

CÁLCULO EFICIENTE DEL ESTIMADOR
JACKKNIFE PARA MÍNIMOS CUADRADOS
LINEALES BAJO CONDICIONES DE UNICIDAD

HÉCTOR JAIRO MARTÍNEZ R., ANA MARÍA SANABRIA R.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DEL VALLE, CALI, COLOMBIA.

RESUMEN

A pesar de que los estimadores jackknife surgieron desde los años 50 y de que tienen importantes ventajas sobre los estimadores iniciales, debido al alto costo computacional que requiere su cálculo, sólo en las dos últimas décadas han ganado atención y aún es necesario encontrar algoritmos eficientes para su cálculo. En este trabajo, presentamos un algoritmo que nos permite reducir el costo del algoritmo estándar para calcular el estimador jackknife para mínimos cuadrados de un modelo lineal, bajo el supuesto que los problemas de mínimos cuadrados involucrados en el cálculo de éste, tienen soluciones únicas.

Palabras Claves: Estimador jackknife, Mínimos cuadrados lineales.

1 Introducción.

La inferencia estadística basada en técnicas de re-muestreo y, en particular, la de jackknife surgió en los años 50. Sin embargo, sólo en las dos últimas décadas, estas técnicas han ganado atención debido a que requieren de facilidades de cómputo para hacer los cálculos. Es de anotar, que aún contando con dichas facilidades, es importante el uso de algoritmos eficientes por la gran cantidad de operaciones involucradas.

El algoritmo estándar que calcula el estimador jackknife de mínimos cuadrados para los parámetros de un modelo lineal efectúa un número de operaciones del orden de $O(m^2n^2) + O(mn^3)$, siendo n el número de parámetros a estimar y m el tamaño de la muestra.

En este artículo, utilizaremos propiedades básicas del álgebra lineal para proponer un algoritmo que calcula este mismo estimador jackknife, con un número de operaciones del orden de $O(mn) + O(mn^2)$.

Con este propósito central, inicialmente, presentamos la definición de un estimador jackknife y sus principales propiedades, lo mismo hacemos con el estimador de mínimos cuadrados de los parámetros de un modelo lineal. Luego, definimos el estimador jackknife correspondiente al anterior estimador y presentamos el algoritmo estándar para su cálculo, bajo el supuesto de unicidad de los estimadores de mínimos cuadrados involucrados en el algoritmo.

Posteriormente, presentamos los resultados básicos del álgebra lineal que utilizaremos para simplificar el anterior algoritmo. Finalmente, proponemos nuestro algoritmo para el cálculo del estimador jackknife de mínimos cuadrados para los parámetros de un modelo lineal, bajo el mismo supuesto de unicidad mencionado anteriormente.

Como ayuda para el lector, aclaramos que el vector $x \in \mathbb{R}^n$ es un vector columna y por tanto el vector x^T es un vector fila.

2 Estimador jackknife.

Siempre que se tiene una muestra aleatoria y un procedimiento para hacer una estimación utilizando dicha muestra, se puede encontrar otro estimador usando la técnica jackknife, la cual consiste en corregir el estimador inicial con base en el promedio de los estimadores que se obtienen al aplicar el procedimiento inicial de estimación a cada una de las sub-muestras que resultan al eliminar una observación de la muestra inicial.

Formalmente, dada $Y_1, \dots, Y_m$, una muestra aleatoria de una población caracterizada por un parámetro θ y $T = t_m(Y_1, \dots, Y_m)$ un estimador de θ , se calculan los estimadores $T_i = t_{m-1}(Y_1, \dots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \dots, Y_m)$ para $i = 1, \dots, m$ y luego, se calcula el estimador

$$\begin{aligned} T_J &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (mT - (m-1)T_i) \\ &= mT - (m-1) \sum_{i=1}^m \frac{T_i}{m} \\ &= T + (m-1) \left(T - \sum_{i=1}^m \frac{T_i}{m} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

llamado estimador jackknife [1].

Se ha probado que el estimador jackknife es un estimador con menor sesgo que el estimador inicial [1] y que la varianza del estimador inicial se puede estimar mediante la del estimador jackknife [1], la cual, con frecuencia, es más fácil de estimar.

3 Problema de mínimos cuadrados para modelos lineales.

Cuando se tiene un conjunto de mediciones (t_i, y_i) , es conveniente hallar una relación matemática $y = f(t)$ que represente “razonablemente bien” dichas mediciones. En muchos casos, lo ideal es que f sea una función lineal; es decir, que $f(t) = ct + b$. En este caso, el problema se reduce a encontrar c y b de tal forma que la distancia entre los valores estimados $(ct_i + b)$ y los valores observados y_i sea mínima. Entre muchas formas de medir esta distancia, se encuentra la norma euclidiana ($\|\cdot\|_2$) que es la que genera el nombre de los mínimos cuadrados.

En forma más general, dado el conjunto de mediciones (a_i^T, α_i) , donde $a_i \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \dots, m$ y $m \geq n$, el problema de estimar x , los parámetros del modelo lineal $\alpha_i = a_i^T x$, por el método de los mínimos cuadrados, se reduce a encontrar $\hat{x}$ tal que

$$\|A\hat{x} - y\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - y\|_2 ,$$

donde $A = [a_1, \dots, a_m]^T$ y $y = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^T$.

Bajo el supuesto que la matriz A es de rango completo, dicho vector $\hat{x}$ es único, está dado por

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T y \quad (2)$$

y se denomina el estimador de mínimos cuadrados (EMC) del modelo lineal mencionado [4].

4 Estimador jackknife para mínimos cuadrados.

Según la definición dada en la Sección 2, para calcular el estimador jackknife de mínimos cuadrados (EJMC) del modelo lineal, además

de contar con $\hat{x}$, el EMC, debemos calcular $\hat{x}_i$ ($i = 1, \dots, m$), el EMC de la submuestra que queda al eliminar la medición (a_i^T, α_i) de la muestra inicial. Esto es, debemos encontrar $\hat{x}_i$ tal que

$$\|A_i \hat{x}_i - y_i\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|A_i x - y_i\|_2 ,$$

donde $A_i = [a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m]^T$ y $y_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_m)^T$.

Bajo el supuesto que la matriz A_i , ($i = 1, \dots, m$), es de rango completo, el vector $\hat{x}_i$ es único y está dado por

$$\hat{x}_i = (A_i^T A_i)^{-1} A_i^T y_i .$$

Finalmente, usando la expresión (1), el EJMC del modelo lineal está dado por

$$x_J = m\hat{x} - (m-1) \sum_{i=1}^m \frac{\hat{x}_i}{m} .$$

5 Algoritmo estándar para calcular el EJMC.

Por lo descrito en la sección anterior, el algoritmo para calcular el EJMC se divide en tres pasos:

0. Dados $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rango completo , $y \in \mathbb{R}^m$,
1. Resolver $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - y\|_2$, SALIDA: $\hat{x}$.
2. Para $i = 1, \dots, m$
 Resolver $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|A_i x - y_i\|_2^2$, SALIDA: $\hat{x}_i$.
3. Calcular $x_J = m\hat{x} - (m-1) \sum_{i=1}^m \frac{\hat{x}_i}{m}$. SALIDA: x_J .

Bajo el supuesto que las matrices A y A_i , para $i = 1, \dots, m$, sean de rango completo y utilizando el método de las ecuaciones normales para resolver los problemas planteados en los pasos 1 y 2, un algoritmo más detallado para el cálculo de EJMC es el siguiente:

0. Dados $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rango completo, $y \in \mathbb{R}^m$,

1. {Resolver $A^T A x = A^T y$.}

- Calcular $S = A^T A$.

- Calcular $d = A^T y$.

- Resolver $Sx = d$.

SALIDA: $\hat{x}$.

2. Para $i = 1, \dots, m$.

{Resolver $A_i^T A_i x = A_i^T y_i$.}

- Calcular $S_i = A_i^T A_i$.

- Calcular $d_i = A_i^T y_i$.

- Resolver $S_i x_i = d_i$.

SALIDA: $\hat{x}_i$.

3. Calcular $x_J = m\hat{x} - (m-1) \sum_{i=1}^m \frac{\hat{x}_i}{m}$.

SALIDA: x_J .

Utilizando el Método de Cholesky para resolver los sistemas de ecuaciones lineales, el número de *flops*¹ que requiere el paso 1 es $\left[\frac{n^2 m}{2} + nm + \frac{n^3}{6} \right]$ y el número de *flops* que requiere el paso 2 es $m \left[\frac{n^2(m-1)}{2} + n(m-1) + \frac{n^3}{6} \right]$, lo que nos indica que la parte más costosa del algoritmo es el cálculo de los $\hat{x}_i$, en el paso 2.

¹Un *flop* es la cantidad de trabajo asociado al cálculo de $s =: s + a_{ik}b_{kj}$ [3]

6 Algunos resultados del algebra lineal.

Ante el alto costo computacional del algoritmo descrito en la sección anterior, nos propusimos buscar propiedades o resultados que nos permitieran diseñar un algoritmo más eficiente para el cálculo de los $\hat{x}_i$. Un primer resultado es el presentado en la tesis de Vargas [5] con el objeto de rebajar el costo del cálculo de $A_i^T A_i$. Aunque este cálculo no es necesario, como veremos más adelante, el resultado es importante para nuestros propósitos.

Lema 1 (Vargas[5]). Dada una matriz $A = [a_1, \dots, a_m]^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$, si la matriz $A_i \in \mathbb{R}^{(m-1) \times n}$ es la matriz que resulta de eliminar la fila i en la matriz A , entonces

$$A_i^T A_i = A^T A - a_i a_i^T .$$

■

Un segundo resultado, similar al anterior pero aún más elemental, nos permite simplificar el cálculo de $d_i = A_i^T y_i$, y está dado en el siguiente lema.

Lema 2 Si además de lo supuestos del Lema 1, tenemos que $y = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^T$ y $y_i \in \mathbb{R}^{m-1}$ es el vector que resulta de eliminar la componente i en el vector y , entonces

$$A_i^T y_i = A^T y - \alpha_i a_i .$$

Demostración: Observe que

$$A^T y = [a_1, \dots, a_m]^T \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^m \alpha_j a_j .$$

■

El siguiente resultado aparece enunciado en [2] y será fundamental en la obtención de nuestro resultado principal. Para mayor claridad y hacer más autocontenido este trabajo, incluimos nuestra versión de su demostración.

Lema 3 (Sherman-Morrison-Woodbury)[2]. Sean $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz no singular y $u, v \in \mathbb{R}^n$ vectores no nulos. Entonces, $(M + uv^T)$ es no singular si y solo si $\sigma = 1 + v^T M^{-1}u \neq 0$. Además, si $\sigma \neq 0$, $(M + uv^T)^{-1} = M^{-1} - \frac{1}{\sigma} M^{-1}uv^T M^{-1}$.

Demostración:

$\Leftarrow$) Si $\sigma = 1 + v^T M^{-1}u \neq 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} (M + uv^T) \cdot \left(M^{-1} - \frac{1}{\sigma} M^{-1}uv^T M^{-1} \right) &= \\ &= (I + uv^T M^{-1}) \cdot \left(I - \frac{1}{\sigma} uv^T M^{-1} \right) \\ &= (I + uv^T M^{-1}) - \frac{1}{\sigma} (u + uv^T M^{-1}u) v^T M^{-1} \\ &= (I + uv^T M^{-1}) - \frac{1}{\sigma} u(1 + v^T M^{-1}u) v^T M^{-1} \\ &= (I + uv^T M^{-1}) - uv^T M^{-1} \\ &= I, \end{aligned}$$

lo que implica que $(M + uv^T)$ es invertible y que $(M + uv^T)^{-1} = M^{-1} - \frac{1}{\sigma} M^{-1}uv^T M^{-1}$.

$\Rightarrow$) Supongamos que $\sigma = 1 + v^T M^{-1}u = 0$ y recordemos que u es un vector no nulo. Observemos que

$$\begin{aligned} (I + uv^T M^{-1})u &= u + u(v^T M^{-1}u) \\ &= (1 + v^T M^{-1}u)u \\ &= \sigma u \\ &= 0 \end{aligned}$$

lo que implica que $(I + uv^T M^{-1})$ es una matriz singular y por tanto $(M + uv^T) = (I + uv^T M^{-1})M$ también lo es. ■

Finalmente, haciendo uso de los resultados anteriores, podemos rebajar el costo de resolver los sistemas $A_i^T A_i x = A_i^T y_i$ como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 1. Si, además de los supuestos del Lema 2, A y A_i son matrices de rango completo, entonces $\hat{x}_i$, la solución de $A_i^T A_i x = A_i^T y_i$, está dada por

$$\hat{x}_i = \hat{x} + \left(\frac{z_i^T d_i}{\sigma_i} - \alpha_i \right) z_i ,$$

donde $\hat{x}$ es la solución de $A^T A x = A^T y$, z_i es la solución de $A^T A z = a_i$, $\sigma_i = 1 - a_i^T z_i$ y $d_i = A_i^T y_i$.

Demostración: Sean $S = A^T A$, $S_i = A_i^T A_i$ y $d = A^T y$. Como A y A_i son de rango completo, S y S_i son invertibles. Por el Lema 1, $S_i = S - a_i a_i^T$. Como S_i es invertible, por el Lema 3, $\sigma_i = 1 - a_i^T S^{-1} a_i = 1 - a_i^T z_i$ es diferente de cero y $S_i^{-1} = (S^{-1} + \frac{1}{\sigma_i} S^{-1} a_i a_i^T S^{-1})$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= S_i^{-1} d_i \\ &= \left(S^{-1} + \frac{1}{\sigma_i} S^{-1} a_i a_i^T S^{-1} \right) d_i . \end{aligned}$$

Por el Lema 2, $d_i = d - \alpha_i a_i$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= S^{-1} (d - \alpha_i a_i) + \frac{1}{\sigma_i} z_i (z_i^T d_i) \\ &= S^{-1} d - S^{-1} \alpha_i a_i + \frac{z_i^T d_i}{\sigma_i} z_i \\ &= \hat{x} - \alpha_i z_i + \frac{z_i^T d_i}{\sigma_i} z_i \\ &= \hat{x} + \left(\frac{z_i^T d_i}{\sigma_i} - \alpha_i \right) z_i . \end{aligned}$$

■

7 Algoritmo modificado para calcular el EJMC.

Teniendo en cuenta que lo más costoso del algoritmo estándar para el cómputo del EJMC es el cálculo de la solución los m sistemas $A_i^T A_i x = A_i^T y_i$ (paso 2 del algoritmo estándar), que el teorema de la sección anterior establece que no es necesario calcular S_i ni d_i ($z_i^T d_i = z_i^T d - \alpha_i z_i^T a_i$) y que la solución de estos sistemas se reduce al cálculo de algunos productos internos y a la solución de los sistemas $A^T A z_i = a_i$, cuyo costo es del orden de n^2 *flops* (después de haber resuelto el sistema $A^T A x = A^T y$), proponemos modificar el paso 2 del algoritmo mencionado en la Sección 5 de la siguiente manera:

Para $i = 1, \dots, m$.

{ Resolver $A_i^T A_i x = A_i^T y_i$. }

- Resolver $S z_i = a_i$.
- Calcular $\delta_i = a_i^T z_i$.
- Calcular $\sigma_i = 1 - \delta_i$.
- Calcular $\beta_i = z_i^T d - \alpha_i \delta_i$.
- Calcular $\hat{x}_i = \hat{x} + \left(\frac{\beta_i}{\sigma_i} - \alpha_i \right) z_i$.

SALIDA: $\hat{x}_i$.

Esta modificación reduce el costo de este paso a $m [3n + n^2]$.

8 Uso del algoritmo QR en el cálculo del EMC.

Podemos ver que los resultados de la Sección 6 nos permiten simplificar el algoritmo para calcular el EJMC, independientemente del método de solución que se utilice para resolver los problemas de mínimos cuadrados en los pasos 1 y 2 señalados en la Sección 5, bajo el supuesto que las matrices A y A_i , para $i = 1, \dots, m$, sean de rango completo.

Por ejemplo, si aplicamos el método QR para resolver el problema $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - y\|_2$, lo primero que tenemos que hacer es factorizar $A = QR$, donde $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ es una matriz ortogonal y $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es una matriz triangular superior. La solución del problema, bajo el supuesto que A es de rango completo, se obtiene al resolver el sistema $R_1 x = Q_1^T y$ donde $Q_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es no singular, $Q = [Q_1 \quad Q_2]$ y $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ O \end{pmatrix}$ [4]. Observemos que con esta notación, tenemos que $A = QR = Q_1 R_1$ y que $S = A^T A = R_1^T R_1$ es la factorización de Cholesky de la matriz S .

Veamos cual sería el algoritmo estándar para el cálculo del EJMC, utilizando el método QR para resolver los problemas de mínimos cuadrados mencionados.

0. Dados $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rango completo, $y \in \mathbb{R}^m$,

1. $\{ \text{Resolver } \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - y\|_2 \}$

- Factorizar $A = [Q_1 \quad Q_2] \begin{pmatrix} R_1 \\ O \end{pmatrix}$.

- Calcular $d = Q_1^T y$.

- Resolver $R_1 x = d$.

SALIDA: $\hat{x}$.

2. Para $i = 1, \dots, m$.

$\{ \text{Resolver } \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|A_i x - y_i\|_2 \}$

- Factorizar $A_i = [Q_{i1} \quad Q_{i2}] \begin{pmatrix} R_{i1} \\ O \end{pmatrix}$.

- Calcular $d_i = Q_{i1}^T y_i$.

- Resolver $R_{i1} x_i = d_i$.

SALIDA: $\hat{x}_i$.

$$3. \text{ Calcular } x_J = m\hat{x} - (m-1) \sum_{i=1}^m \frac{\hat{x}_i}{m}.$$

SALIDA: x_J .

El número de *flops* que requiere el paso 1 con este método de solución es $\left[mn^2 + mn + \frac{n^2}{2} \right]$ y el número de *flops* que requiere el paso 2 es $m \left[(m-1)n^2 + (m-1)n + \frac{n^2}{2} \right]$.

De nuevo, lo más costoso del algoritmo es el paso 2, pero teniendo en cuenta los mismos resultados que utilizamos para proponer una forma mas eficiente para el paso 2 del algoritmo estándar, utilizando el método de las ecuaciones normales (ver Sección 7), surge una propuesta similar para mejorar la eficiencia de este paso en el anterior algoritmo:

Para $i = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} & \{ \text{Resolver } \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|A_i x - y_i\|_2 \} \\ & \{ \text{Resolver } Sz_i = a_i. \} \\ & \quad - \text{Resolver } R_1^T w_i = a_i. \\ & \quad - \text{Resolver } R_1 z_i = w_i. \\ & \quad - \text{Calcular } \delta_i = a_i^T z_i. \\ & \quad - \text{Calcular } \sigma_i = 1 - \delta_i. \\ & \quad - \text{Calcular } \beta_i = z_i^T d - \alpha_i \delta_i. \\ & \quad - \text{Calcular } \hat{x}_i = \hat{x} + \left(\frac{\beta_i}{\sigma_i} - \alpha_i \right) z_i. \end{aligned}$$

SALIDA: $\hat{x}_i$.

cuyo costo se reduce a $m \left[3n + \frac{n^2}{2} \right]$ después de ejecutar el paso 1.

9 Conclusiones

El resultado principal de este trabajo está dado por el Teorema 1 de la Sección 6. En él, se caracterizan los estimadores de mínimos

cuadrados (EMC) de cada una de las submuestras obtenidas al eliminar una observación de la muestra inicial. Esta caracterización, en el caso de las ecuaciones normales con factorización de Cholesky, nos permite reducir de $m \left[n^2(m-1) + n(m-1) + \frac{n^3}{6} \right]$ a $m [3n + n^2]$ el número de *flops* requeridos para el cálculo del estimador jackknife de mínimos cuadrados (EJMC) para un modelo lineal, siendo n el número de parámetros a estimar y m el tamaño de la muestra.

Es más, si no se necesitan los EMC de cada una de las submuestras, se puede obtener el EJMC sin calcular los EMC, de la siguiente forma

0. Dados $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rango completo, $y \in \mathbb{R}^m$,
1. Resolver $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - y\|_2$, SALIDA: $\hat{x}$.
2. Para $i = 1, \dots, m$
 - $\{ \text{Resolver } \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|A_i x - y_i\|_2 \}$
 - Resolver $Sz_i = a_i$
 - Calcular $\delta_i = a_i^T z_i$.
 - Calcular $\sigma_i = 1 - \delta_i$.
 - Calcular $\beta_i = z_i^T d - \alpha_i \delta_i$.
 - Calcular $\gamma_i = \left(\frac{\beta_i}{\sigma_i} - \alpha_i \right)$. SALIDA: z_i, γ_i .
3. Calcular $x_J = \hat{x} + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \gamma_i z_i$. SALIDA: x_J .

Es de anotar, que la simplificación de los cálculos es independiente del algoritmo que se utilice para resolver los problemas de mínimos cuadrados lineales involucrados en el algoritmo básico. En el trabajo, mostramos dicha simplificación usando tanto el método de las ecuaciones normales (Sección 7), como el método QR (Sección 8) e

igualmente podría hacerse para otros métodos como el de los valores singulares y el de Gram-Schmidt modificado.

Finalmente, observemos que los resultados obtenidos están basados en el supuesto de unicidad de los EMC involucrados en el algoritmo básico, lo cual resulta de suponer que las matrices A y A_i son de rango completo. Actualmente, estamos trabajando en la obtención de resultados similares bajo el supuesto que sólo A sea de rango completo.

Otro frente de trabajo interesante, en esta dirección, es la extensión de estos resultados para el caso del EJMC agrupados, es decir, aquel que se define a partir de los EMC de las submuestras que se obtienen al quitar grupos de observaciones en la muestra inicial.

Agradecimientos

Agradecemos a las personas anónimas que, como referees de la revista *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, hicieron una cuidadosa lectura del trabajo y valiosos comentarios e importantes observaciones.

Este trabajo fué parcialmente financiado por el Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle. Una versión inicial de este trabajo fue presentada en el VI Encuentro Regional de Matemáticas ERM, realizado en la UTP, Pereira, 1998.

Referencias

- [1] Efron, B. *The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans*. Ed. by Society for Industrial and Applied Mathematics, 1982. Philadelphia, Pennsylvania.

- [2] Dennis, J.E. and Schnabel, R.B. *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. Prentice Hall, New Jersey, 1983.
- [3] Golub, G.H. and Van Loan, Ch.F. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 1983.
- [4] Martínez, H.J. y Pérez, R. *Introducción al álgebra lineal numérica*. Notas de Clase, Versión 4.0, Depto de Matemáticas, Universidad del Valle, 1996.
- [5] Vargas, J. *Modelo computacional para resolver problemas de regresión múltiple con datos reales o simulados*. Tesis de Maestría, Depto. de Producción e Investigación de Operaciones, Universidad del Valle, 1995.

HÉCTOR JAIRO MARTÍNEZ R., ANA MARIA SANABRIA R.

PROFESORES DEL DEPTO. DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DEL VALLE,
A.A. 25360, CALI, COLOMBIA