



**Universidad
del Valle**

AFECTACIÓN DE LA MASA DE LAS ESTRELLAS DE NEUTRONES POR ACOPLAMIENTO CON EL AXIÓN EN GRAVEDAD MODIFICADA

SEBASTIÁN MORENO CHALACÁ

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Física (3146)
2025

AFECTACIÓN DE LA MASA DE LAS ESTRELLAS DE NEUTRONES POR ACOPLAMIENTO CON EL AXIÓN EN GRAVEDAD MODIFICADA

SEBASTIÁN MORENO CHALACÁ

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Físico

Director: Luis Norberto Granda Velásquez, PhD.

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Física (3146)
2025

A mis padres...

Agradecimientos

Primeramente, quiero agradecer a mi mamá, Fanny, y a mi papá, Flover, ya que sin ellos no sería lo que soy hoy. Su arduo esfuerzo y trabajo han sido el ejemplo que me ha permitido llegar donde estoy; esto es por y para ellos.

Quiero agradecer a las personas que me acompañaron durante toda la carrera, desde el inicio hasta el final: Alejandro Castaño, Andrés Galindo, Argiro Garro, Camilo Revelo, Ferney Jiménez y Sebastián Gómez. A mis amigos he de agradecerles por haber estado siempre ahí y haber hecho de este largo proceso algo mucho más ameno.

Quiero agradecer también al profesor Norberto Granda por su guía a lo largo de este trabajo y por haber confiado en mí para realizarlo.

Afectación de la masa de las estrellas de neutrones por acoplamiento con el axi3n en gravedad modificada

Sebasti3n Moreno Chalc3

Resumen

En este trabajo se investiga la estructura de estrellas de neutrones en el marco de una teor3a escalar-tensorial axi3nica. El modelo se define por un acoplamiento no m3nimo entre el campo de axi3n y la curvatura, descrito por la funci3n $f(\phi) = 1 + \xi\phi^2$, y se analiza en el r3gimen cosmol3gico post-inflacionario, donde el axi3n oscila en torno al m3nimo de su potencial. Se derivan las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) modificadas en el marco de Einstein, las cuales se resuelven num3ricamente para obtener la estructura interna y externa de la estrella. Para ello, se implement3 un m3todo de disparo bidimensional en Python. A partir de estas soluciones, se calcula la masa y el radio observables en el marco de Jordan. El an3lisis se lleva a cabo para tres ecuaciones de estado (EoS) nucleares realistas, aproximadas como politropos a trozos: Wiringa-Fiks-Fabrocini (WFF1), Skyrme-Lyon (SLy) y Akmal-Pandharipande-Ravenhall (APR). Los resultados demuestran que el acoplamiento del axi3n induce un fen3meno de escalarizaci3n espont3nea, generando soluciones estelares con una masa m3xima superior a la predicha por la Relatividad General.

Se encontr3 que, si bien las curvas M-R son consistentes con ciertas cotas observacionales como los l3mites de compacidad de GW170817, presenta una tensi3n con las mediciones de radio de NICER. No obstante, el modelo, especialmente con la EoS APR, logra producir estrellas de neutrones con masas de hasta $2.22M_{\odot}$, posicion3ndolas en el umbral de la “brecha de masa” observacional. Esto confirma que la teor3a estudiada es un mecanismo viable para la existencia de estrellas de neutrones supermasivas, aunque su compatibilidad fenomenol3gica completa depende fuertemente de la EoS nuclear subyacente y de los par3metros del modelo axi3nico.

Palabras clave: estrellas de neutrones, axiones, materia oscura, acoplamiento.

Abstract

In this work, the structure of neutron stars is investigated within the framework of an axionic scalar-tensor theory. The model is defined by a non-minimal coupling between the axion field and curvature, described by the function $f(\phi) = 1 + \xi\phi^2$, and is analyzed in the post-inflationary cosmological regime, where the axion oscillates around its potential minimum. The modified Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) equations are derived in the Einstein frame and are then solved numerically to obtain the internal and external structure of the star. For this purpose, a two-dimensional shooting method was implemented in Python. From these solutions, the observable mass and radius are calculated in the Jordan frame. The analysis is carried out for three realistic nuclear equations of state (EoS), approximated as piecewise polytropes: Wiringa-Fiks-Fabrocini (WFF1), Skyrme-Lyon (SLy), and Akmal-Pandharipande-Ravenhall (APR). The results demonstrate that the axion coupling induces a phenomenon of spontaneous scalarization, generating stellar solutions with a maximum mass greater than that predicted by General Relativity.

It was found that while the M-R curves are consistent with certain observational bounds, such as the compactness limits from GW170817, they exhibit tension with radius measurements from NICER. Nonetheless, the model, particularly with the APR EoS, succeeds in producing neutron stars with masses up to $2.22M_{\odot}$, placing them at the threshold of the observational “mass gap”. This confirms that the studied theory is a viable mechanism for the existence of supermassive neutron stars, although its complete phenomenological compatibility is strongly dependent on the underlying nuclear EoS and the parameters of the axion model.

Keywords: neutron stars, axions, dark matter, coupling.

Contenido

1	Introducción	2
1.1	Estrellas de Neutrones como Laboratorios de Física	2
1.2	El Axion como Candidato a Materia Oscura	3
1.3	Teorías Escalar-Tensoriales	4
1.4	Estructura de la Tesis	4
2	Relatividad General y Estructura Estelar	6
2.1	Fundamentos de la Relatividad General	6
2.1.1	Principio de Equivalencia	6
2.1.2	Geometría del Espacio-Tiempo	6
2.1.3	Ecuaciones de Campo de Einstein	8
2.2	Estrellas Relativistas	8
2.2.1	Métrica para Simetría Esférica y Estática	8
2.2.2	Tensor Energía-Momento de la Materia	9
2.3	Las Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)	9
3	Teoría Escalar-Tensorial Axiónica	11
3.1	Acción en el Marco de Jordan	11
3.2	Transformación Conforme al Marco de Einstein	11
3.2.1	Acción	11
3.2.2	Ecuaciones de campo de Einstein	13
3.3	Especificación del Modelo	14
4	Ecuaciones de Estructura Modificadas	17
4.1	Ecuaciones de TOV Modificadas	17
4.2	Masa Física Observable (ADM)	19
5	Ecuación de Estado	21
5.1	El Modelo de Materia: Rol de la Ecuación de Estado	21
5.2	Aproximación Politrópica y Ecuaciones de Estado Seleccionadas	21
6	Resultados Numéricos y Discusión	23
7	Conclusiones	27
A	Transformación conforme del escalar de Ricci	28
A.1	Transformación de los símbolos de Christoffel	28
A.2	Transformación del Tensor de Riemann y Ricci	28
	Referencias	30

Capítulo 1

Introducción

1.1. Estrellas de Neutrones como Laboratorios de Física

La física del siglo XXI utiliza los fenómenos más extremos del universo, en particular las estrellas de neutrones (NS), como laboratorios para sondear leyes fundamentales de la naturaleza. Esta nueva era de la *astronomía multimensajero* fue inaugurada por el evento GW170817, la fusión de dos estrellas de neutrones detectada tanto en ondas gravitacionales como electromagnéticas [1]. La diferencia casi nula entre el tiempo de llegada de la señal gravitacional y la electromagnética impuso una restricción sin precedentes sobre la velocidad de la gravedad, c_g , demostrando que es igual a la velocidad de la luz, c , con una precisión extraordinaria: $|c_g/c - 1| \leq 5 \cdot 10^{-6}$ [2], descartando de forma inmediata una gran cantidad de teorías de gravedad modificada que predecían una velocidad de las ondas gravitacionales distinta a la velocidad de la luz [3, 4]. La era de la astronomía multimensajero no solo abrió una nueva ventana al universo, sino que también demostró ser una herramienta para reducir la gran cantidad de posibilidades teóricas.

Además, el análisis de la deformación de las estrellas durante la fusión, cuantificada por la *deformabilidad de marea* Λ , proporcionó restricciones sobre la Ecuación de Estado (EoS) de la materia. Una EoS más “rígida” (stiff), donde la presión aumenta rápidamente con la densidad, da como resultado estrellas más grandes y menos compactas. Por el contrario, una EoS “blanda” (soft), donde la presión aumenta más lentamente, produce estrellas más pequeñas y compactas que resisten mejor la deformación (menor Λ). Los resultados de GW170817 por parte de la colaboración LIGO-Virgo establecieron un límite superior para la deformabilidad de marea de una estrella de neutrones canónica de 1.4 masas solares ($M_\odot$), $\Lambda_{1.4} = 190^{+390}_{-120}$. Este resultado favoreció de manera significativa las EoS más blandas, sugiriendo que las estrellas de neutrones son objetos relativamente compactos [5].

Sin embargo, un evento posterior, GW190814, planteó uno de los mayores desafíos hasta la fecha. Esta señal fue generada por la fusión de un agujero negro de $\sim 23M_\odot$ con un objeto compacto secundario de una masa de $\sim 2.5M_\odot$ [6]. Este valor cae directamente en el llamado “mass gap” (brecha de masa), una región entre la masa de la estrella de neutrones más pesada conocida ($M = 2.35 \pm 0.17M_\odot$) y la del agujero negro más ligero observado ($\sim 5M_\odot$).

Este objeto secundario representa un enigma fundamental. Si se trata de del agujero negro más ligero jamás detectado, su formación desafía los modelos convencionales de evolución estelar y supernovas. Otra posibilidad es que se trate de la estrella de neutrones más masiva jamás observada. Sostener una masa de $2.6M_\odot$ contra el colapso gravitacional es un desafío excepcional que lleva al límite a la relatividad general incluso con las EoS más rígidas.

Este hecho observacional sugiere que el problema no radica únicamente en el desconocimiento de la EoS, sino en la propia teoría de la gravedad. La existencia de estrellas de neutrones supermasivas, si se confirma, podría ser una indicación de que la propia relatividad general no podría ser suficiente para describir estrellas de neutrones pesadas en la región de la brecha de masa y que alguna forma de gravedad modificada es necesaria para describir correctamente la estructura estelar en el régimen de campo fuerte, como es el caso de las teorías escalar-tensoriales. Los campos escalares requeridos por estas teorías no tienen por qué ser puramente

hipotéticos; podrían corresponder a partículas ya motivadas por otros grandes enigmas de la física, como el axión de la QCD, uno de los candidatos más sólidos para la materia oscura.

1.2. El Axion como Candidato a Materia Oscura

Los grandes problemas no resueltos de la cosmología, como la naturaleza de la materia oscura, pueden tener su origen en la física que opera a las escalas de energía más altas, mucho más allá de lo que el Modelo Estándar describe. En este contexto, el axión emerge no solo como un candidato principal para la materia oscura, sino como una partícula cuya existencia está motivada por uno de los problemas más sutiles y profundos del propio Modelo Estándar: el problema CP fuerte [7]. La simetría CP es la combinación de la conjugación de carga (C), que intercambia partículas por antipartículas, y la paridad (P), que invierte las coordenadas espaciales. Si bien se sabe que esta simetría se viola en las interacciones débiles, no hay evidencia experimental de su violación en las interacciones fuertes, descritas por la Cromodinámica Cuántica (QCD).

La teoría QCD permite de forma natural un término en su Lagrangiano que viola la simetría CP, el parámetro θ , el cual plantea un gran reto desde su descubrimiento [8]. Este parámetro de las interacciones fuertes, de no ser 0, debería inducir efectos observables de la violación CP, el más prominente de los cuales sería un momento dipolar eléctrico para el neutrón. La búsqueda experimental de dicho momento dipolar han arrojado resultados nulos, estableciendo un límite superior sobre el valor efectivo de este parámetro: $\bar{\theta} \lesssim 10^{-10}$ [9]. La solución más elegante y ampliamente aceptada a este enigma es el mecanismo propuesto por Robert Peccei y Helen Quinn en 1977 [10, 11]. En lugar de postular que $\bar{\theta}$ es pequeño por alguna razón desconocida, el mecanismo de Peccei-Quinn (PQ) lo promueve de una constante fundamental a un campo dinámico que empieza siendo un bosón de Goldstone no masivo, que surge del rompimiento espontáneo de una nueva simetría global, $U(1)_{PQ}$ [12, 13].

Inicialmente, el axión es un campo sin masa cuyo valor puede ser cualquiera, sin embargo, la simetría $U(1)_{PQ}$ es rota por efectos cuánticos no perturbativos. Estos efectos generan un pequeño potencial para el campo de axión, cuyo mínimo se encuentra en el valor que cancela el término de violación de CP, $\bar{\theta} = 0$. De esta forma, el universo evoluciona dinámicamente hacia un estado que conserva la simetría CP en el sector fuerte, resolviendo el problema de forma natural.

La misma dinámica que resuelve el problema de CP fuerte proporciona un mecanismo de producción cosmológica natural para el axión. En el universo temprano, cuando la temperatura era mucho mayor que la escala de QCD, el potencial del axión era inexistente y el campo podía tener cualquier valor inicial, ϕ_i , determinado por la física de la ruptura de la simetría PQ. A medida que el universo se expandía y se enfriaba, el potencial del axión inducido por QCD comenzó a “encenderse”. Cuando la tasa de expansión del universo (el parámetro de Hubble, H) se volvió comparable con la masa del axión, $m_a(T)$, que depende de la temperatura, el campo del axión comenzó a oscilar coherentemente al rededor del mínimo de su potencial en $\bar{\theta} = 0$ [14]. Este campo de axión que oscila coherentemente en todo el espacio se comporta exactamente como un fluido de partículas no relativistas y sin presión, es decir, como materia oscura fría (Cold Dark Matter, CDM) [15, 16]. Este proceso se conoce como el mecanismo de desalineamiento (misalignment mechanism). Para una escala de ruptura de la simetría PQ, f_a , en el rango $10^9 \text{ GeV} \lesssim f_a \lesssim 10^{12} \text{ GeV}$ (la llamada “ventana del axión”), la densidad de reliquia de estos axiones producidos por el desalinamiento coincide de forma natural con la densidad de materia oscura observada en el universo [14].

Esta notable coincidencia es lo que eleva al axión a la categoría de los candidatos a materia oscura más convincentes. A diferencia de otras partículas hipotéticas, como los WIMPs, que fueron propuestos, en principio, para ser materia oscura, el axión fue postulado para resolver un problema completamente independiente en la física de partículas. El hecho de que también posea las propiedades correctas para constituir la materia oscura del universo es un argumento poderoso a favor de su existencia. Resuelve dos de los mayores misterios de la física moderna con una sola nueva pieza de física. Más allá de su papel cosmológico como materia oscura, si el axión se acopla de forma no mínima a la gravedad, puede desempeñar el papel del campo escalar que media una quinta fuerza, convirtiéndose así en el protagonista de las teorías escalar-tensoriales y afectando directamente la estructura de objetos compactos.

1.3. Teorías Escalar-Tensoriales

Las teorías escalar-tensoriales representan una de las extensiones más naturales y estudiadas de la relatividad general, proporcionando un lenguaje matemático para describir un universo en el que la fuerza gravitacional es mediada no solo por la curvatura del espacio-tiempo (un campo tensorial) sino también por uno o más campos escalares.

Las teorías escalar-tensoriales generalizan la Relatividad General al introducir un grado de libertad escalar dinámico que participa en la mediación de la interacción gravitacional [17]. En el marco teórico que describe estas interacciones, conocido como el “marco de Jordan”, la acción total del sistema se compone de dos partes principales: la primera es el sector gravitacional que cuenta con un término crucial que acopla directamente el campo escalar a la curvatura (representada por el escalar de Ricci) y un potencial para el propio campo escalar. Esta es la característica definitoria de estas teorías, una función de acoplamiento no mínimo que las distingue de la Relatividad General, donde un campo escalar se acoplaría de forma mínima. La segunda parte de la acción es la que corresponde a la materia, que se asume que interactúa directamente solo con la métrica del espacio-tiempo [18].

Es a menudo conveniente realizar una transformación matemática de la métrica para reescribir la acción en el llamado “marco de Einstein” [19]. En este marco, el sector gravitacional de la acción recupera la forma estándar de la Relatividad General, pero a costa de introducir un acoplamiento explícito entre el campo escalar y la materia. Esta dualidad de marcos es una herramienta poderosa: el marco de Einstein es a menudo más sencillo para los cálculos teóricos, mientras que el marco de Jordan representa el universo físico en el que los instrumentos de medida operan y la materia sigue las geodésicas [20].

La motivación para considerar las teorías escalar-tensoriales no se limita a la física de los objetos compactos. Estas teorías han desempeñado un papel central en la cosmología moderna. Por ejemplo, muchos de los modelos más exitosos de inflación cósmica, el período de expansión acelerada del universo temprano, son intrínsecamente teorías escalar-tensoriales [21-23]. El modelo de inflación de Higgs, en el que el propio campo de Higgs impulsa la inflación, requiere de un acoplamiento no mínimo a la gravedad para ser compatible con las observaciones del fondo cósmico de microondas [24].

La característica más sorprendente y relevante de ciertas teorías escalar-tensoriales para la física de las estrellas de neutrones es un fenómeno no perturbativo conocido como “escalarización espontánea” [25-27]. Este mecanismo permite que estas teorías se comporten de manera prácticamente indistinguible de la Relatividad General en regímenes de campo gravitacional débil, como el Sistema Solar. Dicho mecanismo funciona de tal forma que en el vacío o en presencia de campos gravitacionales débiles, el campo escalar se encuentre en un estado trivial. Sin embargo, si la curvatura del espacio-tiempo supera cierto umbral crítico, como ocurre en el interior de una estrella de neutrones suficientemente compacta, este estado puede volverse inestable. El sistema puede entonces experimentar una transición de fase hacia una nueva configuración en la que el campo escalar adquiere un valor no trivial significativo dentro y alrededor de la estrella. La estrella de neutrones desarrolla “pelo escalar” (scalar hair), una violación de los teoremas de “no pelo” que se aplican a los agujeros negros en Relatividad General.

Este “pelo escalar” actúa como una fuente adicional de gravedad, modificando fundamentalmente la estructura de la estrella. Las ecuaciones de equilibrio hidrostático (las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, o TOV) se ven alteradas, lo que a su vez cambia la relación masa-radio de la estrella [28]. De manera crucial, para ciertas clases de teorías escalar-tensoriales, el efecto de escalarización es proporcionar un soporte de presión efectivo adicional, lo que permite que una estrella de neutrones soporte una masa máxima significativamente mayor que la permitida por la Relatividad General para la misma EoS subyacente.

1.4. Estructura de la Tesis

Este trabajo se estructura de la siguiente manera: en el Capítulo 2 se establece el marco teórico, cubriendo desde las herramientas geométricas de la relatividad general hasta la derivación de las ecuaciones de campo de Einstein y la estructura de un objeto compacto. Seguidamente, el Capítulo 3 introduce el formalismo del marco de Einstein, detallando cómo acceder a él mediante una transformación conforme y cómo se representa

el campo de axión en dicho marco. El Capítulo 4, núcleo de esta investigación, presenta la deducción de las ecuaciones de estructura para un objeto compacto con un acoplamiento no mínimo entre la curvatura y el campo de axión, derivando también la relación de masa entre los marcos analizados. Posteriormente, en el Capítulo 5 se ofrece una introducción a las ecuaciones de estado de la materia, explicando su aproximación politrópica y presentando las ecuaciones específicas a utilizar. Finalmente, el Capítulo 6 expone los resultados numéricos, presentando las relaciones masa-radio obtenidas para el modelo y una discusión detallada de los hallazgos.

Capítulo 2

Relatividad General y Estructura Estelar

2.1. Fundamentos de la Relatividad General

El presente capítulo ofrece un resumen de los conceptos matemáticos y físicos fundamentales de la Relatividad General. La exposición y el desarrollo de los temas se basan principalmente en el tratamiento pedagógico presentado en el libro de texto de Carroll [29].

2.1.1. Principio de Equivalencia

La masa inercial y la masa gravitacional de cualquier objeto son iguales, es decir, el comportamiento de cuerpos en caída libre es universal y estos se comportan como partículas de prueba idénticas. Este enunciado, conocido como el principio de equivalencia débil, fue presagiado por Galileo a través de sus experimentos donde observó que sin importar su masa, cuerpos distintos caen a la misma razón; y de forma experimental también, Eötvös determinó con alta precisión que todos los cuerpos tienen la misma razón entre su masa inercial y su masa gravitacional.

A partir de la universalidad de la caída libre se deduce una consecuencia fundamental. Si un observador y su laboratorio se encuentran en dicho estado, todos los objetos dentro del laboratorio, sin importar su composición, caerán de la misma forma. Desde el punto de vista de tal observador, todos estos objetos parecerán estar flotando como si no estuvieran bajo la influencia de un campo gravitacional. Esto implica que un marco de referencia en caída libre es localmente indistinguible de un marco de referencia inercial. Posteriormente, Einstein generalizó esta idea al postular que dicha indistinguibilidad no se limita únicamente a dejar caer partículas de prueba sino a cualquier tipo de experimentos, es decir, a todas las leyes de la física. Si esto es así, las leyes de la física en este marco deben reducirse a su forma en ausencia de gravedad: las leyes de la Relatividad Especial.

Esta extrapolación se ve plasmada en el **Principio de Equivalencia de Einstein**:

En pequeñas regiones del espacio-tiempo, las leyes de la física se reducen a aquellas de la relatividad especial; es imposible detectar la existencia de un campo gravitacional realizando experimentos locales [29].

2.1.2. Geometría del Espacio-Tiempo

Dado que el movimiento no depende de la composición de los objetos, sus trayectorias en caída libre definen una serie de curvas llamadas geodésicas, que análogamente a las líneas rectas de la relatividad especial, corresponden a los caminos más cortos posibles en el espacio-tiempo. Esto sugiere que las trayectorias de cuerpos inerciales son siempre geodésicas pero es el mismo espacio-tiempo el que cambia, es decir, no es el mismo tratado en Relatividad Especial. En consecuencia, lo que se percibe como campo gravitacional es, en realidad,

una desviación de la geometría con respecto al espacio-tiempo plano de Minkowski. De este modo, el Principio de Equivalencia nos obliga a abandonar la idea de la gravedad como una fuerza y a describirla como una manifestación de la geometría del espacio-tiempo mismo [30].

Formalmente, si requerimos describir ese espacio-tiempo curvo, el marco matemático formal es el de una **variedad diferenciable**. A grandes rasgos, una variedad es un espacio que puede estar curvado y tener una topología compleja, pero que en regiones locales se asemeja a un espacio simple como el euclidiano o, en nuestro caso, al de Minkowski. Es decir, una región lo suficientemente pequeña es “plana” y puede ser descrita por un sistema de coordenadas local.

Para la Relatividad General, se postula que el espacio-tiempo es una variedad Lorentziana de cuatro dimensiones, denotada como $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$, donde $\mathcal{M}$ es la variedad misma y $g_{\mu\nu}$ es el **tensor métrico** que generaliza la métrica $\eta_{\mu\nu}$ del espacio de Minkowski. Esta última, un tensor simétrico de rango $(0, 2)$ y no degenerado es el objeto fundamental que nos permite calcular el intervalo espacio-temporal o elemento de línea ds^2 entre dos eventos infinitesimalmente cercanos:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

El que sea no degenerada asegura la existencia de la métrica inversa $g^{\mu\nu}$ la cual definimos mediante la delta de Kronecker, tal que $g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma$, lo que permite, entre otras cosas, subir y bajar índices de otros tensores.

El principio de Covariancia exige que todas las leyes de la física deben ser independientes del marco de referencia y de la ubicación en el universo [31]. Sin embargo, la derivada parcial no transforma como un tensor, es decir, depende del sistema de coordenadas usado, por lo que su uso violaría este principio. Por lo tanto, surge la necesidad de definir un nuevo operador que haga las veces de derivada y sea independiente del sistema de coordenadas. De esta forma, se define el operador **derivada covariante** ∇ el cual mapea un campo tensorial de rango (k, l) a uno de rango $(k, l + 1)$. Este nuevo operador toma la derivada parcial usual y le añade una corrección para hacer el resultado covariante de la siguiente forma:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda,$$

donde $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$ es conocido como la **conexión afín** o los **símbolos de Christoffel**, el cual, en términos de la métrica se escribe como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa}(\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}).$$

La derivada covariante previamente definida nos permite cuantificar la razón de cambio instantánea de un campo tensorial en comparación con como sería si fuera transportado paralelamente, es decir, manteniéndolo constante a través de un camino. Como el transporte paralelo de un vector a lo largo de un camino cerrado no lo devuelve, en general, a su estado original, podemos usar esa dependencia para definir una noción intrínseca de curvatura la cual se captura en el conmutador de dos derivadas covariantes. Al aplicarlo sobre un vector V_σ , el resultado no es cero:

$$\nabla_\nu \nabla_\mu V_\sigma - \nabla_\mu \nabla_\nu V_\sigma = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V_\rho,$$

donde $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ es el **tensor de curvatura de Riemann**, el cual se construye a partir de la conexión tal que:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda$$

A partir de contracciones del tensor de Riemann podemos formar objetos más simples para promediar la información contenida en este. La primera contracción define el **tensor de Ricci** $R_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}.$$

Realizando una segunda contracción, o la traza del tensor de Ricci con la métrica, se obtiene una cantidad escalar, el **escalar de Ricci** o **curvatura escalar** R :

$$R = R^\mu_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

2.1.3. Ecuaciones de Campo de Einstein

La acción que describe la dinámica del campo gravitacional en el vacío, propuesta por Hilbert, es la forma más simple que puede construirse a partir de un escalar geométrico, el escalar de Ricci R . Esta es conocida como la acción de Einstein-Hilbert:

$$\mathcal{S}_H = \int \sqrt{-g} R d^n x. \quad (2.1)$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento, se varía la acción (2.1) con respecto a la métrica inversa $g^{\mu\nu}$ y se aplica el principio de mínima acción, obteniendo así:

$$\delta \mathcal{S}_H = \int d^n x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \int d^n x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \int d^n x R \delta \sqrt{-g},$$

Este procedimiento variacional, tras un desarrollo algebraico, conduce a las **ecuaciones de campo de Einstein en el vacío**:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0.$$

Para describir un espacio-tiempo que contiene materia y energía, se introduce en la acción un término adicional, $\mathcal{S}_m$, que representa los campos de materia. La acción total del sistema es:

$$S = \frac{1}{16\pi G} \mathcal{S}_H + \mathcal{S}_m,$$

A partir de la variación de la acción de materia con respecto a la métrica, se define el **tensor energía-momento** $T_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{S}_m}{\delta g^{\mu\nu}},$$

el cual actúa como la fuente del campo gravitacional. Al aplicar el principio de mínima acción a la acción total, se obtienen las **ecuaciones de campo de Einstein completas**:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

siendo $G_{\mu\nu}$ el **tensor de Einstein**. Estas ecuaciones constituyen el núcleo de la Relatividad General, estableciendo la relación fundamental entre la geometría del espacio-tiempo y su contenido de materia-energía.

2.2. Estrellas Relativistas

El formalismo para describir estrellas relativistas, incluyendo la métrica para un espaciotiempo esféricamente simétrico y el modelo de materia como un fluido perfecto, se presenta siguiendo el marco teórico desarrollado en textos de referencia sobre la materia compacta, como el de Glendenning [31].

2.2.1. Métrica para Simetría Esférica y Estática

Para modelar una estrella no rotante y en equilibrio, se asume que el espacio-tiempo que genera es estático y esféricamente simétrico. La condición de estaticidad implica que la geometría no cambia con el tiempo, mientras que la simetría esférica significa que no hay direcciones espaciales privilegiadas. Bajo estas suposiciones, la métrica más general puede escribirse como

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.3)$$

donde $\nu(r)$ y $\lambda(r)$ son funciones de la coordenada radial r que actúan como los potenciales gravitacionales a determinar.

A partir de esta métrica, se calculan los símbolos de Christoffel y, posteriormente, los componentes del tensor de Ricci ($R_{\mu\nu}$). Estos últimos son necesarios para construir las ecuaciones de campo de Einstein y, en última instancia, determinar la estructura de la estrella.

2.2.2. Tensor Energía-Momento de la Materia

Se modela la materia estelar como un **fluido perfecto**. En el sistema de referencia en reposo del fluido, este es isótropo. El tensor energía-momento para un fluido perfecto se define como:

$$T^{\mu\nu} = (P + \epsilon)u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu},$$

donde P es la presión, ϵ es la densidad de energía, y u^μ es la 4-velocidad del fluido, que satisface la condición de normalización

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1.$$

Dado que el fluido está en reposo en nuestro sistema de coordenadas, su 4-velocidad tiene componentes $u^\mu = (e^{-\nu(r)/2}, 0, 0, 0)$.

Finalmente, la presión y la densidad de energía se relacionan a través de una **ecuación de estado** (EoS), que describe las propiedades termodinámicas de la materia, expresada como $P = P(\epsilon)$.

2.3. Las Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)

La derivación de las ecuaciones de equilibrio hidrostático para una configuración estelar relativista fue establecida por primera vez en el trabajo fundamental de J. R. Oppenheimer y G. M. Volkoff [32], cuyo desarrollo se sigue en esta sección.

En el exterior de la estrella ($\epsilon = P = 0$), la solución a las ecuaciones de campo es la conocida métrica de Schwarzschild. Nos enfocaremos aquí en la solución para el interior de la estrella. Para derivar las ecuaciones de estructura estelar, se utilizan los componentes del tensor de Einstein $G^\mu{}_\nu = R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu R = 8\pi T^\mu{}_\nu$.

La componente temporal (0_0) de las ecuaciones de Einstein es:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-\lambda})] = 8\pi\epsilon.$$

Integrando esta expresión desde el centro de la estrella $r = 0$ hasta un radio arbitrario r , se obtiene una solución para el potencial métrico $e^{-\lambda(r)}$:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2m(r)}{r}, \quad (2.4)$$

donde se ha definido la **función de masa** $m(r)$ como la masa-energía total contenida dentro de una esfera de radio r :

$$m(r) \equiv 4\pi \int_0^r \epsilon(\tilde{r}) \tilde{r}^2 d\tilde{r}. \quad (2.5)$$

A continuación, la componente radial (1_1) de las ecuaciones de Einstein, $G^1{}_1 = 8\pi P$, junto con la ecuación (2.4), permite obtener una expresión para la derivada del segundo potencial métrico, $\nu'(r)$:

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{2(4\pi r^3 P(r) + m(r))}{r(r - 2m(r))}. \quad (2.6)$$

Finalmente, la ecuación de la hidrodinámica relativista, que surge de la conservación del tensor energía-momento ($\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$), proporciona la condición de equilibrio hidrostático. La componente radial de esta ecuación de conservación resulta en:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{1}{2}(\epsilon + P) \frac{d\nu}{dr}.$$

Sustituyendo la expresión para $\nu'(r)$ de la ecuación (2.6), se obtiene la ecuación final de la estructura:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(\epsilon + P)(4\pi r^3 P + m)}{r(r - 2m)}. \quad (2.7)$$

Las ecuaciones (2.5) y (2.7), al reescribir la primera en su forma diferencial, forman el sistema de ecuaciones acopladas de **Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)**

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(\epsilon + P)(4\pi r^3 P + m)}{r(r - 2m)}, \quad (2.8a)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon. \quad (2.8b)$$

Este sistema, suplementado con una ecuación de estado $P(\epsilon)$, describe la estructura de una estrella relativista en equilibrio hidrostático.

Capítulo 3

Teoría Escalar-Tensorial Axiónica

3.1. Acción en el Marco de Jordan

Dentro del formalismo del marco de Jordan, se considera la acción para un campo escalar acoplado de forma no mínima a la gravedad:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{16\pi} \left[f(\phi)R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - U(\phi) \right] + \mathcal{S}_m(\psi_m, g_{\mu\nu}). \quad (3.1)$$

donde g es el determinante del tensor métrico $g_{\mu\nu}$, $f(\phi)$ una función que depende del campo escalar ϕ , R es el escalar de Ricci asociado a la métrica $g_{\mu\nu}$ y $\mathcal{S}_m$ es la acción asociada a los campos de materia ψ_m acoplados mínimamente a $g_{\mu\nu}$. En este caso, se trabaja en unidades geometrizadas, es decir, la constante de gravitación G y la velocidad de la luz c son tomadas como la unidad.

La acción (3.1), a diferencia de la acción de Einstein-Hilbert vista en la relatividad general (2.1), cuenta con el término $f(\phi)R$, representando el acoplamiento no mínimo entre el campo escalar en cuestión y la curvatura. Este término también da cuenta del cambio en la constante de gravitación, ya que podemos escribirlo, recuperando las unidades, como $\frac{f(\phi)}{G}R$, lo que deja ver una constante de gravitación efectiva tal que $G_{eff} = Gf^{-1}(\phi)$, es decir, la fuerza efectiva de la gravedad depende del campo escalar ϕ . Además del término que denota el acoplamiento, la acción a trabajar cuenta con términos que describen la dinámica propia del campo escalar. Por un lado, el término $\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$ es el término cinético canónico el cual da cuenta de la energía asociada a las variaciones del campo en el espacio-tiempo. Por su parte, el término $U(\phi)$ es el potencial del campo escalar, el cual dicta sus propiedades intrínsecas, como su masa o sus posibles auto-interacciones. La forma específica de este potencial será crucial para definir el modelo axiónico en secciones posteriores.

Ahora, si bien el marco de Jordan es físicamente intuitivo, la presencia del término de acoplamiento lleva a unas ecuaciones de estructura complejas. Por lo que, en búsqueda de simplificar este análisis matemático, se realiza la transformación conforme al marco de Einstein, donde el término gravitacional de la acción toma la forma estándar de Einstein-Hilbert.

3.2. Transformación Conforme al Marco de Einstein

3.2.1. Acción

Las ecuaciones de campo antes mostradas pueden simplificarse de sobremanera considerando una transformación conforme particular [33]:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\mu\nu} &= \Omega^2 g_{\mu\nu}, \\ \Omega^2 &= f(\phi) \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde las cantidades en el marco de Einstein son denotadas por una tilde. A partir de dicha transformación se tiene también como transforma la métrica inversa y el determinante de la métrica:

$$\begin{aligned}\tilde{g}^{\mu\nu} &= \Omega^{-2} g^{\mu\nu}, \\ \sqrt{-g} &= \Omega^{-4} \sqrt{-\tilde{g}}.\end{aligned}$$

De esta forma, se puede empezar a reescribir la acción (3.1) en el marco de Einstein transformando cada uno de los términos presentes en la misma. Primeramente, el escalar de Ricci se transforma como (para el cálculo detallado véase el apéndice A):

$$R = \Omega^2 \left(\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{\partial}_\mu\omega\tilde{\partial}_\nu\omega \right), \quad (3.3)$$

donde $\omega \equiv \ln \Omega$ y el operador D'Alembertiano es

$$\tilde{\square}\omega = \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}}\tilde{\partial}_\mu\left(\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{\partial}_\nu\omega\right). \quad (3.4)$$

Entonces, usando (3.3) se obtiene como se transforma el término del acoplamiento no mínimo en el marco de Einstein:

$$\int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{16\pi} f(\phi) R \longrightarrow \int d^4x \frac{\sqrt{-\tilde{g}}}{16\pi\Omega^4} f(\phi) \Omega^2 \left(\tilde{R} + 6\tilde{\square}\ln\Omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{\partial}_\mu\ln\Omega\tilde{\partial}_\nu\ln\Omega \right),$$

en donde se tiene la integral de $\tilde{\square}\ln\Omega$, término el cual se elimina de acuerdo con el teorema de Gauss. Además, considerando la transformación para la función de acoplamiento (3.2) se tiene

$$\begin{aligned}\int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{16\pi} f(\phi) R &\longrightarrow \int d^4x \frac{\sqrt{-\tilde{g}}}{16\pi} \left(\tilde{R} - \frac{6}{\Omega^2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\partial}_\mu\Omega\tilde{\partial}_\nu\Omega \right), \\ &= \int d^4x \frac{\sqrt{-\tilde{g}}}{16\pi} \left[\tilde{R} - \frac{3}{2} \frac{1}{f^2} \left(\frac{df}{d\phi} \right)^2 \tilde{\partial}_\mu\phi\tilde{\partial}_\nu\phi \right],\end{aligned} \quad (3.5)$$

reescribiendo las derivadas del factor Ω en términos de derivadas del campo escalar ϕ , ya que $\Omega = \Omega(\phi)$. Por otro lado, el resto de la acción se transforma similarmente, reescribiendo el término cinético y el potencial de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{16\pi} \left[-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - U(\phi) \right] + \mathcal{S}_m(\psi_m, g_{\mu\nu}) \\ \longrightarrow \int d^4x \frac{\sqrt{-\tilde{g}}}{16\pi\Omega^4} \left[-\frac{1}{2} \Omega^2 \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\partial}_\mu\phi\tilde{\partial}_\nu\phi - U(\phi) \right] + \mathcal{S}_m(\psi_m, \Omega^2\tilde{g}_{\mu\nu}), \\ = \int d^4x \frac{\sqrt{-\tilde{g}}}{16\pi} \left[-\frac{1}{2\Omega^2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\partial}_\mu\phi\tilde{\partial}_\nu\phi - \frac{U(\phi)}{\Omega^4} \right] + \mathcal{S}_m(\psi_m, \Omega^2\tilde{g}_{\mu\nu}),\end{aligned} \quad (3.6)$$

por lo tanto, la acción completa en el marco de Einstein se construye a partir de (3.5) y (3.6), obteniéndose así:

$$\mathcal{S}_E = \int d^4x \frac{\sqrt{-\tilde{g}}}{16\pi} \left[\tilde{R} - \left(\frac{3}{f^2} \left(\frac{df}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{f} \right) \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\partial}_\mu\phi\tilde{\partial}_\nu\phi - V(\phi) \right] + \mathcal{S}_m(\psi_m, \Omega^2\tilde{g}_{\mu\nu}), \quad (3.7)$$

donde $V(\phi) = \Omega^{-4}U(\phi)$.

Ahora, nótese que la acción (3.7) tiene un término no canónico, por lo tanto, se necesita redefinir un nuevo campo canónico comparando el término cinético antes mencionado con el esperado, es decir,

$$\frac{1}{16\pi} \left[\frac{3}{f^2} \left(\frac{df}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{f} \right] \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\partial}_\mu\phi\tilde{\partial}_\nu\phi = \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\partial}_\mu\varphi\tilde{\partial}_\nu\varphi, \quad (3.8)$$

pero dado que $\varphi = \varphi(\phi)$,

$$\tilde{\partial}_\mu \varphi \tilde{\partial}_\nu \varphi = \left(\frac{d\varphi}{d\phi} \right)^2 \tilde{\partial}_\mu \phi \tilde{\partial}_\nu \phi, \quad (3.9)$$

la igualdad (3.8) puede reescribirse, usando (3.9), para obtener una relación entre φ y ϕ , tal que:

$$\left(\frac{d\varphi}{d\phi} \right)^2 = \frac{1}{16\pi} \left[3 \frac{1}{f^2} \left(\frac{df}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{f} \right] \rightarrow \frac{d\varphi}{d\phi} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{3}{4f^2} \left(\frac{df}{d\phi} \right)^2 + \frac{1}{f}}. \quad (3.10)$$

Con este último resultado se escribir finalmente la acción de estudio en el marco de Einstein:

$$\mathcal{S}_E = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{\tilde{R}}{16\pi} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\partial}_\mu \varphi \tilde{\partial}_\nu \varphi - \frac{V(\phi)}{16\pi} \right] + \mathcal{S}_m(\psi_m, \Omega^2 \tilde{g}_{\mu\nu}), \quad (3.11)$$

donde $V(\varphi) = \Omega^{-4} U(\varphi)$ con φ dado en términos de ϕ mediante (3.10) [34].

3.2.2. Ecuaciones de campo de Einstein

Ahora, con la acción en el nuevo marco se pueden calcular las ecuaciones de campo de Einstein variando (3.11) con respecto a la métrica inversa $\tilde{g}^{\mu\nu}$ y con respecto al campo φ . Entonces, para realizar la variación se tomará en cuenta la acción dividida en secciones, tal que $\mathcal{S}_E = \mathcal{S}_H + \mathcal{S}_k + \mathcal{S}_m$, es decir, la acción total se encuentra dividida en la acción de Einstein-Hilbert, $\mathcal{S}_H$, el término cinético, $\mathcal{S}_k$ y el término relacionado a la materia, $\mathcal{S}_m$.

Para la acción de Einstein-Hilbert se recupera el tensor de Einstein (2.2) definido en la sección 2.1.3, pero en este caso con cantidades en el marco de Einstein:

$$\delta \mathcal{S}_H = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \delta \left(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} \right) = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{G}_{\mu\nu} \delta \tilde{g}^{\mu\nu}, \quad (3.12)$$

donde $\tilde{G}_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{R} \tilde{g}_{\mu\nu}$. Para el término cinético,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}_k &= - \int d^4x \delta \left[\frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\partial}_\mu \varphi \tilde{\partial}_\nu \varphi + \frac{V(\varphi)}{16\pi} \right], \\ &= - \int d^4x \delta \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\partial}_\mu \varphi \tilde{\partial}_\nu \varphi + \frac{V(\varphi)}{16\pi} \right] - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\partial}_\mu \varphi \tilde{\partial}_\nu \varphi \delta \tilde{g}^{\mu\nu}, \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{\partial}_\alpha \varphi \tilde{\partial}_\beta \varphi + \frac{V(\varphi)}{16\pi} \right] \delta \tilde{g}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\partial}_\mu \varphi \tilde{\partial}_\nu \varphi \delta \tilde{g}^{\mu\nu}, \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\partial}_\alpha \varphi \tilde{\partial}^\alpha \varphi - \tilde{\partial}_\mu \varphi \tilde{\partial}_\nu \varphi + \tilde{g}_{\mu\nu} \frac{V(\varphi)}{16\pi} \right] \delta \tilde{g}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Entonces, sumando las variaciones (3.12), (3.13), la variación estándar de la acción de la materia y siguiendo el principio de mínima acción, se tiene:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}_E &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{16\pi} \tilde{G}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\partial}_\alpha \varphi \tilde{\partial}^\alpha \varphi - \tilde{\partial}_\mu \varphi \tilde{\partial}_\nu \varphi + \tilde{g}_{\mu\nu} \frac{V(\varphi)}{16\pi} \right) \right] \delta \tilde{g}^{\mu\nu} + \frac{\delta \mathcal{S}_m}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} \delta \tilde{g}^{\mu\nu} = 0, \\ \therefore \quad \tilde{G}_{\mu\nu} &= 8\pi \tilde{T}_{\mu\nu} + 8\pi \left(\tilde{\partial}_\mu \varphi \tilde{\partial}_\nu \varphi - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\partial}_\alpha \varphi \tilde{\partial}^\alpha \varphi \right) - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} V(\varphi), \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde $\tilde{T}_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento en el marco de Einstein, que puede expresarse en función del correspondiente al marco de Jordan de la siguiente forma:

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = - \frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta \mathcal{S}_m}{\delta \tilde{g}^{\mu\nu}} = - \frac{2}{\Omega^4 \sqrt{-g}} \frac{1}{\Omega^{-2}} \frac{\delta \mathcal{S}_m}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{\Omega^2} \left(- \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{S}_m}{\delta g^{\mu\nu}} \right) = \frac{T_{\mu\nu}}{\Omega^2}.$$

Ahora, es necesario variar la acción (3.11) con respecto al campo φ . Primeramente, dado que el término de Einstein-Hilbert no depende de φ , su variación es nula. Por otro lado, para el término cinético se tiene

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S}_k &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[-\frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \left[\frac{\partial(\tilde{\partial}_\mu \varphi)}{\partial(\tilde{\partial}_\sigma \varphi)} \tilde{\partial}_\nu \varphi + \frac{\partial(\tilde{\partial}_\nu \varphi)}{\partial(\tilde{\partial}_\sigma \varphi)} \tilde{\partial}_\mu \varphi \right] \tilde{\partial}_\sigma \varphi - \frac{1}{16\pi} \frac{dV}{d\varphi} \delta\varphi \right], \\
&= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[-\frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \left[-\tilde{\partial}_\sigma (\delta_\mu^\sigma \tilde{\partial}_\nu \varphi) - \tilde{\partial}_\sigma (\delta_\nu^\sigma \tilde{\partial}_\mu \varphi) \right] \delta\varphi - \frac{1}{16\pi} \frac{dV}{d\varphi} \delta\varphi \right], \\
&= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left(\tilde{\Box} \varphi - \frac{1}{16\pi} \frac{dV}{d\varphi} \right) \delta\varphi.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Para el término de materia, se tiene una dependencia de φ a través de $\Omega(\varphi)$, por lo tanto, su variación es:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S}_m &= \frac{\delta\mathcal{S}_m}{\delta g_{\mu\nu}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \varphi} \delta\varphi = \frac{\delta\mathcal{S}_m}{\delta(\Omega^{-2} \tilde{g}_{\mu\nu})} \frac{\partial(\Omega^{-2} \tilde{g}_{\mu\nu})}{\partial \varphi} \delta\varphi = -2 \frac{\delta\mathcal{S}_m}{\delta \tilde{g}_{\mu\nu}} \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \tilde{g}_{\mu\nu} \delta\varphi, \\
&= \sqrt{-\tilde{g}} \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{T}^{\mu\nu} = \sqrt{-\tilde{g}} \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \tilde{T},
\end{aligned} \tag{3.16}$$

haciéndose uso de la definición del tensor energía-momento en su forma contravariante. Añadiendo entonces las variaciones (3.15), (3.16) y usando nuevamente el principio de mínima acción, se obtiene

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S}_E &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left(\tilde{\Box} \varphi - \frac{1}{16\pi} \frac{dV}{d\varphi} + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \tilde{T} \right) \delta\varphi = 0, \\
\therefore \quad \tilde{\Box} \varphi &= \frac{1}{16\pi} \frac{dV}{d\varphi} - \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \tilde{T},
\end{aligned} \tag{3.17}$$

siendo $\tilde{T}$ la traza del tensor energía-momento en el marco de Einstein.

Recuperando las ecuaciones (3.14) y (3.17) se obtienen finalmente las ecuaciones de campo de Einstein para la acción (3.11):

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = 8\pi \tilde{T}_{\mu\nu} + 8\pi \left(\tilde{\partial}_\mu \varphi \tilde{\partial}_\nu \varphi - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} \tilde{\partial}_\alpha \varphi \tilde{\partial}^\alpha \varphi \right) - \frac{1}{2} \tilde{g}_{\mu\nu} V(\varphi), \tag{3.18a}$$

$$\tilde{\Box} \varphi = \frac{1}{16\pi} \frac{dV}{d\varphi} - \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \tilde{T}. \tag{3.18b}$$

3.3. Especificación del Modelo

La forma general del potencial a considerar es

$$V_a(\phi) = m_a^2 f_a^2 \left(1 - \cos\left(\frac{\phi}{f_a}\right) \right),$$

donde m_a es la masa del axión, la cual está inversamente relacionada con la constante de decaimiento f_a [35]. Esta última representa la escala de energía a la que se rompe la simetría de Peccei-Quinn.

Desde una perspectiva cosmológica, el axión es un candidato prominente para la materia oscura a través del “mecanismo de desalineamiento” (misalignment mechanism) [36, 37] previamente descrito en la sección 1.2. Para este régimen en el que el axión ha alcanzado su mínimo y realiza pequeñas oscilaciones, es decir, cuando $\phi/f_a \ll 1$, el potencial cosenoidal puede ser aproximado a

$$V_a(\phi) \simeq \frac{1}{2} m_a^2 \phi^2,$$

siendo este potencial cuadrático la descripción efectiva del axión en el régimen de oscilación que es relevante para el modelo astrofísico estudiado en este trabajo.

En el marco de Jordan, se considera el potencial

$$U(\phi) = \Lambda^4 \left(1 - \cos\left(\frac{\phi}{f_a}\right) \right),$$

y la función de acoplamiento $f(\phi)$ entre el campo de axión y la curvatura, mostrada en la ecuación (3.1) se escribe tal que

$$f(\phi) = 1 + \xi\phi^n,$$

donde n puede tomar valores $n = 2, 4, \dots$. Dicha función de acoplamiento tiene esa forma, debido a que la acción debe preservar la simetría CP, por lo que el término de acoplamiento debe ser una función par de ϕ y la forma más simple de lograr esto es que f sea una función de ϕ^2 [38]. Es crucial señalar que, para el estudio de objetos compactos como las estrellas de neutrones, se explora el régimen fuerte, donde el parámetro ξ se asume grande, del orden de $\xi \sim 10^4 \gg 1$.

Con la función de acoplamiento ya descrita, se puede escribir la ecuación (3.10) para determinar una relación entre ϕ y φ como se sigue a continuación:

$$\frac{d\varphi}{d\phi} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{3\xi^2\phi^2}{(1+\xi\phi^2)^2} + \frac{1}{4(1+\xi\phi^2)}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{12\xi^2\phi^2 + 1 + \xi\phi^2}{4(1+\xi\phi^2)^2}}, \quad (3.19)$$

ecuación diferencial que, en su forma completa, es compleja de integrar analíticamente. Sin embargo, el análisis se simplifica enormemente al aplicar una aproximación física motivada para el interior de una estrella de neutrones. En este entorno de campo escalar intenso, se asume que el término de acoplamiento domina, es decir,

$$\xi^2\phi^2 \gg \xi\phi^2 \gg 1.$$

Bajo esta aproximación, el numerador de la ecuación (3.19) es dominado por el término $12\xi^2\phi^2$, y el denominador se simplifica a $4(\xi\phi^2)^2$. La relación diferencial se reduce a:

$$\frac{d\varphi}{d\phi} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{\xi\phi}{1+\xi\phi^2},$$

ecuación separable que puede ser integrada directamente. La integración de ambos lados da la relación explícita entre el campo canónico φ y el campo original ϕ :

$$\int d\varphi = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int \frac{\xi\phi}{1+\xi\phi^2} d\phi \longrightarrow \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \ln(1+\xi\phi^2). \quad (3.20)$$

Despejando el factor $1+\xi\phi^2$ de (3.20) se obtiene la función de acoplamiento $f(\phi)$ pero ahora en términos de φ ,

$$f(\phi) = 1 + \xi\phi^2 \longrightarrow f(\varphi) = \exp\left(2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\varphi\right). \quad (3.21)$$

Con la relación entre los campos establecida, se pueden derivar tres funciones que definen la dinámica del modelo en el marco de Einstein: el factor conforme $\Omega(\varphi)$, el potencial efectivo $V(\varphi)$ y el parámetro de acoplamiento $\alpha(\varphi)$. Primeramente, siguiendo la transformación conforme (3.2), el factor conforme se define como $\Omega(\phi) = f^{1/2}(\phi) = (1+\xi\phi^2)^{1/2}$. Utilizando (3.20) se obtiene $\Omega(\varphi)$ directamente en función del campo canónico:

$$\Omega(\varphi) = \left[\exp\left(2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\varphi\right) \right]^{1/2} = \exp\left(\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\varphi\right). \quad (3.22)$$

La función $\alpha(\varphi)$ cuantifica la fuerza del acoplamiento del campo escalar a la materia en el marco de Einstein y, en esencia, describe una “quinta fuerza”. Partiendo de su definición y de (3.22), se obtiene:

$$\alpha(\varphi) = \frac{d \ln \Omega(\varphi)}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left(\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \varphi \right) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}. \quad (3.23)$$

Finalmente, para el potencial $V(\varphi)$, se parte de la transformación $V(\varphi) = \Omega^{-4}U(\phi)$, escribiendo Ω en términos de α y φ usando las ecuaciones (3.22) y (3.23); además, se expande el coseno en el límite $\phi/f_a \ll 1$, de tal forma que

$$V(\varphi) = \Omega^{-4} \Lambda^4 \left(1 - \cos\left(\frac{\phi}{f_a}\right) \right) = e^{-4\alpha\varphi} \Lambda^4 \left(1 - \cos\left(\frac{\phi}{f_a}\right) \right) \simeq e^{-4\alpha\varphi} \Lambda^4 \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\phi}{f_a} \right)^2 \right],$$

expresión que puede reescribirse al despejar el término ϕ^2 de (3.21):

$$V(\varphi) \simeq -\frac{\Lambda^4}{2f_a^2\xi} (1 - e^{-2\alpha\varphi}) e^{-2\alpha\varphi}. \quad (3.24)$$

con derivada

$$\frac{dV}{d\varphi} \simeq \frac{\Lambda^4\alpha}{f_a^2\xi} (1 - 2e^{-2\alpha\varphi}) e^{-2\alpha\varphi}. \quad (3.25)$$

El modelo final depende de tres parámetros libres: Λ , f_a y ξ . La constante de decaimiento f_a es una escala de energía fundamental, típicamente considerada en el rango $f_a > 10^9$ GeV. La escala Λ está relacionada con la masa del axión m_a a través de $\Lambda^4 \sim m_a^2 f_a^2$. Para una masa $m_a \sim 10^{-10}$ eV, y con $f_a \sim 10^9$ GeV, se tiene un valor para Λ del orden de $\Lambda \sim 10^4$ eV. Por otra parte, el parámetro de acoplamiento no mínimo ξ cuantifica la fuerza de interacción directa entre el axión y la curvatura del espacio-tiempo en el marco de Jordan. Como se mencionó antes, este toma valores grandes, del orden de $\xi \sim 10^4$, justificando así la aproximación clave $\xi\phi^2 \gg 1$ que permite la derivación analítica del modelo [35].

Capítulo 4

Ecuaciones de Estructura Modificadas

4.1. Ecuaciones de TOV Modificadas

Las ecuaciones de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV) permiten describir la estructura interna de una estrella de neutrones. En esta sección se presenta su derivación para un objeto estelar compacto, modelado mediante una métrica estática y esféricamente simétrica de la forma (2.3) (en el marco de Einstein), a partir de las ecuaciones de campo de Einstein (3.18), obtenidas en la sección 2.1.3.

Primeramente, se consideran las componentes $\tilde{G}^0_0$ y $\tilde{G}^1_1$ de (3.18a), teniendo en cuenta que

$$\tilde{G}^\mu_\nu = 8\pi\tilde{T}^\mu_\nu + 8\pi\left(\tilde{g}^{\rho\mu}\tilde{\partial}_\rho\varphi\tilde{\partial}_\nu\varphi - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{\partial}_\alpha\varphi\tilde{\partial}_\beta\varphi\right) - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu V(\varphi). \quad (4.1)$$

Entonces, la componente temporal $(^0_0)$ de (4.1) es

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r^2} + \frac{e^{-\lambda}}{r^2} - \frac{e^{-\lambda}}{r} \frac{d\lambda}{dr} &= -8\pi\Omega^{-4}\epsilon - 4\pi e^{-\lambda} \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 - \frac{1}{2}V, \\ \frac{d\lambda}{dr} &= 8\pi r e^\lambda \Omega^{-4}\epsilon + 4\pi r \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 + \frac{1}{2}V r e^\lambda - \frac{1}{r}(e^\lambda - 1), \end{aligned} \quad (4.2)$$

y para la componente radial $(^1_1)$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r^2} + \frac{e^{-\lambda}}{r^2} - \frac{e^{-\lambda}}{r} \frac{d\nu}{dr} &= 8\pi\Omega^{-4}P + 8\pi \left[e^{-\lambda} \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 - \frac{1}{2}e^{-\lambda} \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 \right] - \frac{1}{2}V, \\ \frac{d\nu}{dr} &= 8\pi r e^\lambda \Omega^{-4}P + 4\pi r \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2 - \frac{1}{2}V r e^\lambda + \frac{1}{r}(e^\lambda - 1). \end{aligned} \quad (4.3)$$

La dinámica del propio campo φ está gobernada por su ecuación de movimiento. Para encontrarla, se parte de la ecuación (3.18b) y se calcula explícitamente el operador D’Alambertiano (3.4) para la métrica esféricamente simétrica, lo que da

$$\tilde{\square}\varphi = \frac{2}{r}e^{-\lambda}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{2}e^{-\lambda}\frac{d\lambda}{dr}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{2}e^{-\lambda}\frac{d\nu}{dr}\frac{d\varphi}{dr} + e^{-\lambda}\frac{d^2\varphi}{dr^2}. \quad (4.4)$$

Entonces, insertando el resultado (4.4) en (3.18b) se obtiene:

$$\frac{1}{16\pi}\frac{dV}{d\varphi} - \frac{1}{\Omega^5}\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}(3P - \epsilon) = \frac{2}{3}e^{-\lambda}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{2}e^{-\lambda}\frac{d\lambda}{dr}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{2}e^{-\lambda}\frac{d\nu}{dr}\frac{d\varphi}{dr} + e^{-\lambda}\frac{d^2\varphi}{dr^2}. \quad (4.5)$$

Una diferencia fundamental con la Relatividad General es que, en el marco de Einstein, la materia no sigue las geodésicas y su tensor energía-momento no se conserva de forma independiente ($\tilde{\nabla}_\nu \tilde{T}^{\mu\nu} \neq 0$). Esta no-conservación proporciona una ecuación crucial para la variación de la presión. En este caso, la ecuación de continuidad es:

$$\tilde{\nabla}_\nu \tilde{T}^\mu{}_\nu = -\frac{d \ln \Omega}{d\varphi} \tilde{T} \tilde{\partial}_\nu \varphi, \quad (4.6)$$

donde la componente radial $\tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}^\mu{}_1$ viene dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_\mu \tilde{T}^\mu{}_1 &= \tilde{\partial}_\mu \tilde{T}^\mu{}_1 + \tilde{T}^\alpha{}_1 \tilde{\Gamma}^\mu_{\alpha\mu} - \tilde{T}^\mu{}_\alpha \tilde{\Gamma}^\alpha_{\mu 1}, \\ &= \tilde{\partial}_1 (\Omega^{-4} P) + \Omega^{-4} P \left(\frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr} + \frac{2}{r} \right) - \left[(-\Omega^{-4} \epsilon) \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} + \Omega^{-4} P \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr} + \frac{2}{r} \Omega^{-4} P \right], \\ &= \Omega^{-4} \left[-4 \frac{d \ln \Omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dr} P + \frac{dP}{dr} + \frac{1}{2} (P + \epsilon) \frac{d\nu}{dr} \right], \end{aligned} \quad (4.7)$$

por lo que, reemplazando (4.7) en (4.6), se obtiene una expresión para la variación de la presión con respecto al radio:

$$\begin{aligned} \Omega^{-4} \left[-4 \frac{d \ln \Omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dr} P + \frac{dP}{dr} + \frac{1}{2} (P + \epsilon) \frac{d\nu}{dr} \right] &= -\Omega^{-4} \frac{d \ln \Omega}{d\varphi} (3P - \epsilon) \frac{d\varphi}{dr}, \\ \therefore \frac{dP}{dr} &= -(P + \epsilon) \left[\frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} - \frac{d \ln \Omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dr} \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para obtener las ecuaciones de estructura en la forma usual, es decir, en términos de la masa y la presión, se usa la definición (2.4) para realizar el cambio de variable

$$\frac{d \ln \Omega}{d\varphi} = \alpha(\varphi), \quad \omega = \frac{d\varphi}{dr}, \quad e^\lambda = \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \rightarrow \frac{d\lambda}{dr} = \frac{2(r \frac{dm}{dr} - m)}{r(r - 2m)}, \quad (4.9)$$

y de esta forma, la ecuación (4.2) se escribe como

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \Omega^{-4} \epsilon + 2\pi r(r - 2m) \omega^2 + \frac{1}{4} V r^2, \quad (4.10)$$

la expresión para el potencial gravitacional ν , (4.3):

$$\frac{d\nu}{dr} = 4\pi r \omega^2 + \frac{2}{r(r - 2m)} \left(4\pi r^3 \Omega^{-4} P - \frac{1}{4} V r^3 \right) + \frac{2m}{r(r - 2m)}, \quad (4.11)$$

y para la ecuación (4.5) se tiene

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{(r \frac{dm}{dr} - m)}{r(r - 2m)} \omega - \frac{2}{r} \omega - \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} \omega + \frac{1}{16\pi} \left(\frac{r}{r - 2m} \right) \frac{dV}{d\varphi} - \left(\frac{r}{r - 2m} \right) \alpha \Omega^{-4} (3P - \epsilon). \quad (4.12)$$

Nótese que las ecuaciones (4.10) y (4.11) pueden ser usadas para reescribir el primer y tercer término de la expresión (4.12) respectivamente, obteniendo así:

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{r}{\Omega^4(r - 2m)} [\alpha(\epsilon - 3P) + 4\pi r \omega(\epsilon - P)] - \frac{2\omega(r - m)}{r(r - 2m)} + \frac{1}{r - 2m} \left(\frac{1}{2} V \omega r^2 + \frac{r}{16\pi} \frac{dV}{d\varphi} \right).$$

Así mismo, se puede reescribir la ecuación (4.8) usando (4.11) como sigue a continuación:

$$\frac{dP}{dr} = -(\epsilon + P) \left[\alpha \omega + 2\pi r \omega + \frac{1}{r(r - 2m)} \left(4\pi r^3 \Omega^{-4} P + m - \frac{1}{4} V r^3 \right) \right].$$

Entonces, el sistema que se necesita resolver es:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \Omega^{-4} \epsilon + 2\pi r(r - 2m) \omega^2 + \frac{1}{4} V r^2, \quad (4.13a)$$

$$\frac{d\nu}{dr} = 4\pi r \omega^2 + \frac{2}{r(r-2m)} \left(4\pi r^3 \Omega^{-4} P - \frac{1}{4} V r^3 \right) + \frac{2m}{r(r-2m)}, \quad (4.13b)$$

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{r}{\Omega^4(r-2m)} [\alpha(\epsilon - 3P) + 4\pi r \omega(\epsilon - P)] - \frac{2\omega(r-m)}{r(r-2m)} + \frac{1}{r-2m} \left(\frac{1}{2} V \omega r^2 + \frac{r}{16\pi} \frac{dV}{d\varphi} \right), \quad (4.13c)$$

$$\frac{dP}{dr} = -(\epsilon + P) \left[\alpha\omega + 2\pi r \omega + \frac{1}{r(r-2m)} \left(4\pi r^3 \Omega^{-4} P + m - \frac{1}{4} V r^3 \right) \right], \quad (4.13d)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \omega, \quad (4.13e)$$

donde la función $\alpha(\varphi)$ está definida en (4.9) y el potencial $V(\varphi)$ y su derivada vienen dados por (3.24) y (3.25) respectivamente. Además, la presión P y la densidad de energía ϵ son las del marco de Jordan y no las del marco de Einstein. Nótese que, considerando $\Omega = 1$, $\omega = 0$, $\alpha = 0$ y $V = 0$ se recuperan las ecuaciones de TOV en Relatividad General (2.8).

Para el análisis numérico, el sistema (4.13) se resuelve bajo las siguientes condiciones iniciales:

$$P(0) = P_c,$$

$$m(0) = 0,$$

$$\nu(0) = -\nu_c,$$

$$\varphi(0) = \varphi_c,$$

$$\omega(0) = 0,$$

donde los cantidades iniciales ν_c y φ_c son determinados numéricamente usando un método de “doble disparo” (double shooting method), con el que se hallan dichos valores tal que los campos ν y φ se desvanezcan en el infinito numérico [35].

4.2. Masa Física Observable (ADM)

Resolviendo el sistema (2.8) se obtiene la masa de la estrella de neutrones, pero esta masa está dada en el marco de Einstein, por que se necesita transformar dicha masa al marco de Jordan. Con esa finalidad, se deriva la masa ADM para la teoría escalar-tensorial estudiada y también la masa en el marco de Jordan.

En principio, se introducen las variables $\mathcal{K}_E$ y $\mathcal{K}_J$ definidas como:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_J &\equiv 1 - \frac{2m}{r_J}, \\ \mathcal{K}_E &\equiv 1 - \frac{2m}{r_E}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

las cuales se encuentran relacionadas entre ellas mediante el factor conforme $\Omega(\varphi)$ [34]. Para observar esto, se toma la métrica (2.3) y se estudia como esta, en el marco de Einstein, se relaciona con la del marco de Jordan:

$$ds_E^2 = \Omega^2 ds_J^2 = -\Omega^2 e^{-\nu} dt^2 + \frac{\Omega^2}{K_J(r_J)} dr_J^2 + \Omega^2 r_J^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.15)$$

Del término angular se tiene

$$\begin{aligned} r_E^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi) &= \Omega^2 r_J^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi), \\ \therefore r_J &= \frac{r_E}{\Omega}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

y derivando esta última expresión con respecto a r_E :

$$\frac{dr_J}{dr_E} = \frac{1}{\Omega} \left(1 - \frac{1}{\Omega} \frac{d\Omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dr_E} r_E \right) = \frac{1}{\Omega} \left(1 - \frac{d \ln \Omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dr_E} r_E \right) = \frac{1}{\Omega} \left(1 - \alpha(\varphi) \frac{d\varphi}{dr_E} r_E \right). \quad (4.17)$$

El término radial, a partir de (4.15), se transforma como

$$\frac{1}{\mathcal{K}_E} dr_E^2 = \frac{\Omega^2}{\mathcal{K}_J} dr_J^2 \longrightarrow \mathcal{K}_J = \Omega^2 \mathcal{K}_E \left(\frac{dr_J}{dr_E} \right)^2$$

por tanto, se puede escribir $\mathcal{K}_J$ en términos $\mathcal{K}_E$ usando (4.17):

$$\mathcal{K}_J(r_E) = \left(1 - \alpha(\varphi(r_E)) r_E \frac{d\varphi}{dr_E} \right)^2 \mathcal{K}_E(r_E). \quad (4.18)$$

Se define también la masa ADM en el marco de Jordan como:

$$M_J = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r_J}{2} (1 - \mathcal{K}_J),$$

y se sustituyen las cantidades del marco de Jordan $(r_J, \mathcal{K}_J)$ por las del marco de Einstein $(r_E, \mathcal{K}_E)$ usando las ecuaciones (4.16) y (4.18), obteniendo así

$$\begin{aligned} M_J &= \frac{r_E}{2\Omega} \left[1 - \left(1 - \alpha \frac{d\varphi}{dr_E} r_E \right)^2 \mathcal{K}_E \right] = \frac{r_E}{2\Omega} \left[1 - \left(1 - 2\alpha r_E \frac{d\varphi}{dr} + \alpha^2 r_E^2 \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 \right) \mathcal{K}_E \right], \\ &= \frac{r_E}{2\Omega} \left[(1 - \mathcal{K}_E) - \left(-2\alpha r_E \frac{d\varphi}{dr} + \alpha^2 r_E^2 \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 \right) \mathcal{K}_E \right], \\ &= \frac{1}{\Omega} \left[\frac{r_E}{2} (1 - \mathcal{K}_E) \right] - \frac{r_E}{\Omega} \left[-\alpha r_E \frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{2} \alpha^2 r_E^2 \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 \right] \mathcal{K}_E. \end{aligned}$$

En esta última expresión se identifica la masa ADM en el marco de Einstein como

$$M_E = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r_E}{2} (1 - \mathcal{K}_E),$$

y se reemplaza $\mathcal{K}_E$ de acuerdo con (4.14), obteniéndose:

$$\begin{aligned} M_J &= \frac{1}{\Omega} \left[M_E + \frac{r_E^2}{2} \alpha \frac{d\varphi}{dr} \left(2 - \alpha r_E \frac{d\varphi}{dr} \right) \mathcal{K}_E \right], \\ &= \frac{1}{\Omega(\varphi(r_E))} \left[M_E + \frac{r_E^2}{2} \alpha(\varphi(r_E)) \frac{d\varphi}{dr} \left(2 - \alpha(\varphi(r_E)) r_E \frac{d\varphi}{dr} \right) \left(1 - \frac{2M_E}{r_E} \right) \right], \end{aligned}$$

siendo ahora r_E el radio del marco de Einstein en el infinito numérico y también $\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dr} \Big|_{r=r_E}$ [35].

Capítulo 5

Ecuación de Estado

5.1. El Modelo de Materia: Rol de la Ecuación de Estado

Como se ha establecido, la estructura macroscópica de una estrella de neutrones se determina resolviendo las ecuaciones de TOV, que describen el equilibrio hidrostático en el marco de la Relatividad General. Sin embargo, este sistema de ecuaciones diferenciales, (4.13), no está cerrado por si mismo. Para obtener una solución única que describa una configuración estelar, es indispensable proporcionar una relación fundamental que conecte las variables termodinámicas del fluido estelar: la presión (P) y la densidad (ϵ) de energía. Esta relación es precisamente la Ecuación de Estado. La EoS actúa como el puente crucial entre la microfísica de la materia densa y la astrofísica, encapsulando la física nuclear de las interacciones a densidades supranucleares en una forma que puede ser utilizada en las ecuaciones de estructura estelar. Las incertidumbres en el conocimiento de la física nuclear se traducen directamente en una variedad de EoS propuestas, cada una con predicciones astrofísicas distintas.

5.2. Aproximación Politrópica y Ecuaciones de Estado Seleccionadas

La forma más simple de una EoS barotrópica (donde la presión solo depende de la densidad) es la EoS politrópica:

$$P = K\rho^\Gamma,$$

donde P es la presión, ρ es la densidad de masa en reposo, K es una constante de proporcionalidad y Γ es el índice adiabático constante. Este modelo es de gran utilidad pedagógica y analítica, ya que permite transformar las ecuaciones de estructura estelar en la ecuación de Lane-Emden, que tiene soluciones analíticas para ciertos valores de Γ [39, 40].

Sin embargo, la física de la materia en una estrella de neutrones es mucho más compleja. Las interacciones nucleares, las transiciones de fase y la aparición de nuevas partículas hace que la relación entre presión y densidad varíe significativamente a través de los diferentes regímenes de densidad del interior estelar. Por lo tanto, un único politropo con un Γ constante es una aproximación demasiado simplista e inadecuada para describir de manera realista una estrella de neutrones.

Para superar las limitaciones del politropo simple y, al mismo tiempo, evitar la dependencia estricta de modelos tabulados, se introduce una parametrización politrópica a trozos (Piecewise Polyotropic) [41, 42]. La EoS consiste en una sección de baja densidad $\rho < \rho_0$ y una sección de alta densidad $\rho \geq \rho_0$. Además, por encima de esta densidad de anclaje ρ_0 se divide en tres segmentos de alta densidad, con las densidades de transición fijadas en $\rho_1 = 10^{14.7} \text{ g/cm}^3$ y $\rho_2 = 10^{15} \text{ g/cm}^3$.

La idea central es dividir el dominio de alta densidad de la EoS en varios segmentos y modelar cada segmento con una ley politrópica diferente. Específicamente, la presión P como función de la densidad de masa en reposo ρ se define como:

$$P(\rho) = K_i \rho^{\Gamma_i}, \quad \text{para } \rho_{i-1} \leq \rho \leq \rho_i, \quad (5.1)$$

donde Γ_i es el índice adiabático en el segmento i -ésimo. La continuidad de la presión se impone en las densidades de transición ρ_i , lo que permite determinar las constantes K_i en función de un conjunto reducido de parámetros libres. Esto significa que para cada densidad de transición ρ_i , debe cumplirse la condición de continuidad:

$$P(\rho_i) = K_i \rho^{\Gamma_i} = K_{i+1} \rho^{\Gamma_{i+1}},$$

de donde se puede determinar K_2 y K_3 dados $K_1, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.

La densidad de energía, ϵ , se obtiene integrando la ley para fluidos barotrópicos, $d\left(\frac{\epsilon}{\rho}\right) = -P d\left(\frac{1}{\rho}\right)$, sustituyendo la presión P por su definición politrópica (5.1):

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\epsilon}{\rho}\right) &= -P d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{P}{\rho^2} d\rho = K_i \rho^{\Gamma_i-2} d\rho, \\ \frac{\epsilon}{\rho} &= \int K_i \rho^{\Gamma_i-2} d\rho + C_i = \frac{K_i}{\Gamma_i-1} \rho^{\Gamma_i-1} + C_i \quad (\Gamma_i \neq 1), \end{aligned}$$

donde C_i es la constante de integración para el tramo i . Se escribe $C_i = 1 + \alpha_i$, de modo que

$$\epsilon(\rho) = (1 + \alpha_i) \rho + \frac{K_i}{\Gamma_i-1} \rho^{\Gamma_i}.$$

Ahora, la constante α_i se fija imponiendo continuidad de $\epsilon(\rho)$ en el borde entre dos segmentos. Si se toma ρ_{i-1} como la densidad de corte inferior del tramo i y se conoce $\epsilon(\rho_{i-1})$ (por continuidad desde el tramo anterior), se impone

$$\epsilon(\rho_{i-1}) = (1 + \alpha_i) \rho_{i-1} + \frac{K_i}{\Gamma_i-1} \rho_{i-1}^{\Gamma_i},$$

de donde

$$\alpha_i = \frac{\epsilon(\rho_{i-1})}{\rho_{i-1}} - 1 - \frac{K_i}{\Gamma_i-1} \rho_{i-1}^{\Gamma_i-1},$$

con $(\Gamma_i \neq 1)$ [34].

Para el análisis en esta tesis, se seleccionaron tres Ecuaciones de Estado: WFF1, APR y SLy, cada una representada mediante la parametrización politrópica a trozos.

El modelo WFF1 (Wiringa, Fiks, y Fabrocini) [43] es un modelo microscópico derivado de primeros principios utilizando el método variacional para resolver el problema de muchos cuerpos nucleares. Se basa en el potencial de dos nucleones de Argonne v14 (AV14) y la interacción de tres nucleones de Urbana VII (UVII) para modelar las fuerzas nucleares, buscando construir una EoS a partir de una descripción fundamental de las interacciones entre nucleones.

El modelo APR (Akmal, Pandharipande, y Ravenhall) [44] también se basa en el método variacional, pero representa una mejora significativa sobre modelos anteriores como WFF1. Utiliza un potencial de dos nucleones más moderno y preciso, el Argonne V18 (AV18), que se ajusta a un conjunto de datos de dispersión nucleón-nucleón mucho más amplio. Además, incorpora el potencial de tres nucleones Urbana IX (UIX) e incluye explícitamente correcciones relativistas al operador de la interacción nuclear, conocidas como “boost corrections”.

Finalmente, el modelo SLy (Skyrme-Lyon) [45], a diferencia de WFF1 y APR, es un modelo fenomenológico. Específicamente, la parametrización de SLy4 se basa en una interacción efectiva de tipo Skyrme, que es un funcional de la densidad de energía. Los parámetros de este funcional no se derivan directamente de la dispersión de nucleones, sino que se ajustan para reproducir una amplia gama de propiedades de núcleos finitos estables y datos de materia nuclear infinita teórica.

Capítulo 6

Resultados Numéricos y Discusión

El propósito central de este trabajo es resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas (4.13), que describe cómo varían la presión, la masa, los potenciales métricos y el campo escalar dentro de una estrella de neutrones. El procedimiento consiste en integrar estas ecuaciones desde el centro de la estrella hacia el exterior, tomando como punto de partida distintos valores de la densidad central. Cada densidad inicial genera un modelo estelar único, caracterizado por una masa y un radio bien definidos. Repitiendo este proceso para una secuencia de densidades centrales se construye la curva de relación masa–radio, que permite analizar las propiedades de la estrella para una ecuación de estado (EoS) determinada. En el marco de Einstein, el radio de la estrella se representa como R_s , mientras que la masa se obtiene evaluando en la superficie estelar, definida por la condición $P(R_s) = 0$.

Para que la integración sea físicamente consistente, es necesario imponer condiciones de frontera en dos lugares: en el centro de la estrella y en el infinito espacial. En el centro las condiciones son sencillas de establecer: la masa debe comenzar en cero (ya que no hay materia acumulada en ese punto) y el gradiente del campo escalar debe ser nulo por simetría. En contraste, en el infinito espacial se requiere que los potenciales métricos y el campo escalar φ desaparezcan, es decir, que tiendan a cero. Como estas condiciones en el infinito no se conocen de antemano, fue necesario implementar un *método de disparo bidimensional*, el cual ajusta los valores iniciales del campo escalar φ_c y del potencial métrico central ν_c hasta encontrar aquellos que satisfacen el comportamiento esperado en el límite asintótico. Para resolver las ecuaciones se utilizó un integrador en `Python`, basado en el código `pyTOV-STT` descrito en la referencia [46], pero modificado de tal forma que de cuenta del potencial usado. La implementación es detallada en el pseudocódigo 1 al final del capítulo.

En una primera etapa se calcularon la masa gravitacional y el radio de la estrella en el marco de Einstein, utilizando las tres EoS presentadas anteriormente. Luego, estas cantidades se tradujeron al marco de Jordan, donde se comparan con mayor facilidad los efectos del acoplamiento escalar. La transformación entre marcos se realiza mediante la relación entre radios

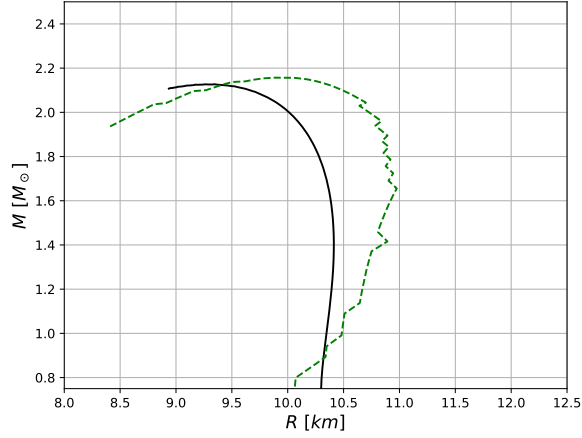
$$R = \frac{1}{\Omega(\phi(R_s))} R_s,$$

y la relación entre masas dada por

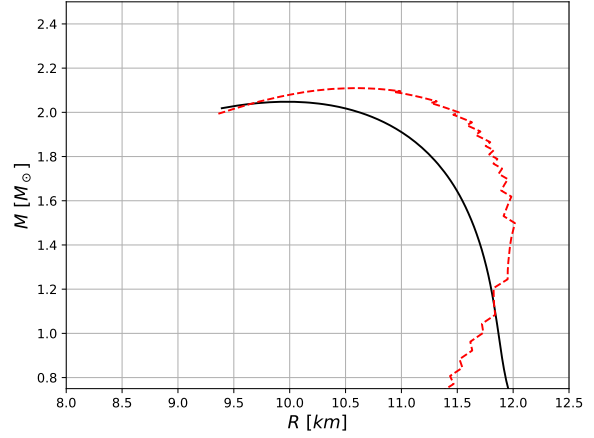
$$M_J = \frac{1}{\Omega(\varphi(r_E))} \left[M_E + \frac{r_E^2}{2} \alpha(\varphi(r_E)) \frac{d\varphi}{dr} \left(2 - \alpha(\varphi(r_E)) r_E \frac{d\varphi}{dr} \right) \left(1 - \frac{2M_E}{r_E} \right) \right],$$

como se mostró en la sección 4.2.

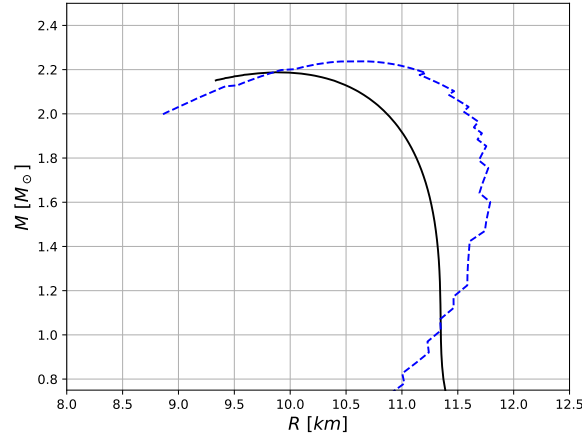
Finalmente, con la masa gravitacional y el radio expresados en el marco de Jordan, se construyeron las curvas masa–radio (M–R), que constituyen el resultado principal de este procedimiento. De esta forma, las relaciones obtenidas son las mostradas en la figura 6.1.



(a) WFF1 EoS



(b) SLy EoS



(c) APR EoS

Figura 6.1: Relaciones masa–radio de estrellas de neutrones en la teoría escalar–tensorial axiónica, en comparación con Relatividad General para las EoS WFF1, SLy y APR. La masa ADM se expresa en unidades de $M/M_\odot$, donde M es la masa en el marco de Jordan. La línea negra continua representa la Relatividad General y la punteada el resultado en el acoplamiento no-mínimo.

El resultado más significativo, visible en las tres subfiguras, es que el modelo de teoría tensorial-escalar axiónica predice de forma consistente una **masa máxima** (M_{max}) **superior** a la obtenida en RG. Esto confirma que el acoplamiento no mínimo del campo escalar proporciona un soporte efectivo contra el colapso gravitacional, cumpliendo así con la principal motivación teórica de estos modelos. Adicionalmente, las gráficas muestran claramente el fenómeno de **escalarización espontánea**: para estrellas de baja masa, las soluciones del modelo axiónico coinciden con las de RG, pero a partir de un punto de bifurcación crítico, emerge una nueva familia de soluciones escalarizadas que se extiende hacia masas mayores. La tabla 6.1 muestra las masas máximas y los radios respectivos obtenidos para los distintos EoS en el modelo estudiado y en Relatividad General.

La Figura 6.2 permite una comparación directa entre las soluciones del modelo escalar-tensorial para las distintas EoS. De los modelos estudiados, se observa que la EoS APR es la que sostiene la mayor masa máxima, alcanzando un valor aproximado de $2.22M_\odot$. Dicho valor se sitúa en el umbral inferior de la denominada “brecha de masa” (mass gap), una región de interés astrofísico motivada por observaciones como el componente secundario del evento GW190814. Los modelos WFF1 y SLy también superan el límite de $2M_\odot$ aunque

Modelo	WFF1 EoS	SLy EoS	APR EoS
GR	$M_{max} = 2.127121M_{\odot}$	$M_{max} = 2.047864M_{\odot}$	$M_{max} = 2.188192M_{\odot}$
Radio para GR	$R = 9.34 \text{ km}$	$R = 9.97 \text{ km}$	$R = 9.87 \text{ km}$
Axionic model	$M_{max} = 2.156833M_{\odot}$	$M_{max} = 2.109643M_{\odot}$	$M_{max} = 2.224299M_{\odot}$
Radio para el modelo axiónico	$R = 9.89 \text{ km}$	$R = 10.60 \text{ km}$	$R = 10.24 \text{ km}$

Tabla 6.1: Masas máximas y sus respectivos radios en GR y en el modelo escalar-tensorial axiónico para las distintas EoS.

de forma menos pronunciada.

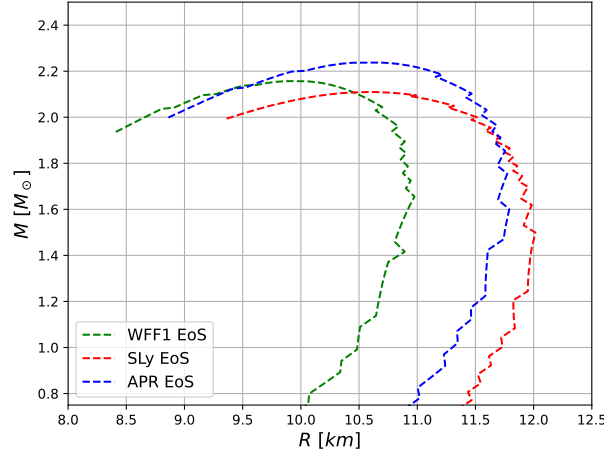


Figura 6.2: Curvas masa-radio en la teoría escalar-tensorial axiónica para las EoS WFF1, SLy y APR. La masa ADM se reporta en unidades de $M/M_{\odot}$, con M definido en el marco de Jordan.

A pesar del éxito teórico del modelo en aumentar la masa máxima, su viabilidad fenomenológica debe ser evaluada frente a las restricciones observacionales actuales. A continuación, se detallan los resultados:

- **Radio para $1.4 M_{\odot}$:** Las observaciones de NICER [47] y otros análisis [48, 49] han restringido el radio a $R \approx 12.3 - 12.45 \text{ km}$. Los resultados de este trabajo son $R_{WFF1} \approx 10.8 \text{ km}$, $R_{APR} \approx 11.7 \text{ km}$ y $R_{SLy} \approx 12.0 \text{ km}$. Si bien SLy se acerca, los tres modelos predicen estrellas más compactas de lo sugerido por estas mediciones, mostrando una tensión con las mismas.
- **Radio para $1.6 M_{\odot}$:** La restricción del evento GW170817 [50] establece un límite inferior de $R > 10.68 \text{ km}$. Todos los modelos de este estudio, con $R_{WFF1} \approx 11 \text{ km}$, $R_{SLy} \approx 12 \text{ km}$ y $R_{APR} \approx 11.7 \text{ km}$, cumplen satisfactoriamente con esta condición.
- **Radio para $2.0 M_{\odot}$:** La restricción dada en [48] sugiere un radio de $R \approx 12.11 \text{ km}$. Los radios predichos por los modelos, $R_{WFF1} \approx 10.5 \text{ km}$, $R_{SLy} \approx 11.2 \text{ km}$ y $R_{APR} \approx 11.5 \text{ km}$, son consistentemente más pequeños, lo que refuerza la tensión observacional.
- **Radio a la Masa Máxima:** La condición de que el radio de la estrella más masiva sea $R > 9.6 \text{ km}$ es cumplida por las tres EoS. Las configuraciones de máxima masa no son excesivamente compactas, lo cual es consistente con los límites impuestos por GW170817.

Al confrontar los resultados con las restricciones observacionales, se encuentra un comportamiento mixto. Los modelos resultan ser consistentes con los límites de compacidad más generales derivados del evento GW170817, satisfaciendo las condiciones de radio para las estrellas de $1.6M_{\odot}$ y para las configuraciones de masa máxima. Sin embargo, se observa una tensión significativa con las mediciones de radio más precisas para masas canónicas de $1.4M_{\odot}$ y $2.0M_{\odot}$, donde los modelos tienden a predecir configuraciones estelares consistentemente más compactas de lo que sugieren los datos.

Pseudocódigo 1 Solución de Ecuaciones TOV para Estrellas de Neutrones en Teoría Escalar-Tensorial Axiónica

Parte 1: Inicialización y Definiciones

- 1: Definir constantes físicas: $G, c, M_\odot$.
- 2: Definir parámetros de la Ecuación de Estado (EOS) politrópica a trozos: $\rho_1, \rho_2, p_1, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \dots$.
- 3: Calcular constantes de la EOS (K_i, α_i) para asegurar la continuidad de la presión y la densidad de energía.
- 4: Definir parámetros del modelo escalar-tensorial axiónico: $\alpha, \Lambda, f_a, \xi$.
- 5: **function** $P(\rho)$ ▷ Presión en función de la densidad de masa-reposo
- 6: **if** $\rho < \rho_{L_3}$ **then return** $K_{L_4} \rho^{\Gamma_{L_4}}$
- 7: **else if** $\rho_{L_3} \leq \rho < \rho_{L_2}$ **then return** $K_{L_3} \rho^{\Gamma_{L_3}}$
- 8: ...(continuar para todos los tramos de la EOS)
- 9: **function** $\epsilon(P)$ ▷ Densidad de energía en función de la presión
- 10: Calcular ρ a partir de P invirtiendo la función $P(\rho)$.
- 11: **if** $\rho < \rho_{L_3}$ **then return** $(1 + \alpha_{L_4})\rho + K_{L_4}/(\Gamma_{L_4} - 1)\rho^{\Gamma_{L_4}}$
- 12: **else if** $\rho_{L_3} \leq \rho < \rho_{L_2}$ **then return** $(1 + \alpha_{L_3})\rho + K_{L_3}/(\Gamma_{L_3} - 1)\rho^{\Gamma_{L_3}}$
- 13: ...(continuar para todos los tramos de la EOS)

Parte 2: Definición del Sistema de Ecuaciones Diferenciales

- 14: Definir el vector de estado $y = [P, m, \nu, \varphi, \omega]$.
- 15: **function** $F_INT(r, y)$ ▷ Sistema de EDO para el interior de la estrella ($r < R$)
- 16: $\epsilon \leftarrow \epsilon(y[0])$ ▷ Obtener densidad de energía a partir de la presión P
- 17: Calcular las derivadas $[dP/dr, dm/dr, d\nu/dr, d\varphi/dr, d\omega/dr]$ usando las ecuaciones de estructura estelar modificadas para la materia y el campo escalar.
- 18: **return** El vector de derivadas.
- 19: **function** $F_EXT(r, y)$ ▷ Sistema de EDO para el exterior de la estrella ($r > R$)
- 20: Calcular las derivadas $[dP/dr, dm/dr, d\nu/dr, d\varphi/dr, d\omega/dr]$ para el vacío ($\epsilon = 0, P = 0$).
- 21: **return** El vector de derivadas (con $dP/dr = 0$).

Parte 3: Integración Numérica y Búsqueda de Soluciones

Input: Tabla de densidades centrales ρ_{table} .

Output: Tabla de Masas y Radios MR_{Table} .

- 22: **for** cada ϵ_c en la tabla de densidades de energía **do**
 - 23: $\rho_c \leftarrow$ resolver $\epsilon(\rho) = \epsilon_c$ para ρ .
 - 24: $P_c \leftarrow P(\rho_c)$.
 - 25: Definir la función objetivo $ObjectiveFunction(\nu_c, \varphi_c)$:
 - 26: $y_0 \leftarrow [P_c, 0, \nu_c, \varphi_c, 0]$ ▷ Condiciones iniciales en $r = dr$
 - 27: Integrar desde $r = dr$ hasta que $P \leq 0$ usando **f_int** $\rightarrow$ obtener y_{surf} en R_{surf} .
 - 28: Integrar desde R_{surf} hasta r_{max} (infinito numérico) usando **f_ext** con C.I. y_{surf} .
 - 29: **return** $\sqrt{\nu(r_{max})^2 + \varphi(r_{max})^2}$ ▷ Debe anularse en el infinito
 - 30: $(\nu_{c,opt}, \varphi_{c,opt}) \leftarrow$ minimize(**ObjectiveFunction**) ▷ Método de disparo (shooting)
 - 31: ▷ Realizar la integración final con los valores óptimos
 - 32: $y_0 \leftarrow [P_c, 0, \nu_{c,opt}, \varphi_{c,opt}, 0]$
 - 33: Integrar con **f_int** hasta $P \leq 0$ para obtener la solución interior $y_{int}(r)$.
 - 34: Interpolar cerca de la superficie para encontrar el radio R preciso donde $P(R) = 0$.
 - 35: $M_E, \varphi_R, \omega_R \leftarrow$ valores de m, φ, ω en el radio R .
 - 36: ▷ Calcular observables físicas (Marco de Jordan)
 - 37: $R_J \leftarrow R \cdot A(\varphi_R)$
 - 38: $M_J \leftarrow A(\varphi_R) \left[M_E - \frac{R^2}{2} \alpha \omega_R (2 + \alpha R \omega_R) (1 - \frac{2M_E}{R}) \right]$
 - 39: Almacenar $(M_J, R_J, \rho_c, \varphi_R)$ en MR_{Table} .
 - 40: Guardar MR_{Table} en archivo de salida.
-

Capítulo 7

Conclusiones

En el presente trabajo de tesis se ha investigado el efecto de un acoplamiento no mínimo de un campo escalar axiónico en la estructura y las propiedades macroscópicas de las estrellas de neutrones. Mediante la resolución numérica de las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff modificadas para tres ecuaciones de estado naturales realistas (WFF1, SLy y APR), se obtuvieron las relaciones de masa-radio que caracterizan a estas configuraciones estelares, permitiendo una comparación directa con las predicciones de la relatividad general.

El resultado fundamental de esta investigación es la confirmación de que la teoría escalar-tensorial axiónica permite la existencia de estrellas de neutrones con una masa superior a la permitida por la Relatividad General para las mismas EoS. Este resultado es de gran relevancia astrofísica, ya que ofrece un mecanismo teórico para la formación de objetos compactos supermasivos, abordando así el enigma planteado por la “brecha de masa” y eventos como GW190814. En particular, el modelo combinado con la EoS APR se mostró como el más prometedor, alcanzando una masa máxima de aproximadamente $2.22M_{\odot}$, valor que se sitúa en el umbral de esta región observacional.

A pesar del éxito teórico, el análisis detallado revela una tensión importante al confrontar con las restricciones observacionales más precisas sobre los radios estelares. Si bien los modelos cumplen con los límites de compactidad generales, las configuraciones predicha para masas canónicas ($1.4M_{\odot}$ y $2.0M_{\odot}$) resultan ser más compactas, con radios más pequeños de lo que sugieren las mediciones NICER y otros análisis. Esto demuestra que, si bien el acoplamiento con el axiÓN es un mecanismo efectivo para aumentar la masa, también modifica la estructura global de la estrella de una manera que no se alinea completamente con todas las cotas astrofísicas.

Es pertinente destacar que los resultados presentados son inherentemente dependientes de la parametrización del modelo axiónico. Los valores de los parámetros fundamentales, como la escala de energía Λ , se fijaron para explorar un escenario representativo. Una exploración exhaustiva del espacio de parámetros podría revelar regiones donde el modelo no solo aumente la masa máxima, sino que también produzca radios estelares más consistentes con las observaciones.

Como perspectiva a futuro, este trabajo abre la puerta a investigaciones complementarias en el campo de la gravedad modificada. Una extensión natural sería explorar modelos alternativos, como las teorías de gravedad $f(R)$ en presencia de axiones. Este enfoque representa un desafío numérico considerablemente mayor, ya que el escalar de Ricci, R , deja de ser solo una cantidad geométrica para convertirse en un grado de libertad dinámico. Esto implicaría la resolución de un sistema de ecuaciones de estructura de orden superior, un reto computacional que, sin embargo, permitiría sondear una clase diferente de modificaciones a la Relatividad General en el régimen de campo fuerte que representan las estrellas de neutrones.

Apéndice A

Transformación conforme del escalar de Ricci

Este apéndice provee la derivación detallada de la transformación conforme del escalar de Ricci al marco de Einstein dado por la ecuación (3.3) presentada en la sección 3.2.1.

A.1. Transformación de los símbolos de Christoffel

Partiendo de la definición de los símbolos de Christoffel en términos de la métrica y sus derivadas:

$$\tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\rho\sigma}(\partial_\mu\tilde{g}_{\sigma\nu} + \partial_\nu\tilde{g}_{\mu\sigma} - \partial_\sigma\tilde{g}_{\mu\nu}),$$

se sustituye la transformación conforme $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$ en la definición anterior, obteniendo así:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\Omega^{-2}g^{\rho\sigma}(\partial_\mu\Omega^2 g_{\nu\sigma} + \partial_\nu\Omega^2 g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma\Omega^2 g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2}\Omega^{-2}g^{\rho\sigma}\Omega^2(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\Omega^{-2}g^{\rho\sigma}(g_{\nu\sigma}\partial_\mu\Omega^2 + g_{\mu\sigma}\partial_\nu\Omega^2 - g_{\mu\nu}\partial_\sigma\Omega^2).\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

El primer sumando corresponde a la definición de los símbolos de Christoffel en el marco de Jordan. En el segundo sumando se usa la regla de la cadena $\partial_\mu\Omega^2 = 2\Omega\partial_\mu\Omega$ y se distribuye la métrica, usando que $g^{\mu\alpha}g_{\mu\beta} = \delta^\alpha_\beta$. También, es conveniente definir $\Omega = e^w$, lo que implica que $\partial_\mu\Omega = \Omega\partial_\mu w$ y $\nabla_\mu\Omega = \partial_\mu\Omega$. Así, la expresión (A.1) se simplifica a:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} &= \Gamma^\rho_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Omega^2(\delta^\rho_\nu 2\Omega^2\partial_\mu w + \delta^\rho_\mu 2\Omega^2\partial_\nu w - g_{\mu\nu}2\Omega^2\partial^\rho w), \\ &= \Gamma^\rho_{\mu\nu} + (\delta^\rho_\nu\partial_\mu w + \delta^\rho_\mu\partial_\nu w - g_{\mu\nu}\partial^\rho w), \\ &= \Gamma^\rho_{\mu\nu} + \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu},\end{aligned}\quad (\text{A.2})$$

donde la variación de los símbolos de Christoffel es

$$\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \delta^\rho_\nu\nabla_\mu\Omega + \delta^\rho_\mu\nabla_\nu\Omega - g_{\mu\nu}\nabla^\rho\Omega\quad (\text{A.3})$$

A.2. Transformación del Tensor de Riemann y Ricci

El tensor de Riemann se define como:

$$\tilde{R}^\rho_{\mu\lambda\nu} = \partial_\lambda\tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu\tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\lambda} + \tilde{\Gamma}^\sigma_{\mu\nu}\tilde{\Gamma}^\rho_{\sigma\lambda} - \tilde{\Gamma}^\sigma_{\mu\lambda}\tilde{\Gamma}^\rho_{\sigma\nu}$$

Entonces, sustituyendo los símbolos de Christoffel usando la expresión (A.2) y expandiendo términos se obtiene:

$$\begin{aligned}\tilde{R}^\rho_{\mu\lambda\nu} &= \partial_\lambda (\Gamma^\rho_{\mu\nu} + \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}) - \partial_\nu (\Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \delta\Gamma^\rho_{\mu\sigma}) \\ &\quad + (\Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu}) (\Gamma^\rho_{\sigma\lambda} + \delta\Gamma^\rho_{\sigma\lambda}) - (\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} + \delta\Gamma^\sigma_{\mu\lambda}) (\Gamma^\rho_{\sigma\nu} + \delta\Gamma^\rho_{\sigma\nu}), \\ &= \partial_\lambda \Gamma^\rho_{\mu\nu} + \partial_\lambda (\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}) - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\lambda} - \partial_\nu (\delta\Gamma^\rho_{\mu\lambda}) + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\sigma\lambda} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \delta\Gamma^\rho_{\sigma\lambda} \\ &\quad + \Gamma^\rho_{\sigma\lambda} \delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} + \delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \delta\Gamma^\rho_{\sigma\lambda} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \Gamma^\rho_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \delta\Gamma^\rho_{\sigma\nu} - \Gamma^\rho_{\sigma\nu} \delta\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} - \delta\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \delta\Gamma^\rho_{\sigma\nu}.\end{aligned}$$

Los términos lineales en $\delta\Gamma$ pueden ser reescritos como derivadas covariantes. Así, la expresión se simplifica a:

$$\tilde{R}^\rho_{\mu\lambda\nu} = R^\rho_{\mu\lambda\nu} + \nabla_\lambda (\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}) - \nabla_\nu \delta\Gamma^\rho_{\mu\lambda} + \delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} \delta\Gamma^\rho_{\sigma\lambda} - \delta\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \delta\Gamma^\rho_{\sigma\nu}.$$

Ahora, usando (A.3), se sustituye la expresión para $\delta\Gamma$ en la ecuación anterior y realizamos las contracciones correspondientes. Este paso algebraico lleva a la forma final:

$$\begin{aligned}\tilde{R}^\rho_{\mu\lambda\nu} &= R^\rho_{\mu\lambda\nu} + \delta^\rho_\nu \nabla_\lambda \nabla_\mu w - g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\rho w - \delta^\rho_\lambda \nabla_\nu \nabla_\mu w + g_{\mu\lambda} \nabla_\nu \nabla^\rho w \\ &\quad + \delta^\rho_\lambda \nabla_\mu w \nabla_\nu w - g_{\mu\lambda} \nabla_\nu w \nabla^\rho w - \delta^\rho_\lambda g_{\mu\nu} \nabla^\sigma w \nabla_\sigma w \\ &\quad - \delta^\rho_\nu \nabla_\lambda w \nabla_\mu w + g_{\mu\nu} \nabla_\lambda w \nabla^\rho w + \delta^\rho_\nu g_{\mu\lambda} \nabla^\sigma w \nabla_\sigma w.\end{aligned}$$

Contrayendo esta última expresión, el tensor de Riemann, se obtiene el tensor de Ricci transformado, siendo este

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = \tilde{R}^\rho_{\mu\rho\nu} = R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu w \nabla_\nu w - 2\nabla_\nu \nabla_\mu w - 2g_{\mu\nu} \nabla^\sigma w \nabla_\sigma w - g_{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla^\rho w. \quad (\text{A.4})$$

Finalmente, para obtener el escalar de Ricci, se contrae (A.4) con la métrica inversa en el Marco de Einstein:

$$\begin{aligned}\tilde{R} &= \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{R}_{\mu\nu} = \Omega^{-2} (R - 6\nabla^\mu w \nabla_\mu w - 6\nabla^\mu \nabla_\mu w), \\ \therefore R &= \Omega^2 \tilde{R} + 6g^{\mu\nu} \partial_\nu w \partial_\mu w + 6\Box w,\end{aligned}$$

y por definición

$$\nabla^\sigma \nabla_\sigma \Omega = \Box \Omega = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Omega),$$

por lo tanto:

$$R = \Omega^2 \tilde{R} + 6 \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu w) + 6g^{\mu\nu} \partial_\nu w \partial_\mu w.$$

Luego, empleando la relación entre las métricas en un marco y en el otro, se puede expresar el escalar de Ricci en el marco de Einstein de como

$$R = \Omega^2 \tilde{R} + 6 \frac{\Omega^4}{\sqrt{-\tilde{g}}} \partial_\mu (\sqrt{-\tilde{g}} \Omega^{-2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu w) + 6\Omega^2 \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu w \partial_\mu w.$$

De esta manera, el escalar de Ricci en el marco de Jordan corresponde a:

$$R = \Omega^2 (\tilde{R} + 6\tilde{\Box} w - 6\tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu w \partial_\nu w), \quad (\text{A.5})$$

donde $w = \ln \Omega$ y

$$\tilde{\Box} w = \frac{1}{\sqrt{\tilde{g}}} \partial_\mu \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\nu w$$

es el D'Lambertiano en el marco de Einstein. La ecuación (A.5) es el resultado clave para transformar la parte gravitacional de la acción del marco de Jordan al marco de Einstein.

Referencias

- [1] The LIGO Scientific Collaboration y The Virgo Collaboration. «GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral». En: *Physical Review Letters* 119.16 (oct. de 2017). arXiv:1710.05832 [gr-qc], pág. 161101. ISSN: 0031-9007, 1079-7114. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.161101. URL: <http://arxiv.org/abs/1710.05832>.
- [2] B. P. Abbott et al. «Gravitational Waves and Gamma-Rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A». en. En: *The Astrophysical Journal Letters* 848.2 (oct. de 2017). Publisher: The American Astronomical Society, pág. L13. ISSN: 2041-8205. DOI: 10.3847/2041-8213/aa920c. URL: <https://dx.doi.org/10.3847/2041-8213/aa920c>.
- [3] Jose María Ezquiaga y Miguel Zumalacárregui. «Dark Energy after GW170817: dead ends and the road ahead». En: *Physical Review Letters* 119.25 (dic. de 2017). arXiv:1710.05901 [astro-ph], pág. 251304. ISSN: 0031-9007, 1079-7114. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.251304. URL: <http://arxiv.org/abs/1710.05901>.
- [4] Tessa Baker et al. «Strong constraints on cosmological gravity from GW170817 and GRB 170817A». En: *Physical Review Letters* 119.25 (dic. de 2017). arXiv:1710.06394 [astro-ph], pág. 251301. ISSN: 0031-9007, 1079-7114. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.251301. URL: <http://arxiv.org/abs/1710.06394>.
- [5] B. P. Abbott et al. «GW170817: Measurements of Neutron Star Radii and Equation of State». en. En: *Physical Review Letters* 121.16 (oct. de 2018), pág. 161101. ISSN: 0031-9007, 1079-7114. DOI: 10.1103/PhysRevLett.121.161101. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.161101>.
- [6] The LIGO Scientific Collaboration et al. «GW190814: Gravitational Waves from the Coalescence of a $23M_{\odot}$ Black Hole with a $2.6M_{\odot}$ Compact Object». En: *The Astrophysical Journal Letters* 896.2 (jun. de 2020). arXiv:2006.12611 [astro-ph], pág. L44. ISSN: 2041-8205, 2041-8213. DOI: 10.3847/2041-8213/ab960f. URL: <http://arxiv.org/abs/2006.12611>.
- [7] Thomas Mannel. «Theory and Phenomenology of CP Violation». en. En: *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements* 167 (mayo de 2007), págs. 170-174. ISSN: 09205632. DOI: 10.1016/j.nuclphysbps.2006.12.083. URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0920563206010711>.
- [8] G. 't Hooft. «Symmetry Breaking through Bell-Jackiw Anomalies». En: *Physical Review Letters* 37.1 (jul. de 1976). Publisher: American Physical Society, págs. 8-11. DOI: 10.1103/PhysRevLett.37.8. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.37.8>.
- [9] R. J. Crewther et al. «Chiral estimate of the electric dipole moment of the neutron in quantum chromodynamics». En: *Physics Letters B* 88.1 (dic. de 1979), págs. 123-127. ISSN: 0370-2693. DOI: 10.1016/0370-2693(79)90128-X. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026937990128X>.
- [10] R. D. Peccei y Helen R. Quinn. «CP Conservation in the Presence of Pseudoparticles». En: *Physical Review Letters* 38.25 (jun. de 1977). Publisher: American Physical Society, págs. 1440-1443. DOI: 10.1103/PhysRevLett.38.1440. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.38.1440>.
- [11] R. D. Peccei y Helen R. Quinn. «Constraints imposed by CP conservation in the presence of pseudoparticles». En: *Physical Review D* 16.6 (sep. de 1977). Publisher: American Physical Society, págs. 1791-1797. DOI: 10.1103/PhysRevD.16.1791. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.16.1791>.

- [12] Steven Weinberg. «A New Light Boson?» En: *Physical Review Letters* 40.4 (ene. de 1978). Publisher: American Physical Society, págs. 223-226. DOI: 10.1103/PhysRevLett.40.223. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.40.223>.
- [13] F. Wilczek. «Problem of Strong P and T Invariance in the Presence of Instantons». En: *Physical Review Letters* 40.5 (ene. de 1978). Publisher: American Physical Society, págs. 279-282. DOI: 10.1103/PhysRevLett.40.279. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.40.279>.
- [14] Prateek Agrawal, Gustavo Marques-Tavares y Wei Xue. «Opening up the QCD axion window». En: *Journal of High Energy Physics* 2018.3 (mar. de 2018), pág. 49. ISSN: 1029-8479. DOI: 10.1007/JHEP03(2018)049. arXiv: 1708.05008[hep-ph]. URL: <http://arxiv.org/abs/1708.05008>.
- [15] L. F. Abbott y P. Sikivie. «A cosmological bound on the invisible axion». En: *Physics Letters B* 120.1 (6 de ene. de 1983), págs. 133-136. ISSN: 0370-2693. DOI: 10.1016/0370-2693(83)90638-X. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026938390638X>.
- [16] John Preskill, Mark B. Wise y Frank Wilczek. «Cosmology of the invisible axion». En: *Physics Letters B* 120.1 (6 de ene. de 1983), págs. 127-132. ISSN: 0370-2693. DOI: 10.1016/0370-2693(83)90637-8. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269383906378>.
- [17] Yasunori Fujii y Kei-ichi Maeda. *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. ISBN: 978-0-521-81159-0. DOI: 10.1017/CB09780511535093. URL: <https://www.cambridge.org/core/books/scalartensor-theory-of-gravitation/CE08614207F03739B8E0D38F90C67EFC>.
- [18] Carl H. Brans. *The roots of scalar-tensor theory: an approximate history*. 10 de jun. de 2005. DOI: 10.48550/arXiv.gr-qc/0506063. arXiv: gr-qc/0506063. URL: <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0506063>.
- [19] Valerio Faraoni, Edgard Gunzig y Pasquale Nardone. *Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology*. 14 de nov. de 1998. DOI: 10.48550/arXiv.gr-qc/9811047. arXiv: gr-qc/9811047. URL: <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9811047>.
- [20] Carlos Palenzuela y Steven L. Liebling. «Constraining scalar-tensor theories of gravity from the most massive neutron stars». En: *Physical Review D* 93.4 (4 de feb. de 2016), pág. 044009. ISSN: 2470-0010, 2470-0029. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.044009. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.044009>.
- [21] Juan García-Bellido et al. «Higgs-Dilaton Cosmology: From the Early to the Late Universe». En: *Physical Review D* 84.12 (7 de dic. de 2011), pág. 123504. ISSN: 1550-7998, 1550-2368. DOI: 10.1103/PhysRevD.84.123504. arXiv: 1107.2163[hep-ph]. URL: <http://arxiv.org/abs/1107.2163>.
- [22] F. Bezrukov et al. «Higgs inflation: consistency and generalisations». En: *Journal of High Energy Physics* 2011.1 (ene. de 2011), pág. 16. ISSN: 1029-8479. DOI: 10.1007/JHEP01(2011)016. arXiv: 1008.5157[hep-ph]. URL: <http://arxiv.org/abs/1008.5157>.
- [23] Swagat S. Mishra, Varun Sahni y Alexey V. Toporensky. «Initial conditions for Inflation in an FRW Universe». En: *Physical Review D* 98.8 (31 de oct. de 2018), pág. 083538. ISSN: 2470-0010, 2470-0029. DOI: 10.1103/PhysRevD.98.083538. arXiv: 1801.04948[gr-qc]. URL: <http://arxiv.org/abs/1801.04948>.
- [24] Planck Collaboration et al. «Planck 2018 results. X. Constraints on inflation». En: *Astronomy & Astrophysics* 641 (sep. de 2020), A10. ISSN: 0004-6361, 1432-0746. DOI: 10.1051/0004-6361/201833887. arXiv: 1807.06211[astro-ph]. URL: <http://arxiv.org/abs/1807.06211>.
- [25] Thibault Damour y Gilles Esposito-Farèse. «Nonperturbative strong-field effects in tensor-scalar theories of gravitation». En: *Physical Review Letters* 70.15 (12 de abr. de 1993). Publisher: American Physical Society, págs. 2220-2223. DOI: 10.1103/PhysRevLett.70.2220. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.70.2220>.
- [26] Thibault Damour y Gilles Esposito-Farèse. «Tensor-scalar gravity and binary-pulsar experiments». En: *Physical Review D* 54.2 (15 de jul. de 1996), págs. 1474-1491. ISSN: 0556-2821, 1089-4918. DOI: 10.1103/PhysRevD.54.1474. arXiv: gr-qc/9602056. URL: <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9602056>.

- [27] Hector O. Silva et al. «Spontaneous scalarization of black holes and compact stars from a Gauss-Bonnet coupling». En: *Physical Review Letters* 120.13 (30 de mar. de 2018), pág. 131104. ISSN: 0031-9007, 1079-7114. DOI: 10.1103/PhysRevLett.120.131104. arXiv: 1711.02080[gr-qc]. URL: <http://arxiv.org/abs/1711.02080>.
- [28] Hajime Sotani y Kostas D. Kokkotas. «Maximum mass limit of neutron stars in scalar-tensor gravity». En: *Physical Review D* 95.4 (21 de feb. de 2017). Publisher: American Physical Society, pág. 044032. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.044032. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.95.044032>.
- [29] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, jul. de 2019. DOI: 10.1017/9781108770385.
- [30] Robert M. Wald. *General Relativity*. Chicago, USA: Chicago Univ. Pr., 1984. DOI: 10.7208/chicago/9780226870373.001.0001.
- [31] Norman K. Glendenning. *Compact Stars*. Astronomy and Astrophysics Library. New York, NY: Springer US, 1996. DOI: 10.1007/978-1-4684-0491-3. URL: <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4684-0491-3>.
- [32] J. R. Oppenheimer y G. M. Volkoff. «On Massive Neutron Cores». En: *Physical Review* 55.4 (feb. de 1939). Publisher: American Physical Society, págs. 374-381. DOI: 10.1103/PhysRev.55.374. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.374>.
- [33] David Kaiser. «Primordial Spectral Indices from Generalized Einstein Theories». En: *Physical Review D* 52.8 (15 de oct. de 1995), págs. 4295-4306. ISSN: 0556-2821. DOI: 10.1103/PhysRevD.52.4295. arXiv: astro-ph/9408044. URL: <http://arxiv.org/abs/astro-ph/9408044>.
- [34] S. D. Odintsov y V. K. Oikonomou. «Neutron stars in scalar-tensor gravity with quartic order scalar potential». En: *Annals of Physics* 440 (1 de mayo de 2022), pág. 168839. ISSN: 0003-4916. DOI: 10.1016/j.aop.2022.168839. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491622000525>.
- [35] V. K. Oikonomou. *Phenomenology of Axionic Static Neutron Stars with Masses in the Mass-Gap Region*. 14 de mar. de 2024. DOI: 10.48550/arXiv.2403.09818. arXiv: 2403.09818[gr-qc]. URL: <http://arxiv.org/abs/2403.09818>.
- [36] David J. E. Marsh. «Axion Cosmology». En: *Physics Reports* 643 (jul. de 2016), págs. 1-79. ISSN: 03701573. DOI: 10.1016/j.physrep.2016.06.005. arXiv: 1510.07633[astro-ph]. URL: <http://arxiv.org/abs/1510.07633>.
- [37] Raymond T. Co, Lawrence J. Hall y Keisuke Harigaya. «Axion Kinetic Misalignment Mechanism». En: *Physical Review Letters* 124.25 (26 de jun. de 2020), pág. 251802. ISSN: 0031-9007, 1079-7114. DOI: 10.1103/PhysRevLett.124.251802. arXiv: 1910.14152[hep-ph]. URL: <http://arxiv.org/abs/1910.14152>.
- [38] Yakefu Reyimuaji y Xinyi Zhang. «Natural inflation with a nonminimal coupling to gravity». En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2021.3 (1 de mar. de 2021), pág. 059. ISSN: 1475-7516. DOI: 10.1088/1475-7516/2021/03/059. arXiv: 2012.14248[astro-ph]. URL: <http://arxiv.org/abs/2012.14248>.
- [39] Subrahmanyan Chandrasekhar. *An introduction to the study of stellar structure*. 1 de ene. de 1939.
- [40] Emmanuel Chavez Nambo y Olivier Sarbach. «Static spherical perfect fluid stars with finite radius in general relativity: a review». En: *Revista Mexicana de Física E* 18.2 (2 de jul. de 2021). ISSN: 2683-2216, 1870-3542. DOI: 10.31349/RevMexFisE.18.020208. arXiv: 2010.02859[gr-qc]. URL: <http://arxiv.org/abs/2010.02859>.
- [41] Jocelyn S. Read et al. «Constraints on a phenomenologically parameterized neutron-star equation of state». En: *Physical Review D* 79.12 (22 de jun. de 2009), pág. 124032. ISSN: 1550-7998, 1550-2368. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.124032. arXiv: 0812.2163[astro-ph]. URL: <http://arxiv.org/abs/0812.2163>.

- [42] Jocelyn S. Read et al. «Measuring the neutron star equation of state with gravitational wave observations». En: *Physical Review D* 79.12 (22 de jun. de 2009), pág. 124033. ISSN: 1550-7998, 1550-2368. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.124033. arXiv: 0901.3258[gr-qc]. URL: <http://arxiv.org/abs/0901.3258>.
- [43] R. B. Wiringa, V. Fiks y A. Fabrocini. «Equation of state for dense nucleon matter». En: *Physical Review C* 38.2 (1 de ago. de 1988). Publisher: American Physical Society, págs. 1010-1037. DOI: 10.1103/PhysRevC.38.1010. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.38.1010>.
- [44] A. Akmal, V. R. Pandharipande y D. G. Ravenhall. «The equation of state for nucleon matter and neutron star structure». En: *Physical Review C* 58.3 (1 de sep. de 1998), págs. 1804-1828. ISSN: 0556-2813, 1089-490X. DOI: 10.1103/PhysRevC.58.1804. arXiv: nucl-th/9804027. URL: <http://arxiv.org/abs/nucl-th/9804027>.
- [45] F. Douchin y P. Haensel. «A unified equation of state of dense matter and neutron star structure». En: *Astronomy & Astrophysics* 380.1 (dic. de 2001), págs. 151-167. ISSN: 0004-6361, 1432-0746. DOI: 10.1051/0004-6361:20011402. arXiv: astro-ph/0111092. URL: <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0111092>.
- [46] *niksterg (Nikolaos Stergioulas) · GitHub*. URL: <https://github.com/niksterg>.
- [47] M. C. Miller et al. «The Radius of PSR J0740+6620 from NICER and XMM-Newton Data». En: *The Astrophysical Journal Letters* 918.2 (1 de sep. de 2021), pág. L28. ISSN: 2041-8205, 2041-8213. DOI: 10.3847/2041-8213/ac089b. arXiv: 2105.06979[astro-ph]. URL: <http://arxiv.org/abs/2105.06979>.
- [48] Sinan Altiparmak, Christian Ecker y Luciano Rezzolla. «On the Sound Speed in Neutron Stars». En: *The Astrophysical Journal Letters* 939.2 (1 de nov. de 2022), pág. L34. ISSN: 2041-8205, 2041-8213. DOI: 10.3847/2041-8213/ac9b2a. arXiv: 2203.14974[astro-ph]. URL: <http://arxiv.org/abs/2203.14974>.
- [49] G. Raaijmakers et al. «Constraints on the dense matter equation of state and neutron star properties from NICER's mass-radius estimate of PSR J0740+6620 and multimessenger observations». En: *The Astrophysical Journal Letters* 918.2 (1 de sep. de 2021), pág. L29. ISSN: 2041-8205, 2041-8213. DOI: 10.3847/2041-8213/ac089a. arXiv: 2105.06981[astro-ph]. URL: <http://arxiv.org/abs/2105.06981>.
- [50] Andreas Bauswein et al. «Neutron-star radius constraints from GW170817 and future detections». En: *The Astrophysical Journal Letters* 850.2 (1 de dic. de 2017), pág. L34. ISSN: 2041-8205, 2041-8213. DOI: 10.3847/2041-8213/aa9994. arXiv: 1710.06843[astro-ph]. URL: <http://arxiv.org/abs/1710.06843>.