



Universidad
del Valle

FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS EN UN UNIVERSO ANISÓTROPO

GABRIELA ALEJANDRA VALENCIA ZÚÑIGA

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de física (3146)
Cali, 2024

FORMACIÓN DE ESTRUCTURAS EN UN UNIVERSO ANISÓTROPO

GABRIELA ALEJANDRA VALENCIA ZÚÑIGA

Advisor: Prof. Cesar A. Valenzuela Toledo PhD.

Coadvisor: Josue Motoa Manzano PhD.

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de física (3146)
Cali, 2024

Agradecimientos

Quiero comenzar expresando mi profundo agradecimiento a Dios, ya que sin Él nada de esto hubiera sido posible. Le doy gracias por guiarme en cada paso de este camino, por estar siempre a mi lado brindándome fortaleza y sabiduría, y por colmarme cada día con su amor infinito.

También deseo expresar mi gratitud a mi maravillosa familia, quienes han sido una pieza fundamental en este arduo y hermoso recorrido que ha sido mi carrera. Agradezco especialmente a mi más grande tesoro, mi mamá. Estaré eternamente agradecida por su apoyo incondicional día a día, por alentarme y creer siempre en mí. A ella le atribuyo gran parte de lo que soy y de lo que he logrado. Asimismo, agradezco a mi hermanito Johan, a mi tía Yoli, a mi primo Tebo, a mi papito Bolívar, a mi papá Miguel, a mis hermanas Eliza y Lore, y a mi sobrinito Mateo, quienes ocupan un lugar muy especial en mi corazón y me brindaron su compañía y amor, animándome y dándome fuerzas en este camino. También quiero agradecer a Juan, por haber sido un apoyo invaluable durante mi carrera. Gracias por estar ahí para mí. La presencia de ellos en mi vida es una bendición inmensurable.

Quiero hacer un agradecimiento especial a mi mamita Tuti, a mi papito Galo y a mi mamita Clemencia, seres de luz que siempre llevaré en mi corazón y en mis recuerdos. Gracias a su lucha, perseverancia y amor, me he convertido en la persona que soy hoy.

También quiero agradecer a mi profesor César, quien me ha guiado y acompañado en todo el proceso de mi tesis. Gracias por enseñarme del universo y compartir su saber conmigo. Su guía constante y su confianza en mis habilidades me han motivado a alcanzar alturas que nunca imaginé. Agradezco a mi co-director Josué por sus ideas y acompañamiento en el proceso de mi tesis. A Bayron, le agradezco profundamente por cada una de sus enseñanzas, por su disposición para responder mis dudas y ayudarme. También agradezco a Jose por sus constructivas sugerencias.

Le agradezco a mi amada Universidad del Valle y a todos los docentes que hicieron parte de mi camino universitario, por haberme enseñado tanto acerca de cómo funciona el universo. Valoro cada una de sus enseñanzas y las llevaré siempre conmigo.

Finalmente, estoy agradecida por las valiosas amistades que hice durante mi carrera, quienes me brindaron su apoyo a lo largo de este camino, como lo son Jabes, Jhona, Daniel, Nicolás, Andrés, Carlos, Isabella, Brayan, Peter, Santiago, Jeison y muchos otros que de una u otra forma me ayudaron para que este logro sea posible.

Resumen

En este trabajo se investiga el crecimiento de las perturbaciones cosmológicas en un escenario cosmológico donde el universo gradualmente se anisotropiza en tiempos tardíos, debido a la presencia de un pequeño tensor de estrés anisótropo asociado con la energía oscura. Para describir esto, se emplea la métrica de Bianchi I, que representa un espacio-tiempo homogéneo pero anisótropo. Se derivan y resuelven las ecuaciones de movimiento para un fluido de materia oscura en órdenes lineales. Este estudio del crecimiento de las estructuras se realiza para tres diferentes ecuaciones de estado de la energía oscura: $w = -0.95$, $w = -1$ y $w = -1.05$, y una tasa de expansión anisótropa dependiente del tiempo.

Palabras clave: perturbaciones, anisotropía, isotropía, tensor de cizalla, tensor de estrés, densidad de contraste.

Abstract

In this work, we investigate the growth of cosmological perturbations in a scenario where the universe gradually becomes anisotropic at later times due to the presence of a small anisotropic stress tensor associated with dark energy. To describe this, we employ the Bianchi I metric, which characterizes a homogeneous but anisotropic spacetime background. The equations of motion for a dark matter fluid are derived and solved at linear orders. This study examines the growth of structures for three different equations of state for dark energy: $w = -0.95$, $w = -1$ and $w = -1.05$, and a time-dependent rate of anisotropic expansion.

Keywords: perturbations, anisotropy, isotropy, shear tensor, stress tensor, density contrast.

Contents

Agradecimientos	iii
Resumen	iv
Abstract	iv
List of Figures	2
List of Tables	3
1 Introducción	5
2 Marco teorico	8
2.1 Modelo cosmológico estándar	8
2.1.1 Métrica	8
2.1.2 Dinámica	8
2.2 Formación de estructuras en un universo isótropo	10
2.2.1 Solución en el régimen lineal	12
3 Formación de estructuras en un universo anisótropo	17
3.1 Espacio-tiempo de Bianchi I	17
3.2 Dinámica	18
3.3 Teoría de perturbaciones	19
3.3.1 Perturbaciones de la métrica	19
3.3.2 perturbaciones de materia	20
3.4 Limite Newtoniano y aproximaciones	21
3.5 Ecuaciones de fluidos	22
4 Soluciones	25
5 Conclusiones	34
A Ecuaciones del fluido de materia oscura	36
A.1 Ecuación de continuidad	36
A.2 Ecuación de Euler	37

A.3 Ecuaciones del fluido de materia oscura en el universo anisótropo teniendo en cuenta la ecuación de conservación del tensor de energía-impulso	38
B Ecuación para el factor de crecimiento y decrecimiento	40
B.1 Caso de un universo isótropo dominado por materia	40
B.2 Caso de un universo isótropo dominado por materia y energía oscura	41
B.3 Caso de un universo anisótropo dominado por materia	41
Bibliography	43

List of Figures

2.1	Densidad de contraste en un universo isótropo con respecto al factor de escala. . .	14
2.2	Densidad de contraste isótropa para $w_\Lambda = -0.95$, $w_\Lambda = -1$ y $w_\Lambda = -1.05$	15
2.3	Factor de crecimiento dividido por el factor de escala para $w_\Lambda = -0.95$, $w_\Lambda = -1$ y $w_\Lambda = -1.05$	15
4.1	La línea de guiones azul representa la densidad de contraste en un universo anisótropo con un tensor de estrés dado por $\pi_{33} = 0.5 \cdot H_0^2$, la línea de guiones y puntos roja representa la densidad de contraste en un universo isótropo.	29
4.2	Densidad de contraste anisótropo con $\pi_{33} = 0.5 \cdot H_0^2$ para tres diferentes ecuaciones de estado de energía oscura.	30
4.3	Efecto del tensor de cizalla en la densidad de contraste.	31
4.4	Densidad de contraste con un tensor de estrés de $\pi_{33} = 0.5 \text{Arctan}(a^4)$ y $\pi_{33} = 0.5H_0^2$, para $w_\Lambda = -0.95$, $w_\Lambda = -1$ y $w_\Lambda = -1.05$	32
4.5	Taza de la densidad de contraste anisótropa e isótropa para un tensor de estrés variable y otro constante.	32

List of Tables

3.1	Orden de las perturbaciones en el parámetro ϵ	22
-----	--	----

Chapter 1

Introducción

U No de los grandes desafíos del ser humano a lo largo de la historia es entender el universo que lo rodea, para esto, a través de los años, ha diseñado teorías y construido herramientas cada vez mas sofisticadas, para observar el cielo e intentar entender el origen fundamental de estas observaciones [1, 2, 3, 4, 5]. Sin embargo, fue a comienzos del siglo XX, con la publicación de la teoría de la relatividad general (RG), que se sentaron las bases para poder formular modelos matemáticos que describan la evolución del universo. Albert Einstein, quien formuló esta teoría, en un comienzo pensaba que el universo era estático, sin embargo, en 1928, Edwin Hubble, descubrió a través de observaciones que las galaxias se están alejando unas de otras, es decir, que el universo se esta expandiendo. Luego, en 1998 se descubrió que además de que el universo se esta expandiendo, lo esta haciendo aceleradamente [6, 7]. El contenido energético causante de esta aceleración no ha podido ser observada de forma directa, así que se le ha dado el nombre de energía oscura. La forma de energía oscura mas simple para describir teóricamente la expansión acelerada es la constante cosmológica, introducida en las ecuaciones de campo.

Por otro lado, como consecuencia de las observaciones, se ha podido concluir que nuestro universo es homogéneo e isótropo a grandes escalas [8]. El modelo mas exitoso que describe estas observaciones, entre otras [8, 9], es el modelo cosmológico estándar o modelo Λ CDM (por sus siglas en ingles Λ Cold Dark Matter). Entre sus predicciones están: el contenido energético del universo, la edad del universo, el fondo cósmico de microondas, la evolución del universo, la abundancia de los elementos ligeros, etc [2, 4, 10, 11]. Sin embargo, a pesar de su éxito, el modelo presenta algunos problemas teóricos y observacionales, los cuales indican la necesidad de reconsiderar o modificar eventualmente dicho modelo. Algunos de estos problemas o tensiones son por ejemplo, el problema de la constante cosmológica Λ , que surge al contrastar la densidad de energía pronosticada por la teoría cuántica de campos para el vacío con la densidad de energía observada asociada a la constante cosmológica, esto da como resultado una discrepancia de 120 órdenes de magnitud [9, 12] y por lo tanto no cuenta con una explicación fundamental adecuada. Otro problema es el de la tensión H_0 , la cual consiste en una discrepancia en las mediciones locales de la constante de Hubble, basadas en supernovas Ia, y las mediciones derivadas de la radiación cósmica de fondo (CMB por sus sigla en inglés) [13, 14, 15]. En el lado observa-

cional se tienen además, las llamadas anomalías del CMB, las cuales corresponden a resultados observacionales que no son compatibles con el modelo cosmológico estándar (ver por ejemplo [16, 17] para un listado y una descripción de las anomalías mas comunes), entre estas anomalías se encuentra la posible desviación de la isotropía a gran escala [18, 19], sin embargo, la significancia estadística de estas anomalías es pequeña, por lo tanto su existencia es aun un problema abierto que merece ser explorado.

La existencia de estas tensiones ha conllevado a que se propongan nuevos modelos de energía oscura, los cuales se basan en campos escalares [10, 20, 21], campos vectoriales [22, 23, 24, 25], p-formas [26, 27] o inclusive modificaciones de las teorías de la gravedad [28, 29]. Se espera que cada uno de estos modelos, además de resolver los problemas antes mencionados, reproduzcan de una manera adecuada la historia de la expansión del universo.

Estos modelos alternativos usualmente se estudian en el fondo plano de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), es decir, teniendo en cuenta un fondo homogéneo e isótropo. Sin embargo, las anomalías del CMB parecen implicar una violación a la isotropía del universo a grandes escalas, lo cual sugiere la necesidad de implementar una geometría diferente. En la literatura se puede encontrar que estas anomalías podrían ser aliviadas considerando una expansión acelerada anisótropa en tiempos tardíos [16, 30, 31]. Sin embargo, hay procesos que no se han estudiado con detalle alrededor de un universo anisótropo, como por ejemplo el proceso de formación de estructuras, que por el contrario, se han estudiado ampliamente en un universo isótropo.

El estudio de la formación de estructuras tiene una gran importancia, ya que proporciona una ventana para comprender la materia oscura, un componente fundamental en el proceso de formación de estructuras, así como la energía oscura, responsable de la expansión acelerada del universo. A través de este estudio, se pueden poner a prueba diversos modelos y buscar aquel que mejor se ajuste a la historia cósmica. Este trabajo se enfoca especialmente en una forma particular de energía oscura que introduce anisotropía, lo que implica investigar el proceso de formación de estructuras en un universo anisótropo caracterizado por la métrica de Bianchi I.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera: en el capítulo 2, se presenta el marco teórico, que abarca la descripción del modelo cosmológico estándar y el análisis del proceso de crecimiento de las estructuras en un universo isótropo. En el capítulo 3, se examina la formación de las estructuras en un universo anisótropo, donde se derivan las ecuaciones que describen dicho crecimiento. Finalmente, en el capítulo 4, se proporciona la solución a la densidad de contraste en el régimen lineal, considerando variaciones en el tensor de cizalla y en las ecuaciones de estado de la energía oscura.

Chapter 2

Marco teorico

2.1 Modelo cosmológico estándar

2.1.1 Métrica

El modelo cosmológico estándar se fundamenta en la teoría de la relatividad general de Einstein y en el principio cosmológico [11]. Este último, establece que el universo es homogéneo e isótropo a grandes escalas. La métrica que obedece esta geometría es la métrica de FLRW

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right). \quad (2.1)$$

En el sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) , donde t representa el tiempo y (r, θ, ϕ) son las coordenadas esféricas usuales, la función $a(t)$ denota el factor de escala que describe la expansión del universo, mientras que κ representa el factor de curvatura y da cuenta de las posibles curvaturas espaciales del universo. Estas curvaturas pueden ser clasificadas como abiertas, planas y cerradas, correspondientes a los valores -1 , 0 , y 1 , respectivamente.

2.1.2 Dinámica

Las ecuaciones de campo de Einstein relacionan la geometría del espacio-tiempo con el contenido de materia en el universo de la siguiente manera,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu},$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es el escalar de Ricci, $g_{\mu\nu}$ es la métrica, Λ es la constante cosmológica, G es la constante de gravitación y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento.

El tensor de energía-momento para un fluido perfecto, compuesto por materia, radiación o energía oscura tiene la siguiente forma

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu},$$

donde ρ es la densidad del fluido, p es la presión y u^μ es la 4-velocidad del fluido.

Las ecuaciones de campo de Einstein para la métrica de la ecuación (2.1) y para un fluido perfecto, cuyo tensor energía-momento viene dado por $T_{00} = -\rho$ y $T_{ii} = p$, con $i = 1, 2, 3$, dan como resultado las ecuaciones de Friedmann,

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.2)$$

$$\dot{H} - H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (2.3)$$

donde H es el parámetro de Hubble, el cual especifica la tasa de expansión del universo, y ρ y p son la suma de todas las contribuciones a la densidad de energía y presión en el universo.

Otra ecuación fundamental en cosmología es la ecuación de movimiento para el fluido ideal, conocida como la ecuación de continuidad, que se deriva de la conservación del tensor energía-momento $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (2.4)$$

Esta ecuación es crucial para comprender la evolución de los distintos componentes del universo, considerando que cada componente tiene una ecuación de estado que relaciona la presión del fluido con su densidad, expresada por $w = \frac{p}{\rho}$.

Al estudiar cómo evolucionan los diversos tipos de fluido en función del factor de escala, se encuentra lo siguiente:

- Materia: para la materia, donde la presión es $p = 0$, la ecuación de estado es $w = 0$. Por consiguiente,

$$\rho \propto a^{-3}.$$

Esto implica que a medida que el universo se expande, su densidad de energía de la materia disminuye. La solución de la ecuación de Friedmann para un universo plano ($k = 0$) con $\rho_{\text{total}} = \rho_m$, es decir, un universo dominado únicamente por materia, implica $a \propto t^{\frac{2}{3}}$.

- Radiación: para la radiación, donde $p = \frac{1}{3}\rho$, su ecuación de estado es $w = \frac{1}{3}$. Resolviendo la ecuación de (2.4), se obtiene

$$\rho \propto a^{-4}.$$

Aquí, además de que la densidad de energía decae debido a la expansión del espacio, también hay una pérdida de energía debido al corrimiento al rojo, ya que a medida que el universo se expande, las longitudes de onda de la radiación también se estiran, lo que disminuye la energía de los fotones. La solución de la ecuación de Friedmann para un universo plano ($k = 0$) con $\rho_{\text{total}} = \rho_r$ resulta en $a \propto t^{\frac{1}{2}}$.

- **Energía oscura:** para la energía oscura, donde $p = -\rho$ y $w = -1$, es decir, dada por la constante cosmológica, se obtiene,

$$\rho \propto a^0 \propto 1.$$

La densidad de energía oscura no depende del factor de escala, lo que significa que permanece constante a medida que el espacio se expande. La solución de la ecuación de Friedmann para un universo plano ($k = 0$) con $\rho_{\text{total}} = \rho_{\Lambda}$ es $a \propto e^{Ht}$.

Estas relaciones proporcionan una visión clara de cómo evolucionan las distintas componentes del universo a medida que este se expande.

A continuación se introduce el parámetro de densidad, obtenido al dividir las densidades de energía entre la densidad crítica:

$$\Omega_s = \frac{\rho_s}{\rho_{cr}},$$

donde s indica el componente energético del universo y $\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G}$ es la densidad crítica. De esta manera, la primera ecuación de Friedmann se expresa como:

$$1 = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho - \frac{k}{a^2H^2} + \frac{\Lambda}{3H^2},$$

donde $\rho = \rho_m + \rho_r$, donde ρ_r corresponde a la contribución de la radiación y ρ_m corresponde a la contribución de la materia o de forma equivalente:

$$1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_k + \Omega_{\Lambda}.$$

Las observaciones cosmológicas han permitido determinar que el 5% del universo corresponde a materia bariónica, el 27% a materia oscura, y el 68% a energía oscura [8]. Habiendo establecido las bases del modelo cosmológico estándar, es momento de analizar y discutir del proceso de formación de estructuras en un universo isótropo.

2.2 Formación de estructuras en un universo isótropo

Se cree que las estructuras que se observan en el universo hoy en día, tales como, galaxias, cúmulos de galaxias, supercúmulos, se formaron a partir de pequeñas fluctuaciones de densidad de energía, dominadas por la materia oscura, que crecieron debido a la inestabilidad gravitacional. Para introducir el formalismo, en esta sección se estudia la formación de las estructuras en el dominio de materia, teniendo en cuenta el modelo cosmológico estándar, es decir, un universo homogéneo e isótropo a gran escala. Para ello se determinan las ecuaciones que describen el crecimiento de las estructuras en este universo, esto se realiza siguiendo las referencias [32, 33].

Para dar cuenta de las inhomogeneidades del universo, las cuales explican la formación de estructuras, se debe identificar cómo las perturbaciones afectan las componentes de la métrica y

cómo afectan las componentes que describen el contenido de materia en el universo. Para esto, se parte de la ecuación de Boltzmann, la cual describe como cambia la función de distribución de partículas en un fluido, en el espacio de posiciones ($\mathbf{x}$) y momentos ($\mathbf{p}$) respecto al tiempo conforme (η),

$$\frac{df}{d\eta} = \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{d\mathbf{x}}{d\eta} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \frac{d\mathbf{p}}{d\eta} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = C[f], \quad (2.5)$$

donde $f(\eta, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ describe la densidad de numero de partículas en el espacio de fase. $C[f]$ representa las colisiones entre las partículas. Se sabe que la formación de estructuras es dominada por la materia oscura, debido a que este es el fluido dominante en la densidad de la materia, y además porque este fluido se desacoplo de la radiación mucho antes que los bariones, entonces el fluido de interés a considerar es el de la materia oscura. Como este fluido es frío, no interactúa con partículas, por lo tanto se puede ignorar el efecto de colisión (la materia oscura es una sustancia sin colisiones), entonces en este caso se considera que $C[f] = 0$. De otro lado, el momento viene dado por

$$\mathbf{p} = am \frac{d\mathbf{x}}{d\eta}, \quad (2.6)$$

y su derivada viene dada por,

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\eta} = -am \nabla \phi, \quad (2.7)$$

donde ϕ es el potencial Newtoniano. Insertando las ecuaciones (2.6) y (2.7) en la ecuación de Boltzmann (2.5) y considerando que $C[f] = 0$, se obtiene la ecuación de Vlasov,

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\mathbf{p}}{am} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f - am \nabla \phi \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = 0. \quad (2.8)$$

Esta es la ecuación que describe la función de distribución de partículas de materia oscura, y se debe resolver para determinar el crecimiento de las estructuras. Para identificar la física en esta ecuación, se tomaran sus momentos a orden cero, orden uno y orden dos, los cuales están dados por,

$$\int d^3\mathbf{p} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \eta) = \rho(\mathbf{x}, \eta) = \bar{\rho}(\eta)[1 + \delta_m(\mathbf{x}, \eta)], \quad (2.9)$$

$$\int d^3\mathbf{p} \frac{\mathbf{p}f}{am} = \rho(\mathbf{x}, \eta) \mathbf{v}(\mathbf{x}, \eta), \quad (2.10)$$

$$\int d^3\mathbf{p} \frac{p_i p_j}{a^2 m^2} f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \eta) = \rho(\mathbf{x}, \eta) v_i(\mathbf{x}, \eta) v_j(\mathbf{x}, \eta) + \alpha_{ij}(\mathbf{x}, \eta). \quad (2.11)$$

Donde δ_m es la densidad de contraste de materia oscura, la cual viene dada por la siguiente

ecuación,

$$\delta_m = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}}, \quad (2.12)$$

donde $\bar{\rho}$ es la densidad media del fluido. Además $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau)$ es el campo de velocidades peculiares y α_{ij} es el tensor de esfuerzo, el cual mide la desviación de un flujo coherente único de las partículas de materia oscura y será aproximadamente cero para la materia oscura fría. El momento de orden cero de la ecuación de Vlasov relaciona la densidad del espacio de fase con el campo de densidad de masa local, y determina la ecuación de continuidad del fluido de materia oscura (Ver Anexo A.1),

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \delta(\mathbf{x}, \eta) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot ([1 + \delta(\mathbf{x}, \eta)] \mathbf{v}(\mathbf{x}, \eta)) = 0. \quad (2.13)$$

Esta ecuación describe la conservación de la masa del fluido de materia oscura. Ahora, tomando el momento de orden uno de la ecuación de Vlasov, se obtiene la ecuación de Euler, la cual describe la conservación del momento del fluido de materia oscura (Ver Anexo A.2),

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, \eta)}{\partial \eta} + \mathcal{H}(\eta) \mathbf{v}(\mathbf{x}, \eta) + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, \eta) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{v}(\mathbf{x}, \eta) = -\nabla_{\mathbf{x}} \phi, \quad (2.14)$$

o en términos de la divergencia $\theta(\mathbf{x}, \tau) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau)$,

$$\frac{\partial \theta(\mathbf{x}, \eta)}{\partial \eta} + \mathcal{H}(\eta) \theta(\mathbf{x}, \eta) + \nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{v}(\mathbf{x}, \eta) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{v}(\mathbf{x}, \eta) = -\nabla_{\mathbf{x}}^2 \phi. \quad (2.15)$$

Donde, el potencial obedece la ecuación de Poisson, dada por,

$$\nabla^2 \phi = \frac{3}{2} \Omega_m \mathcal{H}^2 \delta, \quad (2.16)$$

donde $\mathcal{H} = aH$ es el parámetro de Hubble conforme. Por lo tanto, la ecuación de Euler se escribe de la siguiente manera,

$$\frac{\partial \theta(\mathbf{x}, \eta)}{\partial \eta} + \mathcal{H}(\eta) \theta(\mathbf{x}, \eta) + \nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{v}(\mathbf{x}, \eta) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{v}(\mathbf{x}, \eta) + \frac{3}{2} \Omega_m \mathcal{H}^2 \delta = 0. \quad (2.17)$$

El sistema conformado por la ecuación de continuidad (2.13) y de Euler (2.17), describen el crecimiento de las estructuras en un universo isótropo. Ahora, se resolverá el sistema de ecuaciones para determinar la densidad de contraste en el régimen lineal.

2.2.1 Solución en el régimen lineal

En el régimen lineal se mantendrán solo los términos a primer orden de la ecuación de continuidad y de la ecuación de Euler, es decir, que se despreciarán los términos de orden superior

y cruzados, obteniendo así,

$$\frac{d\delta}{d\eta} = -\theta, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial\theta(\mathbf{x}, \eta)}{\partial\eta} + \mathcal{H}(\eta)\theta(\mathbf{x}, \eta) + \frac{3}{2}\Omega_m\mathcal{H}^2\delta = 0. \quad (2.19)$$

Reemplazando (2.18) en la ecuación (2.19) se obtiene,

$$\frac{\partial^2\delta(\mathbf{x}, \eta)}{\partial\eta^2} + \mathcal{H}(\eta)\frac{\partial\delta(\mathbf{x}, \eta)}{\partial\eta} - \frac{3}{2}\Omega_m\mathcal{H}^2\delta(\mathbf{x}, \eta) = 0. \quad (2.20)$$

Esta ecuación describe la evolución de la densidad de contraste en el régimen lineal. Escribiendo esta ecuación en función del tiempo cósmico se obtiene,

$$\frac{d\delta^2(\mathbf{x}, t)}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\delta(\mathbf{x}, t)}{dt} = 4\pi G\rho\delta(\mathbf{x}, t). \quad (2.21)$$

La solución general de esta ecuación se puede escribir de la siguiente manera:

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \delta_1(\mathbf{x})D_+(t) + \delta_2(\mathbf{x})D_-(t), \quad (2.22)$$

donde $D_+(t)$ es una solución de crecimiento y $D_-(t)$ es una solución de decrecimiento, y son llamadas factor de crecimiento y decrecimiento lineal respectivamente. Para el caso de un universo dominado por materia se tienen las soluciones $D_+(t) \propto a \propto t^{2/3}$ y $D_-(t) \propto a^{-3/2} \propto t^{-1}$, es decir, que las fluctuaciones de densidad crece con el factor de escala (ver Anexos B.1). Ahora, en el caso de un universo que contiene materia y energía oscura, la solución está dada por una combinación lineal de las funciones $D_-(t)$ Y $D_+(t)$, las cuales vienen dadas por por (ver Anexos B.2).

$$D_-(t) \propto H(t), \quad (2.23)$$

$$D_+(t) \propto H(t) \int_0^t \frac{ds}{[a(s)H(s)]^3}. \quad (2.24)$$

Para investigar y comprender el crecimiento de las estructuras en un universo isótropo con materia y energía oscura, se construyó un gráfico de la densidad de contraste utilizando el software Mathematica. Este se muestra en la Figura 2.1. Se enfocó únicamente en el modo de crecimiento, descartando el modo decreciente debido a que, conforme el universo se expande, este modo disminuye y se puede despreciar.

Para poder entender lo que la Figura 2.1 esta diciendo acerca del comportamiento de la evolución de las fluctuaciones en el universo, se debe entender claramente el concepto de densidad de contraste, y para ello se tiene en cuenta la siguiente analogía [34]. Se sabe que la cotización de las monedas experimenta variaciones diarias en el mercado cambiario, por ejemplo un día el dolar puede estar a L1000 liras italianas pero un día después la cotización puede

ser L1010 liras y al día siguiente a L990, por lo tanto, se tiene una fluctuación de L20 liras en dos días, y el contraste de densidad de la lira sería $20/1000 = 0.02$. En otro ejemplo, se tiene en cuenta la cotización del dolar en pesos, donde por ejemplo, en un día podría ser de \$9.30, al día siguiente de \$9.20, y al día siguiente de \$9.40, por lo tanto, hubo una fluctuación de \$0.20, entonces la fluctuación del dolar en pesos es cien veces menor que las fluctuaciones del dolar en liras, sin embargo, la densidad de contraste del peso es de $0.20/9.30 = 0.021$, entonces se puede ver que la densidad de contraste del peso y de la lira son muy parecidos, así que para medir fluctuaciones es mas adecuado usar la densidad de contraste.

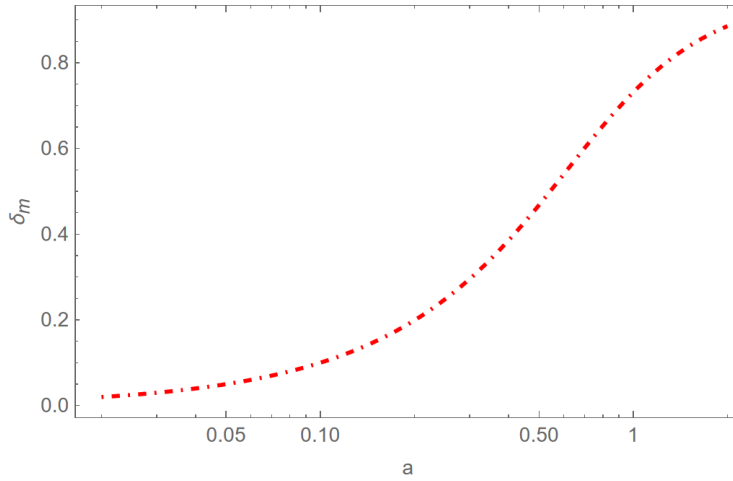


Figure 2.1: *Densidad de contraste en un universo isótropo con respecto al factor de escala.*

Entonces, la densidad de contraste representa la amplitud de las fluctuaciones en la densidad de materia oscura respecto a la densidad media de fondo, y da luces acerca de la formación de estructuras en el universo. En la Figura 2.1, se puede observar un comportamiento creciente a lo largo de la evolución, lo cual significa que las fluctuaciones de densidad de materia están aumentando a lo largo del tiempo.

Además, se estudio que tan sensible es la dinámica del sistema a la variación de la ecuación de estado de energía oscura. Para ello se graficó la densidad de contraste teniendo en cuenta tres diferentes valores de ecuación de estado para la energía oscura, dados por $w = -0.95$, $w = -1$ y $w = -1.05$ (Ver Figura 2.2).

En esta Figura 2.2 se evidencia cómo la ecuación de estado de la energía oscura impacta en la densidad de contraste. Cuando la ecuación de estado de la energía oscura es más positiva, la aceleración comienza antes, lo que conlleva a un freno más temprano en el crecimiento de las estructuras. Esto se debe a que la expansión acelerada del universo dificulta el proceso de aglomeración. Por el contrario, valores más negativos de la ecuación de estado de la energía oscura resultan en una expansión acelerada más tardía, lo que lleva a un mayor crecimiento agregado de las perturbaciones de densidad.

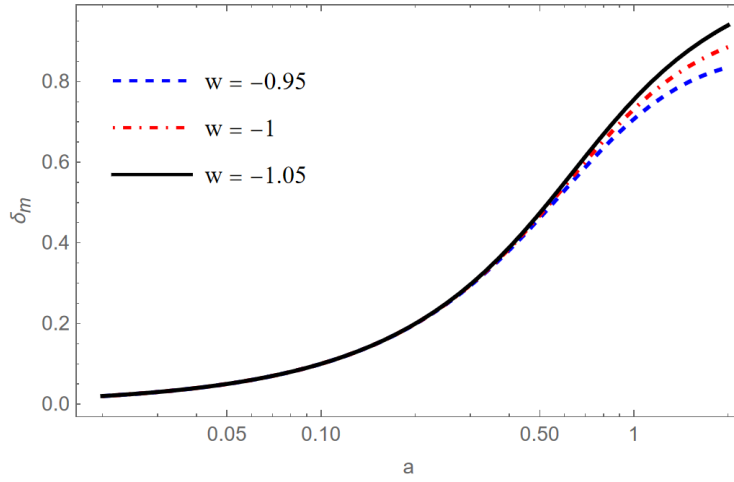


Figure 2.2: Densidad de contraste isótropa para $w_\Lambda = -0.95$, $w_\Lambda = -1$ y $w_\Lambda = -1.05$.

Además se graficó el factor de crecimiento para tres diferentes ecuaciones de estado de energía oscura dividido por a , para mostrar mejor la tendencia en los tiempos tardíos donde empieza a dominar la energía oscura en el universo.

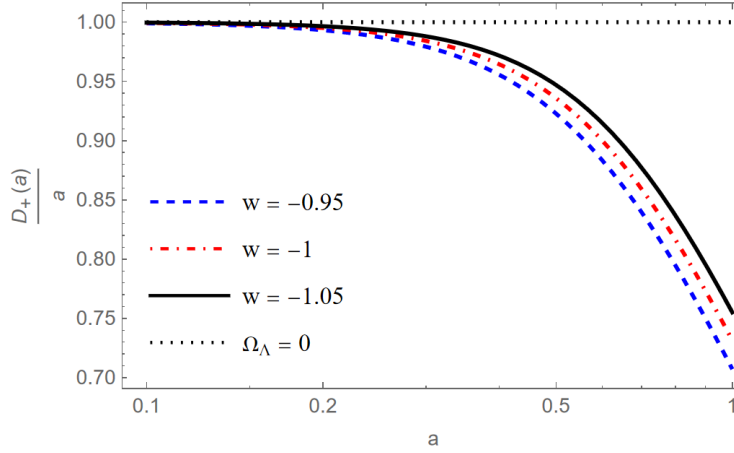


Figure 2.3: Factor de crecimiento dividido por el factor de escala para $w_\Lambda = -0.95$, $w_\Lambda = -1$ y $w_\Lambda = -1.05$.

Como se menciono previamente, cuando el universo está dominado únicamente por materia, el factor de crecimiento es igual al factor de escala. Sin embargo, cuando la energía oscura está presente, se observa una supresión en el crecimiento, en donde cuanto más positiva sea la ecuación de estado de la energía oscura, mayor será esta supresión del crecimiento en momentos tardíos.

Chapter 3

Formación de estructuras en un universo anisótropo

El proceso de formación de estructuras en un universo isótropo ha sido ampliamente estudiado en el contexto de diferentes modelos cosmológicos que describen la expansión acelerada tardía del universo [32, 33]. Sin embargo, como se dijo anteriormente, algunas observaciones avalan una posible violación de la isotropía a grandes escalas (anomalías del CMB [17]), por lo tanto, es de interés analizar el crecimiento de las grandes estructuras en un universo con estas características. Un universo anisótropo se podría explicar si se introduce una expansión anisótropa en tiempos tardíos.

En consecuencia, en este trabajo se estudiará la formación de estructuras teniendo en cuenta un universo isótropo en tiempos tempranos, cuando está dominado por la materia oscura, y que se anisotropiza lentamente en tiempos tardíos debido a la presencia de un fluido de energía oscura anisótropo. Para lo anterior se seguirá y reproducirá el artículo [35]. Los fondos que mejor modelan este universo anisótropo vienen dados por las métricas de Bianchi y en este trabajo se usará, en particular, la métrica de Bianchi I.

3.1 Espacio-tiempo de Bianchi I

Para el modelo del universo anisótropo que se considera en este trabajo, se va a utilizar la métrica de Bianchi I, que viene dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij}(t)dx^i dx^j.$$

Teniendo en cuenta que $dt = ad\eta$, se tiene,

$$ds^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 + \gamma_{ij}(\eta)dx^i dx^j],$$

donde γ_{ij} es la métrica espacial, es decir, es la métrica de las hipersuperficies de tiempo constantes y es dependiente del tiempo, lo cual permite una expansión anisótropa del universo, la

cual esta completamente caracterizada por el tensor de cizalla

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2} \gamma'_{ij},$$

donde la prima representa la derivada con respecto al tiempo conforme. La métrica espacial se puede descomponer de la siguiente forma

$$\gamma_{ij}(t) = e^{2\lambda_i(t)} \delta_{ij}.$$

Esta métrica, tiene determinante unitario ya que la anisotropía de la geometría, es decir, las diferentes tasas de expansión en diferentes direcciones del espacio, preservan el volumen. Esto significa que algunas direcciones espaciales deberían contraerse mientras que otras crecen, manteniendo el volumen del espacio constante. Entonces, se tiene que

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i(t) = 0,$$

de tal forma que $\det(\gamma) = 1$.

3.2 Dinámica

Se tendrá en cuenta un universo isótropo en épocas tempranas, es decir, cuando era dominado por la materia oscura, el cual al pasar el tiempo se fue anisotropizando debido a una fuente anisótropa en el fluido de energía oscura, por lo tanto, en este trabajo se tendrá en cuenta el tensor energía-momento dado por

$$T^{\mu\nu} = T_m^{\mu\nu} + T_{de}^{\mu\nu},$$

con

$$\begin{aligned} T_m^{\mu\nu} &= \rho_m u^\mu u^\nu, \\ T_{de}^{\mu\nu} &= (\rho_{de} + p_{de}) u^\mu u^\nu + p_{de} g^{\mu\nu} + \pi_{de}^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

donde $\pi_{de}^{\mu\nu}$ es el tensor de estrés y es la fuente de la anisotropía. Ahora, se presentan las ecuación de de Einstein y de continuidad que describen la dinámica de la expansión en este universo

homogéneo y anisótropo

$$\begin{aligned} 3\mathcal{H}^2 &= (\rho_m + \rho_{de})a^2 + \frac{1}{2}\sigma^2, \\ (\sigma_j^i)' + 2\mathcal{H}\sigma_j^i &= a^2\pi_j^i, \\ \rho_m' + 3\mathcal{H}\rho_m &= 0, \\ \rho_{de}' + 3\mathcal{H}(\rho_m + \rho_{de}) &= -\sigma_{ij}\pi^{ij}, \end{aligned}$$

donde la primera ecuación es la ecuación de Einstein 00, la segunda es la parte libre de traza de la ecuación de Einstein ij y la tercera y la cuarta ecuación son las ecuaciones de continuidad de la materia y de la energía oscura respectivamente.

Para entender el proceso de formación de estructuras es necesario realizar una expansión perturbativa de las ecuaciones de Einstein. Lo cual se describirá en la siguiente sección.

3.3 Teoría de perturbaciones

En el contexto de la teoría de perturbaciones cosmológicas, las perturbaciones en la métrica y en el contenido energético del universo se estudian de manera independiente. Para lograrlo, cada cantidad se descompone en una parte asociada al fondo, que en este caso viene dado por la métrica de Bianchi I y otra parte asociada a las perturbaciones. En esta sección, primero se abordaran las perturbaciones en la métrica en un contexto anisótropo, seguido por el análisis de las perturbaciones en el contenido material.

3.3.1 Perturbaciones de la métrica

Las ecuaciones de campo de Einstein, relacionan la geometría y la materia, de allí es evidente que las perturbaciones en el contenido material implican perturbaciones en la geometría del espacio-tiempo, manifestándose en forma de alteraciones en la métrica. La métrica de un universo perturbado se define como,

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu},$$

donde $\bar{g}_{\mu\nu}$ es la métrica de fondo y $\delta g_{\mu\nu}$ es la desviación de la métrica de fondo. La parte perturbada de la métrica se puede escribir de la siguiente forma,

$$\delta g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -2\phi & w_i \\ w_j & h_{ij} \end{pmatrix},$$

donde w_i pueden ser descompuestas usando el teorema de Helmholtz, el cual establece que un campo vectorial se descompone en la suma de un campo vectorial irrotacional (sin rotacionales) más otro solenoidal (sin divergencia).

Aplicando esta descomposición a w_i , se tiene

$$w_i = \partial_i S + S_i.$$

Donde ϕ y S son perturbaciones escalares de la métrica y S_i es una perturbación vectorial de la métrica. La extensión del teorema de Helmholtz a tensores de rango dos es la descomposición SVT. Usando esta descomposición a la perturbación tensorial h_{ij} tenemos,

$$h_{ij} = -2\psi(\gamma_{ij} + \frac{\sigma_{ij}}{\mathcal{H}}) + 2\partial_i \partial_j \tau + 2\partial_{(i} \tau_{j)} + 2\tau_{ij}.$$

Donde ψ y τ son perturbaciones escalares de la métrica, τ_i es una perturbación vectorial de la métrica y τ_{ij} es una perturbación tensorial de la métrica.

En este trabajo se utilizara una transformación de calibre llamada calibre de Newton¹, y de esta manera, usando este calibre se obtiene la siguiente métrica de Bianchi I perturbada, en tiempo conforme,

$$ds^2 = a^2 [-(1 + 2\phi)d\eta^2 + 2\omega_i dx^i d\eta + (\gamma_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j].$$

Donde, $w_i = S_i$ y $h_{ij} = -2\psi(\gamma_{ij} + \frac{\sigma_{ij}}{\mathcal{H}}) + 2\tau_{ij}$, debido al calibre con el que se esta trabajando, en donde $S = \tau = \tau_i = 0$.

Ahora, considerando la métrica definida e implementando el paquete XPand en Mathematica², se ha desarrollado un código [36] para obtener las ecuaciones de campo perturbadas a orden uno, las cuales serán utilizadas mas adelante.

3.3.2 perturbaciones de materia

Como ya se menciona, en este trabajo se tiene en cuenta que la energía oscura tiene un tensor de estrés π_{ij} el cual rompe la isotropía del universo en tiempos tardíos, sin embargo, se asume este tensor pequeño, para ser consistentes con las observaciones [37, 38]. En consecuencia, se pueden despreciar las perturbaciones asociadas a este tensor, y en general, las perturbaciones de la energía oscura. De esta forma, solo se tendrá en cuenta las perturbaciones de la componente de materia oscura, y por lo tanto, expandiendo la densidad de materia oscura en términos de la densidad de contraste, se obtiene,

$$\rho_m \rightarrow \rho_m + \delta\rho_m = \rho_m(1 + \delta). \quad (3.1)$$

¹Para un sistema de coordenadas en el espacio tiempo del fondo $\bar{g}_{\mu\nu}$, hay muchos posibles sistemas de coordenadas en el espacio tiempo perturbado $g_{\mu\nu}$, por lo tanto la correspondencia entre ellas no es única y entonces se tiene una libertad de calibre. El calibre de Newton por ejemplo consiste en la eliminación de los grados de libertad escalares S y τ y si se quiere se tiene la flexibilidad de eliminar el grado de libertad vectorial, que en este caso es τ_i .

²Es una herramienta diseñada para calcular perturbaciones cosmológicas. Su documentación puede ser encontrado en <https://www2.iap.fr/users/pitrou/xpand.htm>

La velocidad espacial puede ser completamente caracterizada por una función llamada la divergencia del fluido dada por $\theta = \partial_i v^i$. Esta divergencia junto con la densidad de contraste de la materia oscura describen completamente las perturbaciones del fluido.

3.4 Limite Newtoniano y aproximaciones

Para encontrar las ecuaciones que describen el crecimiento de las estructuras en un universo que se expande anisotropamente se tuvo en cuenta dos suposiciones. La primera fue asumir que el tensor de cizalla es pequeño, ya que las observaciones muestran un universo bastante isótropo [37, 38], y se quiere testear si hay un grado de anisotropía en el, por lo tanto, se tiene que

$$\frac{\sigma}{\mathcal{H}} \sim \frac{\pi}{\mathcal{H}} \ll 1. \quad (3.2)$$

La segundo suposición es que se considerara escalas pequeñas, lo que quiere decir que se tendrán en cuenta escalas que se encuentran dentro del radio de Hubble. En estas escalas las no linealidades se vuelven importantes, así que se adoptara la aproximación de campo débil, la cual permite estudiar estructuras incluso en escalas no lineales, siempre y cuando las velocidades sean pequeñas.

Esta aproximación se puede justificar a través de las observaciones y examinando las ecuaciones newtonianas del potencial gravitacional y la velocidad del fluido,

$$k^2 \phi = -\frac{3}{2} a^2 H^2 \delta, \quad \text{y} \quad v_i = -\frac{k_i \phi}{aH}. \quad (3.3)$$

De las observaciones del fondo cósmico de microondas, se tiene que a escalas pequeñas, donde $aH/k \sim \mathcal{O}(10^{-3})$, la densidad de contraste es del orden $\delta \sim \mathcal{O}(1)$ y por lo tanto, por la ecuación de poisson tendremos que $\phi \sim \mathcal{O}(10^{-5})$, lo cual implicara que $v_i \sim \mathcal{O}(10^{-3})$. Entonces, en escalas pequeñas donde las no linealidades son importantes, las velocidades son no relativistas, por lo tanto, se puede adoptar la aproximación de campo débil en esta escala. Ahora, teniendo en cuenta esa aproximación se encontraran los tamaños típicos de las perturbaciones de la métrica y del fluido, para ello se adoptara un esquema de expansión perturbativo en el parámetro ϵ dado por,

$$\epsilon = \left(\frac{aH}{k} \right)^2, \quad (3.4)$$

donde, como las derivadas espaciales se vuelven importantes en escalas pequeñas, se tiene que $\epsilon \equiv (aH/k)^2 \ll 1$. Entonces, teniendo en cuenta este parámetro y la aproximación de campo débil se obtiene la siguiente tabla,

	Variable	n en $\mathcal{O}(\epsilon^n)$
Derivadas	∂_i/aH	$-1/2$
Fluido	ρ, δ, θ	0
	v	1
	v_i	$1/2$
Métrica	ϕ, ψ	1
	ω_i	$3/2$
	τ_{ij}	1

Table 3.1: Orden de las perturbaciones en el parámetro ϵ .

Además, se define el límite Newtoniano como las ecuaciones a orden principal en el parámetro ϵ . En la siguiente sección se encontraran las ecuaciones del fluido de la materia oscura en el límite Newtoniano, las cuales describen el crecimiento de las estructuras.

3.5 Ecuaciones de fluidos

Ahora, se desean encontrar las mismas ecuaciones (2.13) y (2.14) en un contexto anisótropo. Para ello, se tomara una ruta diferente a la establecida en la sección (2.2). En este caso, se calcula la ecuación de conservación del tensor de energía impulso ($\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$). Dicha ecuación se puede separar en una parte contraída y una no contraída obteniendo como resultado,

$$\nabla_\mu [\rho_m(1 + \delta)v^\mu] = 0, \quad (3.5)$$

$$v^\nu \nabla_\nu v_\mu = 0. \quad (3.6)$$

Al expandir la derivada covariante y tomando el límite Newtoniano se obtiene: de (3.5) la ecuación de continuidad y de (3.6) la ecuación de Euler, dadas por ³

$$\delta' + \partial_i[(1 + \delta)v^i] = 0, \quad (3.7)$$

$$\theta' + \mathcal{H}\theta + \partial_i(v^j \partial_j v^i) + \nabla^2 \phi = -2\sigma^{ij} \partial_i v_j. \quad (3.8)$$

Se puede ver que el sistemas de ecuaciones no esta cerrado, pues son dos ecuaciones con tres incógnitas (a saber δ , θ y ϕ). Para cerrar el sistema se emplean las ecuaciones de Einstein para derivar la ecuación de Poisson en la métrica de Bianchi I.

Para ello, se tiene en cuenta la componente 00 de las ecuaciones de Einstein perturbadas en el límite Newtoniano, dado por,

$$-3\mathcal{H}^2 + \frac{\sigma^2}{2} - 2\nabla^2 \psi + \frac{\sigma^{ij}}{\mathcal{H}} \partial_i \partial_j \psi = -a^2 [\rho_m(1 + \delta) + \rho_\Lambda], \quad (3.9)$$

donde se considero $\delta\rho_\Lambda = 0$ y la definición (3.2). Usando la ecuación de Einstein 00 del fondo

³El procedimiento para llegar a estas ecuaciones lo puede encontrar en el anexo (A.3).

$-3\mathcal{H}^2 + \frac{\sigma^2}{2} = -a^2(\rho_m + \rho_\Lambda)$, la ecuación (3.9) se simplifica a

$$2\nabla^2\psi - \frac{\sigma^{ij}}{\mathcal{H}}\partial_i\partial_j\psi = a^2\rho_m\delta. \quad (3.10)$$

Ahora, la ecuación de Einstein ij perturbada en el limite Newtoniano viene dada por,

$$2\nabla^2(\phi - \psi) - \frac{\sigma^{ij}}{\mathcal{H}}\partial_i\partial_j\psi - (2H' + H^2 + \frac{\sigma^2}{2}) = -a^2\rho_\Lambda, \quad (3.11)$$

y por la ecuación de Einstein ij de fondo $2H' + H^2 + \frac{\sigma^2}{2} = a^2\rho_\Lambda$, la ecuación (3.11) queda,

$$2\nabla^2(\phi - \psi) - \frac{\sigma^{ij}}{\mathcal{H}}\partial_i\partial_j\psi = 0. \quad (3.12)$$

Combinando las ecuaciones (3.10) y (3.12), se obtiene la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\phi = \frac{3}{2}\Omega_m\mathcal{H}^2\delta. \quad (3.13)$$

Con lo anterior, usando la ecuación (3.13), las ecuaciones de fluido (3.7) y (3.8) se reescriben de la siguiente forma,

$$\delta' + \theta(1 + \delta) + v^i\partial_i\delta = 0, \quad (3.14)$$

$$\theta' + \mathcal{H}\theta + \partial_i(v^j\partial_jv^i) + \frac{3}{2}\Omega_m\mathcal{H}^2\delta = -2\sigma^{ij}\partial_iv_j \quad (3.15)$$

Este conjunto de ecuaciones describe el crecimiento de estructuras en un universo anisótropo descrito por la métrica de Bianchi I. Comparando estas ecuaciones con las ecuaciones que describen el crecimiento de las estructuras en un universo isótropo (2.13) y (2.17), se puede observar que solo la ecuación de Euler difiere del caso isótropo en el ultimo termino el cual representa la contribución del tensor de cizalla.

Chapter 4

Soluciones

Este capítulo será dedicado a explorar las soluciones del sistema de ecuaciones (3.14) y (3.15), en el régimen lineal.

Para encontrar las soluciones en este régimen se debe descartar todos los términos acoplados de la ecuación (3.14) y (3.15), y de esta forma se obtiene

$$\delta' = -\theta, \quad (4.1)$$

$$\theta' + \mathcal{H}\theta + \frac{3}{2}\Omega_m\mathcal{H}^2\delta = -2\sigma^{ij}\partial_i v_j. \quad (4.2)$$

Reemplazando la ecuación (4.1), en la ecuación (4.2), se tiene,

$$\delta''(\eta, \mathbf{k}) + \mathcal{H}\delta'(\eta, \mathbf{k}) - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Omega_m\delta(\eta, \mathbf{k}) = -2\sigma_{||}(\eta, \mathbf{k})\delta'(\eta, \mathbf{k}), \quad (4.3)$$

donde $\sigma_{||}$ es la contracción del tensor de cizalla ($\sigma_{||}(\eta, \mathbf{k}) \equiv \sigma_{ij}(\eta)\hat{k}^i\hat{k}^j$). Para ver como se resuelve esta ecuación diferencial no homogénea se puede tener en cuenta la ecuación mas simple

$$\delta_1''(\eta, \mathbf{k}) + p\delta_1'(\eta, \mathbf{k}) + q\delta_1(\eta, \mathbf{k}) = f, \quad (4.4)$$

donde p y q son coeficientes constantes. Para encontrar la solución de esta ecuación no homogénea, se debe encontrar una solución particular y luego sumarle la solución general de la ecuación homogénea asociada, es decir, la solución de $\delta_1''(\eta, \mathbf{k}) + p\delta_1'(\eta, \mathbf{k}) + q\delta_1(\eta, \mathbf{k}) = 0$, la cual es, $\delta_h = A(\mathbf{k})D_+(\eta) + B(\mathbf{k})D_-(\eta)$. La solución particular de la ecuación diferencial no homogénea va a tener la siguiente forma,

$$\delta_p = \delta_1(\eta)D_+(\eta) + \delta_2(\eta)D_-(\eta), \quad (4.5)$$

donde se determinaran las funciones $\delta_1(\eta)$ y $\delta_2(\eta)$. Como la ecuación (4.5) es una solución particular, se puede entonces sustituir en la ecuación diferencial (4.4), para ello se debe calcular la primera y segunda derivada. La primera derivada, viene dada por,

$$\delta_p' = \delta_1'(\eta)D_+(\eta) + \delta_1(\eta)D_+'(\eta) + \delta_2'(\eta)D_-(\eta) + \delta_2(\eta)D_-'(\eta).$$

La segunda derivada de la ecuación anterior sería muy larga, así que teniendo en cuenta que existe una infinidad de $\delta_1(\eta)$ y de $\delta_2(\eta)$ los cuales solucionan la ecuación diferencial, entonces, de entre toda esa infinidad se impone una condición para encontrar las funciones $\delta_1(\eta)$ y $\delta_2(\eta)$ específicas que las satisfagan, y las cuales simplificarán el trabajo. La condición para $\delta_1(\eta)$ y $\delta_2(\eta)$ que se tendrá en cuenta es,

$$\delta'_1(\eta)D_+(\eta) + \delta'_2(\eta)D_- = 0. \quad (4.6)$$

Entonces, ahora se tendrá,

$$\delta'_p = \delta_1(\eta)D'_+(\eta) + \delta_2(\eta)D'_-(\eta). \quad (4.7)$$

Calculando la segunda derivada, se tiene,

$$\delta''_p = \delta'_1(\eta)D'_+(\eta) + \delta_1(\eta)D''_+(\eta) + \delta'_2(\eta)D'_-(\eta) + \delta_2(\eta)D''_-(\eta). \quad (4.8)$$

Ahora, sustituyendo la ecuación (4.5), (4.7) y (4.8) en la ecuación diferencial (4.4), se obtiene,

$$\delta'_1(\eta)D'_+(\eta) + \delta_1(\eta) \left(D''_+(\eta) + pD'_+(\eta) + qD_+(\eta) \right) + \delta'_2(\eta)D'_-(\eta) + \delta_2(\eta) \left(D''_-(\eta) + pD'_-(\eta) + qD_-(\eta) \right) = f.$$

Como se sabe que $D_+(\eta)$ y $D_-(\eta)$ son dos soluciones que se obtienen al resolver la ecuación homogénea, entonces se tiene que $D''_+(\eta) + pD'_+(\eta) + qD_+(\eta) = 0$ y $D''_-(\eta) + pD'_-(\eta) + qD_-(\eta) = 0$ y por lo tanto se obtiene,

$$\delta'_1(\eta)D'_+(\eta) + \delta'_2(\eta)D'_-(\eta) = f. \quad (4.9)$$

La ecuación (4.6) y (4.9) forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, donde en este caso las incógnitas son δ'_1 y δ'_2 . A continuación se resolverá este sistema de ecuaciones usando la regla de Cramer¹,

$$\delta'_1(\eta) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & D_- \\ f & D'_- \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D_+ & D_- \\ D'_+ & D'_- \end{vmatrix}}, \quad \delta'_2(\eta) = \frac{\begin{vmatrix} D_+ & 0 \\ D'_+ & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D_+ & D_- \\ D'_+ & D'_- \end{vmatrix}}$$

Solucionando los determinantes, se obtiene,

$$\delta_1(\eta) = \int^\eta \frac{-D_-(y)f}{W[D_+, D_-](y)} dy, \quad \delta_2(\eta) = \int^\eta \frac{D_+(y)f}{W[D_+, D_-](y)} dy.$$

¹La Regla de Cramer es un método que da solución a un sistema de ecuaciones lineales con tantas ecuaciones como incógnitas, utilizando determinantes.

Entonces, la solución particular tendrá la siguiente forma,

$$\delta_p = \int^\eta \frac{D_+(y)D_-(\eta) - D_-(y)D_+(\eta)}{W[D_+, D_-](y)} f dy.$$

Finalmente, se suma la solución de la ecuación homogénea y se obtiene la solución completa,

$$\delta_p = A(\mathbf{k})D_+(\eta) + B(\mathbf{k})D_-(\eta) + \int^\eta \frac{D_+(y)D_-(\eta) - D_-(y)D_+(\eta)}{W[D_+, D_-](y)} f dy.$$

Teniendo en cuenta que $f = -2\sigma_{||}(\eta, \mathbf{k})\delta'(\eta, \mathbf{k})$, la solución queda,

$$\delta_p = A(\mathbf{k})D_+(\eta) + B(\mathbf{k})D_-(\eta) - 2 \int^\eta \frac{D_+(y)D_-(\eta) - D_-(y)D_+(\eta)}{W[D_+, D_-](y)} \sigma_{||}(y, \mathbf{k})\delta'(y, \mathbf{k}) dy.$$

Como ejemplo, se puede ver la solución del caso cuando el universo es dominado por materia, $\Omega_m = 1$, donde $D_+(t) \propto a$ y $D_-(t) \propto a^{-3/2}$, entonces, (Ver Anexo B.3),

$$\delta_p = A(\mathbf{k})a + B(\mathbf{k})a^{-\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \int^a \frac{y^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{5}{2}}}{y^{\frac{3}{2}}} f dy.$$

Ahora, se encuentra la solución en el caso de un universo que contiene materia y energía oscura. Para ello se parte de la ecuación (4.3) la cual se transforma en términos del factor de escala, y para ello se debe tener en cuenta lo siguiente,

$$X' = \frac{da}{d\eta} \frac{dX}{da} = \frac{dt}{d\eta} \frac{da}{dt} \frac{dX}{da} = a\dot{a} \frac{dX}{da} = aaH \frac{dX}{da} = a\mathcal{H} \frac{dX}{da},$$

$$\begin{aligned} X'' &= \frac{d}{d\eta} \left(a\mathcal{H} \frac{dX}{da} \right) = \left(\frac{da}{d\eta} \mathcal{H} + \frac{d\mathcal{H}}{d\eta} a \right) \frac{dX}{da} + a^2 \mathcal{H}^2 \frac{d^2 X}{da^2} = \left(a\mathcal{H}^2 + a^2 \mathcal{H} \frac{d\mathcal{H}}{da} \right) \frac{dX}{da} + a^2 \mathcal{H}^2 \frac{d^2 X}{da^2} \\ &= a^2 \mathcal{H}^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{d\mathcal{H}}{da} \right) \frac{dX}{da} + a^2 \mathcal{H}^2 \frac{d^2 X}{da^2}. \end{aligned}$$

Entonces se obtendrá,

$$\begin{aligned} a^2 \mathcal{H}^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{d\mathcal{H}}{da} \right) \frac{d\delta}{da} + a^2 \mathcal{H}^2 \frac{d^2 \delta}{da^2} + a\mathcal{H}^2 \frac{d\delta}{da} - \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \Omega_m \delta_1(\eta, \mathbf{k}) &= -2\sigma_{||}(\eta, \mathbf{k}) a\mathcal{H} \frac{d\delta}{da}, \\ a^2 \mathcal{H}^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{d\mathcal{H}}{da} \right) \frac{d\delta}{da} + a^2 \mathcal{H}^2 \frac{d^2 \delta}{da^2} - \frac{3}{2} \mathcal{H}^2 \Omega_m \delta_1(\eta, \mathbf{k}) + 2\sigma_{||}(\eta, \mathbf{k}) a\mathcal{H} \frac{d\delta}{da} &= 0, \\ \frac{d^2 \delta}{da^2} + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{d\mathcal{H}}{da} + \frac{2\sigma_{||}(\eta, \mathbf{k})}{a\mathcal{H}} \right) \frac{d\delta}{da} - \frac{3}{2a^2} \Omega_m \delta(\eta, \mathbf{k}) &= 0. \end{aligned}$$

Se sabe que el parámetro de densidad de materia viene dado por,

$$\Omega_m = \frac{M_{pl}^2 \bar{\rho}_m(a)}{3H^2},$$

donde M_{pl}^2 es la masa de Planck y $\rho_m(a)$ es la densidad de materia del fondo. Además, se sabe que la ecuación de continuidad en términos del factor de escala para la densidad de la materia es dada por $\frac{\partial \rho}{\partial a} + 3\frac{\rho}{a} = 0$ y cuya solución viene dada por $\rho = \rho_0 a^{-3}$, por lo tanto el parámetro de densidad sera,

$$\Omega_m = \frac{H_0^2 8\pi G}{3H_0^2} \frac{\rho_{0m}}{H^2 a^3} = \frac{H_0^2 \rho_{0m}}{H^2 \rho_c a^3} = \frac{H_0^2 \Omega_{0m}}{H^2 a^3}.$$

Entonces se obtiene,

$$\ddot{\delta} + \left(\frac{2}{a} + \frac{\dot{H}}{H} + \frac{2\sigma_{||}}{aH} \right) \dot{\delta} - \frac{3}{2a^5} \frac{H_0^2}{H^2} \Omega_{0m} \delta = 0,$$

$$\ddot{\delta} + \left(\frac{3}{a} + \frac{\dot{H}}{H} \right) \dot{\delta} - \frac{3}{2} \frac{\Omega_m^0}{a^5} \left(\frac{H_0}{H} \right)^2 \delta = \frac{2\sigma_{||}}{a^2 H} \dot{\delta},$$

donde el punto representa la derivada con respecto al factor de escala. Las funciones $D_+(a)$ y $D_-(a)$ están definidas por,

$$D_+(a) = \frac{5}{2} \Omega_m^0 \frac{H(a)}{H_0} \int_0^a \frac{ds}{[sH(s)/H_0]^3},$$

$$D_-(a) = \frac{H(a)}{H_0}.$$

Por lo tanto, la solución es

$$\delta = A(\mathbf{k})D_+(a) + B(\mathbf{k})D_-(a) - 2 \int^a \frac{D_+(s)D_-(a) - D_-(s)D_+(a)}{W[D_+, D_-](s)} \frac{\sigma_{||}(s, \mathbf{k}) \dot{\delta}(s, \mathbf{k})}{s^2 H(s)} ds,$$

donde el wroskiano vendrá dado por,

$$W = \begin{vmatrix} D_+ & D_- \\ D'_+ & D'_- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} \Omega_m^0 \frac{H(a)}{H_0} \int_0^a \frac{ds}{[sH(s)/H_0]^3} & \frac{H(a)}{H_0} \\ \frac{5}{2} \Omega_m^0 H(a) \frac{H_0^2}{s^3 H(s)^3} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{5}{2} \Omega_m^0 H^2(a) \frac{H_0}{s^3 H(s)^3}.$$

Entonces, la solución queda de la siguiente forma,

$$\delta(a, \mathbf{k}) = D_+(a) \left(1 + Q_{ij}(a) \hat{k}^i \hat{k}^j \right) \delta_l(\mathbf{k}), \quad (4.10)$$

donde el tensor cuadrupolar viene dado por

$$Q_{ij} = -\frac{2}{D_+(a)} \int_{a_i}^a \mathcal{G}(a, s) \frac{\sigma_{ij}(s) \dot{D}_+(s)}{s^2 H(s)} ds,$$

y donde

$$\mathcal{G}(a, s) = \frac{2s^3}{5\Omega_m^0} \frac{H(s)}{H_0} [D_+(a)D_-(s) - D_-(a)D_+(s)].$$

A continuación se graficará la densidad de contraste anisótropo dada por la ecuación (4.10), la cual, como se mencionó anteriormente, representa la amplitud de las fluctuaciones en la densidad de materia oscura respecto a la densidad media de fondo. Además, se agregó la densidad de contraste de un universo isótropo para comparar estos casos.

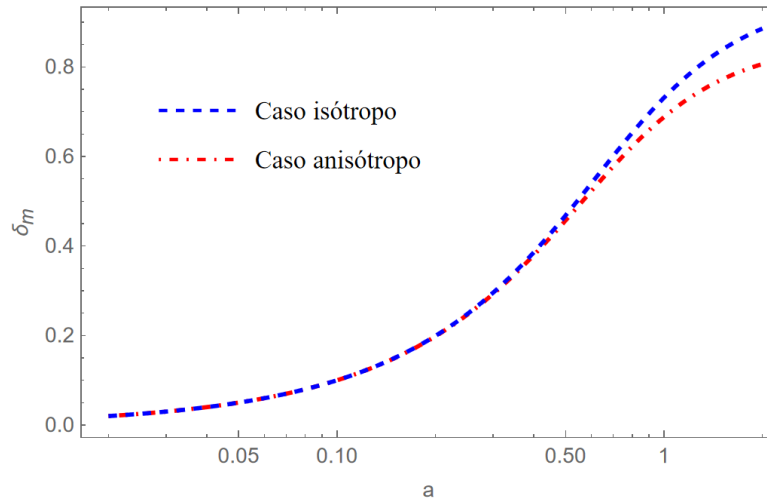


Figure 4.1: La línea de guiones azul representa la densidad de contraste en un universo anisótropo con un tensor de estrés dado por $\pi_{33} = 0.5 \cdot H_0^2$, la línea de guiones y puntos roja representa la densidad de contraste en un universo isótropo.

Como se puede observar en la Figura 4.1 la densidad de contraste en ambos casos tienen un comportamiento muy parecido, donde la formación o aglomeración de materia aumenta cuando el universo es dominado por la materia oscura, pero a medida que el universo va entrando al dominio de la energía oscura, esta aglomeración va disminuyendo. Sin embargo, se puede notar que la densidad de contraste alcanza valores más elevados cuando el universo es isótropo, lo que implica una mayor formación de estructuras. Este hallazgo resulta coherente, dado que en un universo anisótropo existe una dirección privilegiada de expansión. En esta dirección, la expansión es más prominente, lo que dificulta la aglomeración de materia y, por ende, suprime la densidad de contraste.

Además, se estudio que tan sensible es la densidad de contraste a variaciones a la ecuación de estado de la energía oscura. Para ello se graficó la densidad de contraste anisótropa teniendo en cuenta un mismo tensor de estrés dado por, $\pi_{33} = 0.5 \cdot H_0^2$, para tres diferentes valores de ecuación de estado para la energía oscura, dados por $w = -0.95$, $w = -1$ y $w = -1.05$,

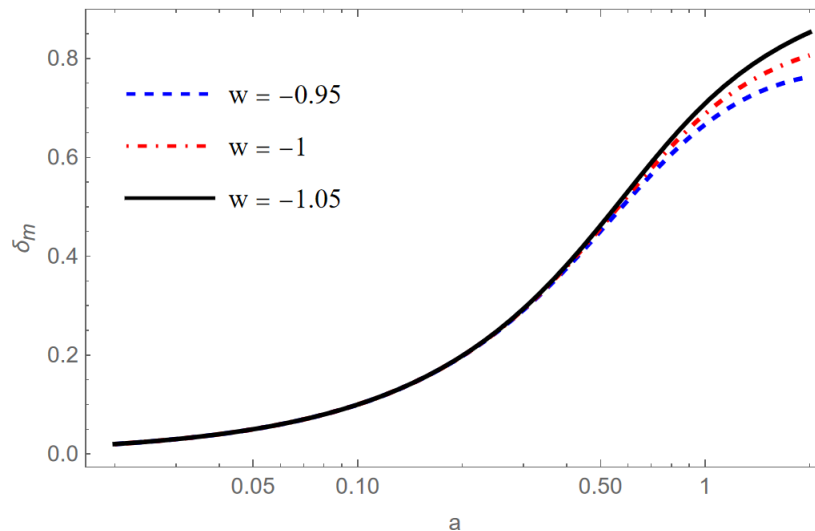


Figure 4.2: Densidad de contraste anisótropo con $\pi_{33} = 0.5 \cdot H_0^2$ para tres diferentes ecuaciones de estado de energía oscura.

En esta Figura 4.2 se evidencia un comportamiento análogo al del caso isótropo, donde se tiene que entre mayor sea la ecuación de estado de la energía oscura, la densidad de contraste se suprimirá más. Este fenómeno se debe a que, con una ecuación de estado de la energía oscura más positiva, la aceleración de la expansión del universo comienza mas temprano, lo que dificulta el proceso de aglomeración y, por ende, produce una mayor supresión en la densidad de contraste.

Por otro lado, se llevó a cabo una comparación entre la densidad de contraste anisótropa, es decir, en presencia del tensor de cizallamiento, y la densidad de contraste en el caso isótropo, donde el tensor de cizalla es nulo. Este análisis se realizó para investigar el efecto del tensor de cizalla en la densidad de contraste. Para ello, se graficó la tasa de la densidad de contraste en un universo anisótropo en relación con la de un universo isótropo, considerando diferentes valores del tensor de estrés π_{33} . Los resultados se presentan en el siguiente gráfico:

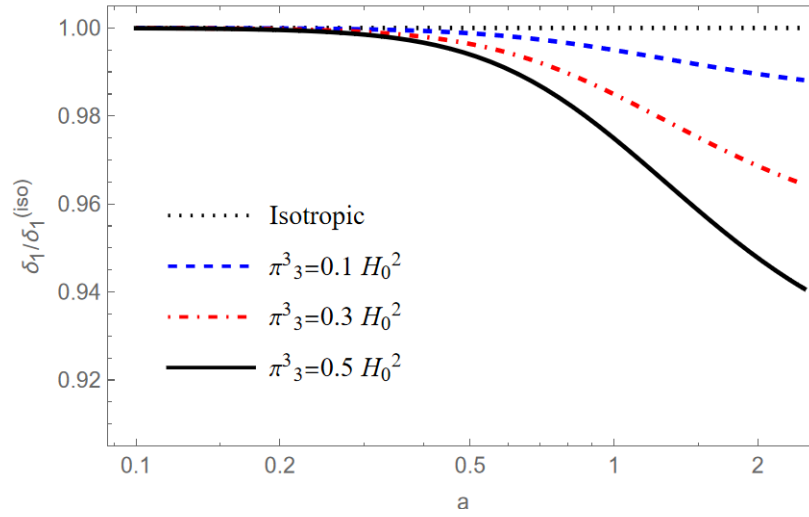


Figure 4.3: Efecto del tensor de cizalla en la densidad de contraste.

En la Figura 4.3 se puede observar que cuando el tensor de estrés es nulo, se obtiene el universo isótropo. Sin embargo, a medida que el tensor de estrés aumenta, se puede observar una mayor desviación al universo isótropo, lo que significa que entre mayor sea el tensor de estrés, mas anisótropo sera el universo.

Además, se desea comparar la densidad de contraste para un tensor de estrés variable dado por $\pi_{33} = 0.5 \cdot \text{Arctan}(a^4)$ y un tensor de estrés constante dado por $\pi_{33} = 0.5 \cdot H_0^2$, considerando diferentes ecuaciones de estado de energía oscura. Con este propósito, se ha generado un gráfico de la densidad de contraste para ambos tensores de estrés, tanto el variable como el constante, para valores de w_Λ de -0.95 , -1 y -1.05 (Ver Figura 4.4).

El primer gráfico de la Figura 4.4 ilustra la evolución del tensor de estrés variable y constante a lo largo del tiempo. Se observa que inicialmente el tensor de estrés constante es mayor que el tensor de estrés variable, pero a medida que transcurre el tiempo, esta relación se invierte y el tensor de estrés variable supera al constante.

En los tres casos de ecuaciones de estado de energía oscura analizados, se observa un comportamiento similar. Inicialmente, la densidad de contraste del tensor de estrés constante está más suprimida que la del tensor de estrés variable. Esto es coherente, ya que en esta fase inicial el tensor de estrés constante es mayor que el variable. Sin embargo, a medida que avanza el tiempo, la densidad de contraste del tensor de estrés variable se suprime más que la del constante, debido a que en esta etapa el tensor de estrés variable supera al constante en magnitud.

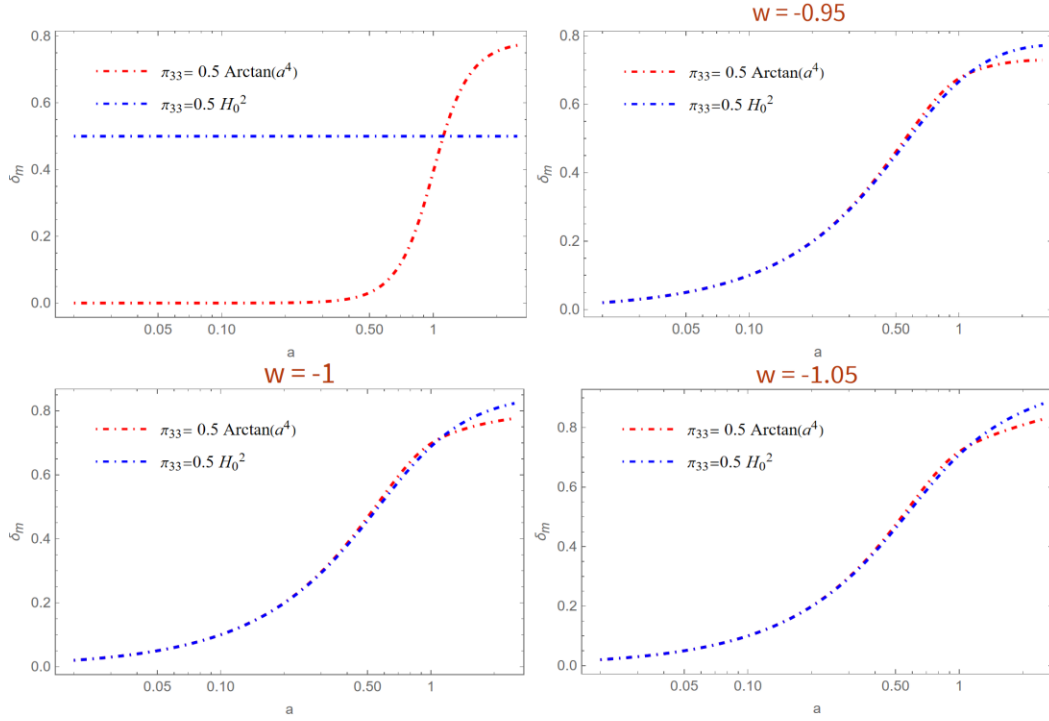


Figure 4.4: Densidad de contraste con un tensor de estrés de $\pi_{33} = 0.5 \text{Arctan}(a^4)$ y $\pi_{33} = 0.5 H_0^2$, para $w_\Lambda = -0.95$, $w_\Lambda = -1$ y $w_\Lambda = -1.05$.

Una diferencia notable entre los tres casos es que, a medida que aumenta la ecuación de estado de energía oscura, la densidad de contraste alcanza valores más bajos.

Por otro lado, se lleva a cabo una comparación entre la densidad de contraste anisótropa y la densidad de contraste isótropa, considerando un tensor de estrés variable definido por $\pi_{33} = 0.5 \cdot \text{Arctan}(a^4)$, y se contrasta con un tensor de estrés constante igual a $\pi_{33} = 0.5 \cdot H_0^2$.

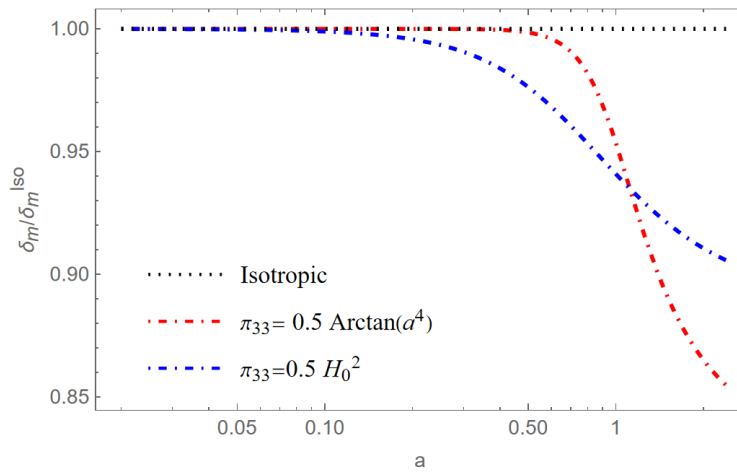


Figure 4.5: Taza de la densidad de contraste anisótropa e isótropa para un tensor de estrés variable y otro constante.

En esta Figura 4.5, se observa que al principio, el universo anisótropo con un tensor de estrés constante muestra una desviación mayor respecto al universo isótropo en comparación con el universo anisótropo que utiliza un tensor de estrés variable. Esta observación es coherente, ya que, como se ha demostrado, inicialmente el tensor de estrés constante es de magnitud superior al tensor de estrés variable. Luego, se nota que el universo anisótropo con tensor de estrés variable comienza a diverger del universo isótropo, hasta alcanzar un punto donde su desviación supera a la del universo anisótropo con tensor de estrés constante. Este hallazgo también tiene sentido, ya que llega un momento en el que el tensor de estrés variable supera al tensor de estrés constante, lo que provoca que el universo con tensor de estrés variable sea más anisótropo que su contraparte con tensor de estrés constante.

Chapter 5

Conclusiones

La motivación en este trabajo fue analizar como la anisotropía afecta el proceso de formación de estructuras en el universo. En esta dirección, se estudió el crecimiento de las estructuras en un universo anisótropo, descrito por la métrica de Bianchi I, y por completez, se analizó también el caso isótropo. Se consideraron tres ecuaciones de estado distintas para la energía oscura, con el fin de evaluar su impacto en dicho proceso. Para realizar este estudio, primero se determinaron las ecuaciones que rigen la evolución de la densidad de contraste de materia oscura en el universo isótropo y anisótropo.

Al analizar el crecimiento de las estructuras en un universo isótropo y anisótropo, se encontró que la densidad de contraste en un universo isótropo toma valores mayores que en un universo anisótropo, es decir, que hay un mayor crecimiento de las estructuras en un universo isótropo. Además, se observó que entre mayor sea la anisotropía, menor será la densidad de contraste, es decir, que ocurre una mayor supresión en el crecimiento de las estructuras. Esto se debe a que entre más anisotropía, mayor será la expansión en la dirección privilegiada, lo cual dificultará la aglomeración de partículas y, por lo tanto, producirá una menor densidad de contraste. Sin embargo, se puede observar en la figura (4.5) por ejemplo, que la anisotropía no afecta la formación de las estructuras en tiempos tempranos cuando el universo es dominado por la materia, sino que su influencia se manifiesta cuando el contenido de energía oscura ya no es despreciable, lo cual tiene sentido, debido a que en este fluido de energía oscura, se tiene la presencia del tensor de estrés, el cual es el responsable de anisotropizar el universo.

Por otro lado, se exploró la formación de estructuras en un universo anisótropo considerando tres valores distintos para la ecuación de estado de la energía oscura, $w = -1$, $w = -0.95$ y $w = -1.05$. Esta diversidad de ecuaciones de estado se tomó en cuenta debido a que los modelos con anisotropías presentan una ecuación de estado de energía oscura que no es exactamente igual a $w = -1$. En la figura (2.2) y (4.2) se observó que tanto la densidad de contraste en el caso isótropo como en el anisótropo exhiben un comportamiento similar para las tres ecuaciones de estado de energía oscura, donde a medida que aumenta el valor de w_Λ , hay una mayor supresión en la densidad de contraste. Esto se debe a que un valor más elevado de w_Λ indica

que la dominancia de la energía oscura en el universo ocurre en etapas más tempranas. Como consecuencia, la expansión del universo comienza a acelerarse más temprano, lo que resulta en una mayor supresión en el crecimiento de las estructuras. Esta aceleración dificulta el proceso de aglomeración de la materia, lo que se refleja en una mayor supresión en la densidad de contraste.

Anexo **A**

Ecuaciones del fluido de materia oscura

Se hallaran las ecuación de continuidad y de Euler, teniendo en cuenta los momentos de la ecuación de Vlasov.

A.1 Ecuación de continuidad

Para obtener la ecuación de continuidad, se debe hallar el momento de orden cero de la ecuación de Vlasov,

$$\frac{d}{d\eta} \int d^3\mathbf{p} f = \int \frac{\partial f}{\partial \eta} d^3\mathbf{p} + \nabla_x \int d^3\mathbf{p} \frac{\mathbf{p} f}{am} - am \nabla_x \phi_p \int d^3\mathbf{p} \nabla_{\mathbf{p}} f = \frac{d\rho}{d\eta}. \quad (\text{A.1})$$

Ahora, se estudiara cada termino uno por uno,

$$\frac{d}{d\eta} \int d^3\mathbf{p} f = \frac{d\rho}{d\eta}, \quad (\text{A.2})$$

$$= \frac{\partial(\bar{\rho}(\delta + 1))}{\partial \tau}, \quad (\text{A.3})$$

$$= \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \tau} (\delta + 1) + \bar{\rho} \frac{\partial \delta}{\partial \eta}, \quad (\text{A.4})$$

$$= \bar{\rho} \frac{\partial \delta}{\partial \eta}. \quad (\text{A.5})$$

El siguiente termino es,

$$\nabla_x \int d^3\mathbf{p} \frac{\mathbf{p} f}{am} = \nabla_x \int d^3\mathbf{p} \mathbf{u} f, \quad (\text{A.6})$$

$$= \bar{\rho} \nabla_x (\mathbf{u}(\delta + 1)). \quad (\text{A.7})$$

Para el ultimo termino se tiene que por el teorema de Gauss

$$\int d^3\mathbf{p} \nabla_{\mathbf{p}} f = \oint d^2S f = 0 \quad (\text{A.8})$$

Obteniendo finalmente la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \delta(\mathbf{x}, \tau) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot ([1 + \delta(\mathbf{x}, \tau)] \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau)) = 0. \quad (\text{A.9})$$

A.2 Ecuación de Euler

Para obtener la ecuación de Euler, se debe hallar el momento de orden uno de la ecuación de Vlasov,

$$\int d^3 \mathbf{p} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{p_i}{am} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \int d^3 \mathbf{p} \frac{\mathbf{p} f p_i}{a^2 m^2} - \nabla_{\mathbf{x}} \phi_p \int d^3 \mathbf{p} \nabla_{\mathbf{p}}(f) p_i = 0, \quad (\text{A.10})$$

Ahora, se analiza cada uno de los términos de la ecuación. Para el primer termino se tiene

$$\int d^3 \mathbf{p} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{p_i}{am} = \frac{\partial}{\partial \eta} \int d^3 \mathbf{p} \frac{f p_i}{am} + \mathcal{H}(\eta) \int d^3 \mathbf{p} \frac{f p_i}{am}, \quad (\text{A.11})$$

$$= \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho(\mathbf{x}, \eta) \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, \eta)) + \mathcal{H}(\eta) \rho(\mathbf{x}, \eta) \mathbf{u}_i(\mathbf{x}, \eta). \quad (\text{A.12})$$

El segundo termino es

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \int d^3 \mathbf{p} \frac{p_i p_j f}{a^2 m^2} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho(\mathbf{x}, \eta) u_i(\mathbf{x}, \eta) u_j(\mathbf{x}, \eta) + \sigma_{ij}). \quad (\text{A.13})$$

Y el ultimo termino,

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \phi_p \int d^3 \mathbf{p} \frac{\partial f}{\partial p_j} p_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \phi_p \int d^3 \mathbf{p} \frac{\partial (f p_i)}{\partial p_j} - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \phi_p \int d^3 \mathbf{p} f \delta_{ij}, \quad (\text{A.14})$$

el primer termino de la derecha es nulo por el teorema de gauss, quedando entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \phi_p \int d^3 \mathbf{p} f = \frac{\partial \phi_p}{\partial x_i} \rho(\mathbf{x}, \tau). \quad (\text{A.15})$$

Y finalmente, teniendo en cuenta el tensor de corte para la materia oscura como nulo, se obtiene la ecuación de Euler,

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, \eta)}{\partial \eta} + \mathcal{H}(\eta) \mathbf{v}(\mathbf{x}, \eta) + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, \eta) \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{v}(\mathbf{x}, \eta) = -\nabla_{\mathbf{x}} \phi. \quad (\text{A.16})$$

A.3 Ecuaciones del fluido de materia oscura en el universo anisótropo teniendo en cuenta la ecuación de conservación del tensor de energía-impulso

La ecuación de conservación del tensor de energía-momento es

$$\begin{aligned}\nabla_\mu(T^\mu_\nu) &= 0 \\ \nabla_\mu[(\rho + p)v^\mu v_\nu + pg^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu}] &= 0,\end{aligned}$$

y como en el caso de materia oscura se tiene que, $p = \pi_{ij} = 0$ y $\rho = \bar{\rho}(1 + \delta)$, entonces

$$\nabla_\mu[\rho v^\mu]v_\nu + \rho v^\mu \nabla_\mu v_\nu = 0.$$

Si se contrae la ecuación con v^ν , se tiene,

$$\nabla_\mu[\rho v^\mu]v_\nu v^\nu + \rho v^\mu v^\nu \nabla_\mu v_\nu = 0,$$

y como $v^\mu v_\nu = -1$ y $v^\nu \nabla_\mu v_\nu = 0$, entonces

$$\nabla_\mu[\rho v^\mu] = \nabla_\mu[\bar{\rho}(1 + \delta)v^\mu] = 0,$$

Expandiendo, se obtiene,

$$v^\mu \partial_\mu[\bar{\rho}(1 + \delta)] + \bar{\rho}(1 + \delta) \nabla_\mu[v^\mu] = 0,$$

Expandiendo la derivada covariante, se tiene

$$v^\mu \partial_\mu[\bar{\rho}(1 + \delta)] + \bar{\rho}(1 + \delta)[\partial_\mu v^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} v^\lambda] = 0,$$

Resolviendo, queda la siguiente ecuación a orden principal $\mathcal{O}(\epsilon^0)$

$$\delta' + \partial_i[(1 + \delta)v^i] = 0.$$

Ahora, se hallara la ecuación de Euler, teniendo en cuenta igualmente que para la materia oscura, $p = \pi_{ij} = 0$ y $\rho = \bar{\rho}(1 + \delta)$, entonces de la ecuación de conservación del tensor de energía-momento, queda de la siguiente forma

$$v^\mu \nabla_\mu v_\nu = 0,$$

donde al expandir la derivada covariante, se obtiene

$$v^\mu \partial_\mu v_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} v^\mu v_\lambda = 0,$$

y resolviendo, queda finalmente la ecuación de Euler a $\mathcal{O}(\epsilon^{1/2})$

$$v' + \mathcal{H}v + v^i \partial_j v^i + \partial\phi = -2\sigma^{ij}v^j.$$

Anexo **B**

Ecuación para el factor de crecimiento y decrecimiento

B.1 Caso de un universo isótropo dominado por materia

Primero se transforma la ecuación (2.20) en términos del factor de escala y se encuentra,

$$\frac{d\delta^2}{da^2} + \frac{3}{2a} \frac{d\delta}{da} + \frac{3}{2} \frac{1}{a^2} \delta = 0. \quad (\text{B.1})$$

Se soluciona esta ecuación teniendo en cuenta un universo dominado por materia. En este caso, la ecuación (B.1) tiene una solución de la forma $\delta = a^r$, entonces $\delta' = ra^{r-1}$ y $\delta'' = r(r-1)a^{r-2}$. Reemplazando en la ecuación (B.1), se tiene,

$$\begin{aligned} r(r-1)a^{r-2} + \frac{3}{2a}ra^{r-1} - \frac{3}{2a^2}a^r &= 0, \\ r(r-1)a^{r-2} + \frac{3}{2}ra^{r-2} - \frac{3}{2}a^{r-2} &= 0, \\ \left(r^2 - r + \frac{3}{2}r - \frac{3}{2}\right)a^{r-2} &= 0, \\ \left(r^2 + \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}\right)a^{r-2} &= 0, \\ (2r^2 + r - 3)a^{r-2} &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $r_1 = -\frac{3}{2}$ y $r_2 = 1$, y entonces $D_+(a) = a$ y $D_-(a) = a^{-3/2}$ y la solución sería,

$$\delta(a) = c_1a + c_2a^{-\frac{3}{2}}. \quad (\text{B.2})$$

B.2 Caso de un universo isótropo dominado por materia y energía oscura

Suponiendo que la solución de la ecuación (2.20) tiene la forma de $\delta(x, \tau) = \delta_1(x)D(\tau)$ y transformándola en términos del tiempo cósmico, se encuentra

$$\frac{dD^2}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{dD}{dt} = 4\pi G\rho D. \quad (\text{B.3})$$

Por otro lado, se tiene en cuenta la ecuación que relaciona $H(t)$ con los parámetros adimensionales

$$H^2(t) = H_0^2 \left[\frac{\Omega_m}{a^3(t)} + \Omega_\Lambda \right].$$

Luego, tomando la primera y segunda derivada, y sumándolas se encuentra

$$\frac{dH^2}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{dH}{dt} = 4\pi G\rho H. \quad (\text{B.4})$$

Por lo tanto, comparando la ecuación (B.3) y (B.4), se puede concluir que $D(t)$ y $H(t)$ son directamente proporcionales, entonces esta corresponde a una solución de la ecuación (B.3), específicamente, la solución decreciente debido a que la primera derivada de $H(t)$ es negativa

$$D_-(t) \propto H(t). \quad (\text{B.5})$$

Para hallar la otra solución de la ecuación (B.3) se hace uso del método de reducción de orden, teniendo en cuenta la solución ya encontrada

$$\begin{aligned} D_+(t) &\propto H(t) \int \frac{e^{-2\int [\dot{a}/a]dt}}{H^2(t)} dt \propto H(t) \int \frac{[a(t)]^{-2}}{H^2(t)} dt \propto H(t) \int \frac{dt}{a(t)^2 H^2(t)}, \\ D_+(t) &\propto H(t) \int_0^t \frac{ds}{a(s)^2 H^2(s)}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

B.3 Caso de un universo anisótropo dominado por materia

para ello se adopta el factor de escala como parámetro de tiempo en (4.3) y se encuentra la ecuación

$$\frac{d\delta^2}{da^2} + \frac{3}{2a}\frac{d\delta}{da} + \frac{3}{2}\frac{1}{a^2}\delta = 0.$$

Esta ecuación tiene una solución de la forma $\delta = a^r$, entonces $\delta' = ra^{r-1}$ y $\delta'' = r(r-1)a^{r-2}$. Reemplazando en la ecuación, se tiene

$$\begin{aligned} r(r-1)a^{r-2} + \frac{3}{2a}ra^{r-1} - \frac{3}{2a^2}a^r &= 0, \\ r(r-1)a^{r-2} + \frac{3}{2}ra^{r-2} - \frac{3}{2}a^{r-2} &= 0, \\ \left(r^2 - r + \frac{3}{2}r - \frac{3}{2}\right)a^{r-2} &= 0, \\ \left(r^2 + \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}\right)a^{r-2} &= 0, \\ (2r^2 + r - 3)a^{r-2} &= 0. \end{aligned}$$

Entonces, se tiene $r_1 = -\frac{3}{2}$ y $r = 1$, por lo tanto $\delta(a) = c_1a + c_2a^{-\frac{3}{2}}$. El wroskisno sera

$$W = \begin{vmatrix} D_+ & D_- \\ D'_+ & D'_- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y^{-\frac{3}{2}} & y \\ -\frac{3}{2}y^{-\frac{5}{2}} & 1 \end{vmatrix} = \frac{5}{2}y^{-\frac{3}{2}}.$$

Y se tiene que

$$\begin{aligned} \delta_p &= \frac{2}{5} \int^a \frac{y^{-\frac{3}{2}}a - a^{-\frac{3}{2}}y}{y^{-\frac{3}{2}}} f dy, \\ &= \frac{2}{5} \int^a \left(a - \frac{y^{\frac{5}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}} \right) f dy, \\ &= \frac{2}{5} \int^a \frac{a^{\frac{5}{2}} - y^{\frac{5}{2}}}{y^{\frac{3}{2}}} f dy. \end{aligned}$$

Finalmente, la solución completa es

$$\delta_p = c_1a + c_2a^{-\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \int^a \frac{y^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{5}{2}}}{y^{\frac{3}{2}}} f dy.$$

Bibliography

- [1] C. B. Explorer, "<https://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/>."
- [2] J. Phillips, D. H. Weinberg, R. A. Croft, L. Hernquist, N. Katz, and M. Pettini, "Constraints on cosmological parameters from the $\text{Ly}\alpha$ forest power spectrum and COBE DMR," The Astrophysical Journal, vol. 560, no. 1, p. 15, 2001.
- [3] P. is ESA's mission, "<https://www.cosmos.esa.int/web/planck>."
- [4] M. Tegmark, M. A. Strauss, M. R. Blanton, K. Abazajian, S. Dodelson, H. Sandvik, X. Wang, D. H. Weinberg, I. Zehavi, N. A. Bahcall, et al., "Cosmological parameters from SDSS and WMAP," Physical Review D, vol. 69, no. 10, p. 103501, 2004.
- [5] W. M. A. Probe, "<https://map.gsfc.nasa.gov/>."
- [6] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, and et al., "Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant," The Astronomical Journal, vol. 116, p. 1009–1038, Sep 1998.
- [7] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. E. Groom, and et al., "Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae," The Astrophysical Journal, vol. 517, p. 565–586, Jun 1999.
- [8] N. Aghanim et al., "Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters," Astron. Astrophys., vol. 641, p. A6, 2020.
- [9] S. Weinberg, "The cosmological constant problem," Rev. Mod. Phys. 61, 1 – Published 1 January 1989.
- [10] E. J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa, "Dynamics of dark energy," International Journal of Modern Physics D, vol. 15, no. 11, pp. 1753–1935, 2006.
- [11] S. Dodelson, Modern cosmology. Elsevier, 2003.
- [12] J. Martin, "Everything you always wanted to know about the cosmological constant problem (but were afraid to ask)," Comptes Rendus Physique, vol. 13, p. 566–665, Jul 2012.

- [13] A. G. Riess et al., “A Comprehensive Measurement of the Local Value of the Hubble Constant with $1 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ Uncertainty from the Hubble Space Telescope and the SH0ES Team,” Astrophys. J. Lett., vol. 934, no. 1, p. L7, 2022.
- [14] A. G. Riess, L. M. Macri, S. L. Hoffmann, D. Scolnic, S. Casertano, A. V. Filippenko, B. E. Tucker, M. J. Reid, D. O. Jones, J. M. Silverman, and et al., “A 2.4% determination of the local value of the hubble constant,” The Astrophysical Journal, vol. 826, p. 56, Jul 2016.
- [15] A. G. Riess, S. Casertano, W. Yuan, L. M. Macri, and D. Scolnic, “Large magellanic cloud cepheid standards provide a 1% foundation for the determination of the hubble constant and stronger evidence for physics beyond Λcdm ,” The Astrophysical Journal, vol. 876, p. 85, May 2019.
- [16] L. Perivolaropoulos, “Large scale cosmological anomalies and inhomogeneous dark energy,” Galaxies, vol. 2, no. 1, pp. 22–61, 2014.
- [17] L. Perivolaropoulos and F. Skara, “Challenges for ΛCDM : An update,” New Astron. Rev., vol. 95, 2022.
- [18] Y. Akrami et al., “Planck 2018 results. VII. Isotropy and Statistics of the CMB,” Astron. Astrophys., vol. 641, p. A7, 2020.
- [19] J. Colin, R. Mohayaee, M. Rameez, and S. Sarkar, “Evidence for anisotropy of cosmic acceleration,” Astron. Astrophys., vol. 631, p. L13, 2019.
- [20] J. YOO and Y. WATANABE, “Theoretical models of dark energy,” International Journal of Modern Physics D, vol. 21, p. 1230002, Nov 2012.
- [21] J. Motoa-Manzano, J. B. Orjuela-Quintana, T. S. Pereira, and C. A. Valenzuela-Toledo, “Anisotropic solid dark energy,” 2020.
- [22] M. Álvarez, J. B. Orjuela-Quintana, Y. Rodriguez, and C. A. Valenzuela-Toledo, “Einstein Yang–Mills Higgs dark energy revisited,” Class. Quant. Grav., vol. 36, no. 19, p. 195004, 2019.
- [23] J. B. Orjuela-Quintana, M. Alvarez, C. A. Valenzuela-Toledo, and Y. Rodriguez, “Anisotropic Einstein Yang-Mills Higgs Dark Energy,” JCAP, vol. 10, p. 019, 2020.
- [24] A. Guarnizo, J. B. Orjuela-Quintana, and C. A. Valenzuela-Toledo, “Dynamical analysis of cosmological models with non-Abelian gauge vector fields,” Phys. Rev. D, vol. 102, no. 8, p. 083507, 2020.
- [25] J. B. Orjuela-Quintana and C. A. Valenzuela-Toledo, “Anisotropic k-essence,” Phys. Dark Univ., vol. 33, p. 100857, 2021.

- [26] J. P. Beltrán Almeida, A. Guarnizo, R. Kase, S. Tsujikawa, and C. A. Valenzuela-Toledo, "Anisotropic 2-form dark energy," Physics Letters B, vol. 793, p. 396–404, Jun 2019.
- [27] J. B. Orjuela-Quintana and C. A. Valenzuela-Toledo, "Anisotropic Dark Energy from a Coupled 2-form Field," 2 2022.
- [28] S. Tsujikawa, "Modified gravity models of dark energy," Lect. Notes Phys., vol. 800, pp. 99–145, 2010.
- [29] A. De Felice and S. Tsujikawa, "f(R) theories," Living Rev. Rel., vol. 13, p. 3, 2010.
- [30] D. J. Schwarz, C. J. Copi, D. Huterer, and G. D. Starkman, "Cmb anomalies after planck," Classical and Quantum Gravity, vol. 33, no. 18, p. 184001, 2016.
- [31] R. Battye and A. Moss, "Anisotropic dark energy and cmb anomalies," Physical Review D, vol. 80, no. 2, p. 023531, 2009.
- [32] K. Skovbo, "Analytical approaches to non-linear cosmological structure formation," Ph. D. Thesis, 2011.
- [33] D. F. Fonseca Moreno, "Teoría euleriana de perturbaciones cosmológicas a segundo orden,"
- [34] T. Matos, "Formación de estructura en el universo," Revista mexicana de física, vol. 49, pp. 16–25, 2003.
- [35] J. P. B. Almeida, J. Motoa-Manzano, J. Noreña, T. S. Pereira, and C. A. Valenzuela-Toledo, "Structure formation in an anisotropic universe: Eulerian perturbation theory," Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, vol. 2022, no. 02, p. 018, 2022.
- [36] C. Pitrou, X. Roy, and O. Umeh, "xpc: An algorithm for perturbing homogeneous cosmologies," Classical and Quantum Gravity, vol. 30, no. 16, p. 165002, 2013.
- [37] C. Bengaly Jr, A. Bernui, I. Ferreira, and J. Alcaniz, "Probing cosmological isotropy with planck sunyaev–zeldovich galaxy clusters," Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 466, no. 3, pp. 2799–2804, 2017.
- [38] U. Andrade, C. A. Bengaly, J. S. Alcaniz, and S. Capozziello, "Revisiting the statistical isotropy of grb sky distribution," Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 490, no. 4, pp. 4481–4488, 2019.