenos de variación y cambio, en las que las operaciones aritméticas jueguen un papel importante en su solución.

Otra forma de favorecer el desarrollo del pensamiento Variacional, es presentar situaciones de variación y cambio en tablas, debido a que estas permiten a los estudiantes visualizar y describir regularidades que conduzca a la generalización de un patrón numérico que dé cuenta del fenómeno bajo estudio. En relación con lo anterior, el MEN (2006) expresa que “la tabla se constituye en un elemento para iniciar el estudio de la función, pues es un ejemplo concreto de

función presentada numéricamente”. (p.67). Desde esta concepción se presenta la función como una forma de estudio del pensamiento Variacional, debido a que, en las funciones, se establece una relación de dependencia entre dos variables, en las cuales el cambio de cantidad de magnitud de una afecta a la otra.

Por otra parte, según Zambrano y Moreno (2011), asumen el pensamiento Variacional como un tipo de pensamiento matemático:

Es un pensamiento relacional que está dirigido al análisis de la covariación de un sistema, de una situación o de un fenómeno en general. Es un pensamiento orientado a reconocer qué, cómo y cuánto varían tal sistema, situación o fenómeno, con el fin de lograr su comprensión, descripción, representación y/o modelación en distintos sistemas o registros simbólicos, sean verbales, icónicos, tabulares, gráficos y/o algebraicos. (p.102)

Así pues, el pensamiento Variacional, visto desde las relaciones funcionales, permite responder qué, cómo y cuánto varía tal sistema, situación o fenómeno, mediante el reconocimiento de regularidades o patrones los cuales den cuenta de generalidades, que conducen a la creación de modelos haciendo uso de los diferentes sistemas de representación (tablas, expresiones algebraicas, etc.).

De esta manera las relaciones funcionales ponen de manifiesto la covariación entre las variables asociadas a una situación o fenómeno de forma dinámica. Lo que favorece en los estudiantes el reconocimiento, la percepción, la identificación, descripción de regularidades, la posibilidad de modelar y representar dichas situaciones o fenómenos en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, gráficos o algebraicos (MEN, 2006).

Por otro lado, autores como Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012), Bell (1995) y Kieran (2006) definen el pensamiento algebraico como aquel que se caracteriza por analizar relaciones entre cantidades, reconocer estructuras, estudiar cambios, hacer generalizaciones, resolver problemas, modelizar, justificar, probar y predecir. Estas características coinciden con algunos de los elementos que fundamentan el desarrollo del pensamiento Variacional.

Lo anterior permite hablar, desde este punto de vista, indiscriminadamente tanto de pensamiento algebraico como de pensamiento Variacional, debido a que en el ámbito internacional se habla de pensamiento o razonamiento algebraico y en el ámbito nacional se habla de pensamiento Variacional.

Para abordar el estudio de este pensamiento, autores como Kieran y Kaput (1989) y Gascón (1999) establecen que se deben considerar ciertos niveles de Algebrización, que se pueden identificar en el accionar de los estudiantes frente a diferentes tipos de tareas matemáticas, a las cuales se les atribuye ciertas condiciones algebraicas.

De la misma forma, Godino et al, (2014) plantean ciertas características que posibilitan establecer diferentes niveles de Algebrización. Dichos niveles, no se asignan a la tarea (situación problema) en sí misma, estos son otorgados a la actividad matemática que se realiza, es decir, dependiendo de la forma en que se aborde o resuelva la tarea, esta se puede clasificar en un nivel u otro. A continuación, se describen los cuatro niveles de algebrización descritas por Godino et al, (2014) que se consideran en esta indagación:

Ausencia del razonamiento algebraico (Nivel 0)

En este nivel intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas de generalización el mero reconocimiento de la regla recursiva que relaciona un término con el siguiente, en casos particulares, no es indicativa de generalización. Para esclarecer mejor este nivel se usa el siguiente ejemplo (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**):



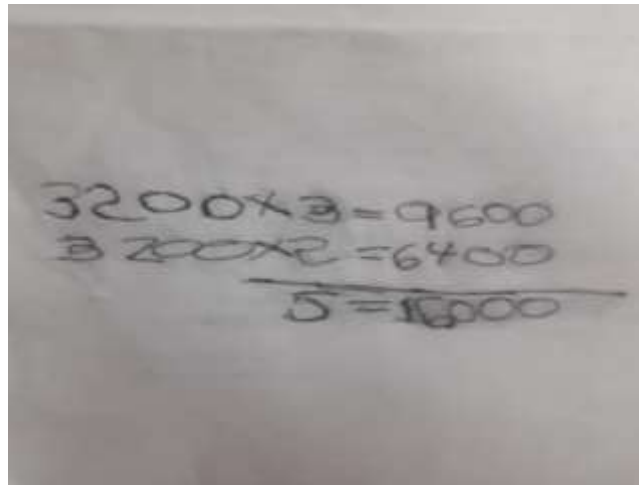
Ilustración 2. Ausencia del Razonamiento Algebraico

Como se puede observar el estudiante realiza operaciones con objetos intensivos de primer grado (números particulares), aunque identifica los resultados de la situación el estudiante se limita a realizar las operaciones aritméticas aplicadas a dichos números y la igualdad como resultado de la operación. Es de resaltar que en la actividad se debe identificar en qué momento aplicar la adición y multiplicación de números naturales. Sin embargo, estos procedimientos no son considerados como razonamiento algebraico.

Nivel incipiente de algebrización (Nivel 1)

En este nivel intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos

que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con dichos objetos. En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, aunque expresada en un lenguaje diferente al simbólico-literal. Para explicar este nivel se presenta la siguiente ilustración:



The image shows handwritten calculations on a piece of paper. The first line is $3200 \times 3 = 9600$. The second line is $3200 \times 2 = 6400$. Below these, there is a horizontal line, and then the result $5 = 16000$ is written, indicating the sum of the two products.

Ilustración 3. Nivel Incipiente de Algebrización

En esta se muestra el procedimiento utilizado por un estudiante al resolver una de las situaciones de la ficha Y' (ver anexo 10), donde se puede evidenciar el uso de una de las propiedades de la linealidad $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$, y se entiende como $f(2 + 3) = f(2) + f(3) = 6400 + 9600 = 16000$, por tanto, el precio que debe pagar por 5 botellas de agua de coco es 16000pesos. Se debe decir, que a pesar de que el estudiante no nombra de forma directa la propiedad, lo importante es que establece una relación genérica entre números y propiedad, lo que permite observar que hay unos indicios de pensamiento algebraico, propios del nivel 1 de Algebrización.

Nivel intermedio de algebrización (Nivel 2)

En este nivel intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico – literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial temporal. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $AX \pm B = C$. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión. Se presenta un ejemplo que detalla alguna de las características de este nivel:

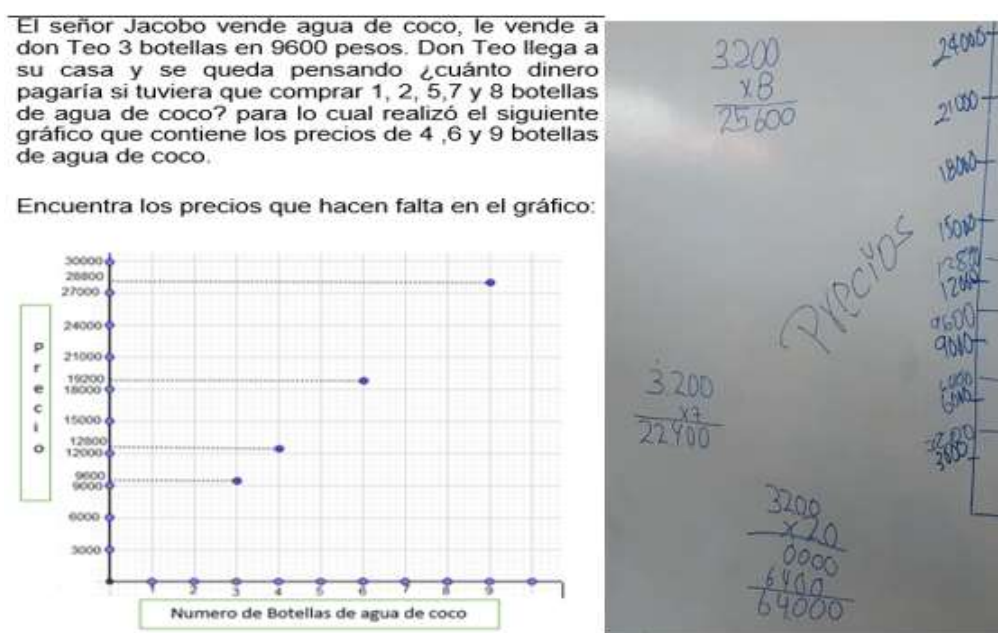


Ilustración 4. Nivel Intermedio de Algebrización

En esta actividad vemos como el estudiante logra identificar el precio correspondiente a una botella de agua de Coco, el cual era \$3.200 pesos. Luego utiliza dicho valor, para calcular el precio de diferentes cantidades de botellas de agua de Coco (7, 8, 20, etc.). Así, el precio de una botella de agua de Coco es $3200 \cdot (1) = 3200$, lo hace para dos botellas $3200 \cdot (2) = 6400$, de la misma forma esta relación funcional se cumple para el precio de las otras cantidades de botellas, y por medio del lenguaje natural expresa una regla general que para encontrar el valor de cualquier cantidad de botellas se multiplica siempre por \$ 3.200, a este tipo de razonamiento

se determina un nivel 1 de Algebrización, pero si el estudiante alcanza a expresar que la relación entre las cantidades de botellas y el precio está dada por la función $f(x) = 3200x$; este tipo de actividad se le asigna un nivel 2 de algebrización dado que se logra establecer una regla general expresada en un lenguaje simbólico-literal.

Nivel consolidado de algebrización (Nivel 3)

Para dicho nivel, se generan objetos intensivos representados de manera simbólica – literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones. Se presenta una situación que contribuya a dar claridad de este nivel:

Ejemplo: Pacho tiene en su platón cierta cantidad de borojó para vender. Doña Ana por su parte tiene en su platón tres veces más de lo que tiene pacho. Si Pacho tuviera 16 borojó mas, entonces tendría la misma cantidad de borojó que doña Ana. ¿Puedes calcular la cantidad de borojó que tiene Pacho? y ¿Cuántos borojó tiene doña Ana?

Un estudiante determina resolver la situación de la siguiente forma: $x = \text{Pacho}$; $3x = \text{Doña Ana}$; $x + 16$ es la cantidad de borojó que tiene Pacho que es igual a la cantidad que tiene doña Ana ($3x$).

$$3x = x + 16 \rightarrow 2x = 16 \rightarrow x = 8$$

La actividad antes planteada es resuelta por el estudiante y a esta se le asigna un nivel 3 de Algebrización, puesto que ya que se ha planteado de manera simbólica una ecuación de la forma $AX \pm B = CX \pm D$ y se ha operado con la incógnita para encontrar su solución.

Los anteriores niveles, describen una ruta algebraica que permite rastrear características del pensamiento Variacional desde una relación funcional, brindando fundamentos teóricos para la inclusión temprana a dicho pensamiento. De tal forma que las actividades que realicen los estudiantes van a estar determinadas por uno o varios niveles para lo cual se tendrá en cuenta los avances y los alcances que manifiesten mientras realizan las actividades (Fichas) en el marco del Laboratorio de Matemáticas.

2.3 ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

En el campo de la Educación Matemática, durante los últimos años del siglo XX se realizaron múltiples investigaciones alrededor de las operaciones aritméticas básicas de adición, sustracción, multiplicación y división (Carpenter et al, 1982; Lesh & Landau, 1983; Schwartz, 1996; Vergnaud, 1982, 1983, 1994). Estas investigaciones aportaron diversas aproximaciones conceptuales, con la intención de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de dichas operaciones. Además, se empezaron a utilizar con más frecuencia las expresiones de *estructura aditiva* y *estructura multiplicativa* para englobar las operaciones antes mencionadas.

Vergnaud (1983, p.127), en su teoría de los campos conceptuales, centra su atención en dos campos conceptuales, el primero está relacionado con las estructuras aditivas y el segundo con las estructuras multiplicativas. Este autor define campo conceptual como un conjunto de problemas y situaciones cuyo tratamiento requiere conceptos, procedimientos y representaciones de tipos diferentes, que están íntimamente relacionados.

Las estructuras multiplicativas tienen su propia organización, y estas no pueden ser consideradas solamente bajo los aspectos de las estructuras aditivas. Consecuentemente, autores como Maza (1991), Vergnaud (2000) y Obando (2015) manifiestan que la multiplicación no puede verse solamente como una suma de sumandos iguales, pues entenderlas de esta manera genera obstáculos en el aprendizaje, además que se aleja de las formas de razonamiento que son propios de la multiplicación como la variación conjunta de cantidades.

Ahora bien, debido a las interpretaciones antes expuestas, se centrará la atención en los planteamientos hechos por Vergnaud (1983), el cual se sitúa en el marco de tres categorías:

- Isomorfismo de medidas
- Producto de medidas
- Proporción múltiple

Para la realización de esta indagación se decidió limitar el campo de estudio a los problemas de Isomorfismo de medidas.

2.3.1 Isomorfismo de medida

Vergnaud (2000), ha realizado trabajos que buscan la comprensión y la conceptualización de las operaciones aritméticas, entre los que se destacan el campo conceptual de las estructuras aditivas y las estructuras multiplicativas. Para efectos de esta indagación se abordarán las estructuras multiplicativas, particularmente el caso del Isomorfismo de medidas

En relación con el Isomorfismo de medidas Ospina y Salgado (2016) indica que:

Es una estructura que establece relaciones de covariación entre cuatro cantidades (relación cuaternaria), donde es necesario revisar cómo varía una cantidad con respecto a la otra, ya sea al interior de un mismo espacio de medida o entre los diferentes espacios. (p. 54)

De esta manera, dicha estructura establece una relación de proporción entre dos espacios de medidas M1 y M2 (**Tabla 1**). Además, Vergnaud (1989), Puig y Cerdán, (1988) indican que estas abordan problemas de proporcionalidad simple directa entre dichas magnitudes, clasificándolas como Isomorfismo de medidas.

Tabla 1. Isomorfismo de Medida

M1	M2
a	b
c	d

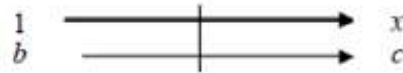
Es importante destacar, según Vergnaud (1995), que la manera como se solucionan los Isomorfismos de medidas es de tipo escalar o de operador funcional. En el primero se forma una relación entre magnitudes del mismo espacio (a, c y b, d), mientras que en el segundo se establece una relación entre magnitudes de espacios de medida diferente (a, b y c, d). Este tipo de situaciones permiten exponer las principales propiedades de la proporción simple.

Cabe señalar, que en las situaciones problemas que conllevan a esquemas en los que se observen los Isomorfismos de medidas intervienen cuatro cantidades, de las que se conocen tres de ellas y se debe encontrar el valor de una cuarta cantidad para su solución. De acuerdo con Vergnaud (1983), en estos casos se puede hablar de tres subclases de problemas para los cuales se hace muy útil el Isomorfismo de medidas: multiplicación, división-medida (búsqueda de la cantidad de unidades) y división-partitiva (búsqueda del valor unitario), según cuál sea la incógnita.

Multiplicación



División: búsqueda del valor unitario



División: búsqueda de la cantidad de unidades

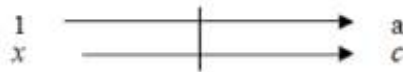


Ilustración 5. Los tres problemas del Isomorfismo de medida.
Obtenido de: <http://estatico.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/cepa/vergnaud.pdf>

En relación con lo anterior se tiene que las propiedades bajo las que se fundamenta el Isomorfismo de medida, son las propiedades del Isomorfismo de la función lineal.

- $f(nx) = nf(x)$
- $f(n_1x_1 + n_2x_2) = n_1f(x_1) + n_2f(x_2)$

Las propiedades que se refieren al cociente constante entre dos variables linealmente ligadas y algunas propiedades específicas de la bilinealidad.

- $f(x) = ax \quad x = \frac{1}{a}f(x)$
- $f(n_1x_1, n_2x_2) = n_1n_2f(x_1, x_2)$

Las anteriores propiedades fundamentan, desde un punto de vista matemático, a las estructuras multiplicativas, en este caso al Isomorfismo de medida.

2.3.2 Isomorfismo de medida y pensamiento variacional

La estructura del Isomorfismo de Medidas se encuentra enmarcada en las transformaciones lineales, dado que una transformación lineal es una función f de un espacio vectorial real M_1 en un espacio vectorial M_2 que asigna a cada vector $a \in M_1$ un único vector $af \in M_2$ que satisface las siguientes propiedades:

Homogeneidad con respecto a la suma: $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$

Homogeneidad con respecto a la multiplicación por un escalar: $f(\lambda a) = \lambda f(a)$

$$\forall a \in M_1, \frac{f(a)}{a} = a$$

Tales propiedades pueden enunciarse así:

Dadas M_1 y M_2 dos magnitudes relacionadas en un sistema lineal, a_1 una cantidad de magnitud de M_1 y b_1 una cantidad de magnitud de M_2 se cumple que:

Cuando la cantidad de magnitud a_1 aumenta al doble, al triple,..., la cantidad de magnitud b_1 aumenta al doble, al triple,...

Cuando la cantidad a_1 disminuye a la mitad, a la tercera parte,..., la cantidad b_1 disminuye a la mitad, a la tercera parte,...

A partir de esta definición de transformación lineal y de la enunciación de sus propiedades se establece una relación con la proporcionalidad simple directa en el sentido que se cuenta con

dos magnitudes y sus respectivas series de cantidades de magnitud que se correlacionan linealmente mediante una relación funcional de la forma:

$$f: M_1 \rightarrow M_2$$

$$a_1 \rightarrow f(a_1) = k \times a_1 = b_1$$

Donde k es la constante de proporcionalidad formando una función lineal que representa tal proporcionalidad.

Lo anterior, se encuentra en sinergia con lo que manifiesta Ospina y Salgado (2016),

... un Isomorfismo de medida se puede asumir como una transformación lineal dado que se puede entender como un modelo funcional sobre los espacios de medida involucrados en el problema; es decir, el segundo espacio de medida se transforma a través de la función, de manera idéntica como el primero. Además, se conservan las propiedades de la linealidad (homogeneidad con respecto a la suma, producto por escalar). (p. 54)

Por lo expuesto, se puede afirmar que la multiplicación desde el Isomorfismo de medida es un caso particular de la proporcionalidad directa, que representa uno de los ejes importantes que conduce al desarrollo del pensamiento Variacional, debido a que este se vincula con otros conceptos tales como: proporción, razón, multiplicación, función lineal, entre otros. Los cuales permiten un acercamiento desde lo numérico a lo Variacional.

En otras palabras, la multiplicación como una relación cuaternaria (Isomorfismo de medida) y como un caso particular de la proporcionalidad directa, se fundamenta en las propiedades del Isomorfismo de la linealidad tal como se manifestó en párrafos anteriores, dichas

propiedades establecen una conexión entre el pensamiento numérico y el pensamiento Variacional, ya que estas se apoyan en operaciones aritméticas (suma, multiplicación), para su uso en diversas situaciones de proporcionalidad.

Ante esto, es importante tener en cuenta que el concepto de proporción es un concepto importante en la enseñanza de la aritmética dado que permite el paso al razonamiento proporcional, que a su vez da cuenta de la covariación entre cantidades, la cual se encuentra estrechamente relacionada con el pensamiento Variacional.

2.4 MATEMATIZACIÓN

Para Freudenthal (1971) “la matematización es una actividad humana”, ya que dicha actividad busca organizar y expresar matemáticamente la realidad, teniendo en cuenta lo fundamental de ella. De esta forma matematizar la realidad para Freudenthal (Citado por Martínez, A; Cobos, J; y Torres, E. 2015), se relaciona con la puesta en escena de situaciones conectadas con el entorno social y cultural del estudiante, favoreciendo “la resolución de situaciones problemas, procedimientos, algoritmos, formulaciones, simbolizaciones y sistemas axiomáticos” (p.10), que son llevados a cabo por los estudiantes cuando intentan establecer parámetros a través del uso de herramientas matemáticas que puedan ordenar y estructurar para dar solución a situaciones problemas, por medio de la interacción con los demás compañeros y la orientación del docente.

Desde este enfoque Rico (2006) plantea que “aprender a matematizar debe ser un objetivo básico para todos los estudiantes. La actividad matemática se concreta en la actividad de matematización, que se identifica en el estudio con la resolución de problemas” (p. 279), en

efecto es a través de la matematización como los estudiantes pueden llegar a cristalizar la comprensión de los conceptos matemáticos desde situaciones problemas reales.

Por otra parte, los procesos de matematización de acuerdo con Martínez (2006) están compuesto por dos fases. La primera destaca que es el tratamiento de los problemas de la vida cotidiana del estudiante llevados al contexto matemático, este proceso es denominado Matematización Horizontal; y en la segunda fase, una vez llevado el problema al contexto matemático, el estudiante se desenvuelve en la utilización de conceptos y herramientas matemáticas que permiten ejecutar su resolución, este proceso es llamado Matematización Vertical.

De igual forma, Rico (2006, p.287) establece que los procesos o actividades vinculados con la matematización horizontal y vertical, son los siguientes:

La matematización horizontal incluye los siguientes procesos:

- Identificar las matemáticas que pueden ser relevantes respecto al problema.
- Representar el problema de modo diferente.
- Comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal.
- Encontrar regularidades, relaciones y patrones.
- Reconocer Isomorfismos con otros problemas ya conocidos.
- Traducir el problema a un modelo matemático.
- Utilizar herramientas y recursos adecuados.

La matematización vertical se sustenta sobre las siguientes actividades:

- Utilizar diferentes representaciones.
- Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones.
- Refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos.
- Argumentar.
- Generalizar

Es de resaltar que estos dos procesos son complementarios, debido a que un estudiante al enfrentarse a situaciones problemas puede tener un primer acercamiento con la matematización horizontal, y una vez entendido el problema, este puede poner de manifiesto procedimientos que le permiten avanzar a la matematización vertical. Ahora bien, identificando la relación que se lleva a cabo entre los dos procesos antes mencionados, es importante contrastar estos con los niveles de algebrización de Godino et al (2014), buscando categorizar las heurísticas que utilizan los estudiantes durante el desarrollo de las Fichas, de acuerdo con los parámetros que plantea el autor en cada nivel.

Se espera evidenciar, durante el desarrollo de las Fichas, el avance de los estudiantes con respecto a los procesos de matematización horizontal en un primero momento, y si estos consiguen llegar a procesos de matematización vertical, los cuales de acuerdo con los procedimientos utilizados pueden contribuir a ubicar los acercamientos significativos al pensamiento Variacional en niveles.

2.5 LABORATORIO DE MATEMÁTICAS

El término laboratorio ha tenido múltiples significados, a través del tiempo, estos han ido evolucionando de acuerdo con las necesidades de las comunidades científicas y académicas.

Cabe resaltar que su uso ha sido relevante tanto en los procesos científicos como en los educativos.

Como un antecedente a la idea de laboratorio se tienen las actividades realizadas por los alquimistas que, de acuerdo con la Enciclopedia Británica, llevaron a cabo prácticas pseudocientíficas durante la época medieval (400 - 1000 dc). Estas prácticas consistían en transformar metales como el plomo o cobre en plata u oro. Además, estos buscaban la cura para las enfermedades y los medios para prolongar la vida. Incluso, los lugares en donde realizaban sus prácticas brindaron las primeras herramientas para la creación del laboratorio de química.

De esta misma manera se ha podido establecer mediante el motor de conocimiento computacional Wólfram/Alpha, el cual permite identificar que el término laboratorio fue utilizado por primera vez en inglés en el año 1.605, durante el renacimiento europeo. Sin embargo, lo interesante de esta búsqueda son las definiciones que Wólfram/Alpha da sobre lo que es un laboratorio, las cuales se describen a continuación:

1. Un lugar de trabajo para la realización de investigaciones científicas. (Uso del laboratorio).
2. Una región se parece a un laboratorio en la medida en que ofrece oportunidades de observación, práctica y experimentación.

En estas definiciones se destacan las diferentes actividades que se pueden realizar en un laboratorio; en la primera, se subraya que es un lugar de trabajo exclusivo para la investigación; en la segunda, lo transcendental es la variedad de acciones que se pueden desarrollar, como la observación, la práctica y la experimentación.

Teniendo en cuenta lo anterior, según Giaccardi (2011), comenta que Dewey fundó en 1896 la escuela experimental en Chicago, procurando acabar con las clases en donde el estudiante era un ente pasivo, más bien buscaba que estos tuvieran un papel importante en su aprendizaje, es decir el conocimiento fuera presentado en forma de problema, donde la investigación y la reflexión estuvieran vinculados de forma directa los propios estudiantes, además planteó que para esto sería necesario llevar este tipo de actividades a espacios diferentes del aula de clases, lugares como laboratorios, biblioteca, parques infantiles y talleres.

Más tarde, en una conferencia del museo pedagógico en Francia, Emile Borel 1904, (citado por Bkouche 2008, p.9), propuso la creación de los LabMat en secundaria, los cuales tenían como finalidad la manipulación de materiales (entiéndase por material cualquier objeto físico o gráfico) para verificar sus propiedades con la definición teórica. De esta manera, reconocer que la experimentación está vinculada al LabMat.

Ahora bien, según Giaccardi (2011), manifiesta que Dewey fue un referente para muchos docentes en la primera mitad del siglo XX, debido a que promovió la escuela activa, a través de aspectos innovadores. En esta misma línea de tiempo, la Commission Internationale pour l'Etude NT l'Amelioration de l'Enseignement des Mathématiques (CIEAEM), publicó en 1958 la obra colectiva "Le matériel pour L'Enseignement des Mathématiques ("El material para la enseñanza de las Matemáticas") este documento logró un gran impulso sobre el uso del material didáctico en las clases de Matemáticas. Bajo la premisa de establecer estrategias que facilitaran el aprendizaje de las matemáticas, pero esta idea con el tiempo se desechó; sin embargo, en la actualidad se ha vuelto a retomar el uso de materiales didácticos que complementen la clase de

matemáticas, teniendo en cuenta que por medio de estos se pueden realizar acercamientos a los objetos matemáticos.

Sin embargo, según Arce et al. (1999), en el LabMat los materiales deben ser considerados herramientas metodológicas, las cuales permitan establecer una relación entre los contenidos matemáticos y las actividades a desarrollar. De igual forma, el uso de materiales didácticos (entiéndase por material didáctico, cualquier objeto físico o gráfico, manipulable con el cual se puede experimentar, para generar conocimientos) favorecen la adquisición de pensamiento matemático. Pero, este uso debe ser frecuente, tal como lo expresan en el simposio de Valencia (1987) donde indican que:

No será la incorporación de tres o cuatro herramientas espectaculares lo que caracterizará la nueva organización de las clases, sino el uso habitual, cotidiano, de una amplia variedad de materiales que hagan del aula de matemáticas, tanto en la escuela primaria como en la secundaria, un verdadero Laboratorio-taller. (p.20)

Así pues, se hace necesario el uso y construcción de material didáctico, dentro y fuera de las aulas de clases de manera habitual. Con la finalidad de que los estudiantes participen de manera activa y dinámica en su proceso de aprendizaje, y puedan a través de estos desarrollar pensamiento matemático. Lo anterior, es ampliado por la definición de LabMat de Arce et al. (1999), en la cual indican que,

El Laboratorio de Matemáticas es una estrategia pedagógica de utilización del material, en la que se encuentra un conjunto de actividades matemáticas para ser desarrolladas autónomamente por los participantes a través del uso de variados materiales, proceso que proporciona un ambiente de aprendizaje en el que se genera la relación entre actividad matemática y material manipulativo,

relación que contribuye a la construcción y fundamentación de pensamiento matemático. (p.2)

Desde estas perspectivas se puede identificar la noción de la actividad matemática, en donde el LabMat es visto como una “estrategia pedagógica”, donde los participantes (personas que van a realizar la actividad) interactúan con ciertos elementos, con la finalidad de desarrollar diversas actividades experimentales, las cuales permitan alcanzar la construcción de un aprendizaje significativo mediante el razonamiento y la interacción con los objetos matemáticos bajo estudio. Es importante destacar que, durante la práctica que se lleve a cabo en el LabMat, esta puede propiciar una forma de pensamiento abierto, que potencia la creatividad y la capacidad de resolver situaciones problemas por parte de los usuarios (estudiantes).

Por otra parte, la Comisión de Enseñanza Italiana (UMI-CIIM, 2004), definen las “Matemáticas del Laboratorio” como “una metodología basada en una variedad de actividades estructuradas”, que se mantiene de la construcción de significados matemáticos, además estas actividades se caracterizan por el uso de herramientas tales como, software, calculadoras, objetos manipulables, entre otros, en el trabajo matemático.

Maschietto y Trouche (2010) aborda el tema del LabMat, pero se centra en el uso de artefactos conocidos como máquinas matemáticas, además toma algunas definiciones de LabMat, que fueron tema de debate en el congreso de matemáticas (Maubeuge, France, 2006) las cuales se presentan a continuación:

- Laboratorio de Matemáticas como una sala donde los alumnos pueden estudiar matemáticas de una manera diferente en comparación con las aulas de matemáticas.

- Laboratorio de Matemáticas como una forma de organizar actividades matemáticas (grupos de trabajo, manipulación, juegos) fuera del aula (y a menudo fuera de la escuela) en contraste con las sesiones matemáticas; el contenido puede o no estar relacionado con el currículo matemático de clase.

En ambas definiciones se deduce que no necesariamente las actividades propuestas en el LabMat deben ser trabajadas en el aula de clases, además invitan a que se aborden las matemáticas de forma diferente a las usuales en sesiones matemáticas y estas no necesitan estar ligadas al plan de clases.

Por consiguiente, la utilización del laboratorio en el aprendizaje de las Matemáticas es una propuesta pedagógica que se ha desarrollado a lo largo del siglo XX (Maschietto y Trouche, 2010), de igual manera la definición de un LabMat, según Trouche (2010), para la cual se encuentran en la literatura múltiples descripciones de laboratorios, pues bien la complejidad se puede evidenciar desde dos puntos de vista: el primero que es un lugar específico, un espacio de experimentación aislado del currículo, y el segundo punto de vista expresa que es un conjunto de actividades organizadas, para la construcción de conceptos matemáticos profundos en el centro de las clases normales.

Ahora bien, esta propuesta de indagación aborda el LabMat como “estrategia pedagógica”, en el cual se movilizan actividades que conllevan aprendizajes más significativos y dinámicos para los estudiantes.

En síntesis, es importante la necesidad de buscar alternativas didácticas en las cuales se potencie el pensamiento matemático en los diversos niveles educativos. Desde esta mirada

emerge una propuesta que lleva a contemplar la actividad realizada en el aula, con la ayuda de otro tipo de estrategias, propiciando así que estos puedan establecer diversas estrategias que le conduzcan a resolver las actividades planteadas.

La propuesta del LabMat como una estrategia pedagógica facilita que los participantes puedan tener diferentes formas y procesos para la construcción de un concepto de una manera progresiva, debido a que el espacio brinda herramientas que permiten que los participantes controlen su propio aprendizaje.

2.5.1 Estructura del Laboratorio de Matemáticas

El LabMat nace de una estructura simple y funcional, en la que se presenta como base de su configuración un elemento, que se llamará *mesa*; en ella, se disponen de diferentes tipos de materiales (Fichas de trabajo, materiales manipulativos, documentos, software, equipos, elementos para estructurar una secuencia de clase, prototipos, etc.) para que los participantes enfrenten retos que se disponen en la temática de actuación de cada mesa. Sin embargo, hay problemas en los cuales es necesario utilizar dos o más mesas para poder llegar a una solución. La relación entre las mesas logra establecer lo que se denomina una *sección* del LabMat.

2.5.2 Laboratorio de Matemáticas de la IERV

El LabMat de la IERV conservará la idea base de la metodología del laboratorio de la Universidad del Valle (sede Meléndez y sede Norte del Cauca), es decir, su elemento principal serán las *mesas*, y en ella, se habilitarán los diferentes recursos entre los que se destacan las Fichas de trabajo, materiales manipulativos, documentos, software y juegos, para que los estudiantes enfrenten los retos y problemas que allí se presenten, de igual forma en cada una de

las mesas se dispondrá de un Manual donde se plantean las Actividades de Matemáticas a desarrollar y se indican los materiales correspondientes.

Se tiene como referencia, entre otras, a los Estándares Básicos de Competencia Matemáticas propuestos por el MEN (2006), en los cuales se enmarcan los conocimientos básicos que todo estudiante debe adquirir. Estos a su vez están distribuidos por pensamientos, los cuales direccionan la temática de actuación de cada mesa.

Por otra parte, el LabMat de la IERV, tiene una estructura de ficha y un soporte de la misma (**ver anexo 1**); además, tiene proyectado iniciar con cinco mesas, que estarán estructuradas de acuerdo con algunas relaciones que se presentan en los Pensamientos Matemáticos planteados por el MEN y dos mesas adicionales; en resumen la mesas estarán organizadas de la siguientes forma: (1) Pensamiento Espacial - Métrico, (2) Pensamiento Estocástico, (3) Pensamiento Numérico - Variacional, (4) Juegos Matemáticos, y finalmente, la mesa de (5) Nuevas Tecnologías. Todas ellas están coordinadas por un docente encargado del Laboratorio y un comité académico.

Es importante resaltar que para efectos de esta indagación se usó la mesa de trabajo de (3) pensamiento Numérico – Variacional, pues en esta mesa se diseñaron y se aplicaron las Fichas de trabajo, además destacar que la institución cuenta con el espacio físico del LabMat y que está en proceso de acondicionamiento para poner en uso oficial a mediados del año 2019.

CAPÍTULO III.

DESCRIPCIÓN METODOLÓGICA

Para el desarrollo de esta indagación se utilizó una metodología cualitativa, la cual recoge elementos de la Investigación Basada en el Diseño (en adelante, IBD) y de la Ingeniería Didáctica (en adelante, ID). Estas, permitieron estructurar la metodología de este trabajo, la cual se caracteriza por el diseño y rediseño de situaciones problemas, la implementación con sus respectivos análisis parciales, y finalmente un análisis general (retrospectivo) en el que se sintetizan los análisis parciales y las conclusiones de esta indagación.

Esta metodología se desarrolla en tres etapas: la primera tiene que ver con la planeación y diseño de las Fichas; la segunda, con la experimentación en el LabMat, y la última etapa, con los análisis y producción de la documentación. Se ha de destacar que estas etapas contribuyen a los resultados que se obtuvieron de las actividades matemáticas desarrolladas en el LabMat por los estudiantes.

En lo que sigue en el presente capítulo se describen aspectos relacionados con la estrategia metodológica, la cual consistió en tomar elementos de dos metodologías (IBD e ID) los cuales se ajustaron para configurar una estrategia metodológica propia de esta indagación, desarrollada en las tres etapas antes mencionadas.

En lo que tiene que ver con la estrategia de aplicación se contó con la participación de los estudiantes de dos cursos de grado sexto de la IERV, uno de la sede principal, a los cuales se les aplicó el conjunto de Fichas iniciales (X, Y, Z), luego de hacer unos primeros análisis, se

determinó hacer un rediseño a las fichas iniciales, denominadas X' , Y' y Z' , siendo estas aplicadas a los estudiantes de grado sexto de la sede San Bartolomé de las Casas.

De igual modo, se tuvo en cuenta los momentos que hacen parte de la actividad del LabMat, entre los que se destacan, en primera instancia, la exploración y experimentación con la actividad; en segundo momento los estudiantes descubren, crean relaciones y discuten ideas; el tercer momento es de resolución y planteamiento de conjeturas; en el cuarto momento socializan, evalúan y retroalimentan sus resultados.

Por otra parte, en cuanto a las condiciones de los diseños se tuvo en cuenta que las actividades presentadas estuvieran contextualizadas, dado que las situaciones que emergen del contexto sociocultural de los estudiantes, le dan significado y sentido a la actividad matemática (MEN, 1998). De igual forma, el diseño de las situaciones se permean de manera directa con las estructuras multiplicativas como Isomorfismo de medida, como elemento principal para buscar acercar a los estudiantes al pensamiento Variacional desde lo numérico.

En la última parte de este capítulo se presentan las particularidades de cada Ficha, en lo que tiene que ver con su diseño, aplicación, análisis parcial, rediseño, aplicación y análisis parcial.

3.1 CONFIGURACIÓN DE UNA ESTRATEGIA METODOLÓGICA

Teniendo en cuenta los objetivos de la indagación, se consideró necesario tomar aspectos de la IBD, debido a que esta se fundamenta según Bell (2004) en el diseño y exploración de todo tipo de propuestas educativas, en las que se considera el uso de diversos artefactos (ej. Software)

como el centro de esas propuestas, con las que se busca contribuir con los procesos de aprendizaje de los estudiantes.

Desde este punto de vista, el trabajo de indagación se fundamentó en la estrategia del LabMat, teniendo como foco los procesos de manipulación, de exploración y de trabajo cooperativo que los estudiantes pueden desarrollar al enfrentarse a situaciones problemas (Fichas de laboratorio), ya sea mediante un juego o un problema, en los cuales se movilizan objetos matemáticos con la intención de generar así mayor participación de los estudiantes, con miras a que estos sean los principales gestores de su aprendizaje de una forma dinámica y activa.

En relación con lo anterior Molina et al (2011) establecen que:

La IBD, se centra en analizar el aprendizaje en contexto mediante el diseño y estudio sistemático de formas particulares de aprendizaje, estrategias y herramientas de enseñanza, de una forma sensible a la naturaleza sistémica del aprendizaje, la enseñanza y la evaluación (p. 76).

De esta manera, los elementos que componen esta metodología (IBD) se ajusta a los propósitos de este trabajo de indagación, dado que en ella se establecen formas particulares de abordar el conocimiento matemático en la escuela, como también describe una conexión entre la teoría que se quiere presentar y las prácticas culturales de los estudiantes. De esta forma, se puede aproximar a los estudiantes al desarrollo del pensamiento matemático, debido a que encuentran un hilo conductor entre lo que observan en su cotidianidad y lo que la teoría les presenta.

De igual forma, autores como Cobb et al (2003), Molina et al (2011) y Molina (2007), expresan que la enseñanza se puede abordar desde las ciencias del diseño, ya que de esta manera

se podrían identificar o proponer diversas propuestas que sean apropiadas para el aprendizaje de los estudiantes. En este caso, el LabMat es un escenario propicio para el diseño de diversas situaciones, en las que la manipulación, la interacción y la experimentación con distintos elementos y situaciones (juegos, actividades modeladas del contexto) presentados en las Fichas del laboratorio, son un ambiente ideal para el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes.

Hay que señalar que el término “Diseño” hace referencia al diseño instructivo que se elabora, implementa y se somete a escrutinio de investigación (Confrey, 2006). Es decir, que lo que se diseña con fines educativos, debe ser puesto en escena con la finalidad de saber si cumple su propósito determinado, y de no ser así, debe ser sometido a mejoras.

En otras palabras, después de la presentación de un conjunto de situaciones dirigidas a un grupo de estudiantes con la finalidad de que reconozcan y se apropien de un objeto de conocimiento, se debe hacer una evaluación que gire en torno tanto del instrumento como de la forma como los sujetos lo abordan (Análisis previo), después de esto, se deben revisar si todas las variables abordadas en el diseño fueron claras para el estudiante, porque de lo contrario, se necesita rediseñar.

Ahora bien, la IBD se desarrolla a través de 3 fases, las cuales son: Fase 1 de planeación y diseño; Fase 2 de experimentación; y la Fase 3 del análisis retrospectivo. Por consiguiente, para el desarrollo de este trabajo de indagación se centra la atención en algunos aspectos de la Fase 1 (planeación y diseño), desde luego poniendo más énfasis en el diseño, también se toman elementos de la Fase 2 (experimentación) y la Fase 3 (análisis retrospectivo), debido a los objetivos del trabajo.

A la par con lo anterior, fue necesario tomar algunos planteamientos de la ID abordada desde la perspectiva de Michèle Artigue, debido a que esta estrategia metodológica se caracteriza por ser experimental, es decir, una de sus características principales radica en la puesta en escena de tareas (situaciones problemas) que favorezcan la actividad matemática, y aque entre otras cosas, centra su atención en el desarrollo de conocimientos.

La ID, surgida al inicio de la década de los ochenta en la didáctica de las matemáticas, tiene como eje la noción presentada por Artigue (1995), la cual se entiende como:

Una forma de trabajo equiparable con el trabajo del ingeniero, quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico, que lo obliga a trabajar con objetos mucho más complejos, que los objetos depurados de la ciencia, abordando con todos los medios disponibles, problemas de los que ciencia no quiere o no puede hacerse cargo (p.33).

Como metodología de investigación, la ID se desarrolla en cuatro etapas, las cuales son: el análisis preliminar, la Concepción y análisis a priori, la Experimentación y, el Análisis a posteriori y evaluación. De esta metodología se tomó lo concerniente a la experimentación, el análisis a posteriori y la evaluación de los resultados, ya que estos aportan elementos importantes a esta indagación.

En síntesis, se utilizaron elementos de ambas metodologías (ID e IBD), las cuales se entrelazaron y generaron herramientas para la configuración de la estrategia metodológica de esta indagación, desde este punto de vista se presentan organizadas en tres etapas las cuales se comparten a continuación:

Etapa 1. Planeación y diseño de las Fichas (tomado, IBD). En esta fase, se buscó identificar el problema y los objetivos de la intervención, ultimar el diseño de forma justificada, a partir de la información del contexto y las fuentes teóricas que se utilizaron, además de las metas que debieron alcanzar los estudiantes, teniendo en cuenta las posturas de Vergnaud (2000) de las estructuras multiplicativas y los niveles de algebrización propuestos por Godino et al, (2014), siendo estos un puente que conducen al desarrollo del pensamiento Variacional.

Etapa 2. Experimentación en el LabMat (tomando elementos de la IBD y de la ID). En esta etapa de la indagación se realizó la implementación de las actividades diseñadas, por medio del LabMat y además se realizó la recolección de los datos que dieron cuenta de los análisis de los diseños, que permitieron que se realizaran los respectivos ajustes antes, durante y después de cada implementación, con la finalidad de poder identificar la mayor cantidad de dificultades que presentaron los estudiantes al resolver la ficha; además se tomó la decisión de recoger la información de las observaciones durante las aplicaciones de las Fichas y el uso de otros elementos como la grabación de videos y grabaciones de voz.

Etapa 3. Análisis y la producción de la documentación (tomado, IBD e ID). Esta etapa se inició una vez terminada la implementación de las actividades diseñadas, y se basó en el conjunto de datos recogidos en la experimentación. El análisis, se fundamenta en dos fases, una primera fase relacionada con el análisis a cada ficha aplicada (análisis parcial); la segunda fase asociada al análisis general, el cual consiste en tomar los análisis parciales y filtrarlos por la rejilla de análisis, para poder categorizar las heurísticas de los estudiantes, haciendo uso de los niveles de algebrización.

Así pues, los análisis a los contenidos de los datos obtenidos en la implementación, buscan identificar las estrategias que emplearon los alumnos en la resolución de las actividades y así poder contrastar con los objetivos y metas de la etapa 1; la finalidad de esta etapa es identificar aspectos importantes que permitan dar respuesta al problema planteado, y con los cuales se pudieran proponer algunas recomendaciones a tener en cuenta, para próximos trabajos que tengan que ver con el desarrollo del pensamiento Variacional desde el LabMat.

3.2 ESTRATEGIA DE DISEÑO Y APLICACIÓN DE LAS FICHAS DE LABORATORIO

A partir del estudio de los procesos de resolución de las Fichas en el marco del LabMat, entre los que se encuentran los procedimientos de tipo escalar y/o funcional dentro de una noción de relación cuaternaria de la multiplicación (Vergnaud, 2000), se presentaron un grupo de Fichas del LabMat que están involucradas con las estructuras multiplicativas (Isomorfismos de medida), las cuales buscan potenciar el desarrollo del pensamiento Variacional en un grupo de estudiantes de sexto grado de la IERV.

En efecto, las Fichas tienen la intencionalidad de generar en los estudiantes ciertas competencias en lo referente a los cinco procesos generales de la actividad matemática, en especial los procesos asociados a la resolución de problemas, la comunicación y el razonamiento. Claro está que estas (Fichas) también favorecen la superación de algunas dificultades que puedan presentarse en el aula de clases a la hora de enfrentarse a situaciones relacionadas con lo multiplicativo.

Es preciso señalar que las Fichas del LabMat no están sujetas a una organización curricular, es decir, son independientes de las actividades dentro del aula de clases. Sin embargo,

es decisión del docente si las utiliza como apoyo para abordar casos que le implican al estudiante fortalecer su capacidad de razonamiento, considerando posibles situaciones de la vida cotidiana que permitan un mejor acercamiento a los objetos matemáticos tratados en clases. Cada ficha se desarrolla independientemente de las otras, aunque todas tienen el mismo propósito, el cual es desarrollar pensamiento matemático, en este caso pensamiento Variacional desde los procesos aritméticos, configurando así el objetivo de esta indagación.

En concordancia con lo dicho anteriormente, la NCTM (2000) expresa que para crear un aprendizaje significativo de las matemáticas se deben presentar actividades que permitan que los estudiantes exploren, modelen, hagan predicciones, argumenten, discutan y practiquen habilidades del cálculo. Lo expuesto por la NCTM se encuentra en armonía con la razón de ser del LabMat, dado que este posibilita que los elementos antes señalados sean puestos en escena por los estudiantes o participantes, generando así conocimientos o competencias matemáticas.

Es por esta razón que las actividades que se presentan buscan que los participantes, mediante la exploración de las Fichas del laboratorio, realicen operaciones de cálculo numérico, que favorezcan la identificación de regularidades o un patrón numérico que les permita reconocer las magnitudes que cambian, la forma en que cambian y aquellas que permanecen constantes. De esta forma pueden establecer conjeturas que den cuenta de la solución a la situación planteada, se espera que el estudiante a partir de casos particulares determine la validez de estas (conjeturas).

Un propósito general para todas las Fichas en este trabajo es que los estudiantes en el desarrollo de estas puedan encontrar regularidades, patrones numéricos, relaciones entre cantidades, y que utilicen la multiplicación como una relación cuaternaria (Isomorfismo de

medidas) de tal forma que se puedan evidenciar procedimientos de tipo escalar y/o funcional que los conduzcan a la utilización de diversos métodos para dar soluciones a las situaciones planteadas.

Desde este punto de vista es importante que los estudiantes propongan modelos que den cuenta de la variación y el cambio, para que este sea un camino al proceso de generalización, el cual les permita realizar inferencias o conjeturas acerca del comportamiento de dicha situación. Todo lo anterior con la intencionalidad de evidenciar algunos elementos característicos del pensamiento Variacional.

Las Fichas buscan dar cuenta de un acercamiento al pensamiento Variacional con base en el Isomorfismo de medidas, desde el LabMat este tipo de contexto permite que los estudiantes construyan pensamiento matemático, lo cual deja entrever que es un espacio importante para aprender matemáticas y puedan lograr conocimientos significativos en lo referente al pensamiento Variacional.

Para la aplicación de las Fichas diseñadas en el marco del Laboratorio de Matemáticas se hizo uso de seis sesiones extraescolares, las cuales tuvieron una duración aproximada de 90 minutos cada una. Cada sesión contaba con dos momentos, uno de exploración-experimentación, y otro de argumentación-socialización.

En el momento de exploración-experimentación, los estudiantes analizaban, discutían y luego establecían y ejecutaban algunas estrategias de solución. Luego de eso, se continuaba con el momento de argumentación-socialización, en el cual los estudiantes ante sus compañeros socializan y argumentan la forma en que abordaron cada situación presentada en las Fichas, lo

que permitió generar preguntas por parte de los docentes (investigadores), con el objetivo de rastrear o interpretar en cada proceso realizado por los estudiantes elementos característicos del pensamiento Variacional.

Es necesario especificar que las sesiones se desarrollaron en salones de clases que hacían las veces de LabMat, teniendo en cuenta que las situaciones presentadas en las Fichas se podían resolver de manera individual, pero, una de las fortalezas del LabMat es el trabajo cooperativo, por ende, las sesiones se desarrollaron en parejas, con la intención de generar intercambio de ideas y que constantemente se evaluaran los resultados obtenidos.

Cabe señalar que, en el marco del LabMat, los docentes (investigadores) no realizan ningún tipo de explicación en el desarrollo de las Fichas, los estudiantes son autónomos en el desarrollo de estas, tal como lo plantea Arce (2004).

De otro lado, para obtener el registro de cada sesión de trabajo, se utilizaron dos Smartphone (teléfonos inteligentes), los cuales se usaron para grabar y hacer registros fotográficos de cada aplicación de las Fichas. Igualmente, se recolectó la información de los registros escritos producidos por los estudiantes, con la finalidad de acceder a las diversas heurísticas usadas por los mismos y de esa forma, poder realizar un análisis detallado de cada uno de los procesos presentados en los registros escritos.

Hay que mencionar que en las tres primeras sesiones se trabajó con un grupo de 18 estudiantes del grado sexto de la sede principal, y las otras tres sesiones con un grupo de 20 estudiantes de sexto grado de la sede San Bartolomé.

Las sesiones desarrolladas, como se expuso en el párrafo anterior, hicieron de la aplicación una experiencia significativa, dado que permitieron validar la funcionalidad del rediseño de las Fichas, presentadas al grupo de la sede San Bartolomé, pues se pudo observar una variedad de heurísticas usadas por los estudiantes en el proceso de resolución de las Fichas del LabMat, dando paso a los análisis parciales de esta indagación.

A continuación, se presenta la primera versión de las Fichas que se aplicaron a los estudiantes del grado sexto de la IERV; se diseñaron tres Fichas (X, Y, Z) y además se hizo el rediseño de las tres fichas ya mencionadas, las cuales son la versión mejorada de dichas fichas. Estas están enmarcadas en un contexto de compra y venta de productos de la región pacífica: en la primera se trabaja con el precio del Chontaduro, en su presentación más usada en el mercado Bonaverense (unidad, coca y racimo). En la segunda se trabaja con el precio de un vaso de jugo de Chontaduro vendido en mililitros, y la última ficha se encuentra estructurada con productos variados entre los que se destacan algunos en su presentación por coca² (Naidí y Pepepán), y otros por unidad (Carambolo, Guama, Poma Rosa, Caimito, Chontaduro, Borojó).

3.3 FICHA X (CHONTA-COSTOS)

En este apartado se presenta la ficha X (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.), y su respectivo rediseño (X') con sus respectivos análisis parciales de la aplicación de estas. Esto con la intención de observar los avances de los estudiantes en la resolución de cada una de las fichas ya mencionadas.

² Hace referencia a un recipiente plástico que se usa como unidad de medida de los productos.

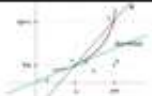
CODIGO: 1-CHONTA-01	CHONTA-COSTOS	
El Chontaduro es quizá el fruto más importante del sistema agrícola del litoral pacífico. Es una especie fruta muy apetecida en el distrito de Buenaventura; y de manera muy particular su venta se realiza en diferentes presentaciones: por unidad, por bolsa, por coca y por racimo, es de resaltar que estas presentaciones son de acuerdo al tamaño de un Chontaduro promedio, (la coca generalmente es del mismo tamaño) El señor Angulo al observar un racimo de Chontaduro dijo: <i>aquí hay 5 cocas de Chontaduro, y en una coca hay 10 Chontaduros.</i> • Si un Chontaduro cuesta \$ 600 pesos. ¿Cuánto cuesta una coca de Chontaduros? ¿Cómo representarías esta situación en una tabla? ¿De qué otra manera puede representar la primera situación? • ¿Cuánto cuesta un racimo de Chontaduro?		
ELABORADA POR: - DANIEL GIL - JAROL VALENCIA		Datos tomados de la galería de pueblo nuevo del distrito de buenaventura.

Ilustración 6. Ficha X (CHONTA-COSTOS)

Esta ficha inicia con una reseña del Chontaduro, el cual es uno de los frutos más importantes de la costa pacífica, se destacan las diferentes presentaciones en que se realiza su venta (individual, bolsas, cocas y racimos).

Por otra parte, se hace la descripción de la actividad, se plantean dos preguntas que tienen como finalidad evidenciar qué tipo de procedimientos (aditivo, multiplicativo) son utilizados por los estudiantes para resolverlas; igualmente se les pide a los participantes que organicen la situación de tal forma que ellos puedan establecer relaciones entre los dos espacios de medida

(cantidad /precios), buscando encontrar las equivalencias entre las cantidades y a la vez puedan resolver de diversas maneras las situaciones planteadas.

Dicho lo anterior, a continuación, se presenta el análisis previo de la ficha x.

3.3.1 Análisis Parcial Ficha X (Chonta-Costos)

Esta ficha fue aplicada a 18 estudiantes de la sede principal, con un tiempo aproximado de 60 minutos, y el trabajo fue en parejas. En ella se identificaron algunos aspectos que son relevantes para un primer análisis de los procedimientos usados por los estudiantes. De tal forma que se pueda determinar si hubo o no un acercamiento al pensamiento Variacional. Esto, con la finalidad de verificar si hay la necesidad de realizar un rediseño a la ficha bajo estudio.

Ahora, se describen algunos de los procesos realizados por los estudiantes, los cuales se vinculan con suma iterada, análisis funcional (multiplicación como función) y representaciones gráficas. Siendo estos procesos los que se presentaron con mayor recurrencia en la solución de las fichas. Aunque, se centra la atención en aquellos procedimientos que se vinculan o permiten un acercamiento al pensamiento Variacional, por ejemplo, el análisis funcional y las representaciones gráficas, en lo referente a los procedimientos relacionados con la suma iterada, se presentan algunos casos tal como se muestra a continuación.

Para dar respuesta del valor de la coca de Chontaduro, la mayoría de los estudiantes efectuaron una suma iterada, tomando como referencia el precio de la unidad del Chontaduro; es importante tener en cuenta que esta ficha tenía solamente la información del enunciado y no otro tipo de ayuda o elemento complementario para su solución, tal como se muestra (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.).

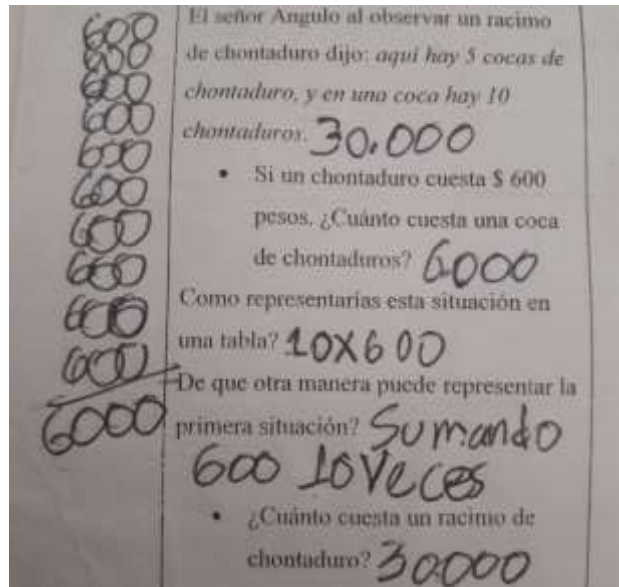


Ilustración 7. Sumas Iteradas

Es necesario decir, que el uso exclusivo de la suma iterada para dar soluciones a situaciones que preferiblemente era mejor hacer uso de la multiplicación, no permite evidenciar acercamientos al pensamiento Variacional. Por otra parte, en lo que refiere al análisis funcional se observó lo siguiente:

Algunos estudiantes hicieron uso del análisis funcional, ya que en su proceder se pudo identificar que estos establecieron una relación de equivalencia entre cantidades, y luego de haber reconocido el valor correspondiente a la unidad (precio de un Chontaduro: \$600), este es usado para hallar el precio de una coca y un racimo de Chontaduro aplicando la multiplicación como función. Lo anterior se ilustra de la siguiente forma:

1 coca ---- 10 Chontaduros

1 racimo ---- 5 cocas ----- 50 Chontaduros

Establecidas estas equivalencias, multiplican la cantidad de Chontaduros por el valor correspondiente a la unidad (\$600), el cual se denomina constante de proporcionalidad (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.).

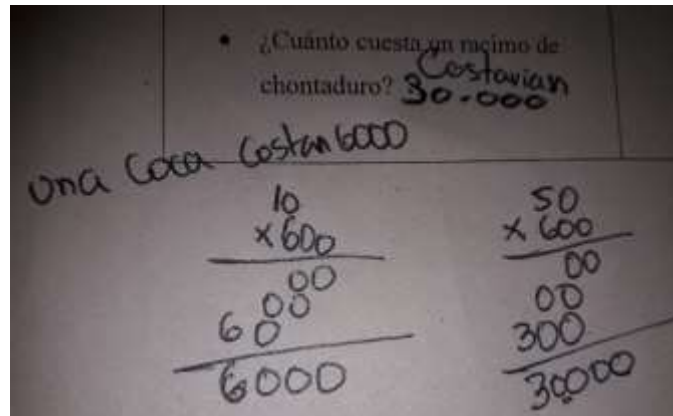


Ilustración 8. Constante de proporcionalidad

Se debe agregar que este tipo de procedimientos dejan ver rasgos característicos del pensamiento Variacional, pero solo unos pocos estudiantes hacen uso de este.

Ahora bien, referente a las representaciones gráficas, un pequeño número de estudiantes representaron en tablas y diagramas de barras la situación planteada. Sin embargo, las tablas fue el tipo de representación que más se ajustó a ellos, pues por medio de estas lograron determinar el precio de un racimo de Chontaduro (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.).

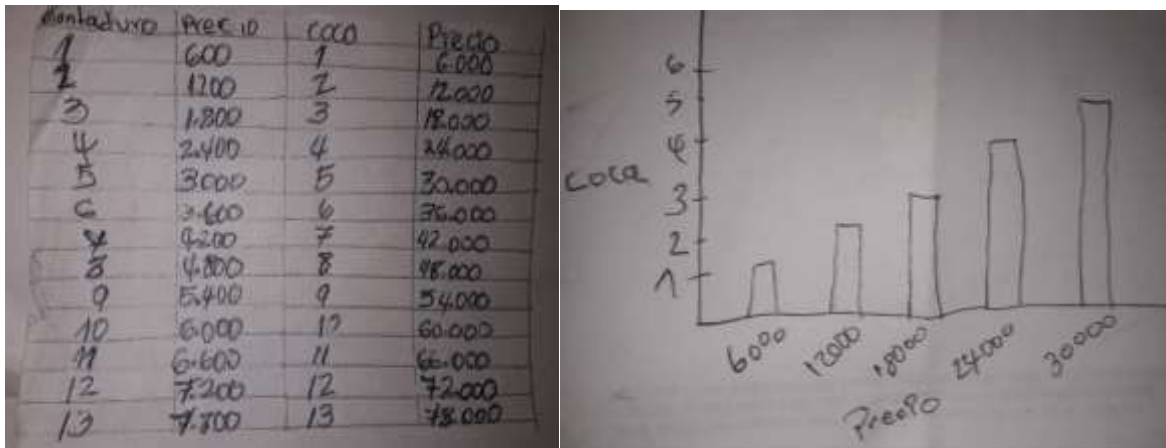


Ilustración 9. Diferentes tipos de representaciones para establecer relaciones entre cantidades

Conviene subrayar, que el uso de este tipo de representaciones da muestra de acercamientos al pensamiento Variacional, debido a que pone de manifiesto algunas formas particulares de representar una función, pues se establecen relaciones biunívocas entre las cantidades que se presentan en dichos gráficos.

En síntesis, se pudo evidenciar en la pregunta que indicaba sobre cómo se podía representar la situación en una tabla, permitió que los estudiantes usaran algunos tipos de representación (tablas y gráficos) (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.), que proporcionan algunos indicios de qué forma los estudiantes se podían acercar a la variación y el cambio de una cantidad de magnitud; de igual manera se pudo identificar que los estudiantes tenían en cuenta los espacios de medida para determinar cómo cambian las cantidades de un mismo espacio con respecto del otro.

Como resultado de lo anterior, se rediseñó la ficha bajo estudio, debido a que se podían haber obtenido mejores resultados, pues frente a los procedimientos evidenciados la mayoría de los estudiantes hacen uso casi que exclusivo de sumas iteradas, razón por la que es necesario realizar algunos ajustes, que logren alejar a los estudiantes de esta postura.

3.3.2 Rediseño Ficha X

A continuación, se presenta el rediseño de la ficha X, denominada X prima (X'), teniendo en cuenta elementos sobresalientes del diseño inicial (contexto de compraventa, preguntas enfocadas a la búsqueda de la unidad). Así mismo, se consideró lo curricular desde el MEN y lo teórico, relacionado con el Isomorfismo de medida y los elementos asociados al mismo desde los planteamientos de Vergnaud (1983; 2000). Esto con la intención de obtener unos mejores resultados en la aplicación de las fichas.

Desde este punto de vista, es necesario describir los elementos sobresalientes que fueron tenidos en cuenta en el diseño de las primeras fichas, los cuales permitieron un acercamiento a elementos característicos del pensamiento Variacional.

En primer lugar, se tiene presente que las situaciones deben ser contextualizadas y se considera el contexto de compra y venta, debido a que este tipo de contexto hace parte de la cotidianidad de los estudiantes, lo que facilita la comprensión y aprendizaje de los objetos o conceptos matemáticos bajo estudio, ya que estos le otorgan sentido y significado a la actividad matemática, tal como lo expresa el MEN (2006).

Otro de los elementos importantes que se encontraron en los diseños iniciales fue el tipo de pregunta, las cuales iban enfocadas a la búsqueda del valor correspondiente a la unidad. De manera, que se tuvieron en cuenta aquellas preguntas que les permitieron a los estudiantes identificar el valor equivalente a la unidad (ver página 38; **Error! No se encuentra el origen de la referencia.**), siendo éste esencial en las situaciones asociadas al Isomorfismo de medida tal como lo expresa Vergnaud (2000). Identificado el valor de la unidad, los estudiantes lograron

establecer una correspondencia biunívoca entre un espacio de medida y otro. Lo que, a su vez, se traduciría en una relación de dependencia entre cantidades de magnitud presentadas.

Por ende, se hace necesario en toda situación de Isomorfismo de medida, la identificación del valor que representa la unidad, puesto que este permite configurar la multiplicación como una relación cuaternaria, y además es imprescindible en este tipo de estructura, tal como lo manifiesta Vergnaud (2000).

De igual forma, como elemento nuevo, se hizo uso de tablas, en las cuales se establecieron relación funcional entre dos espacios de medida. Esto con la intención de que los estudiantes realizaran procedimientos asociados al análisis escalar y/o funcional.

Vale resaltar que el propósito de la ficha X' , es el mismo propósito de la ficha X , donde se espera que los estudiantes en el desarrollo de esta, puedan encontrar regularidades, patrones numéricos, relaciones entre cantidades, que utilicen la multiplicación como una relación cuaternaria (Isomorfismo de medidas), se logre evidenciar procedimientos de tipo escalar y/o funcional que los conduzcan a la utilización de diversos métodos que les permitan dar soluciones a las situaciones planteadas.

Además, desde este punto de vista es importante que los estudiantes propongan modelos que den cuenta de la variación y el cambio, para que este sea un camino al proceso de generalización, el cual les permita realizar inferencias o conjeturas acerca del comportamiento de dicha situación. Todo lo anterior, con la intencionalidad de evidenciar desde lo numérico algunos elementos característicos del pensamiento Variacional.

3.3.3 Ficha X' (Chonta-Costo)

En seguida se presenta el rediseño de la Ficha X, la cual lleva por nombre X' (equis prima), en la que se expondrán los elementos que se consideraron necesarios para alcanzar los resultados esperados (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.).

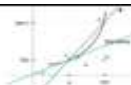
CODIGO: 1-CHONTA-02	CHONTA-COSTOS																															
El Chontaduro es quizá el fruto más importante del sistema agrícola del litoral pacífico. Es una especie fruta muy apetecida en el distrito de Buenaventura; y de manera muy particular su venta se realiza en diferentes presentaciones: por unidad, por bolsa, por coca y por racimo, es de resaltar que estas presentaciones son de acuerdo al tamaño de un Chontaduro promedio, (la coca generalmente es del mismo tamaño) Si un Chontaduro cuesta \$ 600 pesos. Completa la siguiente tabla <table border="1"> <thead> <tr> <th>Chontaduros</th> <th>precio</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td>1800</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>2400</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>3000</td> </tr> <tr> <td></td> <td>4200</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>4800</td> </tr> <tr> <td></td> <td>6000</td> </tr> </tbody> </table> ¿Cómo puedes saber cuántos Chontaduros se pueden comprar con 3600 pesos? El señor Ángulo al observar un racimo de Chontaduro dijo: <i>aquí hay 5 cocas de Chontaduro, y en una coca hay 9 Chontaduros.</i> Ahora completa la siguiente tabla <table border="1"> <thead> <tr> <th>cocas</th> <th>Chontaduros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td></td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>18</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>27</td> </tr> <tr> <td></td> <td>36</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td></td> </tr> <tr> <td>8</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>90</td> </tr> </tbody> </table> ¿Cómo puedes saber cuántos Chontaduros hay en 7 cocas de Chontaduros?		Chontaduros	precio		1800	4	2400	5	3000		4200	8	4800		6000	cocas	Chontaduros		5	2	18	3	27		36	6		8			90	
Chontaduros	precio																															
	1800																															
4	2400																															
5	3000																															
	4200																															
8	4800																															
	6000																															
cocas	Chontaduros																															
	5																															
2	18																															
3	27																															
	36																															
6																																
8																																
	90																															
ELABORADA POR: - DANIEL GIL		Datos tomados de la galería de pueblo nuevo del distrito de buenaventura.																														

Ilustración 10. Ficha X' (CHONTA-COSTOS)

Esta ficha conserva el mismo enunciado de la ficha inicial (X), en su estructura después de la presentación del enunciado se hace la descripción de la actividad, y se tienen en cuenta elementos como la incorporación de dos tablas, las cuales tienen como finalidad evidenciar qué

tipo de procedimiento aditivo o multiplicativo es utilizado por los estudiantes para completar las tablas.

De igual forma, después de completar cada tabla se establece una pregunta relacionada con datos que no están de manera explícita en ella, buscando verificar si hacen uso de los datos de la tabla o en efecto poder divisar la multiplicación como Isomorfismo de medidas, además de poder identificar si dichos procedimientos permiten evidenciar acercamientos característicos del pensamiento Variacional.

3.3.4 Análisis Parcial Ficha X' (Chonta-Costos)

Se realizó el rediseño de la ficha X, la cual se denominó X'. En esta, se tuvo en cuenta los aspectos que se identificaron en el primer diseño, y a la vez se anexaron elementos que se consideraron significativos para este rediseño, buscando evidenciar cómo los estudiantes de grado sexto de la sede Bartolomé de las Casas por medio de una situación contextualizada se acercan a procesos de variación y cambio.

Esta ficha se les aplicó a 18 estudiantes de la sede antes mencionada, con un tiempo aproximado de 80 minutos, y el trabajo fue en parejas. De esta se pudo notar, en este primer análisis los distintos procedimientos a los que recurrieron los estudiantes para dar solución a la ficha X'. Tales procedimientos fueron: identificación del valor de la unidad como operador funcional; uso implícito de una de las propiedades de la linealidad; relaciones funcionales y sumas iteradas. Pero, se hará énfasis en los primeros tres procedimientos, ya que estos dejan ver un acercamiento al pensamiento Variacional

En el caso de identificación del valor de la unidad como operador funcional, el siguiente diálogo (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.) muestra cómo los estudiantes a través de los análisis o razonamientos de las tablas, les conduce a determinar el valor constante (constante de proporcionalidad), el cual, es el valor correspondiente a la unidad: Estudiante (Ee); Profesor (P)

0:02	P:	¿Aquí qué número va?
0:04	E:	Aquí el siete, profe
0:05	P:	¿por qué?
0:06	E:	¿Por qué?, porque profe, 7 por 6, eh 600 por 7 da 4.200.
0:21	P:	Ahora ¿y acá qué número va?
0:28	E:	El diez, profe
0:30	P:	¿Por qué?
0:32	E:	Porqué 600 por 10 da 6.000.

Ilustración 11. Diálogo 1. Fragmento de video 2018_03_06

Las respuestas que proporciona el estudiante, en las entradas (0:06) y (0:32), permiten considerar que este logra identificar dentro de la tabla un valor de referencia, y halla las cantidades que se encuentran en el espacio de medida E1 (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.), por medio de la utilización de la multiplicación como función; por lo que utiliza el valor correspondiente a la unidad como ese valor referencia (constante de proporcionalidad) el cual configura la función de forma implícita $f(x) = 600x$, en esta función la “x” es el valor que ellos rempazan, para hallar su valor correspondiente por medio de la multiplicación.

E1	E2
chontaduros	precio
3	1800
4	2400
5	3000
7	4200
8	4800
10	6000

¿Cómo puedes saber a cuantos chontaduros se puede comprar con 3600 pesos? 6 Chontaduro

Ilustración 12. Uso implícito de la multiplicación como función

Hay que resaltar, que la forma de razonar y argumentar de los estudiantes hace evidente el uso de elementos asociados al pensamiento Variacional. Siendo este un avance significativo en relación con la aplicación de la ficha inicial (X)

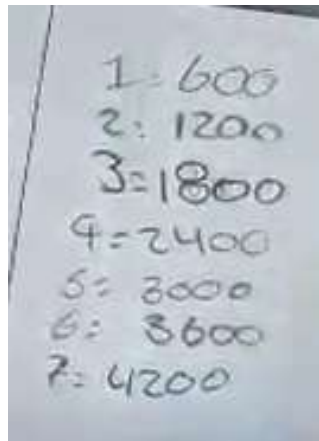
Por otra parte, lo que respecta al uso implícito de una de las propiedades de la linealidad (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.), sobresale que algunos estudiantes al resolver las preguntas con información que no están expresados de forma directa en la tabla, lograron establecer cierta generalidad, dado que hacían uso de una de las propiedades de la linealidad ($f(a1 + a2) = f(a1) + f(a2)$), lo que les conducía a establecer relaciones de tipo escalar y funcional entre los dos espacios de medidas presentados en la tabla.

Cant	Precio
2	1200
3	1800
5	3000
7	4200
8	4800
10	6000
12	7200
20	12000
22	13200
25	15000

Ilustración 13. Uso implícito de una de las propiedades de la linealidad

Ahora bien, en los procesos vinculados con las relaciones funcionales se pudo constatar que algunos de los estudiantes establecen relaciones entre cantidades, debido a que relacionan un espacio de medida con el valor correspondiente del otro; es decir, relacionan la cantidad de Chontaduros con el precio concordante a dicha cantidad, esto lo realizan teniendo en cuenta un patrón numérico. Este patrón numérico (aditivo) después de ser identificado, fue puesto a prueba, mediante la multiplicación o una suma iterada, siendo esta última la más usada por los

estudiantes, es decir, se tomaba la cantidad de Chontaduros y se multiplicaba por el correspondiente patrón numérico (precio de la unidad: \$600), o se sumaba tantas veces el patrón numérico como cantidad de Chontaduros hubiese $600 + 600 + \dots + n - veces$. (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.).



1	= 600
2	= 1200
3	= 1800
4	= 2400
5	= 3000
6	= 3600
7	= 4200

Ilustración 14. Relación entre cantidades

Entre los elementos que determinaron esta actividad se destacaron que el emplear tablas permitió que los estudiantes realizarán comparaciones teniendo en cuenta los valores de uno de los espacios de medida con respecto del otro (de cómo cambia y si este aumenta qué pasa con el otro), para así poder identificar regularidades en los dos espacios. Por ejemplo, si aumenta la cantidad de Chontaduro aumenta su precio, o si disminuye la cantidad de Chontaduro disminuye el precio a pagar.

Además, lograron realizar procesos similares a los que se dan en la proporcionalidad directa. De igual forma, lograron identificar la cantidad constante, la cual fue encontrada por medio del precio equivalente a la unidad del producto. Lo antes presentado permite evidenciar que hay un acercamiento significativo al pensamiento Variacional, el cual es el objetivo principal de esta indagación. Es importante mencionar que estos análisis iniciales se retoman, junto con los siguientes, en el próximo capítulo.

3.4 FICHA Y (PLASTI-VASOS)

En este apartado se expondrán los elementos que fueron tenidos en cuenta para desarrollar la ficha Y (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.), teniendo en cuenta que su componente fuerte es el uso de tablas. Además, se presenta el análisis parcial de su implementación y el respectivo rediseño, en el que dicha implementación y análisis, tuvieron lugar; finalmente se presenta el análisis de la implementación de este rediseño.

CODIGO: 1-PLAST-01	PLASTI-VASOS																																						
Juan se dirige a Plásticos del Pacífico a preguntar por unos vasos plásticos para vender jugo de Borojó en su escuela. El vendedor le expresa que tiene vasos de diferentes tamaños: 1 oz, 2 oz, 5 oz, 8 oz, 12 oz, 16 oz, además le aclara que en un vaso de 1 oz caben 30 ml de líquido. Para eso decide realizar la siguiente tabla, ayúdale a completarla <table border="1" data-bbox="305 464 657 684"> <thead> <tr> <th>oz</th> <th>Mililitros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>30</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> ¿Cómo se puede saber cuánto jugo de Borojó caben en un vaso de 10 oz? Completa la siguiente tabla, cual relaciona la cantidad de vasos de jugo de Borojó con el precio <table border="1" data-bbox="440 829 760 1014"> <thead> <tr> <th>vasos</th> <th>precios</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>800</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1600</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td></td> </tr> <tr> <td>8</td> <td></td> </tr> <tr> <td>10</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> ¿Cuánto vale un vaso de jugo de Borojó? En la siguiente tabla se relaciona la cantidad de vasos de limonada con el precio por vaso, completa y responde: <table border="1" data-bbox="430 1134 773 1318"> <thead> <tr> <th>vasos</th> <th>precios</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>1200</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>3000</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td></td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>4800</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td></td> </tr> </tbody> </table> Si tengo 7200 ¿cuántos vasos de limonada puedo comprar?	oz	Mililitros	1	30	2		3		4		vasos	precios	1	800	2	1600	3		5		8		10		vasos	precios	2	1200	3		5	3000	7		8	4800	10		
oz	Mililitros																																						
1	30																																						
2																																							
3																																							
4																																							
vasos	precios																																						
1	800																																						
2	1600																																						
3																																							
5																																							
8																																							
10																																							
vasos	precios																																						
2	1200																																						
3																																							
5	3000																																						
7																																							
8	4800																																						
10																																							
ELABORADA POR: - DANIEL GIL - JAROL VALENCIA	Datos tomados de la galería de pueblo nuevo del distrito de buenaventura.																																						

Ilustración 15. Ficha Y (PLASTI-VASOS)

En esta se presenta una problemática en la que Juan tiene que buscar un vaso para vender jugo de Borojó y se encuentra con “la sorpresa” de que los vasos vienen de diferentes tamaños, y por lo tanto diferente capacidad, siendo su unidad de medida la onza. Así que con esta situación

tiene que encontrar la manera en la que el vaso que compre sea el adecuado para depositar las cantidades de jugo que se necesite.

Para ello, se presentan tres tablas en las cuales se registran dos espacios de medida en cada una; en la primera se registran los datos sobre el volumen de los vasos, que viene dado por onzas (1 oz, 2 oz, 5 oz, 8 oz, 12 oz, 16 oz), y en el otro espacio de medida aparecerá únicamente la cantidad correspondiente de magnitud de una onza en mililitros (ml) aproximadamente.

En la segunda tabla, en uno de los espacios de medida se presenta la cantidad de vasos de jugo de Borojó y en el otro el precio de cada vaso (cantidad/precio); cabe señalar que se proporcionan algunos datos en la tabla, entre los que se destacan la unidad, su precio equivalente y el precio correspondiente a dos vasos. Luego se dejan sin llenar celdas de la tabla correspondientes a los precios de la cantidad de vasos (3, 5, 8 y 10).

La tercera tabla se relaciona la cantidad de limonada por vasos y su precio. Pero, no se registra en ella el precio de un vaso de limonada, con la intencionalidad que los estudiantes encuentren dicha información (ver página 38) y de esta manera poder evidenciar qué procedimientos usan para hallar el valor de la unidad; al igual que las tablas anteriores se dejarán celdas sin llenar en la columna de precios.

Además, una vez se complete la tabla, se espera que los participantes respondan algunas preguntas como: ¿qué procedimiento utilizaste para llenar la tabla?, ¿qué pudiste observar al momento de llenar la tabla?, entre otras, con las que se esperaba deducir las estrategias o métodos que permitieron a los estudiantes llegar a los resultados de la tabla.

Avanzando en este razonamiento, después de presentar las actividades que constituyen la ficha Y, se expondrá a continuación algunos de los procedimientos utilizados con mayor frecuencia por los estudiantes en la resolución de la ficha en cuestión.

3.4.1 Análisis Parcial Ficha Y (Vasos)

Esta ficha fue aplicada a 18 estudiantes de la sede principal, en un tiempo aproximado de 75 minutos, y el trabajo fue en parejas.

En relación con los resultados obtenidos, se esperaba que los estudiantes realizarán procesos vinculados con los elementos teóricos, tales como análisis vertical o escalar y el análisis horizontal o funcional, los cuales se encuentren ligados a las estructuras multiplicativas en el caso del Isomorfismo de medida propuesto por Vergnaud (2000). De igual forma, se esperaba que los estudiantes identificaran regularidades que les permitan determinar un valor constante o un patrón numérico el cual conduzca a establecer generalidades.

La información de la ficha Y (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.) fue organizada en tablas con la intención de que los estudiantes hagan uso de los procedimientos antes enunciados (análisis escalar y funcional), de manera que esta información así presentada permitiese rastrear con mayor facilidad estos tipos de procedimientos.

Enseguida se describirán brevemente los procedimientos generados por los estudiantes al resolver esta Ficha. Los procedimientos que con mayor frecuencia fueron usados por los estudiantes en la solución de la ficha Y, giraron en torno al análisis funcional (multiplicación como función), identificación de regularidades numéricas y al uso implícito de una de las propiedades de la linealidad ($f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$).

En lo relacionado con el análisis funcional, algunos estudiantes lograron identificar regularidades y esto les permitió que por medio del precio de la unidad (800 por vaso) o los mililitros correspondientes a 1 oz (30ml) (*¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.*), definir que haciendo uso de las tablas de multiplicar encontraban las cantidades faltantes de la tabla.

Además, este mismo procedimiento permitió identificar que los estudiantes utilizaron la multiplicación como función, debido a que la función para hallar el precio por vasos estaba dado por $f(x) = 800x$, y para las onzas por mililitro se expresa como $f(x) = 30x$, en las cuales los estudiantes, sin hacer uso de las expresiones simbólicas, identifican las constantes en cada tabla.

Vaso	Precio
1	800
2	1600
3	2400
5	
8	
10	

Ilustración 16. Multiplicación como función

Ahora, el siguiente episodio (*¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.*) entre profesor (P) y dos estudiantes (E1a y E2b), ilustra la situación enunciada en los párrafos anteriores.

4:19	P:	¿cómo llenaron esta tabla?
4:20	E1a:	Se queda pensando
4:23	P:	¿Qué están haciendo?
4:24	E1a:	Profe como aquí son 30, por 2 serian 60, una por dos es dos, entonces pusimos 60 y para el tres ponemos 90.
4:46	P:	¿Por qué 90 va con el 3?
4:48	E1a:	Porque una por tres es tres
4:50	E2b:	Profe 3 veces 30 da 90.
5:00	E1a:	Una por cuatro es cuatro y entonces el 4 va con 120, porque 30 da 1, 60 da 2, 90 da 3, entonces 120 con 4

Ilustración 17. Diálogo 2. Fragmento tomado del archivo de video 2018_02_01_11

El profesor quiere indagar sobre la forma que los estudiantes llenaron la tabla (4:19), para lo que el estudiante inicia realizando una relación entre las cantidades, estableciendo que si para uno es treinta para dos son sesenta (4:24), en este mismo momento el estudiante intenta establecer un análisis de tipo escalar, pues expresa que: “*uno por dos es dos, entonces pusimos sesenta*”. El estudiante ejecuta este procedimiento en un mismo espacio de medida, tomando el dos como operador escalar, esto lo intenta replicar en el otro espacio, pero aún tiene dudas de su proceder; es así como la conversación suscitada entre las entradas (4:46) y (4:50), muestra que el estudiante ya tiene unos acercamientos fuertes al análisis escalar debido a que insiste en realizar operaciones en un mismo espacio de medida -en este caso entre la unidad y la cantidad de onzas- aunque no es tan claro cuando lo realiza en el espacio de medida correspondiente a los mililitros/onzas.

De igual modo, se logra observar en la entrada (5:00) que el estudiante identifica y describe una regularidad, sin embargo, no reconoce el patrón que la constituye.

Por otra parte, en algunos casos se dio la multiplicación como función, pero solo como operador multiplicativo (el valor unitario) (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.); no obstante, se esperaba que hicieran uso de la división, la cual permitiría encontrar el valor correspondiente a la unidad lo cual facilita el cálculo de las cantidades faltantes en la tabla.

Ahora en lo que tiene que ver con el uso implícito de una de las propiedades de la linealidad, pocos estudiantes identificaron las cantidades que la situación solicitaba, relacionando los valores del espacio de medida E1 con los valores del espacio E2, esto debido a la representación de la información en tablas.

Las tablas permitieron que los estudiantes realizaran procedimientos vinculados con la suma para encontrar las cantidades que hacían falta en la tabla. Para este proceso, toman siempre como referencia el precio de la unidad, la cual es la cantidad que repiten de acuerdo con la cantidad de vasos que se fueran a comprar, o teniendo en cuenta la cantidad de mililitros que caben en cada presentación de los vasos medidos en onzas.

5:14	P:	¿cómo llenaron la tabla?
5:17	Ea:	Profe aquí para el 1 son 800, entonces para el 2 son 1600, y para el 3 es 2400.
5:23	P:	¿Por qué 2400?
5:26	Ea:	porque 1×3 es 3, bueno no mejor también porque a 1600 le sumamos 800 y da 2400. En la que sigue profe tenemos que nos da 4000 porque si a 2400 le sumamos 1600.
5:47	P:	¿Por qué le suma 1600?
5:50	Ea:	Porque se suma 2 veces 800
6:03	P:	¿Por qué se suma 2 veces 800?
6:07	Ea:	profe porque del 3 coge y se salta al 5, entonces son 2, entonces hay que sumar 2 veces 800 más.

Ilustración 18. Diálogo 3. Fragmento tomado del archivo de video 2018_02_01_11

En este fragmento (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.) el profesor quiere averiguar cómo los estudiantes llenaron la segunda tabla de la Ficha (5:14), para lo que el estudiante inicia realizando una relación entre las cantidades, estableciendo que si para uno es ochocientos, para dos son mil seiscientos y para tres seria dos mil cuatrocientos (5:17), en ese instante se evidencia cómo el estudiante intenta establecer una relación uno a uno, pues relaciona la cantidad de vasos con su precio correspondiente; lo interesante es ver cuando se le pide una explicación de sobre cómo realiza esa relación para tres vasos (5:23), él hace un esfuerzo por

explicarlo con una multiplicación, pero lo que realiza es un procedimiento aditivo, estableciendo que por cada vaso se debe sumar ochocientos (5:23), además para encontrar el precio de cinco vasos, como conoce el precio de tres, identifica que son dos vasos más, por lo tanto requiere sumar dos veces ochocientos (6:07). Esto se puede representar o expresar de la siguiente manera,

$$f(3 + 2) = f(3) + f(2) = 2400 + 1600$$

$$f(5) = 4000$$

Se debe mencionar, que hubo un avance en algunos estudiantes concerniente al pensamiento Variacional, pero, se hace necesario realizar un rediseño de esta Ficha pues aún hay estudiantes que persisten en el uso de la suma iterada como único procedimiento para resolver las situaciones presentadas en las Fichas.

Lo anterior permite concluir que no se cumplieron con todos los objetivos proyectados para dicha actividad y es necesario realizar algunos ajustes que permitan alcanzar avances significativos en el acercamiento al desarrollo del pensamiento Variacional.

3.4.2 Rediseño Ficha Y

En adelante se presenta el rediseño de la Ficha Y, que será nombrada como Y prima (Y'), teniendo en cuenta elementos sobresalientes del diseño antes presentado (Ficha Y) (uso de tablas, contexto de compraventa, preguntas enfocadas a la búsqueda de la unidad). Así mismo, se consideró lo curricular desde el MEN, y lo teórico relacionado con el Isomorfismo de medida y los elementos asociados al mismo desde los planteamientos de Vergnaud (1983, 2000). Esto con la intención de obtener unos mejores resultados en la aplicación de la Ficha Y'.

Desde este punto de vista, es necesario describir los elementos relevantes que fueron tenidos en cuenta en el diseño de la Ficha Y, los cuales permitieron un acercamiento a elementos característicos del pensamiento Variacional.

En primer lugar, es pertinente mencionar que el uso de gráficas cartesianas representa un componente importante en situaciones en las cuales se establece una relación uno a uno entre espacios de medidas diferentes, de tal forma que permite observar una relación funcional entre un espacio de medida E_1 y el espacio de medida E_2 . Al identificar este tipo de relaciones dan cuenta de características del pensamiento Variacional, debido que permite reconocer el cambio y la variación en los espacios de medida.

En segundo lugar, se tiene que las situaciones deben ser contextualizadas y se considera el contexto de compra y venta, debido a que este tipo de contexto hace parte de la cotidianidad de los estudiantes, lo que facilita la comprensión y resolución de las actividades matemáticas que se presentaron las cuales tenían como propósito desarrollar pensamiento Variacional. Ya que este pensamiento contribuye a otorgar sentido y significado a la actividad matemática, tal como lo expresa el MEN (2006).

Otro de los elementos importantes que se encontraron en el diseño inicial fue el tipo de preguntas, la cual iban enfocadas a la búsqueda del valor correspondiente a la unidad. De manera que se tuvieron en cuenta aquellas preguntas que les permitieron a los estudiantes identificar el valor equivalente a la unidad, siendo este esencial en las situaciones asociadas al Isomorfismo de medida, tal como lo expresa Vergnaud (2000). Al identificar el valor de la unidad, los estudiantes lograron establecer una correspondencia biunívoca entre un espacio de medida y otro, lo que a su vez se traducía en una relación de dependencia entre cantidades de magnitud presentadas.

Por ende, se hace necesario en toda situación que involucra Isomorfismos de medida la identificación del valor que representa la unidad. Puesto que este permite configurar la multiplicación como una relación cuaternaria, y además es imprescindible en este tipo de estructura, tal como lo manifiesta Vergnaud (2000). Los aspectos antes mencionados permitieron el rediseño, el cual tiene como finalidad evidenciar los propósitos de las Fichas a través de las soluciones que brindan los estudiantes, es por esta razón que se utilizarán los mismos propósitos de la Ficha inicial.

3.4.3 Ficha Y' (Aguacoco)

Ahora se examinarán los elementos que se tuvieron en cuenta para el rediseño de esta, se presentará brevemente su diseño y la descripción de sus componentes (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**)

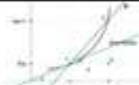
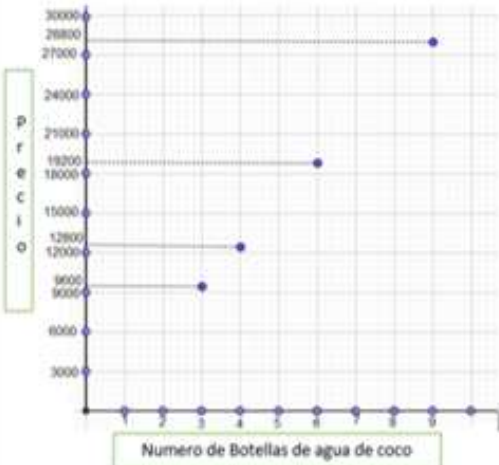
CODIGO: 01-AGUAC-01	AGUA-COCO	
El señor Jacobo vende agua de Coco, le vende a don Teo 3 botellas en 9600 pesos. Don Teo llega a su casa y se queda pensando ¿cuánto dinero pagaría si tuviera que comprar 1, 2, 5, 7 y 8 botellas de agua de Coco? para lo cual realizó el siguiente gráfico que contiene los precios de 4, 6 y 9 botellas de agua de Coco. Encuentra los precios que hacen falta en el gráfico:  De acuerdo al grafico anterior y con tus propias palabras comenta que ocurre en las siguientes situaciones: - Describe los procedimientos que usaste para calcular los valores que hacían falta en el gráfico - Si 3 botellas de agua de Coco valen 9600, si compro más botellas ¿qué pasa con el dinero que debo pagar por ellas? - Si 9 botellas de agua de Coco valen 28800, si compro menos botellas ¿qué pasa con el dinero que debo de pagar por ellas?		
ELABORADA POR: - DANIEL GIL - JAROL VALENCIA		Datos tomados de la galeria de pueblo nuevo del distrito de buenaventura

Ilustración 19. Ficha Y' (AGUACOCO)

Esta ficha sufrió varias modificaciones con respecto a la ficha inicial (Y); en primera instancia cambió la situación, pues en la ficha Y se tenía una problemática que se centró en la venta de jugo de Borojó por vasos, como se presentó antes. Ahora, la problemática de la ficha Y', consistió en la venta de agua de Coco por parte del señor Jacobo.

Para esta actividad se tuvo en cuenta un gráfico cartesiano, en dicho gráfico se suministra información que contiene los precios de 4, 6 y 9 botellas de agua de Coco. Posterior a esto se le pide encontrar los precios que hacen falta en el gráfico. Para ello, en el primer cuadrante del plano cartesiano se le asigna al eje horizontal la cantidad de botellas y en el eje vertical el precio por cantidad de botellas. Luego, se presentan tres preguntas, las cuales tienen como finalidad verificar aspectos relacionados con la forma en que covarían las cantidades de un espacio de medidas con respecto al otro. Y de igual forma, se busca evidenciar qué procedimiento utilizaron los estudiantes para completar los datos en el plano cartesiano.

3.4.4 Análisis Parcial Ficha Y' (Aguacoco)

Esta ficha se les aplicó a 17 estudiantes de la sede san Bartolomé, con un tiempo aproximado de 80 minutos, y el trabajo fue en parejas. En esta aplicación, en la cual se buscó identificar algunas de las estrategias usadas por los estudiantes para resolver las actividades planteadas contrasta con algunos de los elementos teóricos que fundamentan este trabajo. Además, al hacer uso del LabMat como estrategia metodológica da la posibilidad de que durante la aplicación se den momentos de exploración con la actividad, aprendizaje cooperativo y socialización de soluciones, las cuales permiten generar discusiones que logran acercar a los estudiantes a diferentes formas del pensamiento matemático y en particular el Variacional.

En la aplicación de la ficha Y' se pudo observar grandes avances en relación con la ficha inicial (Y), debido a que se encontraron más elementos que daban cuenta de un acercamiento al pensamiento Variacional, enseguida se presentarán los procesamientos que con mayor regularidad fueron usados por los estudiantes en la solución de la ficha Y', entre los que se

encuentran el análisis funcional (multiplicación, división como la búsqueda de la unidad), y análisis vertical en el cual hacen uso implícito de una de las propiedades de la linealidad.

En primera instancia, en referencia con el análisis funcional, algunos estudiantes se acercaron a procesos relacionados con pasar de la suma iterada a la multiplicación, logrando progresar en la idea de la multiplicación como función, en la que identificaban la unidad como una constante de proporcionalidad (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**).

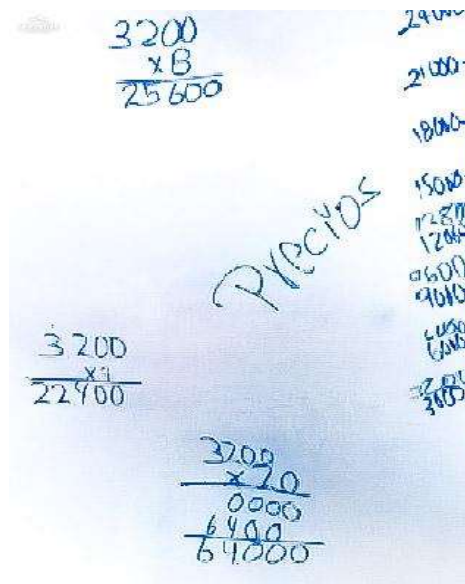


Ilustración 20. Multiplicación como función

En la ilustración anterior se puede observar como el estudiante identifica una cantidad constante (\$3200), la cual representa el precio correspondiente a la unidad, luego utiliza -de forma implícita- la función $f(x) = 3200x$, en la que se reconoce a $f(x)$ como el precio por botella, x representa el valor que cambia, en este caso el número de botellas, y \$3200 como la cantidad que no cambia (constante) (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**).

De igual manera en el análisis funcional entre los procedimientos destacados se encontró que algunos estudiantes realizaron divisiones para hallar el precio de una botella de agua de

Coco (la unidad), con la intención de usar dicho valor para hallar valores solicitados en la ficha (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.).

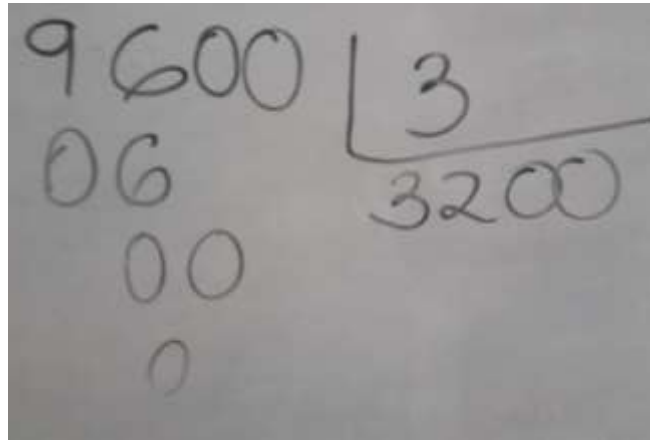

$$\begin{array}{r} 9600 \overline{) 3} \\ 3200 \end{array}$$

Ilustración 21. La división como búsqueda de la unidad

Esta ilustración permite ver que el estudiante, a partir de la información que se presenta en la gráfica, identifica como encontrar el valor de la unidad; para esto tiene que encontrar el vínculo entre dos espacios de medida de naturaleza diferentes (E1 botellas, E2 precio/botellas), lo cual se halla dividiendo \$9.600 entre 3 para encontrar el valor correspondiente a la unidad (\$3.200) (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.).

Se examinan ahora los procedimientos asociados con el análisis escalar, entre los que se pudo evidenciar que un grupo de estudiantes, de manera implícita utiliza una de las propiedades de la linealidad, dando cuenta de cierta generalidad.

Handwritten mathematical work showing a sequence of subtraction problems:

$$\begin{array}{r} 9600 - 3B \\ 9600 - 3B \\ 6400 - 2B \\ \hline 25600 - 8B \end{array}$$

Ilustración 22. Uso implícito de la propiedad de la linealidad

Como se puede ver (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**) aplican de manera implícita una de las propiedades de la linealidad, de igual forma establecen relaciones entre los espacios de medida para poder hallar valores mayores a los presentados en la tabla, apoyándose en la propiedad de la linealidad antes expuesta.

En términos generales los estudiantes dieron un paso importante, pues lograron avanzar a la multiplicación como Isomorfismo de medida; de igual forma se pudo evidenciar un fuerte acercamiento al pensamiento Variacional, siendo este el objetivo principal de este trabajo de indagación.

Lo anterior permite establecer que los estudiantes al enfrentarse a actividades en las que se requiere que ellos sean autónomos en su proceso de aprendizaje tienen la necesidad de hacer uso de sus saberes previos, los cuales son puestos a pruebas a través de las diferentes actividades o tareas propuestas. En este caso, las Fichas del LabMat representan un medio que posibilita lo antes mencionado.

Por ende, el LabMat como estrategia pedagógica, posibilita la construcción de pensamiento matemático en los estudiantes dado que facilita la adquisición de habilidades y destrezas en el

manejo de las Matemáticas; de esta manera se convierte en un espacio que permite poner a prueba una hipótesis que se construye a través de la experimentación, la exploración, del planteamiento de conjeturas, de realizar procesos de comunicación e intercambio de ideas.

3.5 FICHA Z (A OTRO NIVEL)

Para finalizar con la tripleta de fichas, se presenta la ficha Z (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**), la cual exhibe elementos que se han presentado en las fichas anteriores, es decir, se tuvo en cuenta para su diseño un enunciado y se presentan tres tablas, tal como se muestra a continuación. Además, se presenta, como en las anteriores, el análisis de su aplicación, el rediseño y el análisis de su implementación.

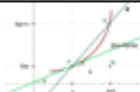
CODIGO: 01-AOTRO-01	A OTRO NIVEL																																												
En la Galería de Pueblo Nuevo ubicada en el Distrito de Buenaventura se venden frutos de la región pacífica, los precios de cada producto se pueden apreciar en la siguiente tabla: <table><tr><th>Producto</th><th>Precio por unidad</th></tr><tr><td>Chontaduro</td><td>\$ 600</td></tr><tr><td>Borojo</td><td>\$ 1.850</td></tr><tr><td>Poma Rosa</td><td>\$ 500</td></tr><tr><td>Caimito</td><td>\$ 750</td></tr><tr><td>Guama</td><td>\$ 1.200</td></tr><tr><td>Carambolo</td><td>\$ 850</td></tr></table> Tabla N° 1 completa los datos que hacen falta en la siguientes tablas: <table><tr><th>CANTIDAD COCA DE PEPEPÁN</th><th>PRECIOS</th></tr><tr><td>2</td><td>2.100</td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td></tr><tr><td></td><td>5.200</td></tr><tr><td>7</td><td></td></tr><tr><td></td><td>8.400</td></tr><tr><td>10</td><td></td></tr></table> <table><tr><th>CANTIDAD COCA DE NAIDI</th><th>PRECIOS</th></tr><tr><td>3</td><td>3.900</td></tr><tr><td></td><td>6.500</td></tr><tr><td>8</td><td></td></tr><tr><td></td><td>13.000</td></tr><tr><td>11</td><td></td></tr><tr><td></td><td>19.500</td></tr></table>	Producto	Precio por unidad	Chontaduro	\$ 600	Borojo	\$ 1.850	Poma Rosa	\$ 500	Caimito	\$ 750	Guama	\$ 1.200	Carambolo	\$ 850	CANTIDAD COCA DE PEPEPÁN	PRECIOS	2	2.100	3		4			5.200	7			8.400	10		CANTIDAD COCA DE NAIDI	PRECIOS	3	3.900		6.500	8			13.000	11			19.500	Descripción y reglas del juego En el juego se dispondrán un grupo de tarjetas que estarán desplegadas en la pared y se distribuirán en tres niveles, cada nivel tendrá siete preguntas. Se selecciona una pregunta del primer nivel, el equipo que logre responderla correctamente pasara al siguiente y así sucesivamente hasta llegar al último. Tendrán 5 minutos para analizar, discutir y poder plantear la situación con su respectiva solución. Los dos primeros equipos que logren pasar los tres niveles serán los ganadores.
Producto	Precio por unidad																																												
Chontaduro	\$ 600																																												
Borojo	\$ 1.850																																												
Poma Rosa	\$ 500																																												
Caimito	\$ 750																																												
Guama	\$ 1.200																																												
Carambolo	\$ 850																																												
CANTIDAD COCA DE PEPEPÁN	PRECIOS																																												
2	2.100																																												
3																																													
4																																													
	5.200																																												
7																																													
	8.400																																												
10																																													
CANTIDAD COCA DE NAIDI	PRECIOS																																												
3	3.900																																												
	6.500																																												
8																																													
	13.000																																												
11																																													
	19.500																																												
ELABORADA POR: - DANIEL GIL - JAROL VALENCIA		Datos tomados de la galería de pueblo nuevo del distrito de buenaventura.																																											

Ilustración 23. Ficha Z (A OTRO NIVEL)

Para la realización de esta ficha se tuvo en cuenta una tabla la cual permitió conocer el precio por unidad de varios frutos (Poma Rosa, Chontaduro, Borojó, Guama, Caimito y Carambolo) de la región pacífica que son vendidos en la Galería de Pueblo Nuevo.

La primera actividad consiste en llenar las tablas con los frutos que se venden en cocas (Pepepán y Naidí), se destaca que en las tablas no se conoce el precio correspondiente a la unidad (una coca) de ambos productos y es necesario utilizar una operación matemática para encontrar dicho valor, con la finalidad de completar los espacios que hacen falta en la tabla, o en caso de no hallarlo poder evidenciar los procesos que utilizan para hallar el resto de los datos de la tabla.

En la segunda parte de la ficha, se tiene en cuenta la primera tabla que contiene la información del precio de cada fruto por unidad. Estos frutos, son puestos en escena mediante la formulación de diversas preguntas (ver **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**) las cuales estarán pegadas en el tablero con un rótulo numérico. Luego, los estudiantes que están formados en parejas escogen un número al azar y proceden a resolver la situación que les correspondió, la actividad termina luego de dos rondas.

Lo mencionado, busca poder observar las diferentes formas en que los estudiantes resuelven cada una de las situaciones, la finalidad es evidenciar en las estrategias de solución de los estudiantes, la multiplicación como Isomorfismo de medidas, en el marco de las estructuras multiplicativas propuestas por Vergnaud (2000), y a su vez, poder rastrear elementos inherentes al pensamiento Variacional.

3.5.1 Análisis Parcial Ficha Z (A otro nivel)

Esta ficha fue aplicada a 18 estudiantes de la sede principal, en un tiempo aproximado de 80 minutos, y el trabajo fue cooperativo. En ella, se pudo notar que los procedimientos más usados por los estudiantes para resolver esta ficha fueron sumas iteradas y multiplicaciones.

En lo que respecta a las sumas iteradas y multiplicación se presentan varios casos donde esta fue el recurso usado por los estudiantes.

Casi que de manera automática los estudiantes relacionan situaciones de tipo multiplicativo con la suma iterada, esto lo ejecutan teniendo como punto de partida el precio de la unidad (\$600 unidad de Chontaduro), para luego repetirlo el número de veces que lo requiera la actividad (7 veces 600) (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**).

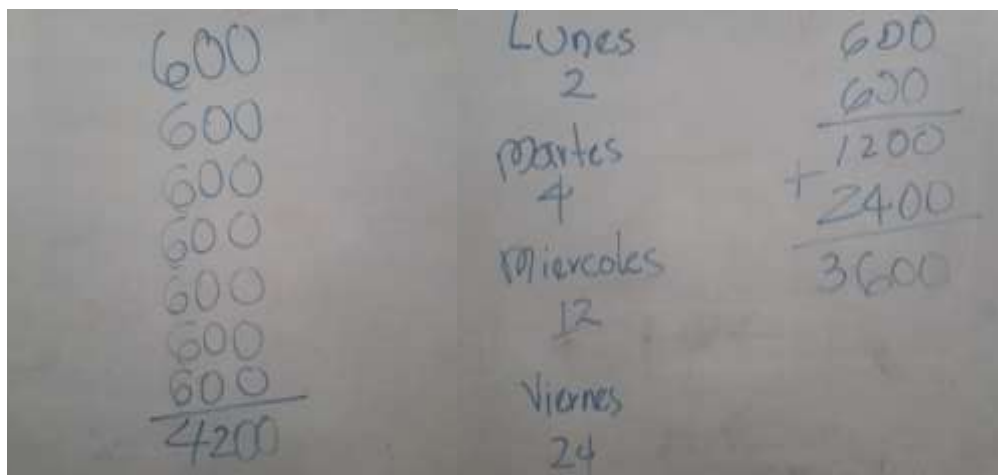


Ilustración 24. Sumas Iteradas

En las situaciones en las cuales se pide hallar el doble, los estudiantes hacen un acercamiento a la multiplicación y se alejan de las sumas iteradas, aunque lo realizan de manera mental, lo representan como el doble de 1200 es 2400 (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**).

De igual modo, otra parte de los estudiantes logran llegar a procesos de abstracción, en los cuales dejan de realizar sumas iteradas y comprenden que la multiplicación permite encontrar de manera más rápida las cantidades deseadas por medio de, “el doble de” o “el triple de”; por

ejemplo, para encontrar lo que se gastó el miércoles el enunciado dice que es el triple del martes, para esto se multiplica 2.400 por 3. Para finalizar la actividad se expresa que el viernes se gastó el doble del miércoles, pues bien al resultado que se obtuvo de la operación anterior se le multiplica por dos teniendo como resultado 14,400 (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.).

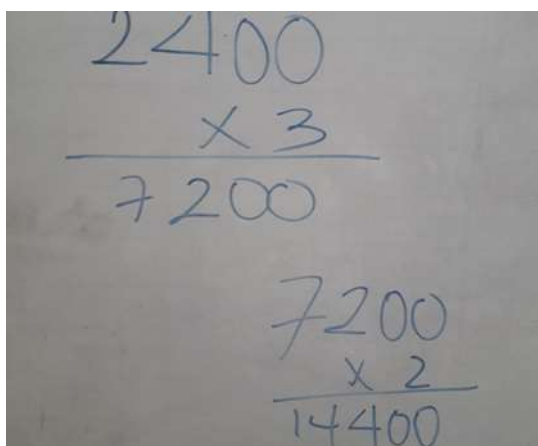

$$\begin{array}{r} 2400 \\ \times 3 \\ \hline 7200 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 7200 \\ \times 2 \\ \hline 14400 \end{array}$$

Ilustración 25. Multiplicación

Hay que mencionar, además que la mayoría de los estudiantes identifican que es necesario obtener el valor de la unidad del fruto para poder determinar las demás cantidades de la tabla. Dicho lo anterior es importante considerar que una vez identifican la unidad aún siguen sin establecer la multiplicación como una función.

Por otro lado, hasta este punto los estudiantes hacen poco uso de la división para hallar el valor de la unidad, y por ende no identifican el operador funcional como una división. De igual manera se detectó que los estudiantes al repetir una misma cantidad (precio unidad (patrón)) lograron establecer una relación con las tablas de multiplicar para poder hallar los valores faltantes.

Teniendo en cuenta los análisis hechos a los resultados obtenidos de la aplicación de la ficha Z, se pudo concluir, que dicha ficha no responde en su generalidad a los propósitos proyectados para esta (Ficha). Debido a que los estudiantes en su mayoría efectúan procesos aditivos (sumas iteradas), para responder los interrogantes formulados en la Ficha, lo que permite intuir que hay un desconocimiento del concepto de multiplicación por parte de cierto número de estudiantes.

De igual forma, se pudo notar que unos pocos estudiantes avanzaron en procesos relacionados con la variación y cambio, pero este progreso no fue el esperado, ya que no pudieron determinar la forma en que se comportaban las diferentes cantidades de magnitud utilizadas.

En definitiva, lo anterior permitió que se hicieran ciertos ajustes, tomando como referente la multiplicación como Isomorfismo de medida, la cual condujera a conceptos que permitan una aproximación significativa en torno al pensamiento Variacional.

Por ende, respondiendo a los elementos teóricos que fundamentan este trabajo, se realizó el rediseño de las fichas Z, la cual se presenta a continuación.

3.5.2 Rediseño Ficha Z

En adelante se presenta el rediseño de la Ficha Z, que será nombrada como Z prima (Z'). En esta, se tuvo en cuenta elementos sobresalientes del diseño antes presentado (Ficha Z) (uso de tablas, contexto de compraventa, preguntas enfocadas a la búsqueda de la unidad). Así mismo, se consideró lo curricular desde el MEN, y lo teórico relacionado con el Isomorfismo de medida y

los elementos asociados al mismo desde los planteamientos de Vergnaud (1983, 2000). Esto con la intención de obtener unos mejores resultados en la aplicación de la Ficha en cuestión (Z').

Desde este punto de vista, es necesario describir los elementos relevantes que fueron tenidos en cuenta en el diseño de la Ficha Z, los cuales permitieron un acercamiento a elementos característicos del pensamiento Variacional.

En primer lugar, es pertinente mencionar que el uso de tablas representa un componente importante en situaciones en las cuales se establece una relación uno a uno entre espacios de medidas diferentes, de tal forma que permite observar una relación funcional entre un espacio de medida E_1 y el espacio de medida E_2 . Al identificar este tipo de relaciones dan cuenta de características del pensamiento Variacional, debido que permite reconocer el cambio y la variación en los espacios de medida.

En segundo lugar, se tiene que las situaciones deben ser contextualizadas y se considera el contexto de compra y venta, debido a que este tipo de contexto hace parte de la cotidianidad de los estudiantes, lo que facilita la comprensión y resolución de las actividades matemáticas que se presentaron, y estas a su vez tenían como propósito desarrollar pensamiento Variacional. Ya que este pensamiento le da sentido y significado a la actividad matemática, tal como lo expresa el MEN (2006).

Otro de los elementos importantes que se encontraron en los diseños iniciales fue el tipo de pregunta, las cuales iban enfocadas a la búsqueda del valor correspondiente a la unidad. De manera, que se tuvieron en cuenta aquellas preguntas que les permitieron a los estudiantes identificar el valor equivalente a la unidad, y la búsqueda de la cantidad de unidades (ver página

38), siendo éstos uno de los objetivos principales en las situaciones asociadas al Isomorfismo de medida, tal como lo expresa Vergnaud (2000).

Ahora bien, el identificar el valor correspondiente a la unidad, permitió que los estudiantes establecieran relaciones con la multiplicación y la búsqueda de la cantidad de unidades, además, se logró establecer una correspondencia biunívoca entre un espacio de medida y otro. Lo que, a su vez, se traducía en una relación de dependencia entre cantidades de magnitud presentadas.

Por ende, se hace necesario en toda situación que involucra Isomorfismos de medida la identificación del valor que representa la unidad. Puesto que este permite configurar la multiplicación como una relación cuaternaria, y además es imprescindible en este tipo de estructura, tal como lo manifiesta Vergnaud (2000). Los aspectos antes mencionados permitieron el rediseño, el cual tiene como finalidad evidenciar los propósitos de las Fichas a través de las soluciones que brindan los estudiantes, es por esta razón que se utilizan los mismos propósitos de la Ficha inicial.

3.5.3 Ficha Z' (A otro nivel)

Para terminar con la presentación de las fichas se mostrará el rediseño de la ficha Z, que tendrá por nombre zeta prima (Z'), la cual se presenta enseguida (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**).

CODIGO: 02-AOTRO-01	A OTRO NIVEL																																													
En la Galería de Pueblo Nuevo ubicada en el Distrito de Buenaventura se venden frutos de la región pacífica, los precios de cada producto se pueden apreciar en la siguiente tabla: <table border="1"><thead><tr><th>Producto</th><th>Precio por unidad</th></tr></thead><tbody><tr><td>Chontaduro</td><td>\$ 600</td></tr><tr><td>Borojó</td><td>\$ 1.850</td></tr><tr><td>Poma Rosa</td><td>\$ 500</td></tr><tr><td>Caimito</td><td>\$ 750</td></tr><tr><td>Guama</td><td>\$ 1.200</td></tr><tr><td>Carambolo</td><td>\$ 850</td></tr></tbody></table> Tabla N° 1 completa los datos que hacen falta en la siguientes tablas: <table border="1"><thead><tr><th>CANTIDAD COCA DE PEPEPÁN</th><th>PRECIOS</th></tr></thead><tbody><tr><td>5</td><td>5.250</td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td>8.400</td></tr><tr><td>10</td><td></td></tr><tr><td></td><td>13.650</td></tr><tr><td>15</td><td>15.750</td></tr><tr><td></td><td>24.150</td></tr></tbody></table> <table border="1"><thead><tr><th>CANTIDAD COCA DE NAIDI</th><th>PRECIOS</th></tr></thead><tbody><tr><td>4</td><td>5.200</td></tr><tr><td></td><td>6.500</td></tr><tr><td>8</td><td></td></tr><tr><td></td><td>13.000</td></tr><tr><td>11</td><td></td></tr><tr><td></td><td>19.500</td></tr></tbody></table>		Producto	Precio por unidad	Chontaduro	\$ 600	Borojó	\$ 1.850	Poma Rosa	\$ 500	Caimito	\$ 750	Guama	\$ 1.200	Carambolo	\$ 850	CANTIDAD COCA DE PEPEPÁN	PRECIOS	5	5.250	3			8.400	10			13.650	15	15.750		24.150	CANTIDAD COCA DE NAIDI	PRECIOS	4	5.200		6.500	8			13.000	11			19.500	Con los datos de las tablas anteriores responde las siguientes situaciones: 1. En el salón de sexto se comieron 13 Poma Rosas y en séptimo se comieron ocho veces más la cantidad de Poma Rosas que se comieron en sexto. ¿Cuántas Poma Rosas se comieron en séptimo? 2. En la tienda de Don Pacho se venden 23 Guamas en un día, mientras que en la galería de pueblo nuevo, se venden 13 veces más la cantidad de Guamas que vende don Pacho. ¿Cuántas Guamas se venden en un día en la galería de pueblo nuevo? 3. Cesar compra Caimitos para 62 personas, si cada persona se come 6 Caimitos. ¿Cuántos Caimitos compro en total? 4. Manuel descubre que con una coca de Pepepán comen 8 personas, Ayúdale a Manuel a descubrir ¿cuantas personas comerían con 11 cocas? 5. Doña Juana se va para el colegio a vender pomas rosas. Las Poma Rosas las organiza en tres cajas todas con la misma cantidad. Si por la venta de dos cajas de Poma Rosas recibe \$ 59.500 pesos, ¿cuantas pomas rosas vendió doña Juana? Datos tomados de la galería de pueblo nuevo del distrito de buenaventura.
Producto	Precio por unidad																																													
Chontaduro	\$ 600																																													
Borojó	\$ 1.850																																													
Poma Rosa	\$ 500																																													
Caimito	\$ 750																																													
Guama	\$ 1.200																																													
Carambolo	\$ 850																																													
CANTIDAD COCA DE PEPEPÁN	PRECIOS																																													
5	5.250																																													
3																																														
	8.400																																													
10																																														
	13.650																																													
15	15.750																																													
	24.150																																													
CANTIDAD COCA DE NAIDI	PRECIOS																																													
4	5.200																																													
	6.500																																													
8																																														
	13.000																																													
11																																														
	19.500																																													
ELABORADA POR: - DANIEL GIL - JAROL VALENCIA																																														

Ilustración 26. Ficha Z' (A OTRO NIVEL)

Esta actividad se ejecuta teniendo en cuenta la misma temática que se utilizó en la primera versión, es decir, en la ficha Z; lo que se modificó tiene que ver con la segunda parte de la actividad, pues se presentaron dificultades con la complejidad de las preguntas, de esta manera se determinó presentar cinco preguntas que serán incluidas en la ficha, y su objetivo es solucionarlas en pareja de estudiantes, de acuerdo con su experiencia y conocimientos previos, para así identificar si las tablas exhibidas permiten conocer el precio por unidad de coca de Naidí

y de Pepepán, debido a que el precio correspondiente a la unidad de la coca de ambos productos no está presente en la situación.

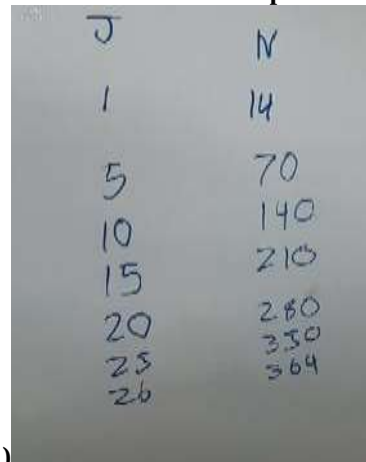
En la segunda parte de la ficha, se tuvo en cuenta la primera tabla que contiene la información del precio de cada fruto por unidad, los cuales son vendidos en la galería de Pueblo Nuevo. En la actividad se presentaron cinco situaciones problemas relacionados con la tabla, las cuales buscan poder observar las diferentes formas en que los estudiantes resuelven cada una de las situaciones, la finalidad es evidenciar en las estrategias de solución de los estudiantes la multiplicación como Isomorfismo de medidas, en el marco de las estructuras multiplicativas propuestas por Vergnaud (2000).

3.5.4 Análisis Parcial Ficha Z' (A otro nivel)

A continuación, se presenta un primer análisis a los resultados obtenidos de la aplicación de la ficha Z' a 18 estudiantes del grado sexto de la IERV sede San Bartolomé, la cual tuvo un tiempo aproximado de 70 minutos. Dicho análisis surge de los procedimientos generados por los estudiantes al resolver la ficha antes mencionada.

Los procedimientos más usados por la mayoría de los estudiantes giran en torno a las relaciones funcionales (identificación de regularidades), división partitiva y la multiplicación como función.

Para las relaciones funcionales, los estudiantes logran establecer una especie de tabla la cual guarda cierta regularidad, para poder relacionar la cantidad de jarras con el número de personas que pueden tomar con

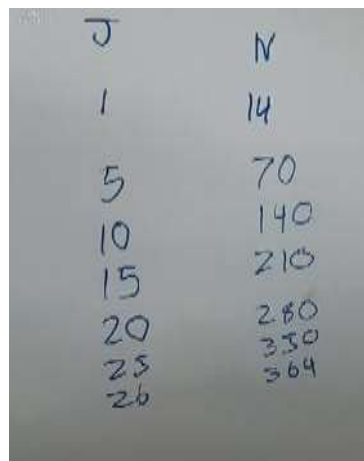


J	N
1	14
5	70
10	140
15	210
20	280
25	350
26	364

dichas jarras (ver anexo 21.1)

Ilustración 27. Relación funcional

además se puede evidenciar que discriminan los espacios de medida, es decir, establecen para la primera columna de la tabla lo correspondiente al número de jarras (E1) y en la segunda columna lo asociado con la cantidad de personas que pueden tomar con tal cantidad de jarras, como se muestra a continuación..



J	N
1	14
5	70
10	140
15	210
20	280
25	350
26	364

Ilustración 27. Relación funcional

Esto indica que los estudiantes en su forma de proceder dan muestra de elementos asociados al pensamiento Variacional, debido a que se evidencia en la (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.), una relación biunívoca entre un espacio de medida y el otro.

Por otro lado, con relación a la división partitiva (búsqueda de la unidad) se resalta que la mayoría de los estudiantes necesitan encontrar el valor de la unidad para poder hallar las cantidades correspondientes. Para este proceso algunos estudiantes lograron establecer el valor de la unidad correspondiente a una jarra de jugo, mediante una división, argumentando que la división permitía repartir una cantidad en partes iguales, por esta razón realizaron la división entre el número de personas y la cantidad de jarras (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.¡Error! No se encuentra el origen de la referencia..**

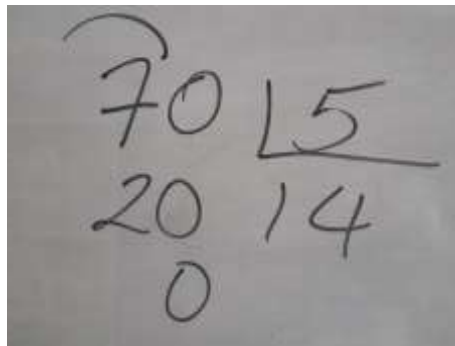

$$\begin{array}{r} 70 \overline{) 14} \\ 20 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ilustración 28. División partitiva

Es necesario decir que este tipo de procedimientos son propios del Isomorfismo de medida, ya que para esta estructura es importante contar con este valor, por tanto se puede decir que los estudiantes avanzaron a la idea de multiplicación como una relación cuaternaria.

En lo que se refiere a la multiplicación como función, la mayoría de los estudiantes se les facilitó utilizarla para operar con cantidades en donde un valor se repite (constante de proporcionalidad) y el otro puede variar, en un caso particular el número de guamas que vende Don Pacho en un día son 23 y la frase “13 veces más” que hace alusión a la cantidad de Guamas que venden en la galería por día, permite reconocer qué cantidad se repite con respecto a la otra. (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**).

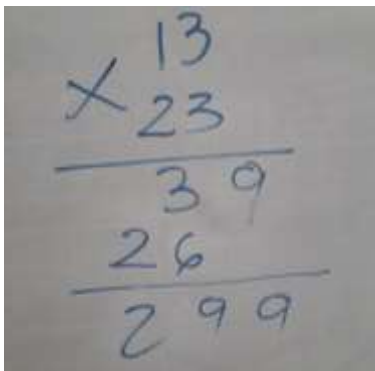

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 23 \\ \hline 39 \\ 26 \\ \hline 299 \end{array}$$

Ilustración 29. Multiplicación como función

Teniendo en cuenta los análisis antes presentados, los cuales proporcionan elementos conceptuales y teóricos, permiten manifestar que la ficha (Z') cumplió con el objetivo trazado. Ya que facilitó el acercamiento a conceptos relacionados al Isomorfismo de medida, tales como, división partitiva, relación funcional, multiplicación como función entre otros, los cuales son elementos característicos del pensamiento Variacional.

Por tanto, las situaciones problemas basadas en el Isomorfismo de medida posibilitan a quienes los resuelven, un acercamiento desde lo numérico a procesos y conceptos vinculados al pensamiento Variacional.

Como resultado de las implementaciones y de los análisis parciales, es importante destacar que en los rediseños de las Fichas X', Y' y Z', los estudiantes tuvieron un progreso significativo en lo referente al desarrollo del pensamiento Variacional, de manera que los métodos usados permitieron identificar algunos rasgos de este; en lo que sigue se describirán algunos de los elementos que se consideraron como más característicos de dicho pensamiento:

Para empezar, es interesante ver cómo los estudiantes abandonaron por momentos el uso casi que exclusivo de los procedimientos de tipo aditivo y pasaron a realizar análisis de tipo escalar y funcional. En los de tipo escalar, se subrayaron dos maneras de proceder, en la primera

ejecutaron el operador vertical como multiplicador en los dos espacios de medida, y la segunda está vinculada con las agrupaciones de cantidades, es decir hacían uso de una de las propiedades de la linealidad para encontrar cantidades correspondientes con valores equivalentes.

Con respecto al análisis funcional, se remarca que los estudiantes lograron identificar la existencia de una cantidad constante la cual siempre se multiplicaba por otro valor, además avanzaron en utilizar la división como operación, por un lado como la búsqueda del valor unitario y por otro la división como la búsqueda de la cantidad de unidades.

Hay que mencionar, además, que estos resultados fueron generados por las características particulares del LabMat, las cuales permitieron que los estudiantes pudieran desarrollar las Fichas “haciendo” es decir, descubriendo, explorando, comunicando sus ideas, planteando conjeturas, validando, socializando sus resultados y que finalmente tomaran las que son adecuadas para la solución de las mismas. En relación con lo anterior Pabón et al (2011), señalan que:

El Laboratorio de Matemáticas en su formulación inicial ha buscado contribuir a la construcción del pensamiento matemático, favoreciendo así el acercamiento hacia una cultura matemática en el marco de un ambiente lúdico y recreativo. En tal sentido, puede considerarse como un dinamizador de construcción de pensamiento matemático a través del proceso de aprendizaje.
(p.3)

De hecho, la actividad del LabMat se distancia de la actividad realizada en el aula de clases, pues esta no mide tiempos ni conceptos establecidos por grados, solo se sustenta del currículo oficial de matemáticas el cual busca potenciar pensamiento matemático en los estudiantes (Arce, 2004).

En el capítulo siguiente se presentan los elementos que fueron tenidos en cuenta para establecer el modelo de análisis de esta indagación, su desarrollo y los resultados a los que se llegó, los cuales emergen de los análisis parciales antes expuestos.

CAPÍTULO IV

MODELO DE ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LAS IMPLEMENTACIONES

En este capítulo se describen el modelo y las unidades de análisis que se tuvieron en cuenta para efectuar los análisis correspondientes de este trabajo. Además, se presenta el análisis general de los resultados de las implementaciones, en el cual se sintetizan los hallazgos en los análisis parciales, asociados a las características del desarrollo del pensamiento Variacional que fueron evidenciadas en un grupo de estudiantes de grado sexto de la IERV, desde la perspectiva del Isomorfismo de medida, orientado desde un conjunto de Fichas en el LabMat.

4.1 MODELO

En este apartado se describe el modelo empleado, el cual permite la construcción del instrumento (rejilla de análisis) que facilita la filtración y análisis de los datos provenientes de la aplicación de las Fichas del LabMat a los estudiantes de grado sexto de la IERV.

El modelo que se empleó en esta indagación se denominó triangular, tal como se muestra a continuación.

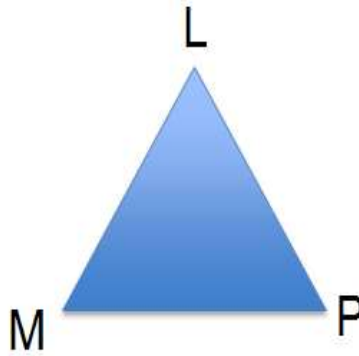


Ilustración 30. Modelo Triangular

Este modelo está conformado por tres vértices, a este modelo lo definen tres componentes: (L) Laboratorio de Matemáticas (Fichas de laboratorio), (M) Matematización (horizontal, vertical) y (P) Pensamiento numérico/Variacional. Estos se entrelazan para formar la rejilla de análisis de este trabajo de indagación.

Cabe resaltar que, para la construcción de la rejilla de análisis, se centra la atención en el Laboratorio de Matemáticas (L) como eje principal (lugar donde se desarrolla la indagación), el cual es un espacio donde se “disponen un conjunto de actividades matemáticas (Fichas) para ser desarrolladas por los estudiantes de manera autónoma” (Arce, 2004, p. 191). Además, el LabMat es un espacio propicio para que los estudiantes exploren, experimenten, verifiquen y saquen conclusiones desde su propia experiencia, promoviendo el aprendizaje activo y colaborativo de los mismos.

Habría que decir también que el LabMat se encuentra asociado a unas Fichas, las cuales favorecen el razonamiento, la experimentación, la comunicación y la resolución de problemas, con la intención de generar o desarrollar pensamiento matemático en los estudiantes.

De igual forma, se tuvo en cuenta la Matematización (M) como el proceso que permite la visualización de las diferentes heurísticas empleadas por los estudiantes al momento de resolver una situación problema. La matematización se entenderá desde dos niveles, la matematización horizontal y la vertical, lo cual será descrito más adelante.

También, se vinculó el pensamiento numérico/Variacional (P), como eje que permite un acercamiento desde lo numérico a procesos relacionados con el pensamiento Variacional, tales procesos se describen más adelante.

Retomando lo dicho en párrafos anteriores, el modelo triangular tendrá en sus vértices las unidades de análisis que permitirá cruzar la información obtenida de las aplicaciones de cada una de las Fichas del laboratorio, y este quedará conformado de la siguiente forma:

Triángulo PLM, el cual está constituido por el Pensamiento Numérico/Variacional (P) - Laboratorio de Matemáticas (L) - la Matematización (M), las categorías estarán mediadas por el LabMat como eje central del análisis, pues será el escenario en el cual se llevará a cabo el desarrollo de la actividad matemática.

4.1.1 Pensamiento Numérico/Variacional (p)

El Pensamiento Numérico/Variacional (P), contienen los siguientes elementos: *patrones numéricos, el análisis escalar, la Multiplicación como función, la relación entre cantidades y Procedimientos aditivos*, los cuales se describen en lo que sigue. Los *patrones numéricos*, de acuerdo con Castro, Cañadas y Molina (citado en Merino, 2012, p.57) definen patrón como: “lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede

volver a repetirse”, esta idea presenta al patrón como ese elemento que genera secuencias, ya sean numéricas, geométricas o provenientes del contexto real.

El análisis escalar, permite determinar cómo se lleva a cabo la variación en un espacio de medida E_1 y así poder establecer los valores en el otro espacio de medida E_2 , es decir los cambios en un espacio de medida generan cambios simétricos (variación conjunta) en el otro.

La multiplicación como función, se entiende como la relación entre los dos espacios de medida, es decir, identificar que la multiplicación de n por f , da el valor de $f(n)$. De esta manera la multiplicación como función permite establecer que para todo par de valores correspondientes, uno de cada espacio de medida se cumplen las siguientes: por lo tanto $nf(1) = f(n)$, siendo $f(1)$ la constante de proporcionalidad.

La relación entre cantidades consiste en poder evidenciar que el estudiante identifique las variaciones y cambios en un espacio de medida, siendo estos simétricos en el otro, o en efecto que logre reconocer que, si en un espacio de medida aumenta su valor el correspondiente también lo hará y viceversa.

Los procedimientos aditivos, estos se relacionan con la operación aritmética de la adición, siendo la suma iterada su mayor sustento. De igual forma, el uso de la sustracción como una forma de acercarse a la división.

Los procedimientos antes mencionados, son elementos que permiten dar cuenta de la variación y el cambio, generando un acercamiento significativo al pensamiento Variacional. En otras palabras, son elementos característicos de dicho pensamiento.

4.1.2 La Matematización (M)

La matematización se clasifica de dos formas, la horizontal y la vertical. La matematización horizontal tiene como finalidad relacionar el problema con otro de su contexto con algún tipo de matemáticas, “Mediante métodos informales o prefórmale a diferentes niveles de abstracción” (Van Reeuwijk 1995, p.137).

Por su parte la matematización vertical es la que permite evidenciar los procedimientos formales de los estudiantes, identificando generalidades de contenidos y métodos, en cierto modo la matematización vertical de acuerdo con Arcavi (2006) “es el objetivo ideal de la educación matemática” (p.13)

De igual forma, Rico (2006, p.287) establece ciertos procesos o actividades asociadas a la Matematización horizontal y vertical (ver página 43), de las cuales se toman siguientes:

Para la matematización horizontal se toman los siguientes procesos: *Identificar las matemáticas que pueden ser relevantes respecto al problema*, entendida como esa capacidad que poseen los estudiantes para escoger el tipo de procedimiento que deben desarrollar para darle solución a una situación problema. *Encontrar regularidades, relaciones y patrones*, que se entenderá como la cualidad que tienen los estudiantes de identificar u observar en una serie de números, lo que es común y poder interpretarlo mediante una regla que dé cuenta del fenómeno bajo estudio.

Para la matematización vertical se centra la atención en las siguientes actividades: *Utilizar diferentes representaciones*, se entiende como la capacidad de representar una misma información de forma diferente, ya sea de forma gráfica (diagramas), tablas, simbólica etc.

Argumentar, vista como la cualidad de poder justificar verbal o de forma escrita el tipo de procedimiento usado para dar solución a una tarea, de forma clara y concisa. Y por último *Generalizar*, entendida como la capacidad de hacer uso de propiedades o reglas que permitan establecer conjeturas las cuales se puedan validar.

Es importante destacar, que en un primer momento se puede considerar que los estudiantes para resolver una situación problema recurren a métodos informales o en efecto a resolverlos con matemáticas que son elementales para ellos, y que a través de estos procesos se pueden ubicar en una matematización horizontal; luego algunos estudiantes puedan pasar al momento cuando utilicen procedimientos formales y hagan uso de las propiedades y procesos de generalización, se puede hablar de que están en una matematización vertical.

4.1.3 La rejilla de análisis

La rejilla de análisis estuvo conformada por el cruce de dos ejes (vertical y horizontal); en el vertical la Matematización en el que se presentaron cinco categorías: Encontrar regularidades y patrones; Identificar las matemáticas que pueden ser relevantes respecto al problema; Utilizar diferentes representaciones; Argumentar y Generalizar

Mientras que en la horizontal se presentó el Pensamiento Numérico/Variacional el cual está compuesto por cinco unidades de análisis que se enunciarán a continuación: Patrones numéricos; Relación entre cantidades; Análisis escalar; Multiplicación como función y Procedimientos aditivos. La información que permitió ocupar las casillas del cruce de estas categorías derivó de los procedimientos y estrategias realizadas por los estudiantes en el desarrollo de las Fichas.

Tabla 2. Rejilla de Análisis

LABORATORIO DE MATEMÁTICAS			PENSAMIENTO NUMÉRICO – VARIACIONAL				
			Patrones numéricos	Relación entre cantidades	Análisis escalar	Multiplicación como función	Procedimientos aditivos
MATEMATIZACIÓN	HORIZONTAL	Encontrar regularidades, relaciones y patrones.	A ₁		A ₃		
		Identificar las matemáticas que pueden ser relevantes respecto al problema					B ₅
	VERTICAL	Utilizar diferentes representaciones					
		Argumentar					
		Generalizar				F ₄	

La rejilla de análisis antes expuesta será el medio que se use para filtrar los datos provenientes de los resultados de la aplicación de las Fichas. En esta, se tendrán en cuenta los procedimientos usados por los estudiantes para dar solución a las situaciones presentadas en las Fichas.

De igual forma, la rejilla permitió clasificar los procedimientos usados por los alumnos en uno de los niveles de algebrización propuestos por Godino et al. (2014). Con la finalidad de verificar si en las heurísticas usadas por los estudiantes, se manifiestan algunas características algebraicas, que indiquen cierto acercamiento al pensamiento Variacional desde la perspectiva del Isomorfismo de medida.

4.2 ANÁLISIS GENERAL DE LOS RESULTADOS DE LAS IMPLEMENTACIONES

El análisis general de los resultados obtenidos de la aplicación de las situaciones presentadas en las Fichas dentro del marco del Laboratorio de Matemáticas permitió ver una gama de heurísticas usadas por los estudiantes, las cuales se clasificaron según los niveles de algebrización. Estos, están asociados a la presencia o ausencia de un razonamiento algebraico, tal como se describió en el marco conceptual (ver pág. 29)

Estos niveles dejan ver como los estudiantes, en su forma de proceder o resolver las situaciones problemas, presentan de forma explícita o implícita elementos característicos del pensamiento algebraico.

En relación con lo anterior, este trabajo de indagación permitió establecer los siguientes análisis, derivados del cruce entre las diferentes celdas que configuran las unidades de análisis, pero, es importante mencionar, que todos los cruces presentes en dicha rejilla se pudieron evidenciar en las heurísticas usadas por los estudiantes (ver anexo 22). Sin embargo, se centró la atención en aquellos cruces que se presentaron con mayor frecuencia, los cuales para efectos de esta indagación se presentan con los nombres de *Ausencia de procedimientos multiplicativos*, *Presencia de un patrón como generador de una secuencia de números*, *Operadores verticales y multiplicación como función*.

4.2.1 Ausencia de procedimientos multiplicativos

Esta etiqueta, relaciona a la matematización horizontal (Identificar las matemáticas que pueden ser relevantes respecto al problema) y los procedimientos aditivos. Esta relación, dejó ver que los estudiantes con mucha frecuencia buscan establecer procedimientos de tipo aditivo para resolver situaciones que preferiblemente requieren de una multiplicación.

Ante esto, Castaño (2002) plantea que los estudiantes antes de llegar a una estrategia multiplicativa pasan por una estrategia realista, esquemática y aditiva, esta última permite que ellos realicen sumas repetitivas para obtener una cantidad después de ser sumada n -veces. Por ejemplo, Carlos compró 5 manzanas a un precio de \$750 cada una, ¿cuánto dinero gastó Carlos en dicha compra?, ante situaciones como esta los estudiantes tienden a resolver la situación mediante una suma, es decir, suman cinco veces el mismo valor, en este caso el valor correspondiente al precio de una manzana (\$750), tal como se muestra a continuación $750 + 750 + 750 + 750 + 750 = 3750$. Lo anterior, ejemplifica claramente el actuar de los estudiantes ante situaciones de ese tipo.

Por tanto, es necesario hacer hincapié en los procesos multiplicativos en la básica primaria, con la finalidad de avanzar a conceptos asociados a la multiplicación, tales como proporción, razón, función, entre otros.

Conviene subrayar, que en la solución de las situaciones planteadas en el marco del LabMat, la mayoría de los estudiantes hicieron uso de procesos aditivos. Siendo esta la primera operación a la recurrían para resolver las situaciones planteadas, sin embargo, en el transcurso de las actividades lograron identificar las variables que se presentan en un problema de tipo multiplicativo, de esta misma manera establecen relaciones entre las cantidades.

A continuación, se mostrarán algunos apartes en los cuales los estudiantes hicieron uso de la adición como una suma iterada.

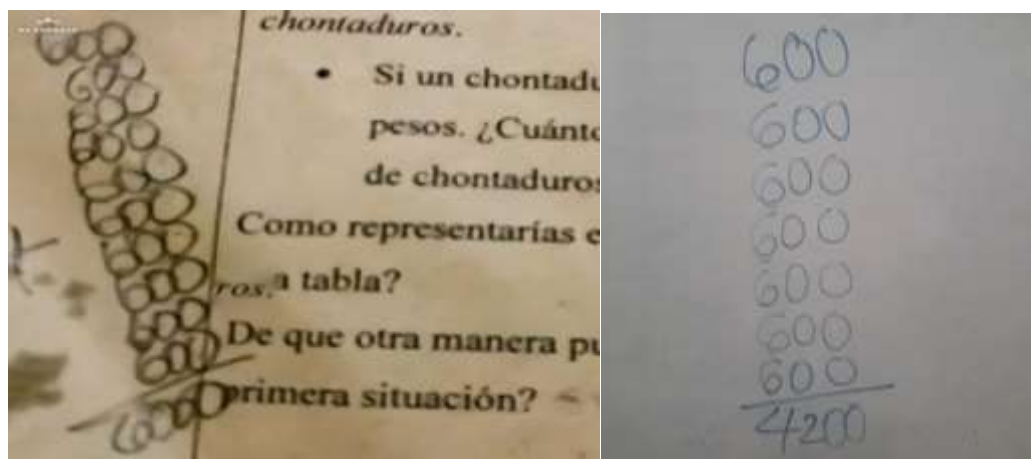


Ilustración 31. Sumas Iteradas, Tomado de la ficha X

Este tipo de estrategia usada por los estudiantes (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**), se ubica en el nivel 0 de algebrización, Godino et (2014). Esto se indica, debido a que solo se limitan a realizar sumas iteradas para encontrar el valor requerido. Por lo tanto, este tipo de actividad matemática no se vincula con elementos pertenecientes al razonamiento algebraico.

De igual forma, en la situación de la ficha X en la que se pregunta *si un Chontaduro cuesta \$600 pesos, ¿cuánto cuesta una coca de Chontaduro?*, esta pregunta se genera de un enunciado el cual indica que en una coca hay 10 Chontaduros, en su gran mayoría los estudiantes hicieron uso de procedimientos aditivos que permiten deducir que es un acercamiento a la estructura de la multiplicación, de manera que la consideran como una suma iterada. Esta estrategia se da en los problemas de multiplicación y división, en los cuales la cantidad que se va a repetir no es muy grande. Esta situación está ubicada en el Nivel 0, dado que los estudiantes solo hacen uso de procedimientos algorítmicos, los cuales no presentan elementos del razonamiento algebraico en su ejecución.

En una de las situaciones de la ficha Z, los estudiantes hacen uso de la suma iterada para encontrar el resultado de una de las actividades presentadas, la cual consiste en hallar relaciones

de equivalencias numéricas, para esto se plantea la siguiente pregunta *¿cuántos Carambolos se pueden comprar con \$3.400?*

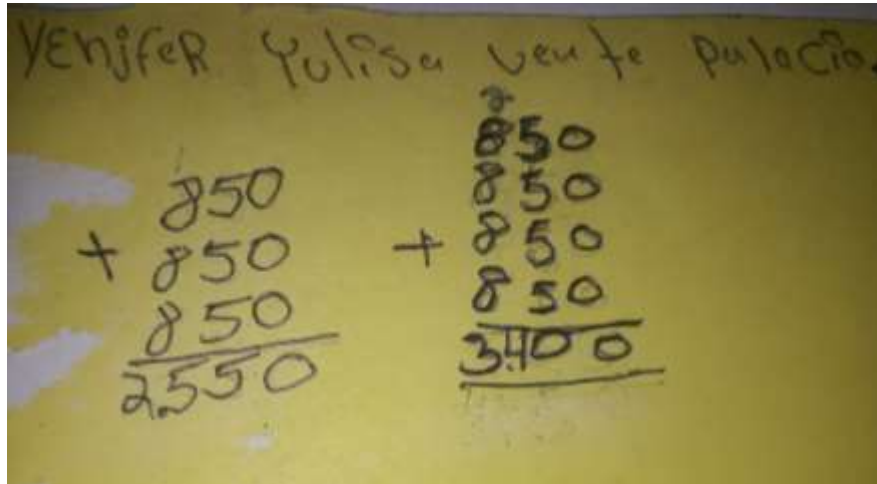


Ilustración 32. Sumas Iteradas

Los estudiantes establecen una adición (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**), utilizando la suma iterada para encontrar dicho resultado $850 + 850 + 850 + 850 = 3.400$, identificando que con esa cantidad de dinero se pueden comprar cuatro Carambolos. Este tipo de procedimientos, según Godino (2014) se ubica en el nivel 0 de algebrización, debido a que solo hace uso de objetos extensivos, ya que, para hallar el valor solicitado, simplemente realizan una operación con objetos particulares.

En otra de las situaciones presentadas en la ficha (Z), los estudiantes utilizan una vez más la suma iterada para dar solución a un problema que debería resolverse con la multiplicación y luego el algoritmo de la suma, sin embargo, por medio de la suma iterada hace uso de la propiedad distributiva de la adición. Para responder la pregunta de *si en la mañana compro dos Chontaduros y en la tarde compro tres ¿cuánto dinero gasté?*



Ilustración 33. Propiedad distributiva

El procedimiento utilizado por los estudiantes para resolver esta situación fue utilizar la propiedad distributiva de la adición (*¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.*), la cual se expresa como $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$, los estudiantes tuvieron en cuenta la parte derecha de la propiedad, aunque no fue usada de la misma forma, debido a que la multiplicación fue sustituida como una suma iterada, es decir que $600 + 600 = 1200$ (precio de dos Chontaduros) y $600 + 600 + 600 = 1800$ (precio de tres Chontaduros), luego suman ambos resultados $1200 + 1800 = 3000$ (precio de 5 Chontaduros).

En este tipo de actividades promueve en el estudiante la aplicación de la propiedad distributiva para llegar a la respuesta adecuada. Sin embargo, en la aplicación hacen uso de la suma iterada y este tipo de estrategia se ubica en el nivel 0, tal como se mencionó en el análisis anterior.

Algunos estudiantes lograron realizar agrupación de cantidades por medio de la adición, es decir que tomaron como referencia uno de los datos en el enunciado del problema para desarrollar su estrategia de resolución. La siguiente situación indica que si *Carlos compró tres cocas de Naidí el viernes y el sábado compró siete cocas de Naidí. ¿Cuánto dinero gastó?*

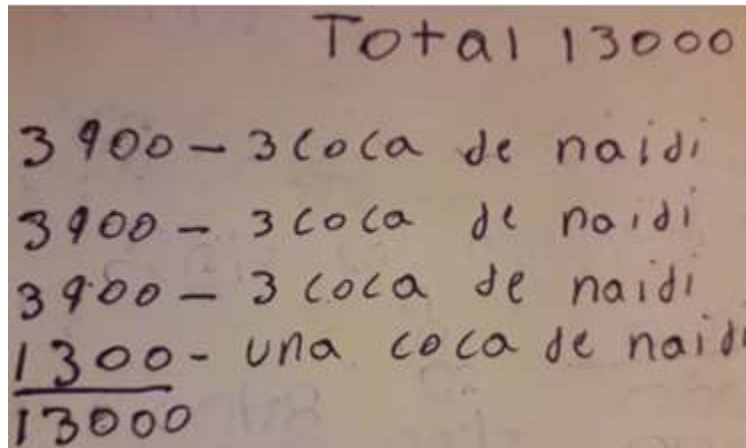


Ilustración 34. Uso implícito de la propiedad de la linealidad

La estrategias de agrupamiento entre cantidades (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**), permite que los estudiantes establezcan equivalencias y puedan descomponer cantidades, es decir una vez conocen el precio correspondiente a tres cocas de Naidí (3900 precio de tres cocas de Naidí), descomponen siete cosas en seis cocas, para esto forma dos grupos de tres cocas cada uno ($3900 + 3900$), y como le falta una coca para llegar a las siete cocas procede agregarla, posterior a esto realiza el algoritmo de la suma así (Tabla 3):

Tabla 3. Uso de procesos aditivos

Número de cocas	Precio
3	3900
3	3900
3	3900
1	1300
10	13000

Los estudiantes hacen uso de la adición como una agrupación de cantidades la cual es una estrategia que permite relacionar la cantidad de cocas de Naidí con el precio correspondiente, de esta manera la situación fomenta la interpretación de la equivalencia entre cantidades. Además, la descomposición de cantidades indica que si se establecen relaciones de equivalencias numéricas se trata de un nivel 1.

De esta forma se evidencia que los estudiantes llegaron a resolver las actividades haciendo uso de estrategias de tipo aditivo, sin entender que la multiplicación permite abreviar la suma de sumandos iguales. De acuerdo con Obando (2015), dicha aproximación no es la más adecuada, debido a que solo está ligada al pensamiento aditivo, y se distancia de las formas de razonamiento multiplicativo.

4.2.2 Presencia de un patrón como generador de una secuencia de números

Esta etiqueta, relaciona la matematización horizontal (Encontrar regularidades, relaciones y patrones) con los patrones numéricos. En esta se muestra cómo la identificación de un patrón numérico permite la configuración de una secuencia numérica, la cual guarda cierta regularidad, que evidencia la variación y el cambio, elementos representativos del pensamiento Variacional.

Dicho lo anterior, los estándares básicos de competencia (MEN, 2006) establecen que el desarrollo del pensamiento Variacional se inicia con el estudio de las regularidades y de los elementos o criterios que determinan esas regularidades, las cuales dan lugar a un patrón. Desde este punto de vista, es importante resaltar que, en relación con la categoría de análisis, se puede decir que los estudiantes lograron en su mayoría identificar regularidades o secuencias que guardaban cierta relación, dando paso a la descripción del patrón numérico ya sea desde lo aditivo o multiplicativo. Por ejemplo, se presentó la siguiente situación:

Completar la siguiente tabla

CANTIDAD COCA DE PEPEPÁN	PRECIOS
2	2.100
3	
4	
	5.200
7	
	8.400
10	

Ilustración 35. Actividad 1 Ficha Z

La anterior situación (*¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.*), requería que los estudiantes hallaran la forma de completar los espacios que hacían falta en la tabla, la mayoría completó de manera correcta la tabla, algunos realizando procedimientos aditivos, otros multiplicativos. Pero, para completar la tabla lo primero que hicieron fue hallar el valor correspondiente a una coca de Pepepán. No obstante, algunos estudiantes se dieron cuenta que el valor correspondiente a una coca de Pepepán permite encontrar los valores que hacían falta en la tabla, tomando dicho valor como el patrón numérico, usándolo de forma aditiva tal como se muestra a continuación:



1	1050
Cantidad pepen	Precios
2	2100
3	3150
4	4200
5	5250
7	7350
8	8400
10	10500

Handwritten calculations on the right side of the table (from the right photo):

$$\begin{array}{r} 2100 \\ + 1050 \\ \hline 3150 \\ + 1050 \\ \hline 4200 \\ + 1050 \\ \hline 5250 \\ + 1050 \\ \hline 6300 \\ + 1050 \\ \hline 7350 \\ + 1050 \\ \hline 8400 \\ + 1050 \\ \hline 9450 \\ + 1050 \\ \hline 10500 \end{array}$$

Ilustración 36. Uso de un patrón numérico

Es necesario señalar, que este tipo de registro, se encuentra estrechamente relacionada con las variaciones, permitiendo el desarrollo de procedimientos algorítmicos o fórmulas que determinan un patrón y las reglas que lo definen (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**), tal como lo plantean los estándares básicos de competencias en matemáticas (2006).

Se puede decir que la identificación de regularidades, y a su vez la consolidación del patrón numérico permite ubicar ese tipo de heurísticas en un Nivel 1 de algebrización. Esto dado que los estudiantes definieron la regla que rige al patrón, manifestando que para completar la tabla se debía adicionar siempre \$1.050, dejando entrever un acercamiento al pensamiento Variacional

Por otro lado, a los estudiantes se les presentó en la ficha X (ver anexo 5), una tarea en la cual se solicitaba a los estudiantes a que representarían la situación en un tipo de registro, la mayoría utilizó una tabla con dos entradas, una para la cantidad de Chontaduros y otra para el precio, lo mismo se hizo para el número de cocas y su respectivo precio. Pero, se presentó un caso en el que un estudiante representó la situación en un gráfico de barras, esto indica que los estudiantes al no contar con la guía del profesor, hacen uso de sus saberes previos, los cuales usan para poder dar respuesta a los interrogantes o actividades planteadas.

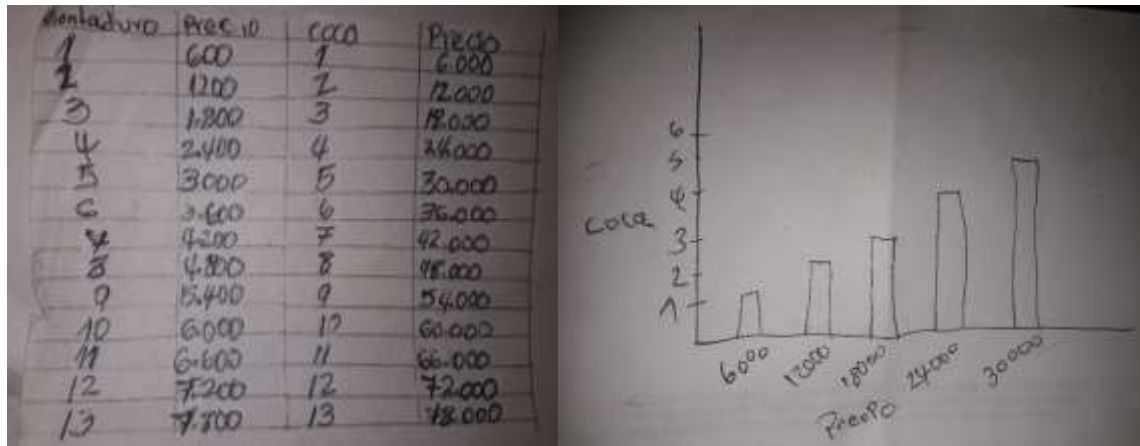


Ilustración 37. Uso de diferentes tipos de representaciones

Este tipo de representación (tabla) o gráficas (diagrama) (*Error! No se encuentra el origen de la referencia.*) se encuentran estrechamente relacionadas con las variaciones, permitiendo el desarrollo de procedimientos algorítmicos o fórmulas que determinan un patrón y las reglas que lo definen, tal como lo plantean los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006).

Retomando la situación problema antes mencionada, se puede decir que la estrategia usada por los estudiantes (representación tabular, gráfico de barras) permitió que identificaran regularidades y a su vez el patrón numérico. Este último, lo determinaron debido a que pudieron establecer una secuencia numérica en ambos espacios de medidas, la cual guarda cierta periodicidad.

Las formas de solución antes expuestas pertenecen a la matematización vertical y a su vez clasifica en el Nivel 1 de algebrización, debido a que a partir de las representaciones (tabla, gráfica) pudieron analizar y reconocer el patrón numérico, que da paso a la generalidad.

En síntesis, los procedimientos usados por los estudiantes dan muestra de ciertos elementos característicos del pensamiento Variacional, los cuales son generados por las situaciones vinculadas al Isomorfismo de medida.

4.2.3 Operadores verticales

Esta categoría, relaciona a la matematización horizontal (Encontrar regularidades, relaciones y patrones) y el pensamiento numérico-Variacional (análisis escalar). Dicha relación se presenta debido a que, en algunos análisis provenientes de los procedimientos usados por los estudiantes en la solución de las Fichas, estos establecen una relación en un espacio de medida y esa misma relación la transfieren al otro espacio de medida, dando paso a operadores verticales.

Por consiguiente, las situaciones problemas que involucran estructuras multiplicativas en el caso de Isomorfismo de medida, conducen a procedimientos de tipo escalar y/o funcional, tal como lo plantea Vergnaud (1995). Este tipo de procedimientos (escalar, funcional) se presentan cuando se establece relaciones entre cantidades de magnitud; el primero -escalar- cuando se relacionan las cantidades de magnitud de un mismo espacio de medida; el segundo -funcional- cuando se relacionan las cantidades de magnitud de ambos espacios de medidas.

Ante la situación planteada, los estudiantes en primera medida recurren a una división, toman el precio correspondiente a cuatro Cocas de Naidí (\$5.200) y lo dividen entre la cantidad de cocas (4) con el fin de hallar el valor de la unidad (\$1.300), el cual usan para encontrar los valores faltantes de la tabla. Para esto utilizan formas de razonamiento multiplicativo que para Obando (2015), consisten en las variaciones conjuntas que se dan entre dos o más cantidades. En las situaciones que se presenta a continuación los estudiantes ejecutan procedimientos vinculados con el análisis escalar, la relación entre cantidades.

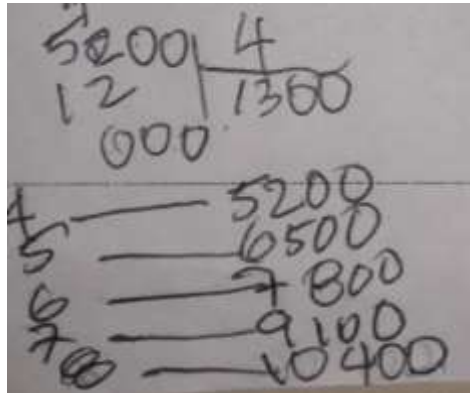


Ilustración 38. La división como búsqueda de la unidad

En esta situación los estudiantes no utilizan sumas de sumandos iguales sino que para empezar realizan la división del precio que representa la cantidad de cocas de Naidí (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**), dado que estos datos son correspondientes y hacen parte de la información de la tabla que se es brindada a los estudiantes, y que debe ser completada, el resultado obtenido que para ellos es la unidad, nos permite ver que realizan variaciones conjuntas haciendo uso de una de las propiedades de la linealidad de manera implícita.

$$f(4\text{cocasdenaidí} + 1\text{cocadenaidí}) = f(4\text{cocasdenaidí}) + f(1\text{cocadenaidí}) = \$5.200 + \$1.300$$

$$f(5\text{cocasdenaidí}) = \$6.500$$

$$f(5\text{cocasdenaidí} + 1\text{cocadenaidí}) = f(5\text{cocasdenaidí}) + f(1\text{cocadenaidí}) = \$6.500 + \$1.300$$

$$f(6\text{cocasdenaidí}) = \$7.800$$

$$f(6\text{cocasdenaidí} + 1\text{cocadenaidí}) = f(6\text{cocasdenaidí}) + f(1\text{cocadenaidí}) = \$7.800 + \$1.300$$

$$f(7\text{cocasdenaidí}) = \$9.100$$

Se evidencia cómo los estudiantes reconocen en las situaciones los espacios de medidas presentados en la actividad y establecen correspondencias entre las cantidades por medio de una

relación de pesos por cantidad de cocas de Naidí, de esta manera utilizan el precio de una coca de Naidí como un valor fundamental para completar los datos de la tabla.

Con el tratamiento de las situaciones problemas en el marco del LabMat, se observa cómo los estudiantes establecen relación entre cantidades para poder efectuar un análisis escalar, utilizando los datos ya encontrados en las tablas, para esto hacen uso de la adición de los valores de las cantidades correspondientes a cada espacio, es decir para hallar el precio de ocho cocas de Pepepán lo que hacen es (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.):

Ilustración 39. Análisis escalar

El mismo procedimiento lo realizan para encontrar la cantidad de cocas conociendo el precio (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.):

	cocas	precio	
+	3	3150	+
	10	10500	
	13	13650	

Ilustración 40. Análisis escalar

Como se puede ver, los estudiantes establecen relaciones entre las cantidades halladas en la tabla para encontrar las restantes, en esta oportunidad de nuevo hacen uso de la propiedad de la

linealidad para encontrar el precio de 13 cocas de Pepepán, para esto agrupan los datos hallados en la tabla para utilizarlos como referencia de la siguiente manera:

$$f(3cocasdepepepan) + f(10cocasdepepepan) = f(3150 + 10500) = f(13650)$$

Esas formas particulares de abordar las situaciones, según Godino et al. (2014), se clasifican en el nivel 1 de algebrización, debido a que se aplican relaciones y hacen uso de propiedades de las operaciones que se asocian al Isomorfismo de medida.

En conclusión, este tipo de heurísticas, dan muestras de un acercamiento significativo desde lo numérico al pensamiento Variacional.

4.2.4 Multiplicación como función

Esta categoría, se constituye el cruce entre la matematización Vertical (Generalización) y el pensamiento numérico-Variacional (Multiplicación como función). En este caso, el apartado conserva el nombre de una de las unidades de análisis, debido a que esta, permite dar cuenta de la otra, ya que se vinculan a los análisis funcionales. Lo que da muestra, de una variedad de heurísticas, las cuales dan indicios de un acercamiento significativo al pensamiento Variacional, desde la generalización de un procedimiento, que representa una forma particular de resolver la situación planteada.

Ahora bien, la multiplicación como función vista desde el Isomorfismo de medida, consiste en establecer una relación entre cantidades de magnitud de espacios de medidas diferentes. Es decir, la multiplicación funcional, favorece la relación de cantidades de magnitudes en forma

horizontal, asociando un espacio de medida con su imagen en el otro espacio de medida, tal como lo indica Vergnaud (1991).

Ahora bien, en la situación presentada en la ficha Y', los estudiantes pusieron de manifiesto ciertos procedimientos los cuales dan cuenta de esta categoría (relación funcional) en la solución de dicha situación, los cuales se presentan a continuación.

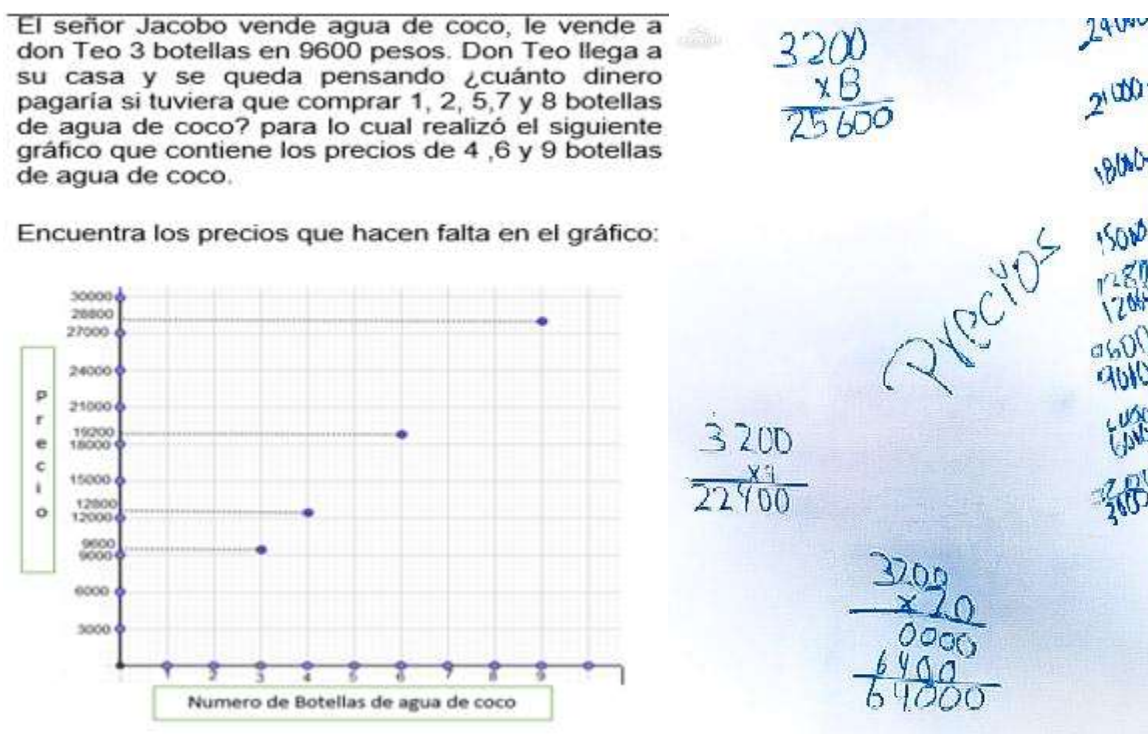


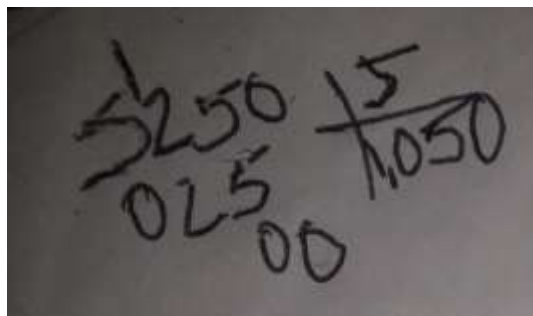
Ilustración 41. Multiplicación como función

Vale resaltar, que la estudiante identificó el precio correspondiente a una botella de agua de Coco el cual era \$3.200 pesos (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.). Luego utilizó dicho valor, para calcular el precio de diferentes cantidades de botellas de agua de Coco (7, 8, 20, etc.). Así, el precio de una botella de agua de Coco es $3200 \cdot (1) = 3200$ y de la misma forma esta relación funcional se cumple para el precio de las otras cantidades de botellas: $3200 \cdot (7) = 22400$; $3200 \cdot (8) = 25600$; $3200 \cdot (20) = 64000$.

Lo anterior, muestra que la relación entre las botellas de agua de Coco y precio, se relacionan mediante la función lineal $f(x) = 3200x$. De esta forma es posible encontrar el precio necesario para cualquier número de botellas de agua de Coco ya que consistiría en multiplicar el número de botellas (x) por el precio de una botella (\$3200).

La heurística usada por la estudiante, en el marco de los niveles de algebrización, se ubica en el nivel 1 de algebrización, debido a que en su proceder establece una generalidad, ya que para encontrar el precio de cualquier cantidad de aguas de Coco hace siempre uso del valor correspondiente a la unidad.

Por otro lado, en la ficha Z', los estudiantes hacen uso de la división como una estrategia para hallar el valor correspondiente a la unidad, para ello identifican que para encontrar el precio correspondiente a una coca de Pepepán, establecen una relación entre el número de cosas y su precio, en este caso, cinco cocas de Pepepán equivalen a \$5.200, luego de identificar estos valores, realizan la división con dichos valores ($5.200 \div 5$), para encontrar el valor correspondiente a la unidad (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.).



The image shows a handwritten calculation on a piece of paper. It consists of two division problems. The first is $5250 \div 5$, where 5 is written above the 2, and the result 1050 is written below. The second is $1050 \div 5$, where 5 is written above the 0, and the result 210 is written below. The handwriting is in black ink on a light-colored background.

Ilustración 42. División como búsqueda de la unidad

Después de que se tiene el precio correspondiente a una coca de Pepepán, \$ 1.050, los estudiantes establecen una relación funcional, donde el precio de una coca (\$1.050) es el valor fijo o constante, que permitirá hallar los precios correspondientes a 3 y 10 cocas de Pepepán. Lo

anterior, les permite efectuar una multiplicación entre el precio de una coca (constante de proporcionalidad) por el número de cocas que desean hallar, es decir,

$1.050 \cdot 3 = 3.150$ Precio correspondiente a 3 cocas de Pepepán; $1.050 \cdot 10 = 10.500$ precio correspondiente a 10 cocas de Pepepán (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.).

CANTIDAD COCA DE PEPEPÁN	PRECIOS
5	5250
3	3150
10	10500
13	13650
15	15750
23	24150

CANTIDAD COCA DE NAIDI	PRECIOS
------------------------	---------

Handwritten calculations:

$$\begin{array}{r}
 1050 \\
 \times 3 \\
 \hline
 3150
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1050 \\
 \times 18 \\
 \hline
 18900
 \end{array}$$

Ilustración 43. Operador funcional

Se puede evidenciar que los estudiantes ejecutan de manera implícita una función lineal, la cual se expresa de la siguiente forma $f(x) = 1.050x$, donde $f(x)$ es el precio por número de cosas de Pepepán, (x) representa el número de cocas de Pepepán y \$1.050 el precio de una coca (constante de proporcionalidad). Ante esto, es preciso mencionar que hay un acercamiento al pensamiento Variacional, debido a que se puede observar la dependencia entre las cantidades de magnitud, siendo esta una visión de la función como dependencia. Por tanto, este tipo de procedimientos o heurísticas se ubican en el nivel 1 de algebrización.

Es de resaltar que los estudiantes, aunque no realizan procedimientos explícitos del Isomorfismo de medida, se puede evidenciar lo fundamental que es para ellos, tener el precio de la unidad, la cual es un elemento primordial para poder encontrar solución a problemas de este tipo, en los cuales los estudiantes implícitamente realizan preguntas una vez se conozca el precio

de la unidad (de coca de Pepegán). ¿Si una coca de Pepegán cuesta \$1.050, cuánto cuesta tres cocas?, donde los estudiantes relacionan cuatro términos, esta pregunta se podría representar como:

Tabla 4

Cocas de Pepegán	precio
1	1.050
3	x

Se puede observar que las dos cantidades pertenece a un espacio de medida es decir el 1 y 3 son medidas que representan el número de cocas de Pepegán, y por el otro lado \$1.050 y x son las medidas del precio por coca. Los estudiantes determinaron qué tipo de operación realizar de acuerdo con su experiencia, en la mayoría de los casos realizaban una multiplicación como función y otros, aunque muy poco realizaban un análisis escalar.

Por otro lado, ante la situación presentada en la ficha Y, la cual indicaba, completa la siguiente tabla, la cual relaciona la cantidad de vasos de jugo de Borojó con el precio.

Vasos	Precio (\$)
1	800
2	1600
3	
5	
8	
10	

Ilustración 44. Transformaciones lineales

Algunos estudiantes recurrieron a un procedimiento similar al que se da en una transformación lineal (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.), debido a que ellos

establecieron un factor multiplicativo en uno de los espacios de medida, en este caso multiplican por 2, y lo extienden al otro espacio de medida. Este procedimiento lo repiten hasta llenar la tabla, tal como se observa a continuación (¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.).

Voto	Precio
1	800
2	1600
3	2400
5	
8	
10	

800
x 2

1600

800
x 3

2400

Ilustración 45. Multiplicación como función

Este tipo de heurísticas según Godino (2014), se ubican en el nivel 1 de algebrización, debido a que este tipo de procedimiento se vincula con las transformaciones lineales, la cual puede enunciarse así: dadas M_1 y M_2 dos magnitudes relacionadas en un sistema lineal, a_1 una cantidad de magnitud de M_1 y b_1 una cantidad de magnitud de M_2 se cumple que, cuando la cantidad de magnitud a_1 aumenta al doble, al triple, la cantidad de magnitud b_1 aumenta al doble, al triple, lo que indica, que existe una covariación entre las magnitudes asociadas, vinculándose con la idea de proporcionalidad. Lo enunciado anteriormente, permite ver una relación de proporcionalidad simple directa, en la que sus magnitudes se correlacionan mediante una relación funcional, dando cuenta de la variación y el cambio, los cuales son elementos fundamentales del pensamiento Variacional.

En síntesis, la mayoría de los procedimientos usados por los estudiantes se encuentran o clasifican en el Nivel 1 de algebrización, debido a que hacen uso de propiedades, identifican

regularidades, establecen análisis escalares y funcionales entre otros, los cuales muestran algunas características algebraicas.

CAPITULO V

CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

5.1 CONCLUSIONES

En este capítulo se describen algunas conclusiones asociadas al desarrollo del pensamiento Variacional en el grado sexto, desde la perspectiva del Isomorfismo de medida en el marco del LabMat, en este se describe en qué medida fueron alcanzados los propósitos planteados en este trabajo.

Ciertamente, en lo acontecido en la aplicación del diseño y rediseño de cada una de las fichas, se realizaron uno primeros análisis a los resultados obtenidos en estas, en los que se muestran acercamientos significativos a conceptos relacionados con la variación y el cambio, tales como la detección de regularidades, la identificación de un patrón numérico, el análisis escalar, entre otros.

De acuerdo con lo anterior, el trabajo de indagación reveló que el diseño de diversas situaciones, vinculadas a la multiplicación como Isomorfismo de medida, permite al que las resuelve, un acercamiento desde lo numérico a conceptos relacionados con el pensamiento Variacional.

En relación con esto, Ospina y Salgado (2016) expresan que el Isomorfismo de medida establece relaciones de covariación entre cuatro cantidades, donde se hace necesario observar cómo varía una cantidad con respecto a la otra. Por ejemplo, uno de los estudiantes para resolver una de las situaciones, observaba que de 2 a 3 avanzaba 1, y eso mismo hizo en el otro espacio de medida pues al 2100 le sumaba el valor de una coca el cual correspondía a 1050; lo interesante fue ver como hacía para hallar el valor de 7 cocas, sabiendo que había un salto de 5 a 7, para lo cual aumentó dos veces el valor de una coca, y esto lo hizo porque analizó que para llegar de 5 a 7 tiene que adicionarle el 2, tal como lo muestra la ilustración.

Cantidad de cocas	Precio
2	2100
3	3150
4	4200
5	5250
7	7400

Handwritten calculations to the right of the table:

$$\begin{array}{r} 2100 \\ + 1050 \\ \hline 3150 \\ 3150 \\ + 1050 \\ \hline 5250 \\ 5250 \\ + 1050 \\ \hline 7400 \end{array}$$

Ilustración 46. Covariación entre cantidades

Esto da muestra de la estrecha relación que existe entre la multiplicación como Isomorfismo de medida y los conceptos vinculados al pensamiento Variacional, tal como se mencionó anteriormente.

Así mismo, se pudo constatar en los análisis parciales y en el análisis general, evidencias de rasgos característicos del pensamiento Variacional. Estos rasgos, se pudieron ver en los procedimientos usados por los estudiantes en el desarrollo de las Fichas; los cuales se encuentran

asociados a la identificación de la variación y el cambio, mediante la detección de regularidades, reconocimiento de un patrón numérico, relaciones funcionales, procesos de generalización y el uso de diferentes registros de representación (tabular, diagramas, lenguaje natural), los cuales configuran algunas formas de acercarse al pensamiento Variacional mucho antes de llegar a expresiones algebraicas.

Por tanto, los análisis realizados a los procedimientos de los estudiantes en el marco de este trabajo dejaron ver diferentes elementos característicos del pensamiento Variacional, los cuales fueron recurrentes durante toda la aplicación, principalmente en los rediseños.

Se debe mencionar que en el desarrollo de las primeras tres Fichas, la mayoría de los estudiantes (90%) se encontraban en el nivel 0 de algebrización, puesto que solo recurrían a procedimientos aditivos, en la que la suma iterada era la mejor forma de dar solución a las situaciones planteadas; lo que da muestra que en la actividad matemática desarrollada por los estudiantes no hubo un acercamiento al pensamiento algebraico.

Ahora bien, en los resultados obtenidos de la aplicación del rediseño de las Fichas, se pudo constatar que los estudiantes en su mayoría (88%) llegaron al nivel 1 de algebrización, dado que las heurísticas usadas en el desarrollo de las Fichas se asociaban con procesos de generalización, uso de propiedades, reconocimiento de regularidades, identificación de un patrón numérico, relaciones de tipo funcionales, entre otros, los cuales son clasificados en el Nivel 1 de algebrización según Godino et al. (2014).

En términos generales, el trabajo realizado dejó ver ciertos elementos que se consideran relevantes, en particular, los diseños de Fichas en el marco del LabMat como estrategia

pedagógica permitieron la construcción de un aprendizaje significativo, dado que favorece la experimentación, el razonamiento, la resolución de problemas y la comunicación. En otras palabras, la propuesta de trabajo en el LabMat contribuye a la fundamentación del pensamiento matemático.

Por ejemplo, al asumir la multiplicación como una relación cuaternaria (Isomorfismo de medidas), conduce a conceptos vinculados con el pensamiento Variacional, tales como detección de regularidades, patrón numérico, análisis escalar, análisis funcional, entre otros, posibilitando a los educandos superar dificultades que comúnmente se les presentan en los grados superiores.

El uso de tablas en situaciones problemas, en las que se discriminen dos espacios de medidas, que dé la oportunidad a los estudiantes de completar algunos espacios en dichas tablas, permite a los mismos un acercamiento significativo al pensamiento Variacional, dado que esta representación posibilita la identificación de variaciones, regularidades, patrones numéricos, relaciones entre cantidades, entre otros elementos característicos de dicho pensamiento.

De igual forma, se considera que el uso de tablas permite a los estudiantes acceder a diversos procedimientos, los cuales se relacionan con la proporcionalidad, con los análisis escalares y funcionales, siendo estos procesos conceptos propios del pensamiento Variacional, puesto que la mayoría de los estudiantes (75%) hizo uso de manera implícita de una de las propiedades de la linealidad ($f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$), la cual fundamenta cada uno de los procesos antes mencionados.

Por otro parte, el diseño, rediseño e implementación de las Fichas del LabMat permeadas de situaciones contextualizadas, referidas a la compra y venta de productos autóctonos de la

región pacífica, permitió a los estudiantes un importante progreso hacia el desarrollo del pensamiento Variacional. Esto se da debido a que el abordaje de situaciones que partan de un contexto que es cotidiano y familiar para los educandos, hace posible la identificación de la variación y el cambio por parte de estos.

La indagación desarrollada en este trabajo de grado deja ver su alcance e importancia, debido a que contribuyó al desarrollo de pensamiento matemático, en este caso pensamiento Variacional, y a la adquisición de competencias matemáticas tales como la comunicación, resolución de problemas, razonamiento, entre otros.

Para finalizar se considera que la indagación permite concluir que el LabMat como una propuesta o estrategia pedagógica, en la cual se planteen situaciones problemas contextualizadas y vinculadas a las estructuras multiplicativas en el caso del Isomorfismo de medida, permitió a los estudiantes del grado sexto de la IERV un acercamiento significativo al desarrollo del pensamiento Variacional. Esto se dice debido a que la mayoría de los estudiantes (88%) logró ubicarse en el Nivel 1 de algebrización, lo que indica que esta propuesta dio respuesta a la pregunta problema, la cual direccionó este trabajo de indagación.

5.2 ALGUNAS REFLEXIONES

En el desarrollo de esta propuesta de indagación se pudo constatar que vincular las actividades académicas de las diferentes Instituciones Educativas del país con la estrategia del LabMat como una forma de apoyo a la labor docente, a los procesos de aprendizaje y a la gestión curricular, es una alternativa potente y seguramente enriquecedora, dado que permite a los estudiantes un acercamiento a conceptos matemáticos y a diversos procesos de la actividad

matemática (razonamiento, resolución de problemas, comunicación) de manera activa y participativa, lo que configura una manera de aprender más significativa para los mismos.

Así como también que la Matematización de situaciones problemas procedentes del contexto sociocultural donde está ubicado el estudiante, genera que este pueda reconocer algunos elementos propios de la situación y a su vez, dar cuenta de ello.

Hay que decir, que la matematización horizontal, permite a los estudiantes la interpretación e identificación de los elementos que emergen de las situaciones contextualizadas, las cuales posibilitan la puesta en escena de diversas estrategias de solución; la matematización vertical, permite al estudiante el uso de conceptos fundamentados en los procedimientos algorítmicos y/o propiedades que conduzcan a dar respuesta a las situaciones planteadas.

Ahora bien, de acuerdo con el MEN (2006) se deja como recomendación iniciar con el estudio del desarrollo del pensamiento Variacional desde la educación básica primaria, y que este sea abordado desde el análisis de la variación y el cambio, haciendo uso de diferentes estrategias, las cuales potencien la participación y aprendizaje del pensamiento bajo estudio.

Por tanto, sería interesante desarrollar otros trabajos de investigación o indagación que permitan conocer e identificar los alcances de planteamientos como: ¿Cómo abordan los estudiantes de grado tercero, la noción de proporcionalidad, a partir de la estrategia del Laboratorio de Matemáticas?, ¿Qué emerge cuando los estudiantes de grado cuarto se enfrentan a situaciones problemas relacionadas con las estructuras multiplicativas, a partir de la estrategia propuesta desde el Laboratorio de Matemáticas?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alchemy (2017). WolframAlpha Computational knowledge engine, [version electronica]
Recuperada de <https://www.wolframalpha.com/input/?i=alchemy>
- Alonso et al, (1987). Aportaciones al debate sobre las matemáticas en los noventa. Simposio de Valencia. En: Hernán, F. y Carrillo, E. (1991). Recursos en el Aula de Matemáticas. Editorial Síntesis. 2ª Edición. Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. p.20
- Arcavi, A. (2006). Lo cotidiano y lo académico en matemáticas. Disponible en <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/63/Articulo01.pdf>
- Arce, J. (2004). El Laboratorio de Matemáticas en la Escuela Normal Superior Farallones de Cali. Universidad del Valle, Cali, Colombia
- Arce, J., Pérez, C. y Rengifo, F. (1999). Laboratorio e matemáticas educación básica (LMEB_UV) proyecto de la universidad del valle, instituto de educación y pedagogía, grupo de educación matemática (GEM). Cali.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En: Artigue, m.; Douady, R.; Moreno, L.; Gómez, P. (Ed.) Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Azarquiel, G. (1993). Ideas y actividades para enseñar algebra. Madrid, España: Síntesis

Banerjee, R. (2008). Developing a learning sequence for transiting from arithmetic to elementary algebra. Ph. D. dissertation Consultado 27/05/2012 en: <http://www.hbcse.tifr.res.in/research-development/ph.d.-thesis/rakhi-synopsis>.

Bell, A. (1995). Purpose in school algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, 14(1), 41–73.

Bell, P.(2004). "On the theoretical breadth of design-based research in Education". *Educational Psychologist*. Vol. 4, núm. 39, pp. 243-253

Bkouche, R. (2008). Des laboratoires de mathématiques, Repères IREM, n°70.

Carpenter, T. P., Moser, J. M., y Romberg, T. A. (1982) (Eds), *Addition and subtraction: A cognitive view*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Carraher, D., y Schilemann, A. (2016). *Powerful Ideas in Elementary School Mathematics*. In L. D. English (Ed.), *third handbook of international research in mathematics education* (pp. 191-218) Routledge, New York and London.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J., Deulofeu, M., Penalva, F., García, J y Ordóñez, L (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En R. Keith Sawyer (Ed.) *The Cambridge handbook of the learning sciences*. Nueva York: Cambridge University Press. pp. 135-152.

Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R y Schauble, L. (2003). *Design experiment in Educational Research*. Educational Researcher, 32(1), 9-13.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. Educational Studies in Mathematics, (3), 413 - 435

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. Educación Matemática, 11(1), 77-88.

Giacardi, L. (2011). L'emergere Dell'idea Di Laboratorio Di. Matematica Agli Inizi Del Novecento, Dipartimento di Matematica – Università di Torino.

Godino, J., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. Boletim de Educação Matemática – BOLEMA, 26 (42B), p - p

Godino, J., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219

Godino J. y Font V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Granada. 767 - 826, Recuperado en internet: <https://clea.edu.mx/biblioteca/Razonamiento-algebraico-y-su-didactica-para-maestros.pdf>

Kieran, C. y Filloy, E., (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229 - 240.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. A broadening of sources of meaning. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, 11-49. Rotterdam: Sense Publishers.

Martínez, M., Cobos, J., y Torres, E. (2015). Matematización y modelización: experiencias y saberes. Una propuesta de aula. Espiral. *Revista de Docencia e Investigación*, 5(2), 9-22.

Martinez, I., (2014). Matematización como medio y no como fin. (Tesis de maestría) Universidad de Granada, España. Recuperado de https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/TFM_EntrenaMartinez.pdf

Maschietto, M. y Trouche, L. (2010). Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories, ZDM *The International Journal on Mathematics Education*, 42 (1), 33–47.

Mason, J., Stephens, M., y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 10-32.

Maza, C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y división*. Matemáticas: cultura y aprendizaje. España: Editorial Síntesis.

MEN (1998) Lineamientos curriculares de Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional. Santafé de Bogotá.

MEN (2006) Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En MEN, *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanía*. (Primera ed., págs. 46 - 94). Bogotá, Colombia: Revolucion Educativa, Colombia Aprende.

Molina, M. (2007). Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual. (Tesis para optar por el grado de doctora en Didáctica de la Matemática). Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

Molina, M, Castro, E, Molina, J y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88.

Lesh, R. A y Landau, M. (Eds) (1983). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic press.

Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3º y 4º de una institución educativa de la Educación Básica*. (Tesis de doctorado), Universidad del Valle, Cali.

Ospina, M. y Salgado, J. (2016). *La enseñanza de la multiplicación como isomorfismo de medida: Aproximación discursiva*. (Tesis de maestría), Universidad del Valle, Cali

Pabón, O.; Arce, J.; Vega, M. y Garzón, D. (2011). *El laboratorio de Matemáticas: una estrategia de producción y uso de recursos pedagógicos en la clase de matemáticas*. Recuperado el 15 de julio de 2016 desde: http://ciaem-redumate.org/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/2340/1009

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective, *PME-NA*, 1, 2-21.

Rico, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de educación*, (1), 275-294.

Schwartz, J. L. (1996). Semantic aspects of quantity. Unpublished manuscript, MIT and Harvard Graduate School of Education, Cambridge, MA.

Trouche, L. (2010). Les laboratoires de mathématiques pour enseigner, une métaphore productive Hier et aujourd'hui, pour les élèves comme pour les maîtres

Van Reeuwijk, M. (1995) Students knowledge of algebra. Proceedings of the eighteenth international conference for the psychology of mathematics education (PME 19, Vol. 1, pp. 135-150). Recife, Brazil: Universidade federal de pernambuco.

Vascos, C. (2002), El pensamiento variacional y la modelación matemática. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia. 1-14.

Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems, In T.P. Carpenter, J. M., Moser, & T.A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A cognitive view* (pp. 39-59). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. En Lesh, R. & Landau, M. (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 127-174). London: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*, 141-161. Hillsdale, NJ: Erlbaum; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

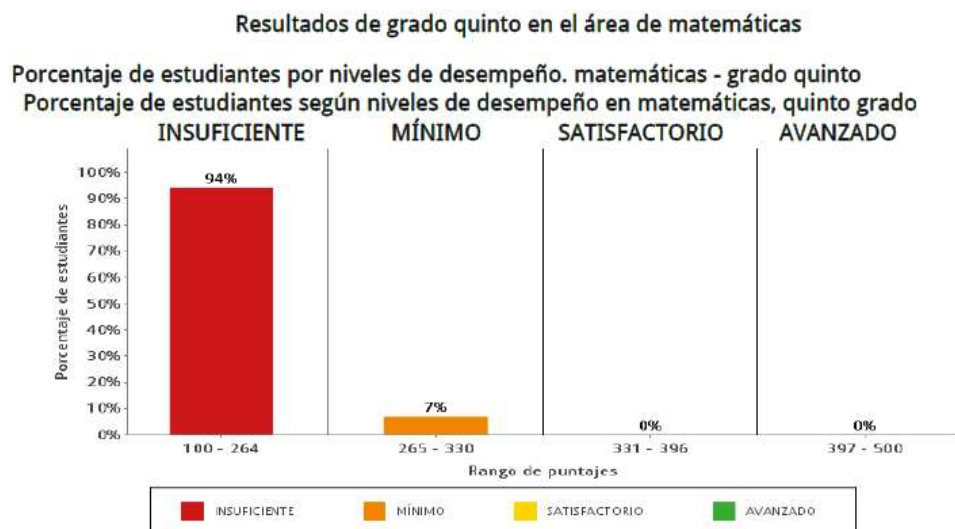
Vergnaud, G. (1994). Multiplicative Conceptual field: What and Why? In Harel, G y Confrey, J (Eds.), *the development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-59). Albany: State University of New York press.

Vergnaud, G. (2000): *El niño, las matemáticas y la realidad, problema de las Matemáticas en la escuela*. México: Trillas.

Zambrano, J. y Moreno, L (2011). Pensamiento variacional y sentencias e igualdades numéricas aditivas. *Revista Unmar*, (58), 97 -104

ANEXOS

ANEXO 1. PORCENTAJE DE ESTUDIANTES POR NIVELES DE DESEMPEÑOS 2015



ANEXO 2. PORCENTAJE DE ESTUDIANTES POR NIVELES DE DESEMPEÑOS 2016



ANEXO 3. PORCENTAJE DE ESTUDIANTES POR NIVELES DE DESEMPEÑOS 2017



ANEXO 4. ESTRUCTURA DE LAS FICHAS DEL LABMAT DE LA IERV

En este documento se presentan la estructura general de las Fichas del Laboratorio de Matemáticas (LabMat), de la Institución Educativa República de Venezuela, en la que para su diseño se tuvo como referencia los realizados por la Universidad del Valle (sede Meléndez y sede Norte del Cauca); con el objetivo de que cada ficha que se diseñe en el LabMat pueda tener la misma estructura,

Formato general de las Fichas y soporte del LabMat

Para la elaboración de los formatos de todas las Fichas se debe tener en cuenta los siguientes aspectos:

Márgenes: mínimo 2.0 máximo 2.5 a todos los lados

Letra: Times New Román

Tamaño de letra: mínimo 10 y máximo 12 puntos

Al inicio de la ficha, se debe hacer la presentación institucional correspondiente, tal como se sigue:



INSTITUCIÓN

Parte I

En esta etapa se presentará la descripción de cada uno de los contenidos que hacen parte de la estructura de la ficha:

01 CÓDIGO: para determinar este se escribe un primer número del 1 a 5 según el tipo de mesa³; luego un guion (-), el cual va una inmediatamente después del uno de los números anteriores; tercero, las tres primeras letras en mayúsculas de la actividad central que se pretende abordar en la ficha, para esto se tomara como referencia algunos de los procesos que están estipulados en los lineamientos curriculares para matemáticas del MEN (1998) tales como:

³ La distribución de las mesas corresponde a: 1 Pensamiento Numérico – Variacional; 2 Pensamiento Aleatorio – Estocástico; 3 Pensamiento Espacial – Métrico; 4 Juegos Matemáticos; y 5 Nuevas Tecnologías.

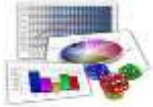
razonamiento; comunicación; modelación; resolución de problemas. Por último, se escriben dos dígitos que representan el número de actividades matemáticas en relación con el orden de su elaboración, es decir, cada número debe coincidir con la cronología de la actividad realizada.

02 NOMBRE DE LA ACTIVIDAD:

Se sugiere que este nombre sea corto, creativo, que llame la atención y que esté acorde con el tema o a la actividad que se plantea.

03 LOGO (MESA):

Se inserta una imagen o logo que representan la Mesa en el cual se desenvuelve la actividad matemática planteada, tal como se sigue:

Pensamiento Numérico – Variacional	
Pensamiento Aleatorio – Estocástico	
Pensamiento Espacial – Métrico	
Juegos Matemáticos	
Nuevas Tecnologías	

04 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA:

Realizar la explicación de las tareas, preguntas o problemas que se le proponen al resolutor, en caso de que la actividad incluya el diseño del material manipulativo se presenta un instructivo de construcción.

05 IMAGEN

En este espacio se debe insertar una imagen, dibujo o grafica e información no escrita complementaria que represente la actividad propuesta en la ficha.

06 AUTORES Y AÑO DE PUBLICACIÓN.

07 FUENTE BIBLIOGRÁFICA Y OTROS DATOS QUE SE CONSIDEREN IMPORTANTES.

A continuación, se presenta el formato de las celdas antes descritas:



INSTITUCION EDUCATIVA REPUBLICA DE VENEZUELA

01 CÓDIGO	02 NOMBRE DE LA ACTIVIDAD	03 LOGO (MESA)
04 ACTIVIDAD MATEMÁTICA	05 IMAGEN	
06 AUTORES Y AÑO DE PUBLICACIÓN	07 BIBLIOGRAFÍA Y OTROS DATOS IMPORTANTES	

Parte II

Tiene que ver con el soporte de cada ficha este se describe a continuación:

08 SOPORTE DE FICHA N° ____ Código de ficha

09 TIEMPO DE TRABAJO

En este apartado se presenta el tiempo (minutos) en el que se propone desarrollar la actividad.

10 FORMA DE TRABAJO

En este ítem se requiere especificar la forma de trabajo bien sea trabajo individual (TI) o trabajo en equipo (TE)

11 OBJETIVOS DE LA ACTIVIDAD:

Especificar qué es lo que se quiere lograr con la aplicación de la actividad propuesta.

12 MATERIALES REQUERIDOS:

Indicar aquellos implementos (artefactos o material fungible) que Son necesarios para el desarrollo de la actividad.

13 CONTENIDO O COMPETENCIA MATEMÁTICA MOVILIZADA:

Puede recurrirse a las competencias señaladas en los estándares básicos del MEN o a los criterios de las TIMSS.

14 ESTRATEGIA DE SOLUCIÓN: Presentar por lo menos una estrategia de solución.

A continuación, se presenta el formato del soporte de la ficha antes descripto:

08 CODIGO	09 TIEMPO DE TRABAJO	10 FORMA DE TRABAJO TI ☐ TE ☐
11 OBJETIVOS DE LA ACTIVIDAD		12 MATERIALES REQUERIDOS
13 COMPETENCIA MATEMÁTICA MOVILIZADA		

14 STRATEGIA DE SOLUCIÓN

ANEXO 5. FICHA X (CHONTA-COSTOS)

CODIGO: 1-CHONTA-01	CHONTA-COSTOS	
El Chontaduro es quizá el fruto más importante del sistema agrícola del litoral pacífico. Es una especie fruta muy apetecida en el distrito de Buenaventura; y de manera muy particular su venta se realiza en diferentes presentaciones: por unidad, por bolsa, por coca y por racimo, es de resaltar que estas presentaciones son de acuerdo al tamaño de un Chontaduro promedio, (la coca generalmente es del mismo tamaño) El señor Angulo al observar un racimo de Chontaduro dijo: <i>aquí hay 5 cocas de Chontaduro, y en una coca hay 10 Chontaduros.</i> - Si un Chontaduro cuesta \$ 600 pesos. ¿Cuánto cuesta una coca de Chontaduros? ¿Cómo representarías esta situación en una tabla? ¿De qué otra manera puede representar la primera situación? ¿Cuánto cuesta un racimo de Chontaduro?		
ELABORADA POR: - DANIEL GIL - JAROL VALENCIA	Datos tomados de la galería de pueblo nuevo del distrito de buenaventura.	

ANEXO 6. FICHA X' (CHONTA-COSTOS)

CODIGO: 1-CHONTA-02	CHONTA-COSTOS																															
El Chontaduro es quizá el fruto más importante del sistema agrícola del litoral pacífico. Es una especie fruta muy apetecida en el distrito de Buenaventura; y de manera muy particular su venta se realiza en diferentes presentaciones: por unidad, por bolsa, por coca y por racimo, es de resaltar que estas presentaciones son de acuerdo al tamaño de un Chontaduro promedio, (la coca generalmente es del mismo tamaño) Si un Chontaduro cuesta \$ 600 pesos. Completa la siguiente tabla <table><tr><th>Chontaduros</th><th>precio</th></tr><tr><td></td><td>1800</td></tr><tr><td>4</td><td>2400</td></tr><tr><td>5</td><td>3000</td></tr><tr><td></td><td>4200</td></tr><tr><td>8</td><td>4800</td></tr><tr><td></td><td>6000</td></tr></table> ¿Cómo puedes saber cuántos Chontaduros se pueden comprar con 3600 pesos? El señor Ángulo al observar un racimo de Chontaduro dijo: <i>aquí hay 5 cocas de Chontaduro, y en una coca hay 9 Chontaduros.</i> Ahora completa la siguiente tabla <table><tr><th>cocas</th><th>Chontaduros</th></tr><tr><td></td><td>18</td></tr><tr><td>2</td><td>27</td></tr><tr><td>3</td><td>36</td></tr><tr><td></td><td>45</td></tr><tr><td>6</td><td></td></tr><tr><td>8</td><td></td></tr><tr><td></td><td>90</td></tr></table> ¿Cómo puedes saber cuántos Chontaduros hay en 7 cocas de Chontaduros?		Chontaduros	precio		1800	4	2400	5	3000		4200	8	4800		6000	cocas	Chontaduros		18	2	27	3	36		45	6		8			90	
Chontaduros	precio																															
	1800																															
4	2400																															
5	3000																															
	4200																															
8	4800																															
	6000																															
cocas	Chontaduros																															
	18																															
2	27																															
3	36																															
	45																															
6																																
8																																
	90																															
ELABORADA POR: - DANIEL GIL	Datos tomados de la galería de pueblo nuevo del distrito de buenaventura.																															

- JAROL VALENCIA	
------------------	--

ANEXO 7. SOPORTE FICHA X' (CHONTA-COSTO)

CODIGO: 1-CHONT-02		TIEMPO DE TRABAJO: 90 MIN		FORMA DE TRABAJO:																	
				TI		TE	X														
OBJETIVOS DE LA ACTIVIDAD: - Identificar patrones numéricos que permita completar la tabla. - Establecer generalidades a partir de un patrón. - Realizar procesos de tipo escalar y funcional.				MATERIALES REQUERIDOS: - Ficha de laboratorio - Papel y lápiz.																	
CONTENIDO O COMPETENCIA MATEMATICA MOVILIZADA: - Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas). - Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.																					
ESTRATEGIA DE SOLUCION																					
En la ficha X', se presentan dos actividades que para su resolución es necesario completar la información de dos tablas que surgen a partir de un enunciado. A continuación, se expondrá cada actividad con su respectiva solución.																					
Actividad 1. Si un Chontaduro cuesta \$ 600 pesos. Completa la siguiente tabla				Una vez se conozca el vínculo (\$600), para encontrar el valor correspondiente a la primera celda, es necesario realizar una división $1800 / 600 = 3$, que va a corresponder al número de Chontaduros. Este mismo procedimiento sigue para el resto de espacios vacíos del espacio de medida 1 (E1). - Celda 4, sería la división de $4200 / 600 = 7$, que va a corresponder al número de Chontaduros - Celda 6, sería la división de $6000 / 600 = 10$ Chontaduros. De manera similar a las anteriores se halla la respuesta de la pregunta ¿Cómo puedes saber cuántos Chontaduros se pueden comprar con 3600 pesos? En la que dividen $3600 / 600 = 6$ Chontaduros.																	
<table><tr><th>chontaduros</th><th>precio</th></tr><tr><td></td><td>1800</td></tr><tr><td>4</td><td>2400</td></tr><tr><td>5</td><td>3000</td></tr><tr><td></td><td>4200</td></tr><tr><td>8</td><td>4800</td></tr><tr><td></td><td>6000</td></tr></table>				chontaduros	precio		1800	4	2400	5	3000		4200	8	4800		6000				
chontaduros	precio																				
	1800																				
4	2400																				
5	3000																				
	4200																				
8	4800																				
	6000																				

En la segunda parte de la actividad se presenta la siguiente situación:

El señor Ángulo al observar un racimo de Chontaduro dijo: *aquí hay 5 cocas de Chontaduro, y en una coca hay 9 Chontaduros.*

Ahora completa la siguiente tabla

Cocas	Chontaduros
2	18
3	27
	36
6	
8	
	90

Esta actividad presenta dos tipos de soluciones de acuerdo con Vergnaud (2000), de la división como la búsqueda de la cantidad de unidades, que se necesita para encontrar los valores correspondientes a las celdas de cocas 3,6; y por otro lado en las celdas de Chontaduros 4 y 5 se requiere de una multiplicación o regla de tres celdas.

División búsqueda de la cantidad de unidades:

- En la celda 3, se divide $36/9 = 4$ cocas de Chontaduros.
- En la celda 6, se divide $90/9 = 10$ cocas de Chontaduros.

Multiplicación:

- Celda 4, se multiplica el número de cocas por la cantidad de Chontaduros que hay en una sola, $6 \times 9 = 54$ Chontaduros.
- Celda 5, se multiplica $8 \times 9 = 72$ Chontaduros.

La pregunta ¿Cómo puedes saber cuántos Chontaduros hay en 7 cocas de Chontaduros?

- Hace parte de las soluciones tipo multiplicación, de manera que se multiplica $7 \times 9 = 63$ Chontaduros.

ANEXO 8. FICHA Y (PLASTI-VASOS)

CODIGO: 1-PLAST-01	PLASTI-VASOS																																							
Juan se dirige a Plásticos del Pacífico a preguntar por unos vasos plásticos para vender jugo de Borojó en su escuela. El vendedor le expresa que tiene vasos de diferentes tamaños: 1 oz, 2 oz, 5 oz, 8 oz, 12 oz, 16 oz, además le aclara que en un vaso de 1 oz caben 30 ml de líquido. Para eso decide realizar la siguiente tabla, ayúdale a completarla <table><tr><th>Oz</th><th>Mililitros</th></tr><tr><td>1</td><td>30</td></tr><tr><td>2</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td></tr></table> ¿Cómo se puede saber cuánto jugo de Borojó caben en un vaso de 10 oz? Completa la siguiente tabla, cual relaciona la cantidad de vasos de jugo de Borojó con el precio <table><tr><th>vasos</th><th>precios</th></tr><tr><td>1</td><td>800</td></tr><tr><td>2</td><td>1600</td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td></td></tr><tr><td>8</td><td></td></tr><tr><td>10</td><td></td></tr></table> ¿Cuánto vale un vaso de jugo de Borojó? En la siguiente tabla se relaciona la cantidad de vasos de limonada con el precio por vaso, completa y responde: <table><tr><th>vasos</th><th>precios</th></tr><tr><td>2</td><td>1200</td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr><tr><td>5</td><td>3000</td></tr><tr><td>7</td><td></td></tr><tr><td>8</td><td>4800</td></tr><tr><td>10</td><td></td></tr></table> Si tengo 7200 ¿cuántos vasos de limonada puedo comprar?		Oz	Mililitros	1	30	2		3		4		vasos	precios	1	800	2	1600	3		5		8		10		vasos	precios	2	1200	3		5	3000	7		8	4800	10		
Oz	Mililitros																																							
1	30																																							
2																																								
3																																								
4																																								
vasos	precios																																							
1	800																																							
2	1600																																							
3																																								
5																																								
8																																								
10																																								
vasos	precios																																							
2	1200																																							
3																																								
5	3000																																							
7																																								
8	4800																																							
10																																								
ELABORADA POR: - DANIEL GIL - JAROL VALENCIA	Datos tomados de la galería de pueblo nuevo del distrito de buenaventura.																																							

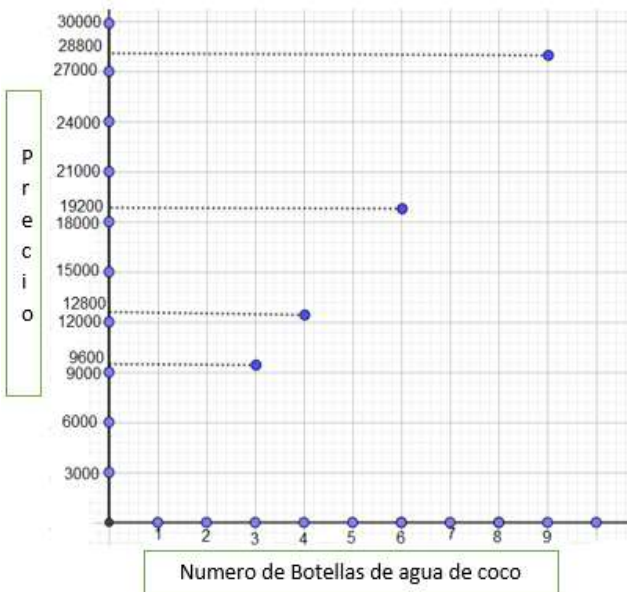
ANEXO 9. SOPORTE FICHA Y (PLASTI-VASOS)

CODIGO: 1-PLAST-01	TIEMPO DE TRABAJO: 90 MIN	FORMA DE TRABAJO: TI ☐ E ☒										
OBJETIVOS DE LA ACTIVIDAD: - Identificar patrones numéricos que permita completar la tabla. - Establecer generalidades a partir de un patrón. - Realizar procesos de tipo escalar y funcional.		MATERIALES REQUERIDOS: - Ficha de laboratorio - Papel y lápiz.										
CONTENIDO O COMPETENCIA MATEMATICA MOVILIZADA: - Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas). - Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.												
ESTRATEGIA DE SOLUCION En la ficha Y, Se divide en tres actividades que para su resolución es necesario completar la información de tres tablas que surgen a partir de un enunciado. A continuación, se expondrá cada actividad con su respectiva solución.												
Actividad 1. ayúdale a completarla: <table border="1" style="margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th>Oz</th> <th>Mililitros</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>30</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td></td> </tr> <tr> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		Oz	Mililitros	1	30	2		3		4		Una vez se conozca el precio por unidad, para encontrar el valor correspondiente a la segunda celda del espacio de medida 2, es necesario realizar una multiplicación de $30 \times 2 = 60$, que va a corresponder a los mililitros equivalentes a 2 oz. Este mismo procedimiento sigue para el resto de espacios vacíos del espacio de medida 2 (Mililitros). - Celda 3, sería la multiplicación de $3 \times 30 = 90$, que va a corresponder los mililitros equivalentes a 3 oz. - Celda 4, sería la multiplicación de $4 \times 30 = 120$ mililitros. De manera similar a las anteriores se halla la
Oz	Mililitros											
1	30											
2												
3												
4												

	respuesta de la pregunta ¿Cómo se puede saber cuánto jugo de Borojé caben en un vaso de 10 oz? En la que multiplican $10 \times 30 = 300$ mililitros.														
En la segunda parte de la actividad se presenta la siguiente situación:															
Completa la siguiente tabla, cual relaciona la cantidad de vasos de jugo de Borojé con el precio <table border="1"> <thead> <tr> <th>vasos</th><th>precios</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td><td>800</td></tr> <tr> <td>2</td><td>1600</td></tr> <tr> <td>3</td><td></td></tr> <tr> <td>5</td><td></td></tr> <tr> <td>8</td><td></td></tr> <tr> <td>10</td><td></td></tr> </tbody> </table>	vasos	precios	1	800	2	1600	3		5		8		10		Esta actividad presenta una forma de solución de acuerdo con Vergnaud (2000), la multiplicación como la regla de tres simples básicos, que se necesita para encontrar los valores correspondientes a las celdas de vasos 3, 5, 8 y 10. Multiplicación: - Celda 3, se multiplica el número de vasos por el precio correspondiente a un vaso, $3 \times 800 = 2400$ pesos. - Celda 4, se multiplica $5 \times 800 = 3000$ pesos. - Celda 5, se multiplica $8 \times 800 = 6400$ pesos. - Celda 6, se multiplica $10 \times 800 = 8000$ pesos. La pregunta ¿Cuánto vale un vaso de jugo de Borojé? - No era necesario realizar ningún calculo, solo era extraer la información suministrada en la tabla en este caso un vaso de Borojé cuesta 800 pesos.
vasos	precios														
1	800														
2	1600														
3															
5															
8															
10															
En la siguiente tabla se relaciona la cantidad de vasos de limonada con el precio por vaso, completa y responde: <table border="1"> <thead> <tr> <th>vasos</th><th>precios</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td><td>1200</td></tr> <tr> <td>3</td><td></td></tr> <tr> <td>5</td><td>3000</td></tr> <tr> <td>7</td><td></td></tr> <tr> <td>8</td><td>4800</td></tr> <tr> <td>10</td><td></td></tr> </tbody> </table> Si tengo 7200 ¿cuántos vasos de limonada puedo comprar?	vasos	precios	2	1200	3		5	3000	7		8	4800	10		Esta actividad presenta dos formas de solución de acuerdo con Vergnaud (2000), la primera está relacionada con la división como búsqueda del valor unitario, y la segunda con la multiplicación como la regla de tres simple básica, que se necesita para encontrar los valores correspondientes a las celdas de vasos 2, 4, y 6. División: búsqueda del valor unitario, para este caso, es necesario conocer el vínculo correspondiente a la celda 1 entre los dos espacios de medida, para hallarlo hay que realizar una división entre el precio 1200 y la cantidad de vasos para encontrar el valor unitario. $1200 / 2 = 600$ pesos corresponden a un vaso de limonada. Para encontrar los valores correspondientes a los espacios de la tabla, se debe utilizar:
vasos	precios														
2	1200														
3															
5	3000														
7															
8	4800														
10															

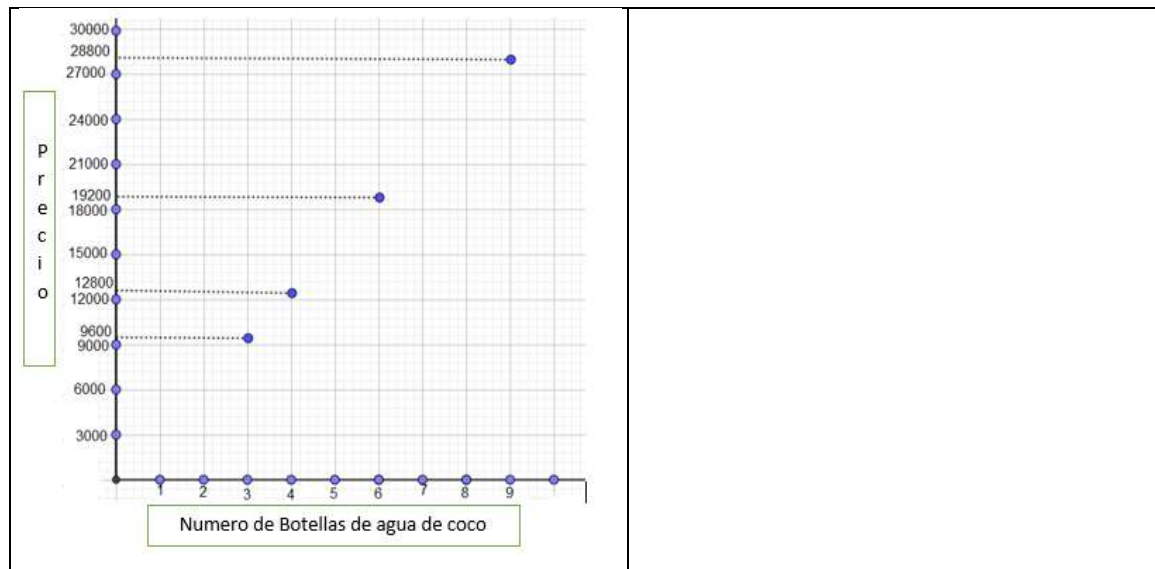
	Multiplicación: - Celda 2, se multiplica el número de vasos por el precio correspondiente a un vaso, $3 \times 600 = 1800$ pesos. - Celda 4, se multiplica $7 \times 600 = 4200$ pesos. - Celda 6, se multiplica $10 \times 600 = 6000$ pesos.
--	--

ANEXO 10. FICHA Y' (AGUA-COCO)

CÓDIGO: 01-AGUAC-O1	AGUA-COCO	
El señor Jacobo vende agua de Coco, le vende a don Teo 3 botellas en 9600 pesos. Don Teo llega a su casa y se queda pensando ¿cuánto dinero pagaría si tuviera que comprar 1, 2, 5, 7 y 8 botellas de agua de Coco? para lo cual realizó el siguiente gráfico que contiene los precios de 4 ,6 y 9 botellas de agua de Coco. Encuentra los precios que hacen falta en el gráfico: 		
De acuerdo al grafico anterior y con tus propias palabras comenta que ocurre en las siguientes situaciones: a. Describe los procedimientos que usaste para calcular los valores que hacían falta en el gráfico b. Si 3 botellas de agua de Coco valen 9600, si compro más botellas ¿qué pasa con el dinero que debo pagar por ellas? c. Si 9 botellas de agua de Coco valen 28800, si compro menos botellas ¿qué pasa con el dinero que debo de pagar por ellas?		
ELABORADA POR: - DANIEL GIL - JAROL VALENCIA	Datos tomados de la galería de pueblo nuevo del distrito de buenaventura.	

ANEXO 11. SOPORTE FICHA Y' (AGUA-COCO)

CÓDIGO: 01-AGUAC-O1	TIEMPO DE TRABAJO: 90 MIN	FORMA DE TRABAJO: TI ☐ E ☒
OBJETIVOS DE LA ACTIVIDAD: - Identificar patrones numéricos que permita completar la tabla. - Establecer generalidades a partir de un patrón. - Realizar procesos de tipo escalar y funcional.		MATERIALES REQUERIDOS: - Ficha de laboratorio - Papel y lápiz.
CONTENIDO O COMPETENCIA MATEMATICA MOVILIZADA: - Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas). - Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.		
ESTRATEGIA DE SOLUCION En la ficha Y', para la resolución de sus dos actividades es necesario completar la información de un gráfico que se describe mediante un enunciado y la segunda parte nace de tres preguntas relacionadas con el grafico. A continuación, se expone la actividad con su respectiva solución.		
Actividad 1. Encuentra los precios que hacen falta en el gráfico:		Esta actividad presenta dos formas de solución de acuerdo con Vergnaud (2000), la primera está relacionada con la división como búsqueda del valor unitario. División: búsqueda del valor unitario, para este caso, es necesario conocer el vínculo correspondiente al precio de una botella de agua de Coco, para hallarlo hay que realizar una división entre el precio 1200 y la cantidad de botellas vinculada a ese precio en este caso (3, 9600) para encontrar el valor unitario. $9600 / 3 = 3200$ peso corresponde al precio de una botella de agua de Coco.



En la segunda parte de la actividad tiene que ver con tres preguntas que surgen del gráfico:

Numero de Botellas de agua de coco	P r e c i o
1	3200
2	6400
3	9600
4	12800
5	16000
6	19200
7	22400
8	25600
9	28800

La segunda parte de esta actividad se deriva de encontrar el valor de la unidad, luego de tener esta cantidad se hace uso de la multiplicación como la regla de tres simples básicos, que se necesita para encontrar los precios correspondientes a las botellas 2, 5, 7 y 8.

- Multiplicación:
 - Para encontrar el precio de dos botellas, se multiplica el número de botellas por el precio de una, $2 \times 3200 = 6400$ pesos.
 - Para encontrar el precio de cinco botellas, se multiplica $5 \times 3200 = 16000$ pesos.
 - Para encontrar el precio de siete botellas, se multiplica $7 \times 3200 = 22400$ pesos.
 - Para encontrar el precio de ocho botellas, se multiplica $8 \times 3200 = 25600$ pesos.
- Es necesario observar que pasa con la cantidad de dinero y la cantidad de botellas, en este caso si aumentan las botellas aumentan su precio.
- Es necesario observar que pasa con la cantidad de dinero y la cantidad de botellas, en este caso si

De acuerdo al grafico anterior y con tus propias palabras comenta que ocurre en las siguientes situaciones:

- Describe los procedimientos que usaste para calcular los valores que hacían falta en el gráfico
- Si 3 botellas de agua de Coco valen 9600, si compro más botellas ¿qué pasa con el dinero que debo pagar por ellas?
- Si 9 botellas de agua de Coco valen 28800, si compro menos botellas ¿qué pasa con el dinero que debo de pagar por ellas?

ANEXO 12. FICHA Z (A OTRO NIVEL)

CÓDIGO: 01-AOTRO-O1	A OTRO NIVEL																																												
En la Galería de Pueblo Nuevo ubicada en el Distrito de Buenaventura se venden frutos de la región pacífica, los precios de cada producto se pueden apreciar en la siguiente tabla: <table><tr><th>Producto</th><th>Precio por unidad</th></tr><tr><td>Chontaduro</td><td>\$ 600</td></tr><tr><td>Borojó</td><td>\$ 1.850</td></tr><tr><td>Poma Rosa</td><td>\$ 500</td></tr><tr><td>Caimito</td><td>\$ 750</td></tr><tr><td>Guama</td><td>\$ 1.200</td></tr><tr><td>Carambolo</td><td>\$ 850</td></tr></table> Tabla N° 1 completa los datos que hacen falta en la siguientes tablas: <table><tr><th>CANTIDAD COCA DE PEPEPÁN</th><th>PRECIOS</th></tr><tr><td>2</td><td>2.100</td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td></tr><tr><td></td><td>5.200</td></tr><tr><td>7</td><td></td></tr><tr><td></td><td>8.400</td></tr><tr><td>10</td><td></td></tr></table> <table><tr><th>CANTIDAD COCA DE NAIDÍ</th><th>PRECIOS</th></tr><tr><td>3</td><td>3.900</td></tr><tr><td></td><td>6.500</td></tr><tr><td>8</td><td></td></tr><tr><td></td><td>13.000</td></tr><tr><td>11</td><td></td></tr><tr><td></td><td>19.500</td></tr></table>	Producto	Precio por unidad	Chontaduro	\$ 600	Borojó	\$ 1.850	Poma Rosa	\$ 500	Caimito	\$ 750	Guama	\$ 1.200	Carambolo	\$ 850	CANTIDAD COCA DE PEPEPÁN	PRECIOS	2	2.100	3		4			5.200	7			8.400	10		CANTIDAD COCA DE NAIDÍ	PRECIOS	3	3.900		6.500	8			13.000	11			19.500	Descripción y reglas del juego En el juego se dispondrán un grupo de tarjetas que estarán desplegadas en la pared y se distribuirán en tres niveles, cada nivel tendrá siete preguntas. Se selecciona una pregunta del primer nivel, el equipo que logre responderla correctamente pasara al siguiente y así sucesivamente hasta llegar al último. Tendrán 5 minutos para analizar, discutir y poder plantear la situación con su respetiva solución. Los dos primeros equipos que logren pasar los tres niveles serán los ganadores.
Producto	Precio por unidad																																												
Chontaduro	\$ 600																																												
Borojó	\$ 1.850																																												
Poma Rosa	\$ 500																																												
Caimito	\$ 750																																												
Guama	\$ 1.200																																												
Carambolo	\$ 850																																												
CANTIDAD COCA DE PEPEPÁN	PRECIOS																																												
2	2.100																																												
3																																													
4																																													
	5.200																																												
7																																													
	8.400																																												
10																																													
CANTIDAD COCA DE NAIDÍ	PRECIOS																																												
3	3.900																																												
	6.500																																												
8																																													
	13.000																																												
11																																													
	19.500																																												
ELABORADA POR: - DANIEL GIL - JAROL VALENCIA	Datos tomados de la galería de pueblo nuevo del distrito de buenaventura.																																												

ANEXO 13. SOPORTE FICHA Z (A OTRO NIVEL)

CÓDIGO: 01-AOTRO-O1	TIEMPO DE TRABAJO: 90 MIN	FORMA DE TRABAJO: TI ☐ E ☒																
OBJETIVOS DE LA ACTIVIDAD: - Identificar patrones numéricos que permita completar la tabla. - Establecer generalidades a partir de un patrón. - Realizar procesos de tipo escalar y funcional.		MATERIALES REQUERIDOS: - Ficha de laboratorio - Papel y lápiz.																
CONTENIDO O COMPETENCIA MATEMATICA MOVILIZADA: - Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas). - Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.																		
ESTRATEGIA DE SOLUCION En la ficha Z, se presentan dos actividades, para solucionarlas es necesario completar la información dos tablas con los datos que suministra la situación, y la segunda parte es un juego el cual consiste en responder preguntas e ir avanzando de nivel. A continuación se expondrá la actividad con su respectiva solución.																		
Actividad 1. Completa la siguiente tabla <table border="1" style="margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th>CANTIDAD COCA DE PEPEPÁN</th> <th>PRECIOS</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>2</td> <td>2.100</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td>4</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>5.250</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>8.400</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		CANTIDAD COCA DE PEPEPÁN	PRECIOS	2	2.100	3		4			5.250	7			8.400	10		Esta actividad presenta las tres formas de solución del Isomorfismo de medida planteadas por Vergnaud (2000), la primera está relacionada con la división como búsqueda del valor unitario. División: búsqueda del valor unitario, para este caso, es necesario conocer el vínculo correspondiente al precio de una coca de Pepepán, para hallarlo hay que realizar una división entre el precio 2100 y la cantidad de cocas vinculada a ese precio en este caso (2, 2100) para encontrar el valor unitario. $2100 / 2 = 1050$ pesos corresponde al precio de una coca de Pepepán. La segunda parte de esta actividad se deriva
CANTIDAD COCA DE PEPEPÁN	PRECIOS																	
2	2.100																	
3																		
4																		
	5.250																	
7																		
	8.400																	
10																		

	en que después de encontrar el valor de la unidad, se hace uso de la multiplicación como la regla de tres simple básica, que se necesita para hallar los precios correspondientes a 3, 4, 7 y 10 cocas de Pepegán. Multiplicación: - Para encontrar el precio de tres cocas de Pepegán, se multiplica el número de cocas por el precio de una, es decir, $3 \times 1050 = 3150$ pesos. - Para encontrar el precio de cuatro cocas de Pepegán, se multiplica $4 \times 1050 = 4200$ pesos. - Para encontrar el precio de siete cocas de Pepegán, se multiplica $7 \times 1050 = 7350$ pesos. - Para encontrar el precio de diez cocas de Pepegán, se multiplica $10 \times 1050 = 10500$ pesos. El tercer tipo de solución de acuerdo con Vergnaud (2000), es la división como la búsqueda de la cantidad de unidades, que se necesita para encontrar los valores correspondientes a las celdas de cocas 4 y 6: División búsqueda de la cantidad de unidades: - En la celda 4, se divide $5250/1050 = 5$ cocas de Pepegán. - En la celda 6, se divide $8400/1050 = 8$ cocas de Pepegán.
En la segunda parte de la actividad tiene con completar una tabla::	
	Esta actividad presenta las tres formas de solución del Isomorfismo de medida planteadas por Vergnaud (2000), la primera está relacionada con la división como búsqueda del valor unitario.

Completar la siguiente tabla:

CANTIDAD COCA DE NAIDÍ	PRECIOS
3	3.900
	6.500
8	
	13.000
11	
	19.500

División: búsqueda del valor unitario, para este caso, es necesario conocer el vínculo correspondiente al precio de una coca de Naidí, para hallarlo hay que realizar una división entre el precio 3900 y la cantidad de cocas vinculada a ese precio en este caso (3, 3900) para encontrar el valor unitario. $3900 / 3 = 1300$ pesos corresponde al precio de una coca de Naidí.

La segunda parte de esta actividad se deriva en que después de encontrar el valor de la unidad (\$ 1300), se hace uso de la multiplicación como la regla de tres simple básica, que se necesita para hallar los precios correspondientes a 3 y 5 cocas de Naidí.

Multiplicación:

- Para encontrar el precio de ocho cocas de Naidí, se multiplica el número de cocas por el precio de una, es decir, $8 \times 1300 = 10.400$ pesos.
- Para encontrar el precio de once cocas de Naidí, se multiplica $11 \times 1300 = 14.300$ pesos.

El tercer tipo de solución de acuerdo con Vergnaud (2000), es la división como la búsqueda de la cantidad de unidades, que se necesita para encontrar los valores correspondientes a las celdas de cocas 2, 4 y 6:

División búsqueda de la cantidad de unidades:

- En la celda 2, se divide $6.500/1300 = 5$ cocas de Naidí.
- En la celda 4, se divide $13.000/1300 = 10$ cocas de Naidí.
- En la celda 6, se divide $19.500/1300 = 15$ cocas de Naidí.

En la tercera parte de la ficha tiene que ver con las preguntas que van desde preguntas sencillas a preguntas más complejas:

Con los datos de la tabla N°1 resuelve las siguientes situaciones: Nivel 0 ¿Cuánto cuestan 2 Poma Rosas? ¿Cuánto cuestan 8 pomas rosas? - Si 2 Caimitos cuestan 1.500 ¿cuánto cuestan 10 Caimitos? ¿Cuántos Borojó puedo comprar con \$7.400? ¿Cuánto cuestan 3 Guamas? ¿Cuántos Carambolos puedo comprar con 3.400 pesos? - María recogió dinero y logró comprar 7 Caimitos. ¿Cuánto dinero recolectó María? Nivel 1 - Si en la mañana compro 2 Chontaduros y en la tarde compro 3. ¿Cuánto dinero gasté? - Si Juan compró 3.600 pesos de Guamas el lunes y el viernes compró 6.000 pesos de Guamas. ¿Cuántas Guamas compró? - Si Laura compra 3 Caimitos y 5 Carambolos ¿cuánto dinero gastó? - Si compro 3.900 de Naidí y más tarde compro 5.200 de Pepepán. ¿Cuántas frutas compré? - Carlos compro 3 cocas de Naidí el viernes y el sábado compra 7 cocas de Naidí. ¿Cuánto dinero gasto? - Susana compro 6.500 en cocas de Naidí, luego decide comprar 9.100 pesos más. ¿Cuántas cocas de Naidí compró en total? - Si con una coca de Pepepán comen 5 estudiantes ¿con cuantas cocas comerán 35 estudiantes? Nivel 2 - Andrés siempre compra los lunes dos Chontaduros, los martes el doble del lunes, los miércoles el triple del martes y los viernes el doble del miércoles. ¿Cuántos Chontaduros compró cada día? - Andrés siempre compra los lunes dos Chontaduro, los martes el doble del lunes, los miércoles el triple del martes y los viernes el doble del miércoles. ¿Cuánto dinero gastó cada día? - Andrés siempre compra los lunes dos Chontaduro, los martes el doble del lunes,	En los problemas de nivel 0, en las situaciones a, b, c, e y g; es necesario utilizar la multiplicación como regla de tres simples para su resolución. En los problemas de nivel 1, en las situaciones a, c y e, se requiere de realizar una adición y finalmente la multiplicación como regla de tres sencillos, mientras que en las situaciones b, d, f y g, es necesario una adición, pero al final una división como búsqueda de la cantidad de unidades. En los problemas de nivel 2, en las situaciones a, b, c y d, requieren de realizar adiciones y después multiplicaciones como regla de tres simple, en las situaciones e, f y g, es necesario realizar equivalencias entre espacios de medidas.
---	---

los miércoles el triple del martes y los viernes el doble del miércoles. ¿Cuántos Chontaduros compró en la semana? d. Andrés siempre compra los lunes dos Chontaduro, los martes el doble del lunes, los miércoles el triple del martes y los viernes el doble del miércoles. ¿Cuánto dinero gastó en toda la semana? e. El precio de 6 pomas rosas más el precio de una Guama. ¿A cuántas cocas de Pepegán es igual? f. Si tengo 3.400 ¿cuántas frutas puedo comprar y cuáles? g. Cesar tiene 4.000 pesos y Mónica tiene 3.400 ¿Cuántas frutas de las mismas pueden comprar con ese dinero?	
---	--

ANEXO 14. FICHA Z' (A OTRO NIVEL)

CÓDIGO: 02-AOTRO-O1	A OTRO NIVEL																																												
En la Galería de Pueblo Nuevo ubicada en el Distrito de Buenaventura se venden frutos de la región pacífica, los precios de cada producto se pueden apreciar en la siguiente tabla: <table><tr><th>Producto</th><th>Precio por unidad</th></tr><tr><td>Chontaduro</td><td>\$ 600</td></tr><tr><td>Borojó</td><td>\$ 1.850</td></tr><tr><td>Poma Rosa</td><td>\$ 500</td></tr><tr><td>Caimito</td><td>\$ 750</td></tr><tr><td>Guama</td><td>\$ 1.200</td></tr><tr><td>Carambolo</td><td>\$ 850</td></tr></table> Tabla N° 1 completa los datos que hacen falta en la siguientes tablas: <table><tr><th>CANTIDAD COCA DE PEPEPÁN</th><th>PRECIOS</th></tr><tr><td>5</td><td>5.250</td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr><tr><td></td><td>8.400</td></tr><tr><td>10</td><td></td></tr><tr><td></td><td>13.650</td></tr><tr><td>15</td><td>15.750</td></tr><tr><td></td><td>24.150</td></tr></table> <table><tr><th>CANTIDAD COCA DE NAIDÍ</th><th>PRECIOS</th></tr><tr><td>4</td><td>5.200</td></tr><tr><td></td><td>6.500</td></tr><tr><td>8</td><td></td></tr><tr><td></td><td>13.000</td></tr><tr><td>11</td><td></td></tr><tr><td></td><td>19.500</td></tr></table>	Producto	Precio por unidad	Chontaduro	\$ 600	Borojó	\$ 1.850	Poma Rosa	\$ 500	Caimito	\$ 750	Guama	\$ 1.200	Carambolo	\$ 850	CANTIDAD COCA DE PEPEPÁN	PRECIOS	5	5.250	3			8.400	10			13.650	15	15.750		24.150	CANTIDAD COCA DE NAIDÍ	PRECIOS	4	5.200		6.500	8			13.000	11			19.500	Con los datos de las tablas anteriores responde las siguientes situaciones: 1. En el salón de sexto se comieron 13 Poma Rosas y en séptimo se comieron ocho veces más la cantidad de Poma Rosas que se comieron en sexto. ¿Cuántas Poma Rosas se comieron en séptimo? 2. En la tienda de Don Pacho se venden 23 Guamas en un día, mientras que en la galería de pueblo nuevo, se venden 13 veces más la cantidad de Guamas que vende don Pacho. ¿Cuántas Guamas se venden en un día en la galería de pueblo nuevo? 3. Cesar compra Caimitos para 62 personas, si cada persona se come 6 Caimitos. ¿Cuántos Caimitos compro en total? 4. Manuel descubre que con una coca de Pepepán comen 8 personas, Ayúdale a Manuel a descubrir ¿cuantas personas comerían con 11 cocas? 5. Doña Juana se va para el colegio a vender pomas rosas. Las Poma Rosas las organiza en tres cajas todas con la misma cantidad. Si por la venta de dos cajas de Poma Rosas recibe \$ 59.500 pesos, ¿cuantas pomas rosas vendió doña Juana?
Producto	Precio por unidad																																												
Chontaduro	\$ 600																																												
Borojó	\$ 1.850																																												
Poma Rosa	\$ 500																																												
Caimito	\$ 750																																												
Guama	\$ 1.200																																												
Carambolo	\$ 850																																												
CANTIDAD COCA DE PEPEPÁN	PRECIOS																																												
5	5.250																																												
3																																													
	8.400																																												
10																																													
	13.650																																												
15	15.750																																												
	24.150																																												
CANTIDAD COCA DE NAIDÍ	PRECIOS																																												
4	5.200																																												
	6.500																																												
8																																													
	13.000																																												
11																																													
	19.500																																												
ELABORADA POR: - DANIEL GIL - JAROL VALENCIA	Datos tomados de la galería de pueblo nuevo del distrito de buenaventura.																																												

ANEXO 15. SOPORTE FICHA Z' (A OTRO NIVEL)

CÓDIGO: 01-AOTRO-01	TIEMPO DE TRABAJO: 90 MIN	FORMA DE TRABAJO: TI ☐ E ☒																
OBJETIVOS DE LA ACTIVIDAD: - Identificar patrones numéricos que permita completar la tabla. - Establecer generalidades a partir de un patrón. - Realizar procesos de tipo escalar y funcional.		MATERIALES REQUERIDOS: - Ficha de laboratorio - Papel y lápiz.																
CONTENIDO O COMPETENCIA MATEMATICA MOVILIZADA: - Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas). - Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.																		
ESTRATEGIA DE SOLUCION En la ficha Z, se presentan dos actividades, para solucionarlas es necesario completar la información dos tablas con los datos que suministra la situación, y la segunda parte es un juego el cual consiste en responder preguntas e ir avanzando de nivel. A continuación se expondrá la actividad con su respectiva solución.																		
Actividad 1. Completa la siguiente tabla <table border="1" style="margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th>CANTIDAD COCA DE PEPEPÁN</th> <th>PRECIOS</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>5</td> <td>5.250</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>8.400</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>13.650</td> </tr> <tr> <td>15</td> <td>15.750</td> </tr> <tr> <td></td> <td>24.150</td> </tr> </tbody> </table>		CANTIDAD COCA DE PEPEPÁN	PRECIOS	5	5.250	3			8.400	10			13.650	15	15.750		24.150	Esta actividad presenta las tres formas de solución del Isomorfismo de medida planteadas por Vergnaud (2000), la primera está relacionada con la división como búsqueda del valor unitario. División: búsqueda del valor unitario, para este caso, es necesario conocer el vínculo correspondiente al precio de una coca de Pepepán, para hallarlo hay que realizar una división entre el precio 5250 y la cantidad de cocas vinculada a ese precio en este caso (5, 5250) para encontrar el valor unitario. $5250 / 5 = 1050$ pesos corresponde al precio de una coca de Pepepán. La segunda parte de esta actividad se deriva en que después de encontrar el valor de la unidad, se hace uso de la multiplicación
CANTIDAD COCA DE PEPEPÁN	PRECIOS																	
5	5.250																	
3																		
	8.400																	
10																		
	13.650																	
15	15.750																	
	24.150																	

	como la regla de tres simple básica, que se necesita para hallar los precios correspondientes a 3 y 10, cocas de Pepegán. Multiplicación: - Para encontrar el precio de tres cocas de Pepegán, se multiplica el número de cocas por el precio de una, es decir, $3 \times 1050 = 3150$ pesos. - Para encontrar el precio de diez cocas de Pepegán, se multiplica $10 \times 1050 = 10500$ pesos. El tercer tipo de solución de acuerdo con Vergnaud (2000), es la división como la búsqueda de la cantidad de unidades, que se necesita para encontrar los valores correspondientes a las celdas de cocas 3, 5 y 7: División búsqueda de la cantidad de unidades: - En la celda 3, se divide $8.400/1050 = 8$ cocas de Pepegán. - En la celda 5, se divide $13.650/1050 = 13$ cocas de Pepegán. - En la celda 7, se divide $24.150/1050 = 23$ cocas de Pepegán.																					
En la segunda parte de la actividad tiene con completar una tabla::																						
Completar la siguiente tabla: <table><tr><th>CANTIDAD NAIDÍ</th><th>COCA DE</th><th>PRECIOS</th></tr><tr><td>4</td><td></td><td>5.200</td></tr><tr><td></td><td></td><td>6.500</td></tr><tr><td>8</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>13.000</td></tr><tr><td>11</td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>19.500</td></tr></table>	CANTIDAD NAIDÍ	COCA DE	PRECIOS	4		5.200			6.500	8					13.000	11					19.500	Esta actividad presenta las tres formas de solución del Isomorfismo de medida planteadas por Vergnaud (2000), la primera está relacionada con la división como búsqueda del valor unitario. División: búsqueda del valor unitario, para este caso, es necesario conocer el vínculo correspondiente al precio de una coca de Naidí, para hallarlo hay que realizar una división entre el precio 5.200 y la cantidad
CANTIDAD NAIDÍ	COCA DE	PRECIOS																				
4		5.200																				
		6.500																				
8																						
		13.000																				
11																						
		19.500																				

	de cocas vinculada a ese precio en este caso (4, 5.200) para encontrar el valor unitario. $5.200 / 4 = 1300$ pesos corresponde al precio de una coca de Naidí. La segunda parte de esta actividad se deriva en que después de encontrar el valor de la unidad (\$ 1300), se hace uso de la multiplicación como la regla de tres simple básica, que se necesita para hallar los precios correspondientes a 8 y 11 cocas de Naidí. Multiplicación: - Para encontrar el precio de ocho cocas de Naidí, se multiplica el número de cocas por el precio de una, es decir, $8 \times 1300 = 10.400$ pesos. - Para encontrar el precio de once cocas de Naidí, se multiplica $11 \times 1300 = 14.300$ pesos. El tercer tipo de solución de acuerdo con Vergnaud (2000), es la división como la búsqueda de la cantidad de unidades, que se necesita para encontrar los valores correspondientes a las celdas de cocas 2, 4 y 6: División búsqueda de la cantidad de unidades: - En la celda 2, se divide $6.500/1300 = 5$ cocas de Naidí. - En la celda 4, se divide $13.000/1300 = 10$ cocas de Naidí. - En la celda 6, se divide $19.500/1300 = 15$ cocas de Naidí.
En la tercera parte de la ficha tiene que ver con las preguntas que van desde preguntas sencillas a preguntas más complejas:	
Con los datos de las tablas anteriores responde las siguientes situaciones: 1- En el salón de sexto se comieron 13 Poma Rosas y en séptimo se comieron	En los problemas de esta parte de la Fichase hace necesario utilizar la multiplicación para su resolución.

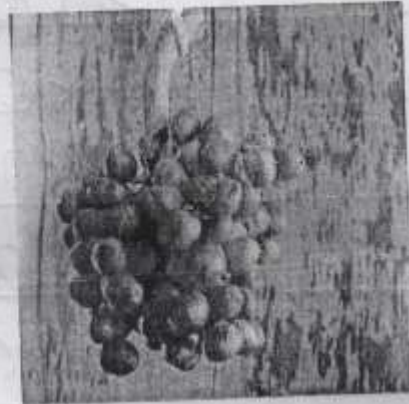
ocho veces más la cantidad de Poma Rosas que se comieron en sexto. ¿Cuántas Poma Rosas se comieron en séptimo? 2- En la tienda de Don Pacho se venden 23 Guamas en un día, mientras que en la galería de pueblo nuevo, se venden 13 veces más la cantidad de Guamas que vende don Pacho. ¿Cuántas Guamas se venden en un día en la galería de pueblo nuevo? 3- Cesar compra Caimitos para 62 personas, si cada persona se come 6 Caimitos. ¿Cuántos Caimitos compro en total? 4- Manuel descubre que con una coca de Peperán comen 8 personas, Ayúdale a Manuel a descubrir ¿cuantas personas comerían con 11 cocas? 5- Doña Juana se va para el colegio a vender pomas rosas. Si por la venta de dos cajas de Poma Rosas recibe \$ 59.500 pesos, ¿cuantas pomas rosas vendió doña Juana?	1- 13 pomas rosas x 8 = 104 pomas rosas se comieron en grado séptimo. 2- 23 Guamas al día donde don pacho x 13 = 299 Guamas al día en la galería de pueblo nuevo. 3- <table border="1" data-bbox="911 449 1317 554"> <tr> <th>personas</th><th>Caimitos</th></tr> <tr> <td>1</td><td>6</td></tr> <tr> <td>62</td><td>x</td></tr> </table> 62 x 6 = 372 Caimitos 4- <table border="1" data-bbox="816 659 1317 764"> <tr> <th>Cocas Peperán</th><th>personas</th></tr> <tr> <td>1</td><td>8</td></tr> <tr> <td>11</td><td>x</td></tr> </table> 11 x 8 = 88 personas 5- Para esta situación es necesario utilizar la división como búsqueda de la cantidad de unidades <table border="1" data-bbox="911 974 1317 1079"> <tr> <th>Poma Rosas</th><th>precio</th></tr> <tr> <td>1</td><td>500</td></tr> <tr> <td>x</td><td>59.500</td></tr> </table> 59.500 / 500 = 119 Poma Rosas	personas	Caimitos	1	6	62	x	Cocas Peperán	personas	1	8	11	x	Poma Rosas	precio	1	500	x	59.500
personas	Caimitos																		
1	6																		
62	x																		
Cocas Peperán	personas																		
1	8																		
11	x																		
Poma Rosas	precio																		
1	500																		
x	59.500																		

ANEXO 16.1 EVIDENCIAS APLICACIONES FICHA X (CHONTA-COSTO)

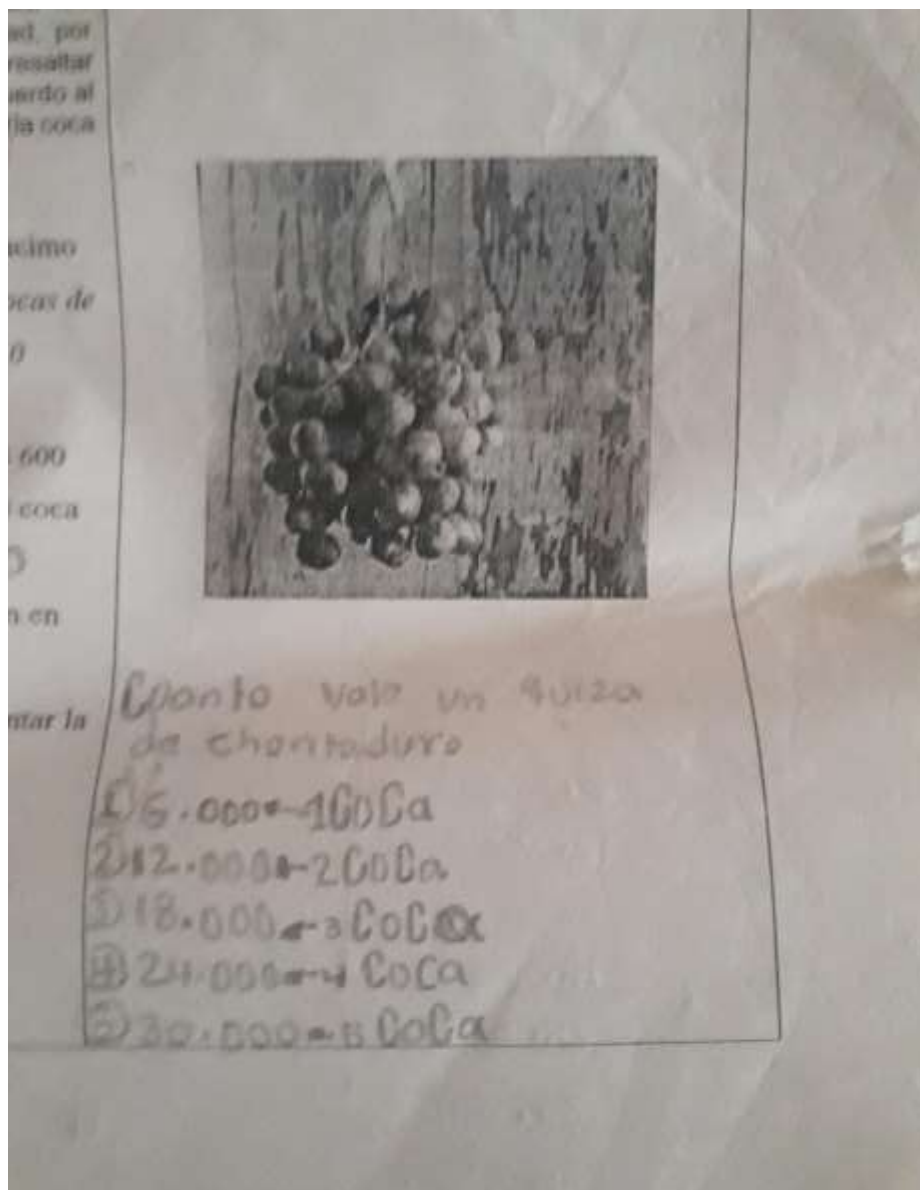
Chontaduro	Precio	Coca	Precio
1	600	1	6.000
2	1200	2	12.000
3	1800	3	18.000
4	2.400	4	24.000
5	3.000	5	30.000
6	3.600	6	36.000
7	4.200	7	42.000
8	4.800	8	48.000
9	5.400	9	54.000
10	6.000	10	60.000

ANEXO 16.2 EVIDENCIAS APLICACIONES FICHA X (CHONTA-COSTO)

CÓDIGO: 1-CHOTA-01	CHONTA-COSTOS	$7-3$ $=2$ $+1=4$
El chontaduro es quizá el fruto más importante del sistema agrícola del litoral pacífico. Es una especie fruta muy apetecida en el distrito de Buenaventura; y de manera muy particular su venta se realiza en diferentes presentaciones: por unidad, por bolsa, por coca y por racimo, es de resaltar que estas presentaciones son de acuerdo al tamaño de un chontaduro promedio, (la coca generalmente es del mismo tamaño)		
El señor Angulo al observar un racimo de chontaduro dijo: <i>aquí hay 5 cocas de chontaduro, y en una coca hay 10 chontaduros.</i> 30.000 - Si un chontaduro cuesta \$ 600 pesos. ¿Cuánto cuesta una coca de chontaduros? 6.000 Como representarías esta situación en una tabla? 10x600 De que otra manera puede representar la primera situación? Sumando 600 10 Veces ¿Cuánto cuesta un racimo de chontaduro? 30.000		



ANEXO 16.3 EVIDENCIAS APLICACIONES FICHA X (CHONTA-COSTO)



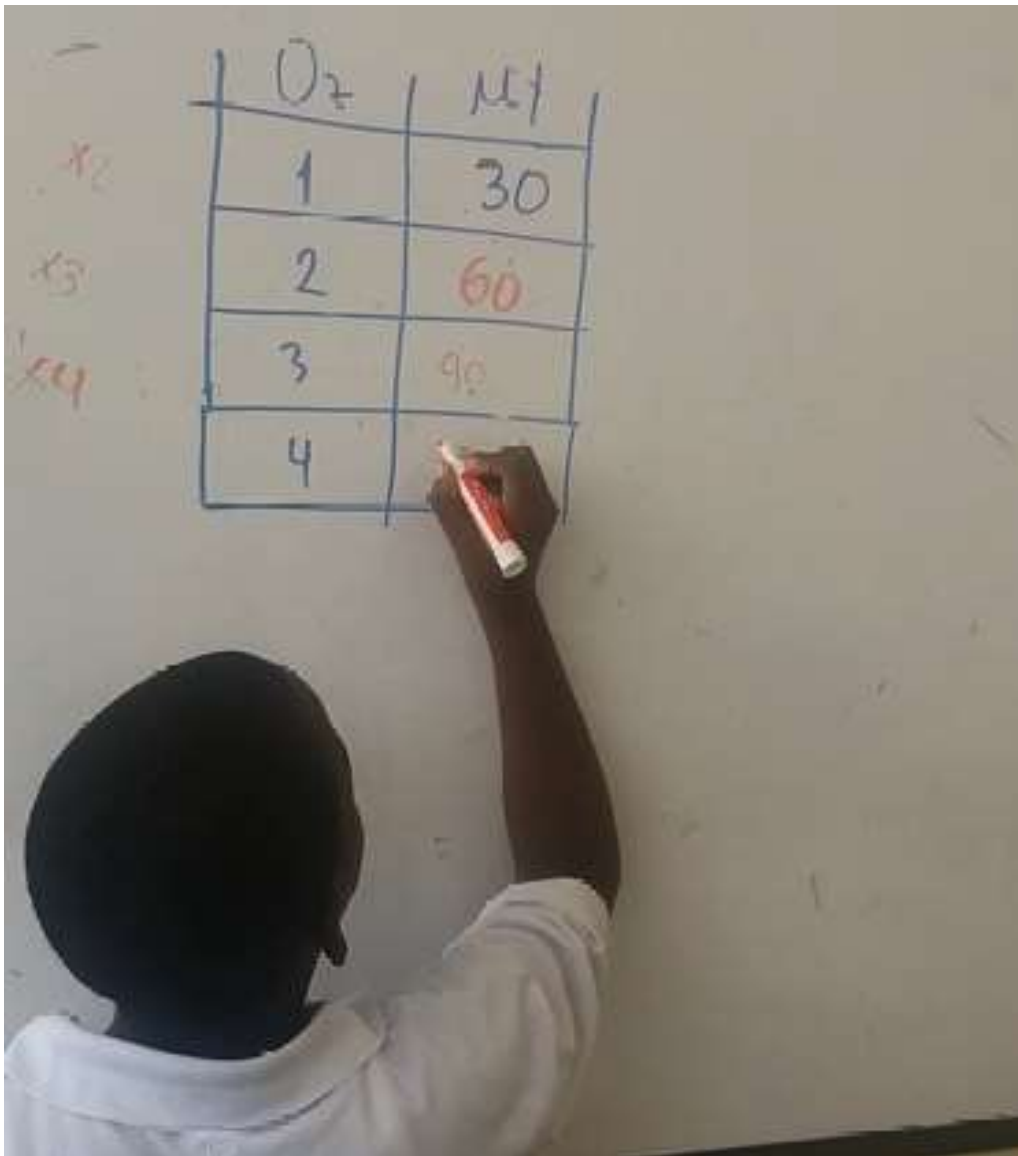
ANEXO 16.4 EVIDENCIAS APLICACIONES FICHA X (CHONTA-COSTO)

CÓDIGO: 1-CHOTA-01	CHONTA-COSTOS	$\begin{matrix} 2+3 \\ -2 \\ +1-4 \end{matrix}$
El chontaduro es quizá el fruto más importante del sistema agrícola del litoral pacífico. Es una especie fruta muy apetecida en el distrito de Buenaventura; y de manera muy particular su venta se realiza en diferentes presentaciones: por unidad, por bolsa, por coca y por racimo, es de resaltar que estas presentaciones son de acuerdo al tamaño de un chontaduro promedio, (la coca generalmente es del mismo tamaño) El señor Angulo al observar un racimo de chontaduro dijo: <i>aquí hay 5 cocas de chontaduro, y en una coca hay 10 chontaduros.</i> - Si un chontaduro cuesta \$ 600 pesos. ¿Cuánto cuesta una coca de chontaduros? <i>6.000</i> Como representarías esta situación en una tabla? De que otra manera puede representar la primera situación? ¿Cuánto cuesta un racimo de chontaduro? <i>Costaría 30.000</i>		

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 600 \\ \hline 00 \\ 600 \\ \hline 6.000 \end{array}$$

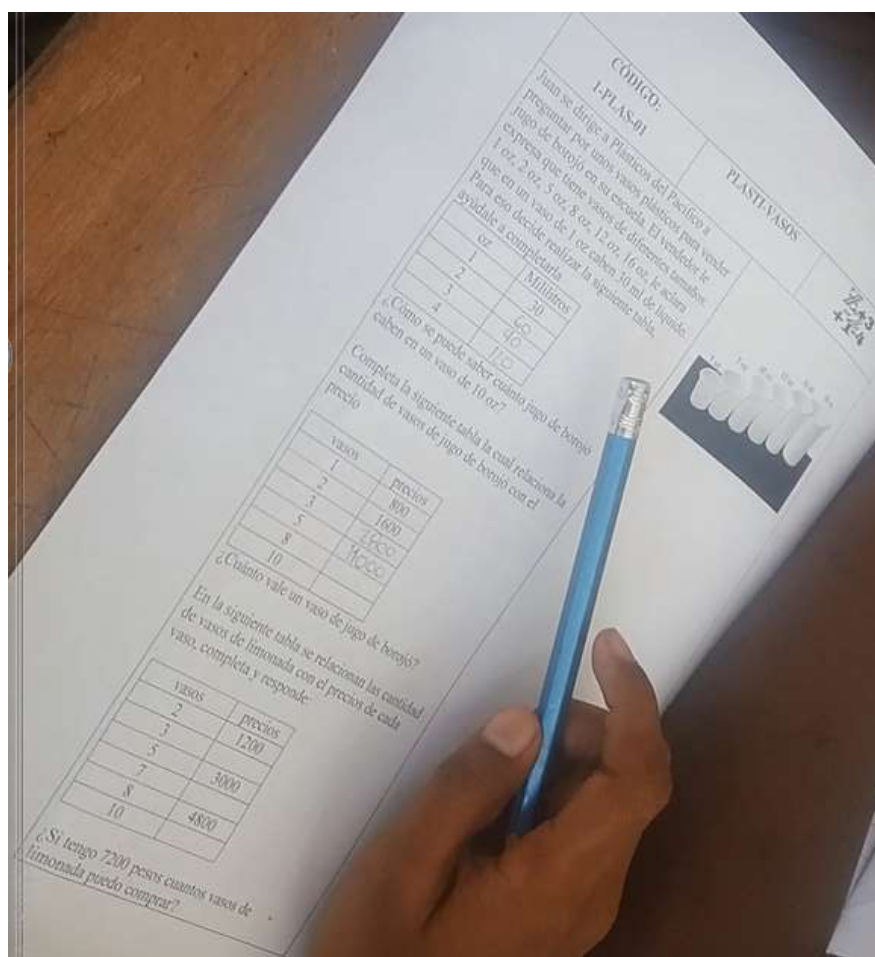
$$\begin{array}{r} 50 \\ \times 600 \\ \hline 000 \\ 3000 \\ \hline 30.000 \end{array}$$

ANEXO 17.1 EVIDENCIAS APLICACIONES FICHA Y (PLASTI-VASOS)

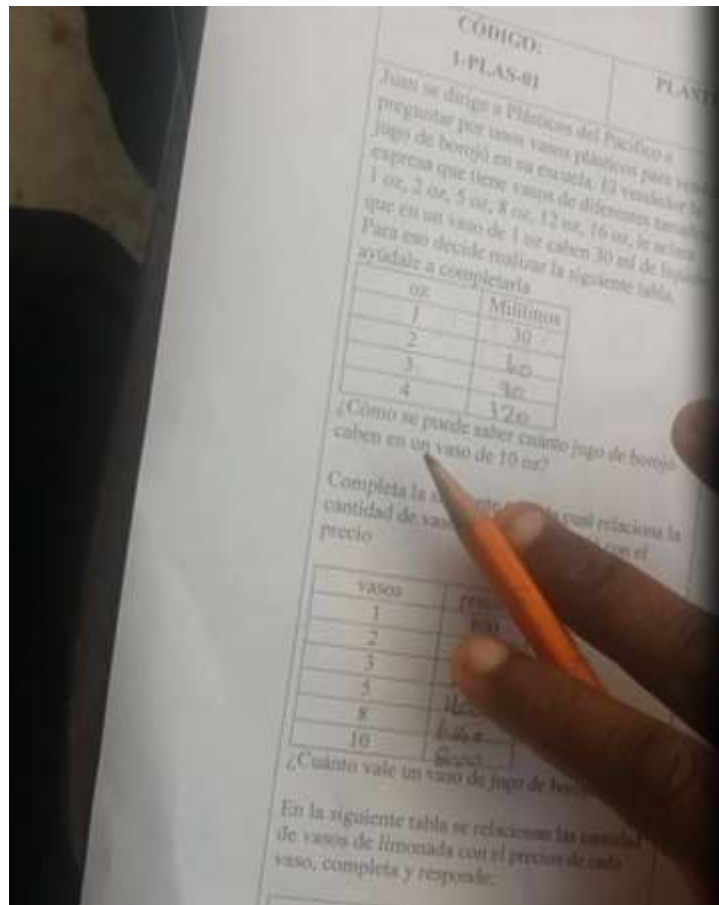


O ₂	M ₁
1	30
2	60
3	90
4	

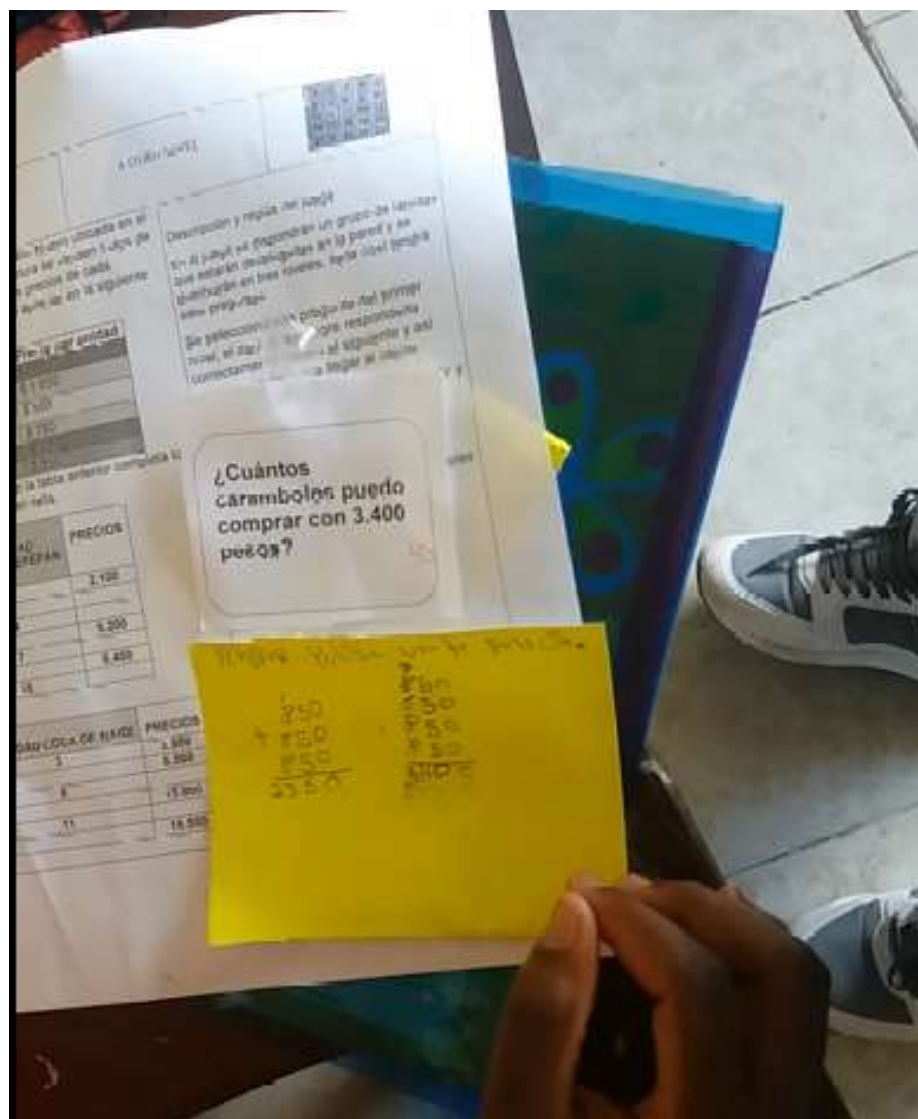
ANEXO 17.2 EVIDENCIAS APLICACIONES FICHA Y (PLASTI-VASOS)



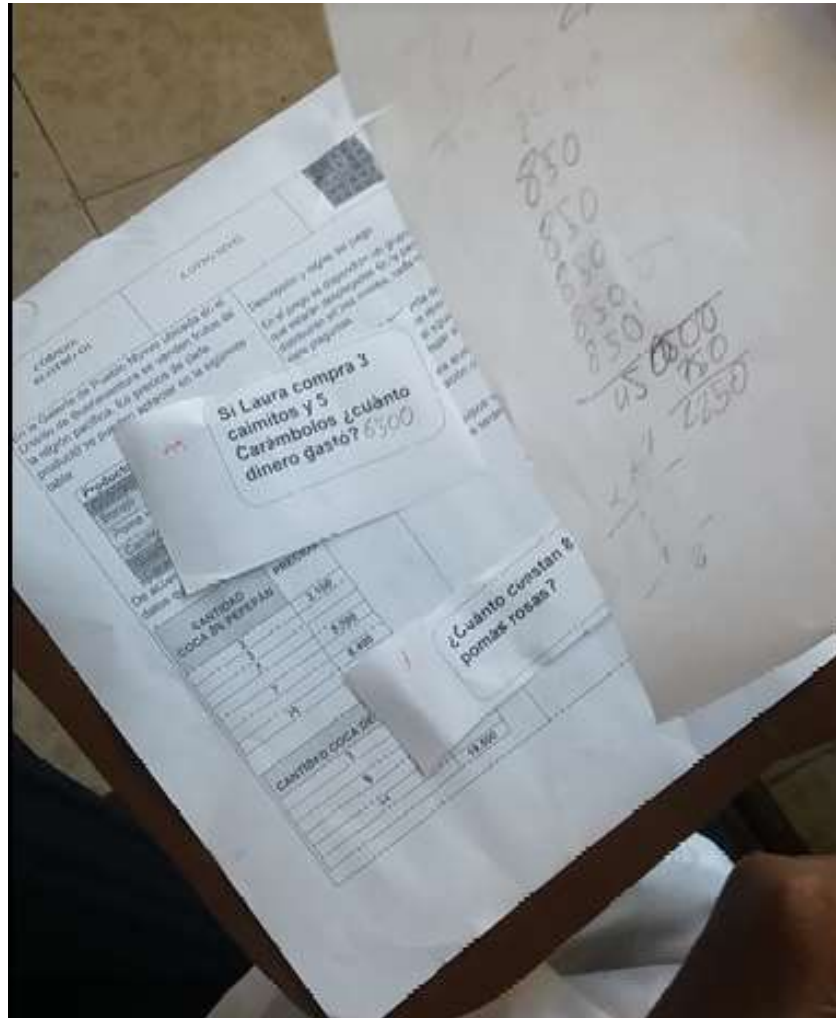
ANEXO 17.3 EVIDENCIAS APLICACIONES FICHA Y (PLASTI-VASOS)



ANEXO 18.1 EVIDENCIAS APLICACIONES FICHA Z (A OTRO NIVEL)

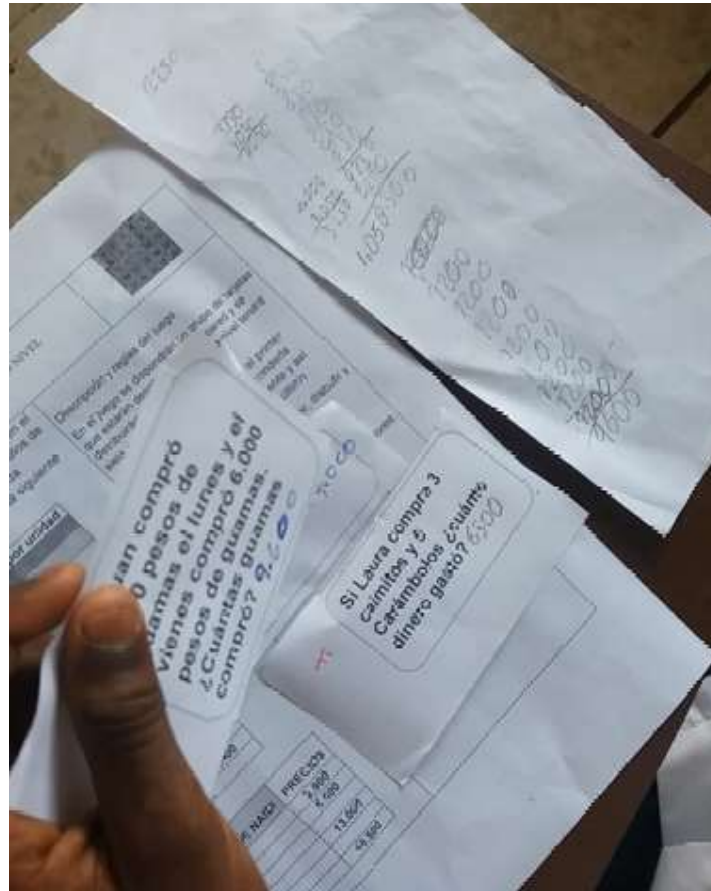


ANEXO 18.2 EVIDENCIAS APLICACIONES FICHA Z (A OTRO NIVEL)



ANEXO 18.3 EVIDENCIAS APLICACIONES FICHA Z (A OTRO NIVEL)

ANEXO 19.1 EVIDENCIAS APLICACIONES FICHA X' (CHONTA-COSTOS)



CÓDIGO:
CHOTA-01

CHONTA-COSTOS:

$\frac{7}{2} + 3$
 $+ 1 = 4$

chontaduro es quizá el fruto más
se del sistema agrícola del litoral
Es una especie fruta muy apetecida
trito de Buenaventura, y de máxima
riticular su venta se realiza en
presentaciones por unidad, por
cr-cesta y por racimo, es de resaltar
las presentaciones son de acuerdo al
de un chontaduro promedio, (la coca
mente es del mismo tamaño)
chontaduro cuesta \$ 600 pesos.
eta la siguiente tabla

chontaduros	precio
3	1800
4	2400
5	3000
7	4200
8	4800
10	6000

o puedes saber a cuan
aduros se pueden co
pesos?

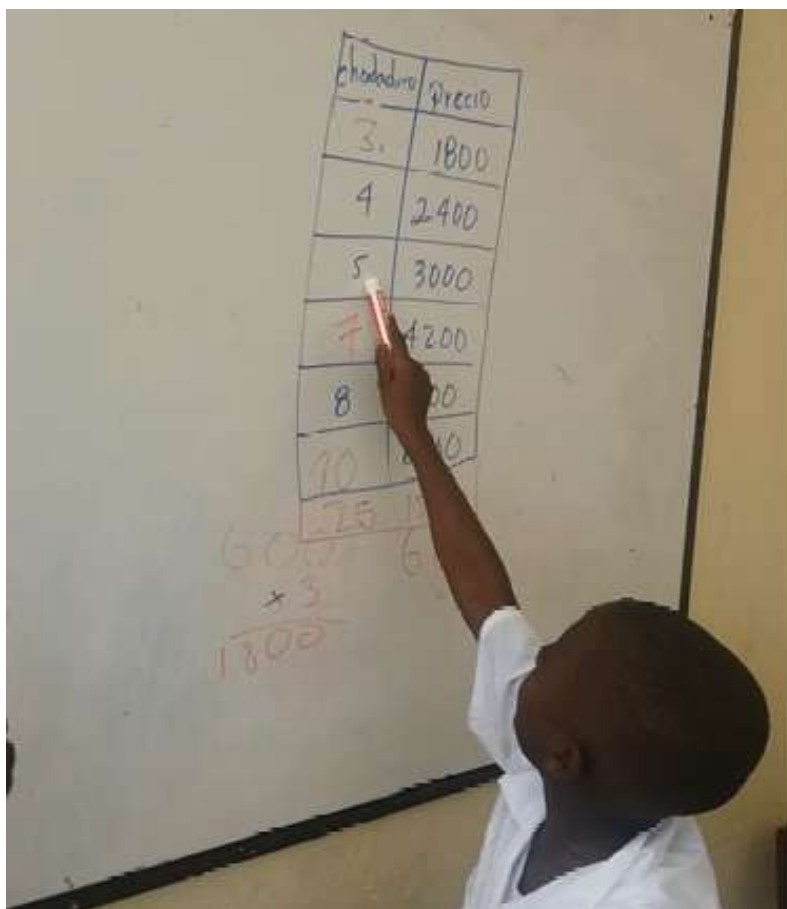
Después de haber
chontaduro dijo
mañero, y
chontaduro
na con



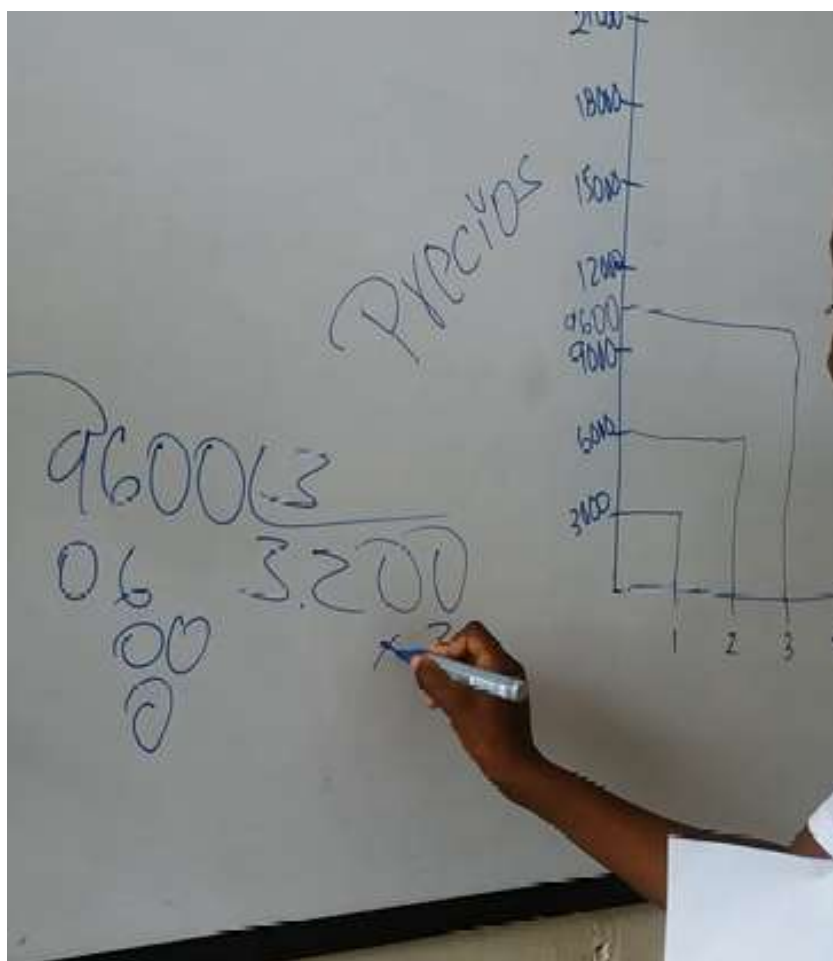
ANEXO 19.2 EVIDENCIAS APLICACIONES FICHA X' (CHONTA-COSTOS)

ANEXO 19.3 EVIDENCIAS APLICACIONES FICHA X' (CHONTA-COSTOS)

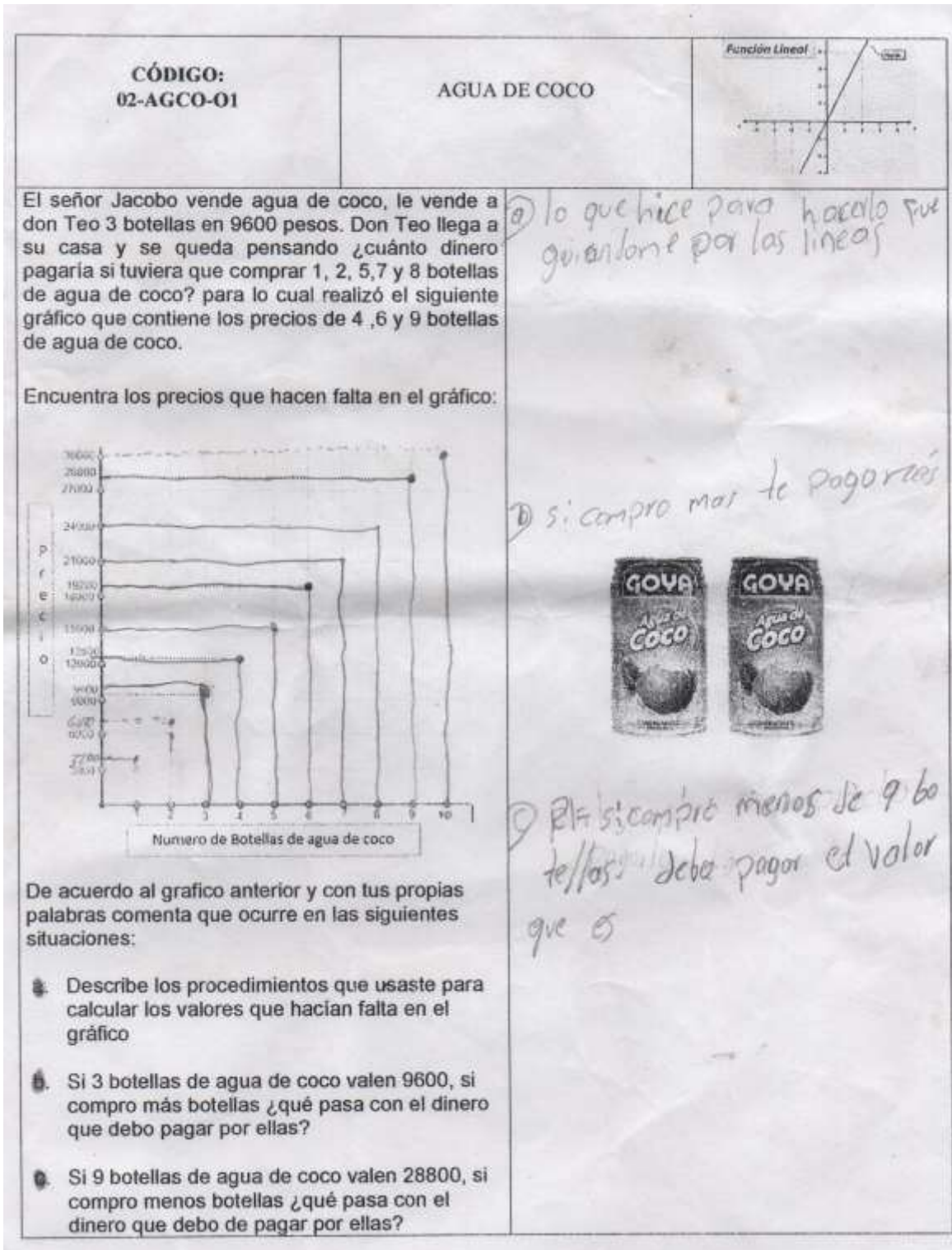




ANEXO 20.1 EVIDENCIAS APLICACIONES FICHA Y' (AGUA-COCO)



ANEXO 20.2 EVIDENCIAS APLICACIONES FICHA Y' (AGUA-COCO)



ANEXO 20.3 EVIDENCIAS APLICACIONES FICHA Y' (AGUA-COCO)

CÓDIGO: 02-AGCO-01	AGUA DE COCO	
El señor Jacobo vende agua de coco, le vende a don Teo 3 botellas en 9600 pesos. Don Teo llega a su casa y se queda pensando ¿cuánto dinero pagaría si tuviera que comprar 1, 2, 5, 7 y 8 botellas de agua de coco? para lo cual realizó el siguiente gráfico que contiene los precios de 4, 6 y 9 botellas de agua de coco.		
Encuentra los precios que hacen falta en el gráfico:		
	Yo lo y se por fue me iba pignolo por fue a cuesta $3200 \times 3 = 9600$ $3200 \times 2 = 6400$ 	
De acuerdo al grafico anterior y con tus propias palabras comenta que ocurre en las siguientes situaciones:		
☒ Describe los procedimientos que usaste para calcular los valores que hacían falta en el gráfico b. Si 3 botellas de agua de coco valen 9600, si compro más botellas ¿qué pasa con el dinero que debo pagar por ellas? c. Si 9 botellas de agua de coco valen 28800, si compro menos botellas ¿qué pasa con el dinero que debo de pagar por ellas?		
Handwritten calculations at the bottom: $\begin{array}{r} 3200 \\ 9600 \\ 12800 \\ 16000 \\ 19200 \\ 22400 \\ 25600 \\ 28800 \end{array}$ $\begin{array}{r} 28800 \\ + 3200 \\ \hline 25600 \end{array}$		

ANEXO 21.1 EVIDENCIAS APLICACIONES FICHA Z' (A OTRO NIVEL)

CÓDIGO: 02-VAFRU-01	LA VARIACION DE LA FRUTA															
En la Galería de Pueblo Nuevo ubicada en el Distrito de Buenaventura se venden frutos de la región pacífica, los precios de cada producto se pueden apreciar en la siguiente tabla: <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>Producto</th> <th>Precio por unidad</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Chontaduro</td> <td>\$ 600</td> </tr> <tr> <td>Borojó</td> <td>\$ 1.850</td> </tr> <tr> <td>Poma rosa</td> <td>\$ 500</td> </tr> <tr> <td>Caimito</td> <td>\$ 750</td> </tr> <tr> <td>Guama</td> <td>\$ 1.200</td> </tr> <tr> <td>Carambolo</td> <td>\$ 850</td> </tr> </tbody> </table> De acuerdo con la tabla anterior completa los datos que hacen falta.		Producto	Precio por unidad	Chontaduro	\$ 600	Borojó	\$ 1.850	Poma rosa	\$ 500	Caimito	\$ 750	Guama	\$ 1.200	Carambolo	\$ 850	Con los datos de las tablas responde las siguientes situaciones: - En el salón de sexto se comieron 13 poma rosas y en séptimo se comieron ocho veces más la cantidad de poma rosas que se comieron en sexto. ¿Cuántas poma rosas se comieron en séptimo? <u>104</u> - Con 5 jarras de jugo de borojó toman 70 niños, si en la escuela "Saltarines" hay 364 niños, ¿Cuántas jarras se necesitan para que todos los niños tomen jugo de borojó? <u>260</u> - En la tienda de Don Pacho se venden 23 guamas en un día, mientras que en la galería de pueblo nuevo, se venden 13 veces más la cantidad de guamas que vende don Pacho. ¿Cuántas guamas se venden en un día en la galería de pueblo nuevo? <u>299</u> - Cesar compra caimitos para 62 personas, si cada persona se come 6 caimitos. ¿Cuántos caimitos compro en total? - Manuel descubre que con una coca de pepépán comen 8 personas, cada una se come 5 pepas. Ayúdale a Manuel a descubrir ¿cuántas personas comerían con 11 cocas? y ¿cuántas pepas se comerían en total? - Doña Juana se va para el colegio a vender pomas rosas. Las poma rosas las organiza en tres cajas todas con la misma cantidad. Si por la venta de dos cajas de poma rosas recibe \$ 59.500 pesos, ¿cuántas pomas rosas vendió doña Juana?
Producto	Precio por unidad															
Chontaduro	\$ 600															
Borojó	\$ 1.850															
Poma rosa	\$ 500															
Caimito	\$ 750															
Guama	\$ 1.200															
Carambolo	\$ 850															

CANTIDAD COCA DE PEPEPÁN	PRECIOS	
5	5250	
3	2150	
9	8400	
10	10200	
13	13650	
15	15750	
23	24150	

CANTIDAD COCA DE NAIDI	PRECIOS	
4	5200	
5	6500	
8	10400	
10	13000	
11	14300	
15	19500	

ANEXO 21.2 EVIDENCIAS APLICACIONES FICHA Z' (A OTRO NIVEL)

5250
025
00

5250
+ 3150
8400

10500
+ 3150
13650

CÓDIGO:
02-VAERU-01

LA VARIACION DE LA FRUTA

En la Galería de Pueblo Nuevo ubicada en el Distrito de Buenaventura se venden frutos de la región pacífica, los precios de cada producto se pueden apreciar en la siguiente tabla:

Producto	Precio por unidad
Chontaduro	\$ 600
Borojó	\$ 1.850
Poma rosa	\$ 500
Calmito	\$ 750
Guama	\$ 1.200
Carambolo	\$ 350

De acuerdo con la tabla anterior completa los datos que hacen falta.

CANTIDAD COCA DE PEPEPÁN	PRECIOS
5	5250
3	3150
8	8400
10	10500
13	13650
15	15750
23	24150

CANTIDAD COCA DE NAIDI	PRECIOS
4	5200
5	6500
8	10400
10	13000
11	14300
15	19500

Con los datos de las tablas responde las siguientes situaciones:

- En el salón de sexto se comieron 13 poma rosas y en séptimo se comieron ocho veces más la cantidad de poma rosas que se comieron en sexto. ¿Cuántas poma rosas se comieron en séptimo?
- Con 5 jarras de jugo de borojó toman 70 niños, si en la escuela "Saltarines" hay 364 niños. ¿Cuántas jarras se necesitan para que todos los niños tomen jugo de borojó?
- En la tienda de Don Pacho se venden 23 guamas en un día, mientras que en la galería de pueblo nuevo, se venden 13 veces más la cantidad de guamas que vende don Pacho. ¿Cuántas guamas se venden en un día en la galería de pueblo nuevo?
- César compra calmitos para 62 personas, si cada persona se come 6 calmitos. ¿Cuántos calmitos compro en total?
- Manuel descubre que con una coca de pepépán comen 8 personas, cada una se come 5 pepas. Ayúdale a Manuel a descubrir ¿cuántas personas comerían con 11 cocas? y ¿cuántas pepas se comerían en total?
- Doña Juana se va para el colegio a vender pomas rosas. Las poma rosas las organiza en tres cajas todas con la misma cantidad. Si por la venta de dos cajas de poma rosas recibe \$ 59.500 pesos, ¿cuántas pomas rosas vendió doña Juana?

10500
10500
3150
24150

1050
x 2
3150

1050
x 10
10500

1050
x 10
10500

5200
12
000

5200
6500
7800
9100
10400

5200
8200
10400

1300
x 11
13000

6500
10
13000
15
19500

ANEXO 21.3 EVIDENCIAS APLICACIONES FICHA Z' (A OTRO NIVEL)

J	N	
1	14	
5	70	
10	140	
15	210	
20	280	
25	350	
26	364	
		14
		17
		19
		19
		<u>14</u>
		0

ANEXO 22. REJILLA DE ANALISIS

LABORATORIO DE MATEMÁTICAS			PENSAMIENTO NUMÉRICO – VARIACIONAL				
			Patrones numéricos	Relación entre cantidades	Análisis escalar	Multiplicación como función	Procedimientos aditivos
MATEMATIZACIÓN	HORIZONTAL	Encontrar regularidades, relaciones y patrones.	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅
		Identificar las matemáticas que pueden ser relevantes respecto al problema	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅
	VERTICAL	Utilizar diferentes representaciones	D ₁	D ₂	D ₃	D ₄	D ₅
		Argumentar	E ₁	E ₂	E ₃	E ₄	E ₅
		Generalizar	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅