Vol. XVI, No 2, Diciembre (2008)
Matemáticas: 57–74

**Matemáticas:**
**Enseñanza Universitaria**


# Una generalización de los teoremas de Sylow

Javier de la Cruz Cantillo
Universidad del Norte

Ismael Gutiérrez García
Universidad del Norte

Recibido May. 14, 2008 Aceptado Jun. 27, 2008

**Abstract**

In this work we will present a general form of the Sylow's theorems introducing the concepts of Fitting classes and $\mathfrak{X}$-injector of a finite soluble groups $G$. We will proof that, if $\mathfrak{X}$ is a Fitting class and $G$ is a finite soluble group, then there are the $\mathfrak{X}$-injectors of $G$ and these are conjugated in $G^{\mathfrak{N}}$.

**Keywords:** Finite solubles groups, Fitting classes, $\mathfrak{F}$-injectors.

**MSC(2000):** Primary: 20D10, Secondary: 20B05

**Resumen**

En el siguiente trabajo presentamos una generalización de los teoremas de Sylow introduciendo los conceptos de clases de Fitting y $\mathfrak{X}$-inyector de un grupo finito soluble $G$. Para ello demostraremos que, si $\mathfrak{X}$ es una clase de Fitiing y $G$ es un grupo finito soluble, entonces existen los $\mathfrak{X}$-inyectores de $G$ y estos son conjugados en $G^{\mathfrak{N}}$.

**Palabras y frases claves:** Grupos finitos solubles, clases de Fitting, $\mathfrak{F}$-inyectores.

## 1 Introducción

En el presente artículo abordaremos uno de los trabajos centrales de teoría de clases de grupos finitos solubles, como lo es la generalización de los teoremas de Sylow. Estos resultados fueron estudiados y analizados para redactarlos con todo detalle y en algunos casos concretos obtener demostraciones distintas a las ya existentes.

El desarrollo histórico de la extensión de los teoremas de Sylow se inició en el año 1928, cuando Phillip Hall presentó el primer prototipo de ésta, en la cual los conceptos de $p$-subgrupos y $p$-subgrupos de Sylow se extienden a los conceptos de $\pi$-subgrupos y $\pi$-subgrupos de Hall, respectivamente. Si $\pi$ es un conjunto de números primos y $H$ es un subgrupo de un grupo finito $G$, entonces se dice que $H$ es un $\pi$-subgrupo de Hall de $G$, si todos los divisores primos de $|H|$ pertenecen a $\pi$ y todos los divisores primos de $|G : H|$ no pertenecen a $\pi$.

En dicha extensión se logró probar que para un grupo finito soluble $G$, siempre existen los $\pi$-subgrupos de Hall de $G$ y que dos cualesquiera de ellos son conjugados en $G$, es decir, existe una única clase de conjugación de dichos subgrupos, similar a como sucede con los $p$-subgrupos de Sylow.

Como resultado de un continuo desarrollo de la teoría, se observó que para un grupo finito soluble $G$, el conjunto de sus $\pi$-subgrupos de Hall, denotado con $\mathrm{Hall}_\pi(G)$ está caracterizado por las siguientes condiciones:

1. $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ si y sólo si, $HK/K$ es $\pi$-maximal en $G/K$, para todo $K \trianglelefteq G$
2. $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ si y sólo si, $H \cap K$ es $\pi$-maximal en $K$, para todo $K$ sn $G$. Donde $K$ sn $G$ si y sólo si existen subgrupos $K_0, \ldots, K_r$ de $G$ tales que $K = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq K_r = G$.

Generalizar estas caracterizaciones permitirá extender el concepto de $\pi$-subgrupos de Hall de $G$ y por lo tanto, hacer una nueva generalización de los teoremas de Sylow. Para alcanzar tal objetivo se construyó inicialmente el concepto de clase de grupos, entendiendo por esta una colección $\mathfrak{X}$ de grupos finitos, cerrada bajo isomorfismos. Las primeras clases estudiadas fueron $\mathfrak{S}$ y $\mathfrak{S}_\pi$, las cuales denotan respectivamente la clase de los grupos finitos solubles y la de los $\pi$-grupos solubles.

En general, si $N \leq G$, diremos que $N$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $G$, si y sólo si, $N \in \mathfrak{X}$ y si $N \leq M \leq G$ con $M \in \mathfrak{X}$, entonces $M = N$. Es decir $H$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $G$, si $H \in \mathfrak{X}$ y no lo contiene algún otro subgrupo de $G$ que pertenezca a $\mathfrak{X}$.

En esta terminología, para un grupo finito soluble $G$, se tiene que

1. $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ si y sólo si, $HK/K$ es $\mathfrak{S}_\pi$-maximal en $G/K$, para todo $K \trianglelefteq G$.
2. $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ si y sólo si, $H \cap K$ es $\mathfrak{S}_\pi$-maximal en $K$, para todo $K$ sn $G$.

Las nuevas generalizaciones se obtendrán cuando al reemplazar $\mathfrak{S}_\pi$ por otra clase $\mathfrak{X}$ siguen existiendo subgrupos $H$ de $G$ que cumplan alguna de las condiciones

(1) $HK/K$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $G/K$, para todo $K \trianglelefteq G$ o

(2) $H \cap K$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $K$, para todo $K$ sn $G$.

y además que en ambos casos, dos cualesquiera de estos subgrupos $H$ sean conjugados en $G$.

Las primeras investigaciones se orientaron a estudiar la condición (1) y establecer que si $G$ es un grupo finito soluble y $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$ es una clase de Schunck, es decir, una clase que consta de todos los grupos cuyas imágenes epimórficas primitivas pertenecen a $\mathfrak{X}$, entonces siempre existen subgrupos $H$ de $G$, para los cuales se verifica (1) y además su respectiva conjugación en $G$. Evidentemente esto corresponde a una nueva generalización de los teoremas de Sylow.

En general, dada una clase de grupos cualquiera $\mathfrak{X}$ y un grupo finito $G$, los subgrupos $H$ de $G$ con tales características se denominaron $\mathfrak{X}$-proyectores de $G$, los cuales representan una generalización del concepto de $p$-subgrupo de Sylow de $G$. Al conjunto de estos se denotará con $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{X}}(G)$ y las clases $\mathfrak{X}$ para las cuales $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{X}}(G) \neq \emptyset$ se denominarán proyectivas. Las clases de Schunck son ejemplos de clases proyectivas y además son las únicas con tal propiedad.

Este trabajo está orientado a estudiar la condición (2) y a establecer una generalización paralela (dual) de la teoría de $\mathfrak{X}$-proyectores, mostrando que si $G$ es un grupo finito soluble y $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$ es una clase de Fitting, entonces siempre existen subgrupos $H$ de $G$, para los cuales se cumple (2) y además su respectiva conjugación en el subgrupo $G^{\mathfrak{N}}$, lo cual corresponde a otra generalización de los teoremas de Sylow, ya que en el caso que $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}_p$ estos subgrupos $H$ coinciden con los $p$-subgrupos de Sylow de $G$. Tales subgrupos se denominarán $\mathfrak{X}$-inyectores de $G$ y al conjunto, posiblemente vacío, de todos ellos se notará con $\mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(G)$. Las clases para las cuales este conjunto es no vacío se denominarán inyectivas. Demostraremos que los conceptos de clases inyectivas y clases de Fitting son equivalentes.

## 2 Preliminares

### 2.1 Clases de grupos y funciones de clases.

**Definición 2.1.** *Una clase de grupos es una colección $\mathfrak{X}$ de grupos con la propiedad de que si $G \in \mathfrak{X}$ y $H \cong G$, entonces $H \in \mathfrak{X}$. Si $G$ es un grupo denotamos por $(G)$ a la clase formada por todos los grupos isomorfos a $G$. Es decir $(G) = (H : H$ es un grupo y $H \cong G)$.*

**Ejemplos 2.2.** *En la siguiente lista se presentan las clases de grupos mas citadas a lo largo del trabajo.*

1. *$\mathfrak{S}$ denota la clase de todos los grupos finitos solubles.*

2. *$\mathfrak{S}_\pi$ denota la clase de todos los $\pi$-grupos finitos solubles, donde $\pi \subseteq \P$. Si $\pi = \{p\}$, entonces escribiremos $\mathfrak{S}_p$ en lugar de $\mathfrak{S}_\pi$.*

3. *$\mathfrak{N}$ denota la clase de todos los grupos finitos nilpotentes.*

4. *$\mathfrak{N}_\pi$ denota la clase de todos los $\pi$-grupos finitos nilpotentes.*

5. *$\mathfrak{A}$ denota la clase de todos los grupos finitos abelianos.*

6. *$\mathfrak{P}$ denota la clase de todos los grupos finitos primitivos.*

   *Un grupo finito $G$ es llamado primitivo si tiene un subgrupo maximal $M$ tal que*

   $$\mathtt{Core}_G(M) := \bigcap_{g \in G} M^g = \langle 1 \rangle$$

   *En esta situación $M$ se llama un estabilizador de $G$.*

**Definición 2.3.** *Una función que envía clases de grupos a clases de grupos se denomina una función de clases.*

**Ejemplos 2.4.** *Presentamos las más frecuentes funciones de clases. Si $\mathfrak{X}$ es una clase de grupos, entonces se define:*

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Q}\mathfrak{X} &= (G : \exists\, H \in \mathfrak{X},\ N \trianglelefteq H \ y\, G \cong H/N) \\
\mathsf{R}_0\mathfrak{X} &= (G :\ \exists N_i \trianglelefteq G,\ i = 1, \dots, r \ con\, G/N_i \in \mathfrak{X} \ y\ \bigcap_{i=1}^{n} N_i = \langle 1 \rangle) \\
\mathsf{S}_n\mathfrak{X} &= (G :\ G \text{ sn } H,\ para\ algún\ H \in \mathfrak{X}) \\
\mathsf{N}_0\mathfrak{X} &= (G :\ \exists\, K_1, \dots K_r \ con\ K_i \text{ sn } G,\ K_i \in \mathfrak{X} \ y\ G = \langle K_i \rangle) \\
\mathsf{E}_\Phi\mathfrak{X} &= (G :\ \exists N \trianglelefteq G,\ con\ N \leq \Phi(G)\ y\, G/N \in \mathfrak{X}),
\end{aligned}
$$

*donde $\Phi(G)$ denota el subgrupo de Frattini de $G$, el cual se define como la intersección de todos los subgrupos maximales de $G$.*

**Definición 2.5.**

1. *Una función de clases $\mathsf{C}$ se denomina expansiva, si $\mathfrak{X} \subseteq \mathsf{C}\mathfrak{X}$, para toda clase $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$.*
2. *Una clase $\mathfrak{X}$ se llama $\mathsf{C}$-cerrada si $\mathsf{C}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$.*

**Teorema 2.6.** *Las funciones de clases definidas en el ejemplo 2.4 son todas expansivas.*

*Demostración.* Ver [5] 2.1.1. □

**Ejemplo 2.7.** *La clase $\mathfrak{S}$ es $\mathsf{Q}$-cerrada, puesto que por ser $\mathsf{Q}$ expansiva entonces $\mathfrak{S} \subseteq \mathsf{Q}\mathfrak{S}$. Por otra parte, si $G \in \mathsf{Q}\mathfrak{S}$, entonces existe $H \in \mathfrak{S}$ y $N \trianglelefteq H$ tal que $G \cong H/N$, pero como $H$ es soluble entonces $H/N$ es soluble, por lo tanto $G \in \mathfrak{S}$ y con ello $\mathsf{Q}\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}$.*

**Definición 2.8.** *Una clase de grupos $\mathfrak{X}$ se denomina saturada si y sólo si $\mathfrak{X}$ es $\mathsf{E}_\Phi$-cerrada.*

Para todo $p \in \P$, la clase de los $p$-grupos cíclicos es saturada.

**Definición 2.9.** *Dada una clase de grupos $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$, se define*

$$
\mathsf{P}\mathfrak{X} = \begin{cases} \emptyset, & si\ \mathfrak{X} = \emptyset \\ (G \in \mathfrak{S} : \mathsf{Q}(G) \cap \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{X}), & si\ \mathfrak{X} \neq \emptyset \end{cases}
$$

La función $\mathsf{P}$ no es expansiva, ya que si $\mathfrak{X} = (C_4)$, la clase generada por el grupo cíclico de orden 4, entonces $\mathsf{P}\mathfrak{X} = \emptyset$ y por lo tanto $\mathfrak{X} \not\subseteq \mathsf{P}\mathfrak{X}$.

## 2.2 Formaciones, clases de Schunck y $\mathfrak{X}$-proyectores

**Definición 2.10.** *Una clase de grupos $\mathfrak{X}$ es llamada una formación si y sólo si $\mathfrak{X}$ es $\mathsf{Q}$-cerrada y $\mathsf{R}_0$-cerrada.*

Ejemplos de formaciones son las clases $\mathfrak{S}$ y $\mathfrak{N}$.

**Definición 2.11.** *Sea $\mathfrak{X}$ una clase de grupos $\mathsf{R}_0$-cerrado y $G$ un grupo finito. Llamaremos $\mathfrak{X}$-residual de $G$, al subgrupo de $G$ denotado y definido de la siguiente manera:*

$$G^{\mathfrak{X}} := \bigcap \{N \trianglelefteq G \ : \ G/N \in \mathfrak{X}\}$$

Si $\mathfrak{X}$ es una clase de grupos $\mathsf{R}_0$-cerrada y $G$ un grupo finito, entonces el conjunto $A_G = \{N : N \trianglelefteq G \text{ y } G/N \in \mathfrak{X}\}$ ordenado por inclusión tiene un elemento minimal único, lo cual garantiza la existencia del subgrupo anterior. Para mas detalles ver [3], página 272.

**Lema 2.12.** *Si $\mathfrak{X}$ es una formación, $G$ un grupo finito y $H \trianglelefteq G$, entonces $G/H \in \mathfrak{X}$ si y sólo si $G^{\mathfrak{X}} \leq H$. En particular $G \in \mathfrak{X}$ si y sólo si $G^{\mathfrak{X}} = \langle 1 \rangle$.*

*Demostración.* Ver [4], VI 12. □

A continuación definimos un tipo especial de clases de grupo, las clases de Schunck, las cuales jugarán un papel central en la generalización de los teoremas de Sylow.

**Definición 2.13.** *Una clase de grupos no vacía $\mathfrak{X}$ es llamada una clase de Schunk, si y sólo si $\mathfrak{X}$ es $\mathsf{P}$-cerrada.*

Como ejemplo de clases de Schunck, podemos citar $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{S}$.

**Teorema 2.14.** *Si $\mathfrak{X}$ es una formación, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

*1. $\mathfrak{X}$ es una clase de Schunck* *2. $\mathfrak{X}$ es saturada.*

*Demostración.* Ver [4] VI 8. □

De la teoría básica de grupos sabemos que, si $G$ es un grupo soluble y $H \leq G$, entonces $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ si y sólo si $HK/K$ es $\mathfrak{S}_\pi$-maximal en $G/K$, para todo $K \trianglelefteq G$. Una generalización del concepto de $\pi$subgrupo de Hall y por lo tanto del concepto de $p$-subgrupo de Sylow se obtendrá cuando al reemplazar $\mathfrak{S}_\pi$ po otra clase $\mathfrak{X}$ siguen existiendo subgrupos $H$ de $G$ tales que $HK/K$ sea $\mathfrak{X}$-maximal en $G/K$, para todo $K \trianglelefteq G$ y además dos cualesquiera de ellos sean conjugados en $G$.

En este orden de idea se tiene la siguiente definición.

**Definición 2.15.** *Sean $G$ un grupo finito y $\mathfrak{X}$ una clase de grupos. Diremos que $U \leq G$ es un $\mathfrak{X}$-proyector de $G$ si y sólo si, $UK/K$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $G/K$ para todo $K \trianglelefteq G$.*

Al conjunto (posiblemente vacío) de los $\mathfrak{X}$-proyectores de $G$ lo notaremos como $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{X}}(G)$.

**Ejemplo 2.16.** *Si $G$ es soluble, es claro que $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{S}_\pi}(G) = \mathrm{Hall}_\pi(G)$. Entonces $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{S}_\pi}(G) \neq \emptyset$. Como caso particular, si $\pi = \{p\}$, entonces $\mathrm{Syl}_p(G) = \mathrm{Hall}_\pi(G)$, para todo grupo $G$, así, $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{S}_p}(G) = \mathrm{Syl}_p(G)$.*

**Definición 2.17.** *Una clase de grupos $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$ es denominada proyectiva, si $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{X}}(G) \neq \emptyset$, para todo grupo finito soluble $G$.*

Del ejemplo anterior se sigue inmediatamente que la clase $\mathfrak{S}_\pi$ es proyectiva. Por otro lado, si $\mathfrak{A}$ es la clase de todos los grupos finitos abelianos y $G$ un $p$-grupo no abeliano. Entonces $G$ no tiene $\mathfrak{A}$-proyectores, es decir, $\mathrm{Proj}_{\mathfrak{A}}(G) = \emptyset$.

**Teorema 2.18.** *Si $\mathfrak{X}$ es una clase proyectiva, entonces $\mathfrak{X}$ es una clase de Schunck.*

*Demostración.* Ver [4] II 10. $\square$

El siguiente teorema, además de presentar la validez del recíproco del teorema anterior, nos suministra una nueva generalización de los teoremas de Sylow. Esto se evidencia en la existencia y conjugación de los $\mathfrak{X}$-proyectores de un grupo finito soluble $G$.

**Teorema 2.19.** *Sean $\mathfrak{X}$ una clase de Schunck y $G$ un grupo soluble. Entonces:*

1. *Existe por lo menos un $\mathfrak{X}$-proyector de $G$*
2. *Todos los $\mathfrak{X}$-proyectores de $G$ son conjugados en $G$.*

*Demostración.* Ver [5] 2.2.1. $\square$

**Definición 2.20.** *Un subgrupo $H$ de un grupo finito $G$ es llamado un subgrupo de Carter de $G$, si $H$ es un grupo nilpotente y $N_G(H) = H$.*

**Teorema 2.21.** *Si $G \in \mathfrak{S}$, entonces*

$$\mathrm{Proj}_{\mathfrak{N}}(G) = \{H : H \text{ es un subgrupo de Carter de } G\}.$$

*Demostración.* Ver [4] III 3. $\square$

**Definición 2.22.** *Para un grupo cualquiera $G$ definimos recursivamente los subgrupos $\mathrm{Z}_j(G)$.*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Z}_0(G) &=& \langle 1 \rangle \\ \mathrm{Z}_1(G) &=& \mathrm{Z}(G) \\ \mathrm{Z}_{j+1}(G) &=& \mathrm{Z}(G/\mathrm{Z}_j(G)), \text{ para } j \geq 1 \end{array}$$

*La cadena $\langle 1 \rangle = \mathrm{Z}_0(G) \leq \mathrm{Z}_1(G) \leq \cdots$ es denominada la serie central ascendente de $G$. El subgrupo característico $\mathrm{Z}_\infty(G) := \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathrm{Z}_j(G)$ es llamado el Hipercentro de $G$*

**Teorema 2.23.** *Si $H$ es un subgrupo de Carter de $G$, entonces $Z_\infty(G) \subseteq H$.*

*Demostración.* Ver [4] III 5. $\square$

## 3 Clases de Fitting

Las clases de Fitting nacen de manera inmediata teniendo como objetivo la dualización de los trabajos de Gaschtz relativos a la existencia y conjugación de los $\mathfrak{X}$-proyectores de un grupo finito soluble $G$. Estas son llamadas asi debido a los trabajos de H. Fitting, quien en 1938 demostró que la clase de todos los grupos finitos nilpotentes es cerrada bajo la formación de productos de subgrupos normales.

En 1967, Fischer, Gaschtz y Hartley demostraron que una clase de Fitting $\mathfrak{X}$ es caracterizada por la existencia de una única clase de conjugación de los denominados $\mathfrak{X}$-inyectores de $G$. Este resultado presenta otra generalización de los teoremas de Sylow, dual a la realizada en la teoría de $\mathfrak{X}$-proyectores, donde $\mathfrak{X}$ es una clase de Schunck.

**Definición 3.1.** *Una clase de grupos $\mathfrak{X}$ se denomina una clase de Fitting, si y sólo si, $\mathfrak{X}$ es $\mathsf{S}_n$-cerrada y $\mathsf{N}_0$-cerrada.*

**Definición 3.2.** *Sea $G$ un grupo finito y $\pi$ un conjunto de números primos. Denotemos con $\sigma(|G|)$ al conjunto de todos los divisores primos de $|G|$.*

1. *Definimos el subgrupo $O_\pi(G)$ de $G$ de la siguiente manera:*

$$O_\pi(G) := \langle N : N \trianglelefteq G, N \text{ es } \pi\text{- grupo}\rangle$$

2. *El subgrupo de Fitting de $G$ notado con $F(G)$ se define así:*

$$F(G) := \langle O_p(G) : p \in \sigma(|G|)\rangle$$

De la definición se sigue inmediatamente que $F(G)$ es el producto directo $\prod_{p\in\sigma(|G|)} O_p(G)$ y además $O_p(G) \in \mathrm{Syl}_p(F(G))$. Por lo tanto el subgrupo de Fitting de $G$ es un subgrupo característico y nilpotente.

**Teorema 3.3.** *Si $G$ es un grupo finito, entonces*

$$F(G) = \langle S : S \text{ sn } G \text{ y } S \text{ es nilpotente}\rangle.$$

*En particular, $F(G)$ es el subgrupo de $G$ más grande que es subnormal y nilpotente.*

*Demostración.* Ver [3] A (8.8) a. □

En el siguiente ejemplo demostramos que $\mathfrak{N}$ es una clase de Fitting.

**Ejemplo 3.4.** $\mathfrak{N}$ *es una clase de Fitting: Dado que las operaciones $\mathsf{S}_n$ y $\mathsf{N}_0$ son expansivas, es suficiente demostrar que $\mathsf{S}_n(\mathfrak{N}) \subseteq \mathfrak{N}$ y $\mathsf{N}_0(\mathfrak{N}) \subseteq \mathfrak{N}$.*

*Sea $G \in \mathsf{S}_n(\mathfrak{N})$. Entonces existe $H \in \mathfrak{N}$ tal que $G$ sn $H$. Por lo tanto $G \in \mathfrak{N}$ (subgrupos de grupos nilpotentes son nilpotentes).*

*Por otro lado, sea $G \in \mathsf{N}_0(\mathfrak{N})$. Entonces existen $K_i \in \mathfrak{N}$, $K_i$ sn $G$, $i = 1, \ldots, r$, con $G = \langle K_1, \cdots, K_r\rangle$. Entonces $G = F(G)$ y se tiene que $G \in \mathfrak{N}$.*

**Teorema 3.5.** *Sea $\mathcal{F}$ una familia cualquiera de clases de Fitting. Entonces $\mathfrak{D} := \bigcap_{\mathfrak{X}\in\mathcal{F}} \mathfrak{X}$ es una clase de Fitting,*

*Demostración.* Dado que $\mathsf{S}_n$ y $\mathsf{N}_0$ son expansivas, es suficiente demostrar que $\mathsf{S}_n\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}$ y $\mathsf{N}_0\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{D}$.

1. Si $G \in \mathsf{S}_n\mathfrak{D}$, entonces $G$ sn $H$, para algún $H \in \mathfrak{D}$. Es decir $G$ sn $H$ y $H \in \mathfrak{X}$, para todo $\mathfrak{X} \in \mathcal{F}$, de donde se sigue que $G \in \mathsf{S}_n\mathfrak{X}$, para todo $\mathfrak{X} \in \mathcal{F}$, pero como $\mathsf{S}_n\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, para todo $\mathfrak{X} \in \mathcal{F}$, se tiene entonces que $G \in \mathfrak{X}$, para todo $\mathfrak{X} \in \mathfrak{F}$. En conclusión $G \in \mathfrak{D}$.

2. Si $G \in \mathsf{N}_0\mathfrak{D}$, entonces $G = \langle K_1, \ldots, K_r\rangle$ con $K_i$ sn $G$, $i = 1, \ldots, r$ y $K_i \in \mathfrak{D}$, $i = 1, \ldots, r$. Entonces $G = \langle K_1, \ldots, K_r\rangle$ con $K_i$ sn $G$, $i = 1, \ldots, r$ y $K_i \in \mathfrak{X}$, $i = 1, \ldots, r$, para todo $\mathfrak{X} \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $G \in \mathsf{N}_0\mathfrak{X}$, para todo $\mathfrak{X} \in \mathcal{F}$ y dado que $\mathsf{N}_0\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$, se tiene que $G \in \mathfrak{X}$, para todo $\mathfrak{X} \in \mathcal{F}$. Es decir $G \in \mathfrak{D}$.

□

En el siguiente resultado se sientan las bases para la definición del concepto de $\mathfrak{X}$-radical de un grupo finito $G$, donde $\mathfrak{X}$ es una clase de Fitting.

**Lema 3.6.** *Sea $\mathfrak{X}$ una clase de grupos $\mathsf{N}_0$-cerrada y $G$ un grupo finito. Entonces el conjunto $\ell = \{N : N \text{ sn } G \text{ y } N \in \mathfrak{X}\}$, ordenado parcialmente por inclusión tiene un elemento maximal único.*

*Demostración.* Sea $R := \langle N : N \in \ell\rangle$. Demostremos que $R$ es el subgrupo buscado, probando que $N \subseteq R$, para todo $N \in \ell$ y que $R \in \ell$. La primera afirmación es inmediata, se sigue de la definición de $R$. Por lo tanto es suficiente demostrar que $R \in \ell$.

Si $N \in \ell$, entonces $N$ sn $G$, de donde se infiere que $(N \cap R)$ sn $R$, pero $N \cap R = N$, por ello $N$ sn $R$, para todo $N \in \ell$. Por lo tanto, de la finitud de $\ell$, tenemos que $R \in \mathsf{N}_0\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ y como $R$ sn $G$ (Ver [3] A (14.3)), se tiene que $R \in \ell$. □

**Definición 3.7.** *Sea $\mathfrak{X}$ una clase de grupos $\mathsf{N}_0$-cerrada y $G$ un grupo finito. Llamaremos $\mathfrak{X}$-radical de $G$ al subgrupo denotado y definido de la siguiente manera:*

$$G_{\mathfrak{X}} := \langle N : N \text{ sn } G,\ N \in \mathfrak{X}\rangle$$

**Nota 3.8.** *Si $\mathfrak{X}$ es una clase $\mathsf{N}_0$-cerrada y $G$ un grupo finito, del lema 3.6 se sigue inmediatamente que $G_{\mathfrak{X}}$ es elemento maximal del conjunto $\{N : N \text{ sn } G, N \in \mathfrak{X}\}$. Es decir, $G_{\mathfrak{X}}$ sn $G$ y $G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$, y si $N$ sn $G$ con $N \in \mathfrak{X}$, entonces $N \leq G_{\mathfrak{X}}$.*

**Lema 3.9.** *Sea $\mathfrak{X}$ una clase de grupos $\mathsf{N}_0$-cerrada y $G$ un grupo finito. Entonces $G_{\mathfrak{X}}$ char $G$.*

*Demostración.* Demostramos que $\varphi(G_{\mathfrak{X}}) \subseteq G_{\mathfrak{X}}$, para todo $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Sea $\varphi(h) \in \varphi(G_{\mathfrak{X}})$, con $h \in G_{\mathfrak{X}}$. Entonces $h = g_1^{k_1} \cdots g_r^{k_r}$, donde $g_i \in \bigcup_{N\in\ell} N$, $i = 1, \ldots, r$, $\ell = \{N : N \text{ sn } G, N \in \mathfrak{X}\}$ y $k_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, r$. Por lo tanto $\varphi(h) = \varphi(g_1)^{k_1} \cdots \varphi(g_r)^{k_r}$ y como $g_i \in N$, $i = 1, \ldots, r$, para algún $N \in \ell$, entonces $\varphi(g_i) \in \varphi(N)$, $i = 1, \ldots, r$. Pero $\varphi(N)$ sn $G$ y además como $N \in \mathfrak{X}$, se tiene que $\varphi(N) \in \mathfrak{X}$, por lo tanto $\varphi(N) \in \ell$ y se tiene que $\varphi(g_i) \in \ell$, para $i = 1, \ldots, r$. En consecuencia $\varphi(h) \in G_{\mathfrak{X}}$. □

**Nota 3.10.** *Si $\mathfrak{X}$ es una clase de Fitting y $G$ un grupo finito soluble, entonces por la nota 3.8 se tiene que $G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$ y si $N$* sn *$G$, con $N \in \mathfrak{X}$, entonces $N \leq G_{\mathfrak{X}}$.*

**Lema 3.11.** *Si $\mathfrak{X}$ es una clase de Fitting, $G$ un grupo finito y $H$* sn *$G$, entonces $H \in \mathfrak{X}$ si y sólo si, $H \leq G_{\mathfrak{X}}$. En particular $G \in \mathfrak{X}$ si y sólo si $G_{\mathfrak{X}} = G$.*

*Demostración.* Es claro por la definición de $G_{\mathfrak{X}}$ que si $H$ sn $G$ y $H \in \mathfrak{X}$ entonces $H \leq G_{\mathfrak{X}}$.

Recíprocamente, si $H \leq G_{\mathfrak{X}}$ entonces $H \in \mathsf{S}_n\mathfrak{X}$, ya que $G_{\mathfrak{X}}$ sn $G$ y $G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$, pero como $\mathsf{S}_n\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$ se tiene que $H \in \mathfrak{X}$. □

**Teorema 3.12.** *Si $\mathfrak{X}$ es una clase de Fitting, $G$ un grupo finito soluble y $K$* sn *$G$, entonces $K_{\mathfrak{X}} = K \cap G_{\mathfrak{X}}$.*

*Demostración.* Del lema 3.9 sabemos que $K_{\mathfrak{X}} \trianglelefteq K$ y como $K$ sn $G$, entonces $K_{\mathfrak{X}}$ sn $G$, además $K_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$. En consecuencia por la nota 3.8 tenemos que $K_{\mathfrak{X}} \leq G_{\mathfrak{X}}$. Entonces $K \cap K_{\mathfrak{X}} \leq K \cap G_{\mathfrak{X}}$, pero $K \cap K_{\mathfrak{X}} = K_{\mathfrak{X}}$, de donde se sigue que $K_{\mathfrak{X}} \leq K \cap G_{\mathfrak{X}}$.

Recíprocamente, dado que $K$ sn $G$ y $G_{\mathfrak{X}} \leq G$, por [3] A. 14.1(a) se tiene que $(K \cap G_{\mathfrak{X}})$ sn $G_{\mathfrak{X}}$ y como $G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$, entonces $K \cap G_{\mathfrak{X}} \in \mathsf{S}_n\mathfrak{X} = \mathfrak{X}$. Además, dado que $G_{\mathfrak{X}} \trianglelefteq G$, se verifica que $(K \cap G_{\mathfrak{X}}) \trianglelefteq K$ y en consecuencia $(K \cap G_{\mathfrak{X}})$ sn $K$. Por la nota 3.8 tenemos que $K \cap G_{\mathfrak{X}} \leq K_{\mathfrak{X}}$.

□

El siguiente teorema presenta una definición alternativa del concepto de clase de Fitting, el cual utilizaremos en la elaboración de algunos ejemplos.

**Teorema 3.13.** *Una clase $\mathfrak{X}$ es una clase de Fitting si y sólo si*

1. *Si $N \trianglelefteq G$ y $G \in \mathfrak{X}$ entonces $N \in \mathfrak{X}$.*

2. *Si $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ y $N_1, N_2 \in \mathfrak{X}$, entonces $N_1N_2 \in \mathfrak{X}$.*

*Demostración.* Ver [2], página 34. □

Presentamos ahora algunas aplicaciones del teorema anterior.

**Ejemplos 3.14.** *Las clases $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_\pi$ y $\mathfrak{N}_\pi$ son clases de Fitting.*

1. *$\mathfrak{S}$ es una clase de Fitting.*

   (a) *Es claro que si $N \trianglelefteq G$ y $G \in \mathfrak{S}$, entonces $N \in \mathfrak{S}$.*

   (b) *Sean $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ y $N_1, N_2 \in \mathfrak{S}$. Entonces como $N_1 \cap N_2 \trianglelefteq N_2$ y $N_2 \in \mathfrak{S}$ se tiene que $N_2/(N_1 \cap N_2)$ es un grupo soluble. Pero $N_1N_2/N_1 \cong N_2/(N_1 \cap N_2)$, por lo tanto $N_1N_2/N_1 \in \mathfrak{S}$ y como $N_1 \in \mathfrak{S}$, podemos afirmar que $N_1N_2 \in \mathfrak{S}$.*

2. *$\mathfrak{S}_\pi$ es una clase de Fitting.*

   (a) *Claramente se tiene que que si $N \trianglelefteq G$ y $G \in \mathfrak{S}_\pi$, entonces $N \in \mathfrak{S}_\pi$.*

   (b) *Sean ahora $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ y $N_1, N_2 \in \mathfrak{S}_\pi$. Del ejemplo anterior sabemos que $N_1N_2 \in \mathfrak{S}$. Además, si $p \in \sigma(|N_1N_2|)$, entonces, dado que*

   $$|N_1N_2| = \frac{|N_1||N_2|}{|N_1 \cap N_2|},$$

   *se tiene que $p \in \sigma(|N_1|)$ o $p \in \sigma(|N_2|)$ y dado que el conjunto*

   $$\{\sigma(|N_1|), \sigma(|N_2|)\}$$

   *está contenido en $\pi$ se tiene que $p \in \pi$. Es decir, $N_1N_2$ es un $\pi$-grupo, por lo tanto $N_1N_2 \in \mathfrak{S}_\pi$.*

3. *$\mathfrak{N}_\pi$ es una clase de Fitting. Dado que $\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{N}$, el resultado se sigue inmediatamente del teorema 3.5.*

Utilizaremos los ejemplos anteriores para presentar dos ejemplos interesantes de $\mathfrak{X}$-radicales de un grupo finito soluble $G$.

**Ejemplos 3.15.** *Sea $G$ un grupo finito soluble y $\pi \subseteq \P$.*

1. *$G_{\mathfrak{N}} = F(G)$. Es una consecuencia inmediata del teorema 3.3.*

2. *$G_{\mathfrak{S}_\pi} = O_\pi(G)$. De las definiciones de $O_\pi(G)$ y $G_{\mathfrak{S}_\pi}$ se sigue inmediatamente que $O_\pi(G) \leq G_{\mathfrak{S}_\pi}$.*

   *Recíprocamente, dado que $G_{\mathfrak{S}_\pi}$ char $G$, se tiene que $G_{\mathfrak{S}_\pi} \trianglelefteq G$ y además como $\mathfrak{S}_\pi$ es una clase de Fitting, entonces $\mathfrak{S}_\pi$ es $\mathsf{N}_0$-cerrada y con ello $G_{\mathfrak{S}_\pi} \in \mathfrak{S}_\pi$.*

   *Es decir, $G_{\mathfrak{S}_\pi} \in \{N : N \trianglelefteq G$ y $N$ es un $\pi$-grupo$\}$, de donde se sigue que $G_{\mathfrak{S}_\pi} \leq O_\pi(G)$.*

## 4 $\mathfrak{X}$-inyectores y clases inyectivas

Otra caracterización de los $\pi$-subgrupos de Hall de un grupo finito $G$ conocida en la teoría básica de grupos, es que si $G$ es un grupo soluble y $H$ es un subgrupo de $G$, entonces $H \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ si y sólo si, $H \cap K$ $\mathfrak{S}_\pi$-maximal en $K$, para todo $K$ sn $G$. Podríamos preguntarnos por cuáles clases $\mathfrak{X}$ podemos reemplazar a $\mathfrak{S}_\pi$ de modo que al menos siga existiendo un subgrupo $H$ de $G$, con $H \cap K$ $\mathfrak{X}$-maximal en $K$, para todo $K$ sn $G$ y que dos cualesquiera de ellos sean conjugados en $G$.

La respuesta a tal interrogante permitió introducir el concepto de $\mathfrak{X}$-inyector de un grupo finito $G$, donde $\mathfrak{X}$ es una clase de grupos y con ello otra generalización del concepto de $p$-subgrupo de Sylow de $G$.

**Definición 4.1.** *Sea $\mathfrak{X}$ una clase de grupos, $G$ un grupo finito. Diremos que $S \leq G$ es un $\mathfrak{X}$-inyector de $G$ si y sólo si $S \cap N$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $N$, para todo $N$* sn *$G$.*

Al conjunto (posiblemente vacío) de los $\mathfrak{X}$-inyectores de $G$ lo denotamos con $\mathrm{Inj}_\mathfrak{X}(G)$.

**Ejemplo 4.2.** *Es claro que si $G$ es un grupo finito soluble, entonces $\mathrm{Inj}_{\mathfrak{S}_\pi}(G) = \mathrm{Hall}_\pi(G)$ y si $\pi = \{p\}$, donde $p$ es un número primo, entonces $\mathrm{Inj}_{\mathfrak{S}_p}(G) = \mathrm{Syl}_p(G)$.*

En el ejemplo anterior observamos una nueva generalización del concepto de $p$-subgrupo de Sylow que al igual que la teoría de $\mathfrak{X}$-proyectores contiene a la extensión dada en la teoría de $\pi$-subgrupos de Hall. Esta nueva generalización puede verse de manera dual a la teoria de $\mathfrak{X}$-proyectores.

**Lema 4.3.** *Sea $\mathfrak{X}$ una clase de grupos y $G$ un grupo finito. Si $K$* sn *$G$ y $S \in \mathrm{Inj}_\mathfrak{X}(G)$, entonces $S \cap K$ es un $\mathfrak{X}$-inyector de $K$.*

*Demostración.* Sea $N$ sn $K$, $K$ sn $G$ y $S \in \mathrm{Inj}_\mathfrak{X}(G)$. Entonces $N$ sn $G$ y por lo tanto $S \cap N = (S \cap K) \cap N$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $N$.

□

**Lema 4.4.** *Si $\mathfrak{X}$ es una clase de grupos, $G$ un grupo finito y $S \in \mathrm{Inj}_\mathfrak{X}(G)$, entonces $S$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $G$.*

*Demostración.* Dado que $S \cap N$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $N$, para todo $N$ sn $G$ y $G$ sn $G$, entonces $S \cap G = S$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $G$. □

**Teorema 4.5.** *Si $\varphi$ es un isomorfismo de $G$ en $H$ y $S$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $G$, entonces $\varphi(S)$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $H$.*

*Demostración.* Ver [4], IX. 4. □

**Teorema 4.6.** *Si $\mathfrak{X}$ es una clase de grupos, $\varphi$ un isomorfismo de $G$ en $H$ y $S \in \mathrm{Inj}_\mathfrak{X}(G)$, entonces $\varphi(S) \in \mathrm{Inj}_\mathfrak{X}(H)$.*

*Demostración.* Sea $M$ sn $H$ y probemos que $\varphi(S) \cap M$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $M$. Podemos ver que $\varphi(S \cap \varphi^{-1}(M)) = \varphi(S) \cap M$. En efecto, si $\varphi(x) \in \varphi(S \cap \varphi^{-1}(M))$ con $x \in S \cap \varphi^{-1}(M)$, entonces $x \in S$ y $\varphi(x) \in M$, de donde $\varphi(x) \in \varphi(S)$ y $\varphi(x) \in M$, es decir $\varphi(x) \in \varphi(S) \cap M$.

Recíprocamente, si $z \in \varphi(S) \cap M$, entonces $z = \varphi(s)$, para algún $s \in S$ y $z = m$, para algún $m \in M$, por lo tanto $\varphi(s) = m$, de donde $s \in \varphi^{-1}(M)$ y en consecuencia $z = \varphi(s) \in \varphi(S \cap \varphi^{-1}(M))$.

Por otra parte, como $M$ sn $H$, entonces $\varphi^{-1}(M)$ sn $G$ y como $S \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(G)$ se tiene que $S \cap \varphi^{-1}(M)$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $\varphi^{-1}(M)$. Pero $\varphi : \varphi^{-1}(M) \longrightarrow M$ es un isomorfismo, entonces por el teorema 4.5 se tiene que $\varphi(S \cap \varphi^{-1}(M))$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $M$. Es decir, $\varphi(S) \cap M$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $M$. □

**Teorema 4.7.** *Sean $\mathfrak{X}$ una clase de grupos, $G$ un grupo finito y $S \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(G)$. Entonces $\varphi^{-1}(S) \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(\varphi^{-1}(G))$, para todo monomorfismo subnormal $\varphi$ en $G$. Esto es, para todo monomorfismo $\varphi : \varphi^{-1}(G) \longrightarrow G$ con $\varphi(\varphi^{-1}(G))$ sn $G$.*

*Demostración.* Sean $S \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(G)$, $\varphi : \varphi^{-1}(G) \longrightarrow G$ un monomorfismo con $\varphi(\varphi^{-1}(G))$ sn $G$ y $N$ sn $\varphi^{-1}(G)$.

Dado que $\varphi$ es un monomorfismo, se tiene que $\varphi : N \longrightarrow \varphi(N)$ es un isomorfismo y por lo tanto su inversa $\phi : \varphi(N) \longrightarrow N$ también lo es.

Por otra parte, dado que $\varphi : \varphi^{-1}(G) \longrightarrow \varphi(\varphi^{-1}(G))$ es un isomorfismo y que $N$ sn $\varphi^{-1}(G)$, se verifica que $\varphi(N)$ sn $\varphi(\varphi^{-1}(G))$, pero como $\varphi(\varphi^{-1}(G))$ sn $G$, tenemos que $\varphi(N)$ sn $G$. Entonces debido a que $S \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(G)$ se tiene que $S \cap \varphi(N)$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $\varphi(N)$. En consecuencia por el teorema 4.5 tenemos que $\phi(S \cap \varphi(N))$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $N$, pero $\phi(S \cap \varphi(N)) = \varphi^{-1}(S) \cap N$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\phi(S \cap \varphi(N)) &= \{g \in N : g = \phi(x) \wedge x \in (S \cap \varphi(N))\} \\
&= \{g \in N : g = \phi(x) \wedge x \in S \wedge x \in \varphi(N)\} \\
&= \{g \in N : \varphi(g) = x \wedge x \in S \wedge x \in \varphi(N)\} \\
&= \{g \in N : \varphi(g) \in S \wedge \varphi(g) \in \varphi(N)\} \\
&= \{g \in N : \varphi(g) \in S\} \\
&= \{g \in N : g \in \varphi^{-1}(S)\} \\
&= \varphi^{-1}(S) \cap N.
\end{aligned}$$

Concluimos entonces que $\varphi^{-1}(S) \cap N$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $N$, para todo $N$ sn $\varphi^{-1}(G)$, es decir $\varphi^{-1}(S) \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(\varphi^{-1}(G))$. □

El siguiente teorema fue presentado inicialmente por Gaschtz como la definición del concepto de $\mathfrak{X}$-inyector.

**Teorema 4.8.** *Sea $\mathfrak{X}$ una clase de grupos, $G$ un grupo finito y $S \leq G$. Entonces $S \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(G)$ si y sólo si $\varphi^{-1}(S)$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $\varphi^{-1}(G)$, para todo monomorfismo subnormal en $G$.*

*Demostración.* Si $S \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(G)$, entonces por el lema anterior tenemos que $\varphi^{-1}(S)$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $\varphi^{-1}(G)$.

Recíprocamente, supongamos que $\varphi^{-1}(S)$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $\varphi^{-1}(G)$, para todo monomorfismo en $G$ con $\varphi(\varphi^{-1}(G))$ sn $G$ y tomemos $K$ sn $G$. Si consideramos la función $\varphi : K \longrightarrow G$, definida como $\varphi(g) = g$, para todo $g \in K$, vemos que $\varphi$ es un monomorfismo en $G$ y que además es subnormal puesto $\varphi(\varphi^{-1}(G)) = \varphi(K) = K$ sn $G$. Entonces por hipótesis $\varphi^{-1}(S)$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $\varphi^{-1}(G)$, pero

$$\varphi^{-1}(S) = \{g \in K : \varphi(g) \in S\} = \{g \in K : g \in S\} = K \cap S,$$

concluyéndose que $K \cap S$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $K$, para todo $K$ sn $G$, es decir $S \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(G)$. □

**Teorema 4.9.** *Sea $\mathfrak{X}$ una clase de grupos, $G$ un grupo finito y $S \leq G$. Entonces $S \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(G)$ si y sólo si $\varphi^{-1}(S) \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(\varphi^{-1}(G))$, para todo monomorfismo subnormal en $G$.*

*Demostración.* Se sigue inmediatamente de los lemas 4.4, 4.7 y del teorema anterior. □

El siguiente teorema será de gran importancia por sus aplicaciones en pruebas por inducción.

**Teorema 4.10.** *Sea $\mathfrak{X}$ una clase de grupos, $G$ un grupo finito y $S \leq G$. Entonces $S \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(G)$ si y sólo si $S$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $G$ y $S \cap M \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(M)$ para todo $M \lhd \cdot\, G$.*

*Demostración.* Si $S \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(G)$ y $M \lhd \cdot\, G$, entonces por el lema 4.3 se tiene que $S$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $G$ y como $M$ sn $G$, del lema 4.4 se concluye que $(S \cap M) \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(M)$.

Recíprocamente, si $N$ sn $G$, entonces por la definición de subnormalidad existe una cadena $N = R_1 \trianglelefteq R_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq R_{n-1} \trianglelefteq R_n = G$, si tomamos $N$ sn $G$ y $N \neq G$, podemos encontrar una cadena $N = T_1 \trianglelefteq T_2 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq T_{r-1} \trianglelefteq T_r = G$, con $T_{r-1} \lhd \cdot\, G$ debido a la finitud de $G$. Entonces, por hipótesis $(S \cap T_{r-1}) \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(T_{r-1})$ y como $N$ sn $T_{r-1}$, se tiene que $(S \cap T_{r-1}) \cap N$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $N$, pero $(S \cap T_{r-1}) \cap N = S \cap N$, por lo tanto $S \cap N$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $N$.

Por otra parte, si suponemos que $N = G$, entonces $S \cap N = S$ y como $S$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $G$, tenemos que $S \cap N$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $N$. En conclusión $S \cap N$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $N$, para todo $N$ sn $G$, es decir $S \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(G)$. □

**Definición 4.11.** *Una clase $\mathfrak{X}$ se llama inyectiva, si $\mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(G) \neq \emptyset$, para todo grupo finito soluble $G$.*

**Teorema 4.12.** *Si $\mathfrak{X}$ es una clase inyectiva, entonces $\mathfrak{X}$ es una clase de Fitting.*

*Demostración.* Supongamos que $\mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(G) \neq \emptyset$, para todo grupo finito soluble $G$. Sea $G \in \mathfrak{X}$, $N$ sn $G$ y probemos que $N \in \mathfrak{X}$. Como $G \in \mathfrak{X}$ entonces $\mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(G) = \{G\}$, por lo tanto del lema 4.3 se tiene que $N = N \cap G \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(N)$ y en consecuencia $N \in \mathfrak{X}$.

Por otra parte, sean $N_1, N_2 \trianglelefteq G$, $N_1, N_2 \in \mathfrak{X}$, $G = N_1N_2$ y $H \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(G)$. Dado que $N_i \in \mathfrak{X}$, $i = 1, 2$, se tiene que $\mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(N_i) = \{N_i\}$, $i = 1, 2$. Por lo tanto del lema 4.3 se tiene que $H \cap N_i = N_i$, $i = 1, 2$. Entonces $N_i \leq H$ y en consecuencia $G = H \in \mathfrak{X}$. □

**Lema 4.13.** *Si $H \trianglelefteq N$, $N/H$ nilpotente, $S \cap H = \langle 1 \rangle$, entonces $S$ está contenido en el hipercentro de $N$.*

*Demostración.* Podemos suponer que $S \neq \langle 1 \rangle$. Entonces sea $M/H \cdot\!\trianglelefteq N/H$, $M \leq SH$ y $L := S \cap M$.

Entonces $lH = (lH)^n = l^n H$, para $n \in N$, $l \in L$, dado que $M/H$ esta contenido en el centro de $N/H$ (por la nilpotencia de $N/H$) se tiene que $l^{-1}l^n \in L \cap H = \langle 1 \rangle$ y así $L$ está contenido en el centro de $N$. Ahora el lema se sigue por inducción, considerando $N/L$, $HL/L = M/L$, $S/L$ en lugar de $N$, $H$, $S$ respectivamente. □

**Lema 4.14.** *Sea $\mathfrak{X}$ una clase de Fitting, $G$ un grupo finito, $G/H$ nilpotente, $S_1$ y $S_2$ $\mathfrak{X}$-maximales en $G$ con $S_1 \cap H = S_2 \cap H$. Entonces $S_1$ y $S_2$ son conjugados en $H$.*

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre el orden de $G$. Evidentemente el resultado es cierto para $|G| = \langle 1 \rangle$. Supongamos que se cumple para $G$ con $|G| < n$ y probemos la afirmación para $|G| = n > 1$.

Definamos $G^* := \langle S_1, S_2 \rangle$ y $H^* := H \cap G^*$. Vemos que $G^*/H^*$ es nilpotente, ya que

$$G^*/H^* = \langle S_1, S_2 \rangle / H \cap \langle S_1, S_2 \rangle \cong \langle S_1, S_2 \rangle H/H \leq G/H.$$

Como $S_1$ y $S_2$ son $\mathfrak{X}$-maximales en $G$ y $G^* \leq G$, entonces $S_1$ y $S_2$ son $\mathfrak{X}$-maximal en $G^*$. Además $S_1 \cap H^* = S_2 \cap H^*$. En efecto, sea $g \in S_1 \cap H^*$, entonces $g \in S_1$, $g \in H$ y $g \in G^*$, de donde $g \in (S_1 \cap H)$ y $g \in G^*$. Pero como $S_1 \cap H = S_2 \cap H$, entonces $g \in (S_2 \cap H)$ y $g \in G^*$. En consecuencia $g \in S_2 \cap H^*$ y se tiene que $S_1 \cap H^* \subseteq S_2 \cap H^*$. En igual forma se prueba que $S_2 \cap H^* \subseteq S_1 \cap H^*$.

Si suponemos que $G^* < G$, entonces $|G^*| < |G| = r$ y como $G^*/H^*$ es nilpotente y $S_i$, $i = 1, 2$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $G^*$ con $S_1 \cap H^* = S_2 \cap H^*$, se tiene por la hipótesis de inducción que $S_1$ y $S_2$ son conjugados en $H^*$ y en consecuencia en $H$, teniéndose así la afirmación.

Supongamos entonces que $G = G^*$ y que $\overline{S} := S_1 \cap H = S_2 \cap H \trianglelefteq G$. Sea $C_i/\overline{S}$ un subgrupo de Carter de $N_G(S_i)/\overline{S}$, $i = 1, 2$. Entonces $C_i \leq S_i$, $i = 1, 2$. En efecto, como $H \trianglelefteq G$ entonces $N_G(S_i) \cap H \trianglelefteq N_G(S_i)$ y por ello $\big(N_G(S_i) \cap H\big)/\overline{S} \trianglelefteq N_G(S_i)/\overline{S}$.

Además

$$\begin{aligned}\big((N_G(S_i)\cap H)/\overline{S}\big)/\big((N_G(S_i)\cap H)/\overline{S}\big) &\cong N_G(S_i)/\big(N_G(S_i)\cap H\big)\\ &\cong \big(N_G(S_i)\cdot H\big)/H\\ &\le G/H.\end{aligned}$$

Y dado que $G/H$ es nilpotente, se sigue que

$$\big((N_G(S_i)\cap H)/\overline{S}\big)/\big((N_G(S_i)\cap H)/\overline{S}\big)$$

es nilpotente.

Sabemos también que $S_i/\overline{S}\trianglelefteq N_G(S_i)/\overline{S}$ y además podemos probar que $S_i/\overline{S}\cap \big((N_G(S_i)\cap H)/\overline{S}\big)=\{\overline{S}\}$, puesto que $S_i\cap\big(N_G(S_i)\cap H\big)\subseteq \overline{S}$.

Entonces por el lema anterior, reemplazando a $N$, $H$ y $S$, respectivamente por $N_G(S_i)/\overline{S}$, $\big(N_G(S_i)\cap H\big)/\overline{S}$ y $S_i/\overline{S}$, tenemos que $S_i/S\subseteq Z_\infty\big(N_G(S_i)/\overline{S}\big)$. Pero por el teorema 2.23, $Z_\infty\big(N_G(S_i)/\overline{S}\big)\subseteq C_i/\overline{S}$. Entonces concluimos que $C_i\le S_i$, para $i=1,2$.

Probemos ahora que $C_i/\overline{S}$ es también un subgrupo de Carter de $G/\overline{S}$. Es decir, que $C_i/\overline{S}$ es nilpotente y que $N_{G/\overline{S}}(C_i/\overline{S})=C_i/\overline{S}$. Como $C_i/\overline{S}$ es un subgrupo de Carter de $N_G(S_i)/\overline{S}$, por definición $C_i/\overline{S}$ es nilpotente. Por lo tanto solo debemos probar la segunda afirmación, la cual equivale a demostrar que $N_G(C_i)=C_i$. Sea $g\in N_G(C_i)$. Entonces $C_i^g=C_i$. Pero como $S_i\le C_i$, tenemos que $S_i^g\trianglelefteq C_i^g$. En efecto, sea $c^g\in C_i^g$ y $s^g\in S_i^g$. Entonces

$$(s^g)^{c^g}=c^g s^g(c^g)^{-1}=(gcg^{-1})(gsg^{-1})(gc^{-1}g^{-1})=g(csc^{-1})g^{-1}$$

y como $S_i\le C_i$ entonces $csc^{-1}\in C_i$, de donde se tiene que $(s^g)^{c^g}\in C_i^g$ y por ello $S_i^g\trianglelefteq C_i^g$. En consecuencia, $S_i^g\trianglelefteq C_i$. Además $S_i\trianglelefteq C_i$, puesto que si $s\in S_i$ y $h\in C_i$, como $C_i/\overline{S}$ es un subgrupo de Carter de $N_G(S_i)/\overline{S}$, entonces $C_i\le N_G(S_i)$ y con esto $h\in N_G(S_i)$, de donde se sigue que $s^h\in S_i$.

Por otra parte, la función $\phi: S_i\longrightarrow S_i^g$, definida por $\phi(s)=s^g$ es un isomorfismo. Entonces $S_i\cong S_i^g$ y dado que $S_i\in\mathfrak{X}$, por ser $\mathfrak{X}$-maximal en $G$, se verifica también que $S_i^g\in\mathfrak{X}$. En conclusión, por el teorema 3.13 se tiene que $S_iS_i^g\in\mathfrak{X}$. Pero como $S_i\le S_iS_i^g$, por la $\mathfrak{X}$-maximalidad de $S_i$ en $G$ se tiene que $S_iS_i^g=S_i$, de donde $S_i^g\le S_i$. Entonces $S_i^g=S_i$ puesto que $S_i^g$ es también $\mathfrak{X}$-maximal en $G$, por ser $S_i^g\cong S_i$. En consecuencia $g\in N_G(S_i)$.

Como además $C_i^g=C_i$, vemos que $g\in N_{N_G(S_i)}(S_i)$ y debido a que $C_i/\overline{S}$ es un subgrupo de Carter de $N_G(S_i)/\overline{S}$, por definición tenemos que $N_{N_G(S_i)/\overline{S}}(C_i/\overline{S})=C_i/\overline{S}$, por lo cual $N_{N_G(S_i)/\overline{S}}(C_i)=C_i$ y entonces $g\in C_i$. En consecuencia $N_G(C_i)\subseteq C_i$ y como siempre se verifica que $C_i\subseteq N_G(C_i)$, tenemos que $N_G(C_i)=C_i$ y por tanto $C_i/\overline{S}$ es un subgrupo de Carter de $G/\overline{S}$ y por el teorema 2.21 se tiene que $C_1,C_2\in\mathrm{Proj}_{\mathfrak{N}}(G)$. En consecuencia por el teorema 2.19 dado que $\mathfrak{N}$ es una clase de Shunck, existe $g\in G$ tal que $C_1=C_2^g$.

Podemos probar que $S_2^g \trianglelefteq C_2^g$. En efecto, sea $s^g \in S_2^g$ y $c^g \in C_2^g$, con $s \in S_2$ y $c \in C_2$. Entonces $c^g s^g (c^g)^{-1} = (gcg^{-1})gsg^{-1}(gc^{-1}g^{-1}) = g(csc^{-1})g^{-1} \in S_2^g$, ya que $s^c \in S_2$, debido a que $C_2 \leq N_G(S_2)$. Entonces $S_2^g \trianglelefteq C_1$ y además $S_1 \trianglelefteq C_1$ y $S_2^g, S_1 \in \mathfrak{X}$. En consecuencia por el teorema 3.13, se tiene que $S_1 S_2^g \in \mathfrak{X}$. Pero como $S_1 \leq S_1 S_2^g$ y $S_1$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $G$, tenemos que $S_1 = S_1 S_2^g$, de donde $S_2^g \leq S_1$. Entonces $S_2^g = S_1$, puesto que $S_2^g$ es también $\mathfrak{X}$-maximal en $G$, en razón de que $S_2^g \cong S_2$.

Dado que $H \trianglelefteq G$, se tiene que $(S_2H)^g = S_2^g H$. En efecto, sea $y = g(sh)g^{-1} \in (S_2H)^g$ con $s \in S_2$ y $h \in H$. Entonces $y = (gsg^{-1})(ghg^{-1}) = s^g h^g \in S_2^g H$, puesto que $h^g \in H$. Similarmente, si $y = (gsg^{-1})h \in S_2^g H$, entonces $y = g(sg^{-1}hg)g^{-1} = g(sh^g)g^{-1} \in (S_2H)^g$, ya que $h^g \in H$. Entonces podemos probar que $S_2H = G$, porque si suponemos que $S_2H < G$, por la nilpotencia de $G/H$, se tendría que $S_2H \leq N$ para algún $N \triangleleft G$; de donde $(S_2H)^g \leq N$. Además como $(S_2H)^g = S_2^g H = S_1 H$, entonces $S_1 H \leq N \triangleleft G$ y esto contradeciría el supuesto de que $G = \langle S_1, S_2 \rangle$. Como $H \trianglelefteq G$, entonces $S_2H = HS_2$. Por lo tanto $G = S_2H = HS_2$ y en consecuencia $g = hs$ para algún $h \in H$ y $s \in S_2$. Entonces $S_1 = S_2^g = S_2^{hs} = h(sS_2s^{-1})h^{-1} = hS_2h^{-1} = S_2^h$ y el lema queda demostrado. $\square$

El siguiente teorema, central en el presente artículo, establece una nueva generalización de los teoremas de Sylow, al demostrar la existencia y conjugación de los $\mathfrak{X}$-inyectores de $G$. Además presenta la equivalencia entre los conceptos de clase de Fitting y clases inyectivas.

**Teorema 4.15.** *Sea $\mathfrak{X}$ una clase de Fitting y $G$ un grupo finito soluble. Entonces*

1. *Existe un $\mathfrak{X}$-inyector de $G$.*
2. *Todos los $\mathfrak{X}$-inyectores de $G$ son conjugados en $G^{\mathfrak{N}}$.*

*Demostración.* Procedemos por inducción sobre el orden de $G$. Claramente el resultado es cierto para $G = \langle 1 \rangle$, por lo cual supondremos que se cumplen 1. y 2. para todo grupo $G$, con $|G| < n$ y demostraremos que también se verifican para $G$, con $|G| = n > 1$.

Sea $G \neq \langle 1 \rangle$ y tomemos $L \triangleleft G$ con $G/L$ nilpotente. Por hipótesis de inducción como $|L| < n$, se tiene que $L$ posee un $\mathfrak{X}$-inyector $\overline{S}$. Tomemos además $S$ $\mathfrak{X}$-maximal en $G$, con $\overline{S} \leq S$. Entonces $\overline{S} = S \cap L$. En efecto, dado que $\overline{S} \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(L)$, se tiene que $\overline{S} \leq L$ y entonces $\overline{S} \leq S \cap L$. Además dado que $S \cap L \trianglelefteq S$ y $S \in \mathfrak{X}$, se tiene por el teorema 3.13 que $S \cap L \in \mathfrak{X}$ y debido a que $\overline{S}$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $L$, por ser un $\mathfrak{X}$-inyector de $L$, tenemos que $\overline{S} = S \cap L$.

Probaremos que $S \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(G)$, lo cual por el teorema 4.10 equivale a demostrar simplemente que $S \cap M \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(M)$ para todo $M \triangleleft\cdot\, G$, puesto que $S$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $G$.

Sea $M \triangleleft\cdot\, G$. Entonces por hipótesis de inducción $M$ tiene un $\mathfrak{X}$-inyector $\overline{T}$. Si tomamos $T$ $\mathfrak{X}$-maximal en $G$, con $\overline{T} \leq T$, igual que en el caso anterior se concluye que $\overline{T} = T \cap M$.

Si definimos $H := M \cap L$, vemos que $G/H$ es nilpotente, y además podemos probar que $S \cap H = \overline{S} \cap H$ y $T \cap H = \overline{T} \cap H$, así,

$$\overline{S} \cap H = (S \cap H) \cap L,$$

pero como $S \cap H = (S \cap M) \cap L \leq L$, entonces $\overline{S} \cap H = S \cap H$. En forma similar se prueba que $T \cap H = \overline{T} \cap H$.

Por otra parte, sea $\varphi : L \cap M \longrightarrow L$, definida por $\varphi(g) = g$, para todo $g \in L \cap M$. Observamos que $\varphi$ es un monomorfismo y además subnormal, ya que $\varphi(L \cap M) = L \cap M \trianglelefteq L$. Por lo tanto, por el teorema 4.7, ya que $\overline{S} \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(L)$, se tiene que $\varphi^{-1}(\overline{S}) \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(\varphi^{-1}(L))$. Pero, $\varphi^{-1}(\overline{S}) = \{g \in L \cap M : g \in \overline{S}\} = (L \cap M) \cap \overline{S} = \overline{S} \cap H$ y $\varphi^{-1}(L) = L \cap M = H$, de donde se sigue que $S \cap H = \overline{S} \cap H \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(H)$. En forma similar se prueba que $T \cap H = \overline{T} \cap H \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(H)$.

Como $|H| < n$, por la hipótesis de inducción 2, $S \cap H$ y $T \cap H$ son conjugados en $H^{\mathfrak{N}}$ y por ende en $H$, puesto que $H^{\mathfrak{N}} \leq H$. Entonces existe $h \in H$, tal que $S \cap H = (T \cap H)^h$. Pero $(T \cap H)^h = T^h \cap H$. En efecto, sea $m^h \in (T \cap H)^h$, con $m \in T$ y $h \in H$. Entonces $m^h \in T^h$ y $m \in H$, de donde $m^h \in T^h \cap H$.

Recíprocamente, si $m \in T^h \cap H$, entonces $m = hth^{-1}$ y $m = h'$, para $t \in T$ y $h' \in H$. Por lo tanto $t = h^{-1}h'h^{-1} \in H$ y en consecuencia, $m = t^h$ con $t \in T \cap H$. Es decir, $m \in (T \cap H)^h$. Por lo tanto $S \cap H = T^h \cap H$ y como además $T^h$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $G$ puesto que $T^h \cong T$, por el lema anterior tenemos que $S$ y $T^h$ son conjugados en $H$ y por ende en $G$. Es decir, existe $g \in G$ tal que $S = T^g$.

Pero $\overline{T}^g = (T \cap M)^g = T^g \cap M$. En efecto, sea $x \in T^g \cap M$. Entonces $x = gtg^{-1}$ y $x = m$, para $t \in T$ y $m \in M$. Por ello $t = g^{-1}mg$ y como $M \lhd \cdot\, G$, $t \in M$, obteniéndose que $x = t^g \in (T \cap M)^g$ y en conclusión $T^g \cap M \subseteq (T \cap M)^g$.

De forma similar se demuestra que $(T \cap M)^g \subseteq T^g \cap M$. En consecuencia $\overline{T}^g = T^g \cap M = S \cap M$. Por otra parte, como $M \lhd \cdot\, G$, tenemos que $M^g = M$ y si consideramos el isomorfismo $\varphi : M \longrightarrow M^g$, definido por $\varphi(h) = h^g$, para todo $h \in M$, entonces por el teorema 4.6, dado que $\overline{T} \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(M)$ se tiene que $\varphi(\overline{T}) = \overline{T}^g \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(M^g) = \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(M)$. Por lo tanto $S \cap M \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(\overline{M})$ y en conclusión $S \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(G)$, quedando así probada la parte 1.

Por otra parte, sean $S_1, S_2 \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(G)$ y probemos que existe $g \in G^{\mathfrak{N}}$ tal que $S_1 = S_2^g$. Como existe $L \lhd G$ con $G/L$ nilpotente y $G^{\mathfrak{N}} := \cap\{N \trianglelefteq G : G/N \in \mathfrak{N}\}$ tenemos que $G^{\mathfrak{N}} \lhd G$ y además por la definición de $\mathfrak{N}$-residual se tiene que $G/G^{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{N}$. Entonces $G^{\mathfrak{N}}$ sn $G$ y por el lema 4.3 se tiene que $S_1 \cap G^{\mathfrak{N}}$ y $S_2 \cap G^{\mathfrak{N}}$ son $\mathfrak{X}$-inyectores de $G^{\mathfrak{N}}$, pero como $|G^{\mathfrak{N}}| < n$, entonces $S_1 \cap G^{\mathfrak{N}}$ y $S_2 \cap G^{\mathfrak{N}}$ son conjugados en $(G^{\mathfrak{N}})^{\mathfrak{N}}$. Es decir, existe $g \in (G^{\mathfrak{N}})^{\mathfrak{N}}$ tal que $S_1 \cap G^{\mathfrak{N}} = (S_2 \cap G^{\mathfrak{N}})^g$.

Podemos ver que $(S_2 \cap G^{\mathfrak{N}})^g = S_2^g \cap G^{\mathfrak{N}}$. En efecto, sea $x \in S_2^g \cap G^{\mathfrak{N}}$. Entonces $x = gsg^{-1}$ y $x \in G^{\mathfrak{N}}$, para algún $s \in S_2$. De donde $s = g^{-1}xg$ y como $g \in (G^{\mathfrak{N}})^{\mathfrak{N}} \leq G^{\mathfrak{N}}$, se tiene que $s \in G^{\mathfrak{N}}$ y en conclusión $x = s^g \in (S_2 \cap G^{\mathfrak{N}})^g$.

Recíprocamente, si $x \in (S_2 \cap G^{\mathfrak{N}})^g$, entonces $x = gyg^{-1}$, con $y \in S_2$ y $y \in G^{\mathfrak{N}}$. Como $g \in G^{\mathfrak{N}}$, entonces, $x \in G^{\mathfrak{N}}$, pero puesto que $y \in S_2$, se tiene que $x = y^g \in S_2^g$ y por lo tanto $x \in S_2^g \cap G^{\mathfrak{N}}$.

Como $S_1, S_2 \in \mathrm{Inj}_{\mathfrak{X}}(G)$, entonces $S_1$ y $S_2$ son $\mathfrak{X}$-maximales en $G$ y además debido a que $S_2 \cong S_2^g$, tenemos que $S_2^g$ es $\mathfrak{X}$-maximal en $G$. En conclusión, $G/G^{\mathfrak{N}}$ es nilpotente, $S_1$ y $S_2^g$ son $\mathfrak{X}$-maximales en $G$ y $S_1 \cap G^{\mathfrak{N}} = S_2^g \cap G^{\mathfrak{N}}$. Entonces por el lema anterior, existe $h \in G^{\mathfrak{N}}$ tal que $S_1 = (S_2^g)^h$, de donde $S_1 = S_2^m$, con $m = gh \in G^{\mathfrak{N}}$. □

## Referencias

[1] Ballester, A.: Classes of finite groups, Springer Verlag, Series: Mathematics and Its Applications, Vol. 584 2006.

[2] De la Cruz, J.: Dualización en la teoría de clases de grupos finitos solubles: Una introducción a las Clases de Fitting, Tesis de Maestria, Universidad Nacional 2006.

[3] Doerk, K., Hawkes, T.: Finite Soluble Groups, W. de G. 1992.

[4] Gaschütz, W.: Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen. Math. Z. 80, 300-305 (1963).

[5] Wenbin, G.: The Theory of Classes of Groups. Sciencie Press / Kluwer Academic Publisher Beijing. 2000.

*Dirección de los autores*
Javier de la Cruz Cantillo — Universidad del Norte
e-mail: `jdelacruz@uninorte.edu.co`
Ismael Gutiérrez García — Universidad del Norte
e-mail: `isgutier@uninorte.edu.co`