Unicidad de la orbita periodica en un modelo para enfermedades microparasitarias. (Matemáticas)

Ferreira, Jocirei D. "Unicidad de la orbita periodica en un modelo para enfermedades microparasitarias." *Matem�ticas: Ense�anza Universitaria* 9.1-2 (2001): 15+. *Informe Acad�mico*. Web. 29 Sept. 2010.

Document URL
http://find.galegroup.com/gtx/infomark.do?&contentSet=IAC-Documents&type=retrieve&tabID=T002&prodId=IFME&docId=A236480494&source=gale&srcprod=IFME&userGroupName=univalle&version=1.0

Texto Completo:

Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar, vía teoría de Liénard, la unicidad de órbitas periódicas que ocurren en un modelo epidemiológico, propuesto por Diekmman and Kretzschmar [1] para enfermedades microparasitarias, el cual es representado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en el plano. Transformando el modelo en un sistema generalizado de Liénard y usando un lema dado en Zegeling and Kooij [8], se obtienen los resultados deseados.

Palabras y frases claves: Órbita periódica, teoría de Liénard, modelo epidemiológico, enfermedades microparasitarias.

1 Introducción

Una gran parte de los fenómenos naturales son modelados por sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. La ocurrencia de órbitas periódicas en estos modelos es muy importante, pues su conocimiento puede conducir, por ejemplo, al control de una enfermedad en una población dada.

Se estudia en este trabajo, la unicidad de la órbita periódica que ocurre en un modelo epidemiológico para enfermedades microparasitarias del tipo S - I, i.e., la población es dividida en dos clases, S - susceptibles e I - Infectados.

A continuación se hace una explicación de cómo fue construido el modelo, y de las hipótesis biológicas utilizadas en su construcción.

Los principales parámetros que aparecen en el modelo son:

* [beta]: tasa de natalidad natural per cápita

* [my]: tasa de mortalidad natural per cápita

* [alfa]: tasa adicional de mortalidad causada por la enfermedad

* [xi]: parámetro que describe la reducción de la fertilidad de individuos infectados debido a la enfermedad (0 [menor que o igual a] [xi] [menor que o igual a] 1)

* [kappa]: tasa de contacto entre infectados y susceptibles

* [fi]: tasa de infección

Se supone que la variación de la población de susceptibles está dada por los nacimientos que resultan de la formación de parejas dentro de la población, menos la mortalidad natural, menos la mortalidad por infección. Una pareja dentro de la población puede ser formada por dos susceptibles, un susceptible y un infectado o por dos infectados. La reducción de la fertilidad de individuos infectados es introducida en el modelo, considerando las siguientes hipótesis: si la pareja está formada por un susceptible y un infectado, entonces esta pareja tendrá su fertilidad reducida por el factor [xi], igualmente si tenemos dos infectados en la pareja, la fertilidad será reducida por el factor [[xi].sup.2]. En la literatura, la formación de las parejas es modelada por una función [FI] (f, m), donde f denota la densidad de las hembras y m la de los machos. Se utilizará en este trabajo, la función media harmónica, [FI](f, m) = fm/f+m para la formación de las parejas. Para una discusión más completa de formación de parejas ver Waldstatter [7]. Así, la ecuación que describe el crecimiento de susceptibles es dada por:

dS/dt = [beta]([S.sup.2]/I + S + S/I + S I[xi] + I[xi]/I + S S + [[xi].sup.2][I.sup.2]/I + S) - [my]S - [fi]S. (1)

La cantidad S/S+I representa la proporción con la que un susceptible encuentra una pareja, susceptible o infectado, dentro de la población. De la misma manera, interpretamos los otros términos que componen la ecuación (1).

Se supone que la variación del crecimiento de la población de infectados está dada por la infección de susceptibles, menos la mortalidad natural de infectados, menos la mortalidad adicional de infectados causada por la enfermedad. Así, el modelo es representado por un sistema de EDO en el plano como sigue:

[EXPRESIÓN MATEMÁTICA IRREPRODUCIBLE EN ASCII]. (2)

La tasa de infección [fi] es descrita por la función

[fi] = [kappa]I/c + S + I, c [elemento de] R. (3)

En la literatura, la función [fi] es conocida como respuesta funcional del tipo Holling II. Para una discusión mas completa ver [4]. Luego el modelo es representado como sigue:

[EXPRESIÓN MATEMÁTICA IRREPRODUCIBLE EN ASCII]. (4)

La órbita periódica surge debido a la ocurrencia de la bifurcación de Hopf en un valor [[xi].sub.p] [elemento de] [0, 1], según el Teorema 4 sugerido por Diekmman and Kretzschmar [1] y cuya demostración formal se encuentra en Ferreira and Sallum [3].

El Teorema garantiza solamente la unicidad local de la órbita para valores del parámetro [xi] tales que [xi] < [[xi].sub.p] y [xi] [aproximadamente igual a] p. Además, en este trabajo, más que la unicidad local de la órbita periódica se demuestra que , si ella existe, es única.

El trabajo se organiza como sigue: primero se muestra que el modelo (4) no admite órbitas periódicas para valores de [xi] > [[xi].sub.t] donde [[xi].sub.t] = 1/2; en seguida se transforma el modelo en un sistema generalizado de Liénard para luego utilizar un lema sobre la unicidad de órbitas periódicas dado en [8] (ver también [5]) y poder obtener los resultados deseados.

Se consideran todos los parámetros que componen el modelo, excepto [xi], estrictamente positivos con

[beta] > [my], (5)

donde [beta] es la tasa de natalidad y [my] la tasa de mortalidad de la población. Una interpretación biológica de estos parámetros puede ser encontrada en Diekmman and Kretzschmar [1].

Es importante observar que el parámetro [xi], 0 [menor que o igual a] [xi] [menor que o igual a] 1, describe la reducción de la fertilidad de individuos infectados por la enfermedad.

2 Sobre la existencia de la órbita periódica

En esta sección, se hará un cambio de variable en el modelo (4) propuesto por Diekmann and Kretzschmar [1]; enseguida se aplica al sistema resultante el teorema de Dulac y se muestra que no existe órbita periódica para este sistema (por lo tanto para el modelo (4)), cuando [xi] > [[xi].sub.t].

Proposición 1 El sistema (3) puede ser transformado en un sistema de la forma

[EXPRESIÓN MATEMÁTICA IRREPRODUCIBLE EN ASCII] (6)

haciendo el cambio de variables

x = 1/I + S e y = I/I + S. (7)

Demostración. Efectuando el cambio de variables obtenemos,

dx/dt = -1/[(I + S).sup.2] (dI/dt + dS/dt) = - 1/I + S [[beta] ([S.sup.2] + 2[xi]IS + [[xi].sup.2][I.sup.2]/[(I + S).sup.2]) - [my] - [alfa] (I/I + S)].

Es fácil ver que, S/I + S - 1 - y. De hecho, por (7) x(I + S) = 1 o sea, xS = 1 - xI. Consecuentemente

S/S + I = 1 - I/I + S = 1 - y.

Así que

dx/dt = x ([my] + [alfa]y - [beta][(1 - (1 - [xi])y).sup.2]).

Por otra parte,

dy/dt = - I/[(I + S).sup.2] dS/dt + S/[(I + S).sup.2] dI/dt.

Sustituyendo en esta última ecuación las expresiones para dS/dt y dI/dt, y desarrollando los cálculos como se hizo para obtener la primera ecuación, se llega al resultado deseado.

La dinámica del sistema (6) será estudiada en la región M = {(x, y) [elemento de] [R.sup.2]; x [mayor que o igual a] 0, 0 [menor que o igual a] y < 1}, utilizando entre otros, el Teorema de Dulac que se menciona a continuación.

Teorema 2 (Dulac): Considere el sistema de ecuaciones diferenciales

[EXPRESIÓN MATEMÁTICA IRREPRODUCIBLE EN ASCII], (8)

donde P y Q son funciones [C.sup.1] en un abierto G de [R.sup.2] simplemente conexo. Entonces. si existe una función B : G [flecha diestra] R de clase [C.sup.1], tal que [derivada parcial](BP)/[derivada parcial]x + [derivada parcial](BQ)/[derivada parcial]y tiene signo constante y no es idénticamente nulo en ningún abierto ([desigual a] 0) de G, el sistema (8) no posee órbitas cerradas en G.

La demostración de este teorema puede ser encontrada en [6].

Proposición 3 Para [xi] > [[xi].sub.t] el sistema (6) no admite órbitas periódicas en M.

Demostración. Para el sistema (6) considere en [??] = ((x, y) [elemento de] [R.sup.2]; x > 0, 0 < y < 1}, la función B(x, y) = 1/xy(1 - y). Se puede ver que para [xi] > [[xi].sub.t],

[EXPRESIÓN MATEMÁTICA IRREPRODUCIBLE EN ASCII],

para todo (x, y) [elemento de] [??]. Así podemos concluir utilizando el Teorema 1 que, para [xi] > [[xi].sub.t], el sistema (6) (y por lo tanto el modelo (4)) no admite órbitas periódicas en [??] (por lo tanto en M).

3 Transformación en un sistema generalizado de Liénard

Se considera de aquí en adelante [xi] [menor que o igual a] [[xi].sub.t]. En esta sección se hará en el sistema (6) un cambio de variables, propuesto por Zegeling and Kooij [8], para transformarlo en un sistema generalizado de Liénard. Previamente se enuncia un lema también dado en [8], para mostrar que si existe órbita periódica para el sistema resultante, y por lo tanto para el modelo (4), entonces ella es única.

Lema 4 Considere el sistema de Liénard

[EXPRESIÓN MATEMÁTICA IRREPRODUCIBLE EN ASCII], (9)

y f(y) = [barra.F'](y). Suponga que las siguientes condiciones son válidas:

i) Las funciones f(y) y g(y) son de clase [C.sup.1] en el intervalo abierto][r.sub.1], [r.sub.2][donde [r.sub.1] < [r.sub.2], y [psi](u) es una función de clase [C.sup.1] en R;

ii) [psi]'(u) > 0, para todo u [elemento de] R;

iii) [y.sub.0] es el único valor en][r.sub.1], [r.sub.2][tal que (y - [y.sub.0])g(y) > 0 para y [desigual a] [y.sub.0] y g([y.sub.0]) = 0.

```
Si existe C [elemento de] R tal que f - Cg no es idénticamente nula
y no cambia de signo (condición (a)), entonces el sistema (9) no
admite órbita periódica en la región N = {(u, y); u [elemento de]
R, y [elemento de]][r.sub.1], [r.sub.2][}. Si para todo C [elemento
de] R, f - Cg no tiene raíces múltiples (condición (b)), entonces
el sistema (9) tiene a lo mdximo una órbita periódica en la región
N = {(u,y); u [elemento de] R, y [elemento de]] [r.sub.1],
[r.sub.2][} y, si ella existe, es hiperbólica.
```

A continuación, se hará un cambio de variables en el sistema (6), para transformarlo en un sistema generalizado de Liénard.

Proposición 5 El cambio de variables,

x = [e.sup.-u] y dt/d[tau] = 1/y(1 - y) donde 0 < y < 1, (10)

transforma el sistema (6) en el sistema:

[EXPRESIÓN MATEMÁTICA IRREPRODUCIBLE EN ASCII], (11)

donde [[psi].sub.1](u) = [[kappa]/[ce.sup.-u] + 1] - [alfa], [F.sub.1](y) = [[beta][(1 - (1 - [xi])y).sup.2]/1 - y] y [g.sub.1](y) = [my] + [alfa]y - [beta[(1 - (1 - [xi])y).sup.2]/y(1 - y).

Demostración. Efectuando el cambio de variable se tiene que:

dx/dt = dx/du du/d[tau] d[tau]/dt = -[e.sup.-u] du/d[tau] y(1 - y).

El cambio de variables está bien definido, pues si existe órbita periódica para el sistema (6) ésta no puede interceptar la recta y = 0 porque esta recta es invariante. Esta órbita tampoco puede interceptar la recta y = 1 ya que en ella el campo apunta hacia abajo, pues [(dy/dt).sub. y = 1] = -[beta][[xi].sup.2] < 0. Ahora, dado que

dx/dt = [e.sup.-u]([my] + [alfa] - [beta][(1 - (1 - [xi])y).sup.2]),

se llega a que:

du/d[tau] = - [e.sup.-u]([my] + [alfa]y - [beta][(1 - (1 - [xi])y).sup.2])/[e.sup.-u]y(1 - y) = 1 [g.sub.1](y).

Por otra parte,

dy/dt = [dy/d[tau]] [d[tau]/dt] = [dy/d[tau]] y(1 - y).

Ahora, una vez que

dy/dt = y(([kappa]/[ce.sup.-u] + 1 - [alfa])(1 - y) - [beta][(1 - (1 - [xi])y).sup.2]),

se llega a que

[EXPRESIÓN MATEMÁTICA IRREPRODUCIBLE EN ASCII]

4 Resultados sobre unicidad de órbitas periódicas

Ahora se estudiará el número de órbitas periódicas para el sistema (6) y consecuentemente para (4), aplicando el Lema 1 al sistema (11).

Se muestra inicialmente que las condiciones (i), (ii) y (iii) del Lema 1 son satisfechas por el sistema (11). Enseguida se enuncian y demuestran los resultados obtenidos sobre la unicidad de órbita periódica para este sistema.

Se observa que una condición necesaria para la existencia de una órbita periódica en el sistema (6) es la ocurrencia de un equilibrio positivo ([barra.x], [barra.y]) con 0 < [barra.y] < 1 (ver [3]). Por lo tanto es necesario que el sistema (11) tenga un equilibrio positivo ([barra.u], [barra.y]) y esto implica que [g.sub.1] (y) tiene una única raíz en el intervalo (0,1), lo cual hace necesaria la condición

[my] < [beta] < [alfa] + [my]. (12)

Esta condición conjuntamente con su interpretación biológica puede ser encontrada en [3], expresión (2.24).

Proposición 6 Suponiendo válidas las desigualdades (5) y (12), el sistema (11) satisface las condiciones (i), (ii) y (iii) del Lema 1 cuando [r.sub.1] = 0 y [r.sub.2] = 1.

Demostración. El item (i) del lema es satisfecho, ya que [F.sub.1] y [g.sub.1] son de clase [C.sup.[infinito]] en]0, 1[y [psi] es de clase [C.sup.[infinito]] en IR. El item (ii) es satisfecho una vez que [psi]'(u) = [kappa] [ce.sup.-u]/[([ce.sup.-u] + 1).sup.2] > 0, para todo u [elemento de] R.

Es fácil ver que F(y) = [my] + [alfa]y - [beta][(1 - (1 - [xi])y).sup.2] es estrictamente creciente y tiene una única raíz [barra.y] [elemento de]]0, 1[, siempre que sean válidas (5) y (12). Por lo tanto existe yo = y que verifica la condición (iii).

Ahora, para 0 < [xi] [menor que o igual a] [[xi].sub.t] = 1/2, se muestra que el sistema (11) (y por lo tanto el modelo (4) tiene a lo máximo una órbita periódica, verificando el cumplimiento de las condiciones (a) y (b) del Lema 4. Para este propósito observe que,

[f.sub.1] - C[g.sub.1] = y([beta](1 - (1 - [xi])y)(2[xi] + (1 - [xi])y - 1) - C(1 - y)F(y)/y[(1 - y).sup.2],

o sea, y[(1 - y).sup.2]([f.sub.1] - C[g.sub.1]) = y([beta](1 - (1 - [xi])y)(2[xi] + (1 - [xi])y - 1) - C(1 - y)F(y). Denote

[[??].sub.1](y) = [beta]y((1 - (1 - [xi])y)(2[xi] + (1 - [xi])y - 1)

y

[[??].sub.1](y) = (1 - y)F(y).

Note que [EXPRESIÓN MATEMÁTICA IRREPRODUCIBLE EN ASCII] considere ahora los siguientes casos:

Caso 1:

Suponga [barra.y] > [y.sub.m] = 1 - [xi]/1-[xi], entonces los signos de [[??].sub.1] y [[??].sub.1] son dados en la Figura 1.

[FIGURA 1 OMITIR]

Como [[??].sub.1] y [[??].sub.1] son polinomios de grado 3 podemos tener solamente las posibilidades de la Figura 2 para los gráficos de [[??].sub.1] (y) y [[??].sub.1] (y).

En cualquier caso la hipótesis (a) del Lema 4 es satisfecha. De hecho, para la Figura 2 (a), (b) y (c) basta tomar C = 1; para la Figura 2 (d), existe C tal que los gráficos de [[??].sub.1] Y C[[??].sub.1] se presentan como en (b); para la Figura 2 (e), existe C tal que los gráficos de [[??].sub.1] y C[[??].sub.1] se presentan como en (c). Por lo tanto en este caso se tiene que la condición (a) del Lema 4 es satisfecha, i.e., el sistema no admite órbitas periódicas.

[FIGURA 2 OMITIR]

Caso 2:

Suponga [barra.y] = [y.sub.m] = 1 - [xi]/1 - [xi]; las posibilidades para los gráficos de [[??].sub.1] y [[??].sub.1] son presentadas en la Figura 3. En cualquier caso la hipótesis (a) del Lema 1 es satisfecha, i.e, el sistema no admite órbita periódica.

[FIGURA 3 OMITIR]

Caso 3:

Suponiendo [barra.y] < [y.sub.m] = 1 - [xi]/1 - [xi], los gráficos de [[??].sub.1](y) y [[??].sub.1](y) son los dados en la Figura 4, por lo tanto no existe C tal que la hipótesis (a) del Lema 4 sea satisfecha.

Para verificar la hipótesis (b), considere h(y) = [[??].sub.1](y)- C[[??].sub.1](y). Para C [desigual a] -1, h(y) es un polinomio cúbico que no tiene raíces múltiples. Para C = -1, h(y) = [[??].sub.1](y) + [[??].sub.1](y) es un polinomio cuadrático y tiene dos raíces distintas. De hecho,

[EXPRESIÓN MATEMÁTICA IRREPRODUCIBLE EN ASCII],

cuyo discriminante es dado por [DELTA] = 4[beta][[xi].sup.2]([beta] - [my]) + [[my].sup.2] + 2[alfa][my] +

[[alfa].sup.2] > 0. Consecuentemente la condición (b) del Lema 4 es satisfecha, i.e., el sistema admite en lo máximo una órbita periódica y, si ella existe, es hiperbólica.

[FIGURA 4 OMITIR]

Así se completa la demostración del siguiente teorema que reúne los resultados obtenidos sobre órbitas periódicas.

Teorema 7 Considere (6) en la región M = {(x,y) [elemento de] [R.sup.2]; x [mayor que o igual a] 0, 0 [mayor que o igual a] y < 1}, donde se satisfacen las desigualdades (5) y (12). Entonces para [xi] [elemento de] [0, 1/2[ocurre una, y solamente una de las siguientes afirmaciones: I) El sistema (6) no tiene órbita periódica; II) El sistema (6) tiene a lo máximo una única órbita periódica y, si ella existe, es hiperbólica.

Referencias

[1] Diekmann O. and Kretzschmar, Patterns in the effects of infectious diseases on population growth, Journal of Mathematical Biology 29 (1991), 530-570.

[2] Carvalho L. D. e Moreira H. N., Existêcia e unicidade de ciclos limites em um sistema presa-predador com resposta/uncional do tipo ivlev, Master's thesis, Universidade de Brasília, outubro 1999.

[3] Ferreira J. D. e Sallum E. M., Bifurcação de Hopf e unicidade de órbitas periódicas em modelos para doenças micro e macroparasíticas, Master's thesis, Universidade de São Paulo, agosto 2000.

[4] Holling C. S., The components of predation as revealed by study of small-mammal predation of the european pine sawfly, Canad. Entomol. 91 (1959), 293-320.

[5] Sotomayor J, Lições de equações diferenciais ordinárias, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada/CNPq, 1979.

[6] Yan Y., Theory of limit cicles, rol. 66, 1986, American Mathematical Society.

[7] Waldstatter R., Pair formation in sexually transmítted diseases, in: C. Castillo-Chaves (ed) mathematical and statistical approaches to aids epidemiology, Lect. Notes Biomath. 83 (1989).

[8] Zegeling A. and Kooij E. R., Uniqueness of limit cycles in models for microparasitic and macroparasitic diseases, Journal of Mathematical Biology 36 (1998), 407-417.

Dirección del autor: Jocirei D. Ferreira Departamento de Matemáticas, Universidad del Quindío.

Número de Documento:A236480494