Vol. IX, N$^{\underline{o}}$ 1, 2 Nov. (2001)
Notas: 119–122

**Matemáticas: Enseñanza Universitaria**


# Una observación a un resultado de Arquímedes

Saulo Mosquera

**Resumen**

En *El Método*, trabajo de Arquímedes descubierto en 1906, se presentan dos maneras para hallar la relación existente entre el área de un segmento parabólico y la de un triángulo inscrito en el mismo. En esta nota se presenta una relación similar para el caso de un segmento elíptico y de un segmento hiperbólico.

**Palabras y frases claves:** Geometría griega, cuadratura de la parábola, transformación afin.

## 1 El problema

Tres grandes problemas formulados en el desarrollo de la geometría griega fueron la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo. Aunque desde los antiguos griegos se realizaron numerosos intentos por resolverlos, únicamente en el siglo XIX se demostró la imposibilidad de ellos.

La cuadratura de una figura geométrica consiste en construir, con regla y compás, un cuadrado de igual área a la de la figura dada. En este sentido, un problema resuelto afirmativamente es la cuadratura de cualquier polígono.

En el desarrollo del curso de Geometría Superior en la Universidad de Nariño se propuso como ejercicio demostrar la Proposición 17 del texto de Arquímedes *Sobre las espirales* la cual trata el problema de "la cuadratura de la parábola". En ella Arquímedes establece que:

> El área de un segmento parabólico es igual al cuádruple del tercio del área de un triángulo de la misma base y la misma altura que el segmento.

En los intentos de solución de este problema por la clase surgió la pregunta:

¿Qué sucede en el caso de un segmento elíptico o de un segmento hiperbólico? La respuesta a este interrogante se obtiene en el siguiente resultado.

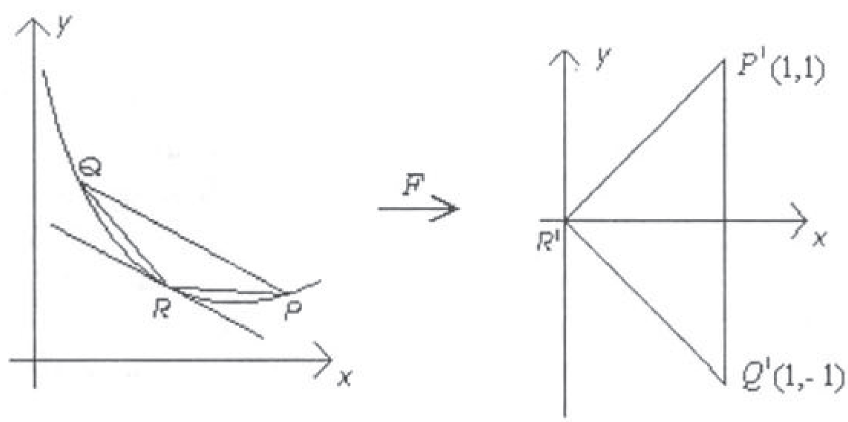
## 2 Una solución

**Proposición.** *Sean $\overline{PQ}$ una cuerda de una cónica no degenerada y $R$ un punto sobre el arco $\widehat{PQ}$ de la cónica tal que la recta tangente en $R$ a la cónica es paralela al segmento $\overline{PQ}$. En tales condiciones se tiene:*

- *Si el arco $\widehat{PQ}$ está sobre una elipse, entonces $\dfrac{S}{T} > \dfrac{4}{3}$.*
- *Si el arco $\widehat{PQ}$ está sobre una parábola, entonces $\dfrac{S}{T} = \dfrac{4}{3}$.*
- *Si el arco $\widehat{PQ}$ está sobre una hipérbola, entonces $\dfrac{S}{T} < \dfrac{4}{3}$.*

*Aquí $S$ es el área del segmento de la correspondiente cónica y $T$ es el área del triángulo.*

*Demostración.* Ésta hace uso del concepto de transformación afín, y sus propiedades, y procede de la siguiente manera:




Puesto que una transformación afín queda completamente determinada por su imagen sobre tres puntos no colineales, existe una y sólo una de tales aplicaciones $F$ que transforma el triángulo $PQR$ en el triángulo rectángulo $P'Q'R'$ de coordenadas $P'(1,1)$, $R'(0,0)$ y $Q'(1,-1)$.

Como toda transformación afín preserva paralelismo, la razón entre las áreas de dos regiones, transforma una cónica en otra cónica del mismo tipo y su inversa es también una transformación afín, entonces es suficiente mostrar el resultado para la cónica que pasa por los puntos $P'$, $Q'$ y $R'$.

La ecuación general de una cónica es:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

y puesto que la cónica deseada es tangente al eje $y$ en el origen y pasa por dichos puntos se sigue que:

$$\begin{aligned} B &= 0 \\ A+C+D+E+F &= 0 \\ A+C+D-E+F &= 0 \\ F &= 0 \end{aligned}$$

Es decir, se debe satisfacer que $A+C+D=0$. Así tomando $C=1$, y $A=-t$ se obtiene que la ecuación de esta cónica está determinada por la relación

$$y^2 = tx^2 + (1-t)x \tag{1}$$

donde $t$ es el parámetro que determina el tipo de cónica de la siguiente manera:

- Si $t=0$, es una parábola.
- Si $t<0$, es una elipse.
- Si $t>0$, es una hipérbola.

En el caso de la parábola el área $S$ del segmento parabólico está dada por:

$$S = 2\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx = 2\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4}{3} = \frac{4}{3}T.$$

Para terminar la demostración es suficiente utilizar el hecho de que si una función domina a otra en un intervalo entonces la integral de la primera función domina a la integral de la segunda en ese intervalo. Por ello se observa que:

Si $y_t$ denota el arco $\widehat{R'P'}$ de la cónica determinada por la ecuación (1) y $y_0$ denota el arco de la parábola entonces cuando $x$ varía en el intervalo $(0,1)$ se tiene que:

$$y_t^2 - y_0^2 = tx^2 + (1-t)x - x = tx(x-1)$$

Esta cantidad es:

- Positiva si $t<0$, es decir, en el caso de la elipse. Por tanto el arco de la elipse está por arriba del arco de la parábola y así

$$S > \frac{4}{3}T.$$

- Negativa si $0<t<1$, es decir, en el caso de la hipérbola. Por tanto el arco de la hipérbola está por debajo del arco de la parábola y así

$$S < \frac{4}{3}T.$$

**Referencias**

[1] De la Torre, Andrés. *Anotaciones a una lectura de Arquímedes.* Editorial Universidad de Antioquia, 1997.

[2] Mosquera, Saulo. *Geometría de transformaciones* (Notas de Clase). Universidad de Nariño, 1997.

*Dirección del autor:* Saulo Mosquera Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño, Pasto, Colombia samolo@udenar.edu.co