



# Métricas conformes a la métrica euclidiana en $B^2$

Yeimi Alexandra García Medina

Universidad del Valle  
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Departamento de Matemáticas  
Cali, Colombia  
2017

# Métricas conformes a la métrica euclidiana en $B^2$

Yeimi Alexandra García Medina

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:  
**Matemática**

Director:  
Ph.D Gonzalo García Camacho

Línea de Investigación:  
Geometría diferencial

Universidad del Valle  
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Departamento de Matemáticas  
Cali, Colombia  
2017

*A mis padres.*

# Agradecimientos

A mi familia y amigos por su apoyo, al profesor Gonzalo García por su paciencia y colaboración en la elaboración de este trabajo.

# Resumen

Sean  $(M, g)$  una variedad riemanniana de dimensión dos y una métrica  $\tilde{g}$  conforme a  $g$ , considere el disco unitario con centro en el origen  $B^2$  y con frontera la circunferencia  $\partial B^2$ .

En este trabajo de grado:

1. Se encontraron explícitamente las relaciones entre los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  y  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ , las curvaturas gaussianas  $K$  y  $\tilde{K}$  y las curvaturas geodésicas  $h$  y  $\tilde{h}$ , de las variedades  $(M, g)$  y  $(M, \tilde{g})$  respectivamente.
2. Se extendió geoméricamente la proyección estereográfica sobre  $S^1 = \partial B^2$  a una función definida sobre el disco unitario con centro en el origen.
3. Usando la extensión de la proyección estereográfica, se construyó una familia no numerable de métricas conformes a la métrica euclidiana en el disco  $B^2$  con la misma curvatura gaussiana cero y la misma curvatura geodésica uno.

**Palabras Clave:** Variedades riemannianas, funciones conformes, curvatura Gaussiana, curvatura geodésica, disco unitario.

# Índice General

|                                                                          |           |
|--------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Dedicatoria                                                              | 3         |
| Agradecimientos                                                          | 4         |
| Resumen                                                                  | 5         |
| Introducción                                                             | 7         |
| <b>1 CONCEPTOS BÁSICOS</b>                                               | <b>9</b>  |
| 1.1 Sobre Variedades . . . . .                                           | 9         |
| 1.2 Conexiones . . . . .                                                 | 12        |
| 1.3 Coordenadas Normales . . . . .                                       | 14        |
| 1.4 Los Símbolos de Christoffel . . . . .                                | 15        |
| 1.5 El Gradiente, la Divergencia y el Laplaciano . . . . .               | 18        |
| 1.5.1 El Gradiente . . . . .                                             | 18        |
| 1.5.2 La Divergencia . . . . .                                           | 19        |
| 1.5.3 El Laplaciano . . . . .                                            | 21        |
| <b>2 Métricas Conformes</b>                                              | <b>24</b> |
| <b>3 Proyección estereográfica</b>                                       | <b>29</b> |
| <b>4 Métricas Conformes a la métrica euclidiana en <math>B^2</math>.</b> | <b>35</b> |
| Referencias                                                              | 42        |

# Introducción

Sea  $(M, g)$  una variedad Riemanniana con frontera de dimensión dos. Sea  $\mathbf{x}(u, v)$  una parametrización de  $M$  en  $p$ . Denotaremos como  $\mathbf{x}_u$  a la derivada parcial de  $\mathbf{x}$  con respecto a la variable  $u$ , es decir,

$$\mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}.$$

La primera forma fundamental expresada en la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  asociada a la parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$  en  $p$  es dada como:

$$E(u, v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p, \quad F(u, v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p, \quad G(u, v) = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p.$$

Estos son llamados los **coeficientes de la primera forma fundamental** en la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ .

Los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{jk}^i$ ,  $i, j = 1, 2$ , se definen como:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_u \rangle = \frac{1}{2} E_u, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = \langle \mathbf{x}_{uu}, \mathbf{x}_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle = \frac{1}{2} E_v, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{1}{2} G_u, \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \langle \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \rangle = \frac{1}{2} G_v. \end{cases}$$

El teorema Egregium de Gauss para superficies regulares demuestra que la curvatura de Gauss esta dada en términos de los símbolos de Christoffel. Por esta razón se define la curvatura de Gauss  $K$  de  $(M, g)$  como:

$$-EK = (\Gamma_{12}^2)_1 - (\Gamma_{11}^2)_2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_2^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2. \quad (1)$$

Sea  $\nabla$  la conexión riemanniana compatible con la métrica  $g$  y  $h$  la curvatura geodésica en  $p \in \partial M$  definida como:

$$h(p) = g(\nabla_{\partial_1} \partial_2, \partial_1)(p),$$

donde  $M = \{\partial_1, \partial_2\}$  es un marco local ortonormal tal que  $\partial_1$  es tangente a  $\partial M$  y  $\eta = \partial_2$ .

Un problema clásico de la geometría diferencial es, dada una variedad riemanniana  $(M, g)$  con frontera de dimensión 2, una función  $\tilde{K} : M \rightarrow \mathbb{R}$  y una función  $\tilde{h} : \partial M \rightarrow \mathbb{R}$ , ¿existe una métrica riemanniana  $\tilde{g}$  conforme a  $g$  tales que  $\tilde{K}$  sea la curvatura gaussiana de  $(M, \tilde{g})$  y  $\tilde{h}$  la curvatura geodésica en la frontera de  $M$ , con respecto a  $\partial M$ ?

El problema de prescribir la curvatura gaussiana fue planteado por primera vez por **Louis Nirenberg** para variedades sin frontera y por **Pascal Cherrier** fue para variedades con frontera. Ambos problemas han sido objeto de intensa investigación y no han sido completamente resueltos.

En este trabajo se encontró explícitamente las relaciones entre los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  y  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ , las curvaturas gaussianas  $K$  y  $\tilde{K}$  y las curvaturas geodésicas  $h$  y  $\tilde{h}$ , de las variedades  $(M, g)$  y  $(M, \tilde{g})$ , respectivamente. Se usaron dichas relaciones para demostrar que una familia no numerable de métricas, construidas a partir de la proyección estereográfica, son métricas conformes a la métrica euclidiana en el disco  $B^2$  con la misma curvatura Gaussiana 0 y curvatura geodésica 1.

En el capítulo 1 se presentan las definiciones y teoremas principales que sustentan el proyecto; conceptos de geometría diferencial y variedades diferenciables, dando las definiciones (variedad, variedad diferenciable, variedad riemanniana...) y conceptos básicos; todas estas en dimensión dos ( $n = 2$ ), que es en el espacio en el que trabajaremos.

En el capítulo 2 se introducen las métricas conformes y se dan las relaciones entre los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  y  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ , las curvaturas gaussianas  $K$  y  $\tilde{K}$  y las curvaturas geodésicas  $h$  y  $\tilde{h}$  de  $(M, g)$  y  $(M, \tilde{g})$  respectivamente.

En el capítulo 3 se introduce la proyección estereográfica en el plano, la función inversa de la proyección estereográfica y se presentan propiedades de esta, además se extiende la proyección estereográfica a una función definida sobre el disco unitario con centro en el origen.

Finalmente, en el capítulo 4 se muestran las métricas sobre el disco euclidiano conformes a la métrica euclidiana con curvatura gaussiana 0 y curvatura geodésica 1 sobre la frontera del disco.

# Capítulo 1

## CONCEPTOS BÁSICOS

A continuación se presentarán las definiciones y teoremas principales necesarios para la realización de este trabajo.

### 1.1 Sobre Variedades

**Definición 1.1.1 (Homeomorfismo)** Sea  $M$  un espacio topológico. Decimos que una función continua  $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un **homeomorfismo** sobre  $\varphi(U)$  si  $\varphi$  es inyectiva y su inversa  $\varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  es continua. En este caso diremos que  $U$  y  $\varphi(U)$  son **conjuntos homeomorfos**.

**Definición 1.1.2 (2-Variedad)** Una variedad  $M$  de dimensión 2 (ó **2-Variedad**) es un espacio topológico Hausdorff en el que cada punto de  $M$ , tiene un entorno homeomórfico a  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 1.1.3 (2-Variedad diferenciable)** Una **2-variedad diferenciable** es un conjunto  $M$  dotado de una familia de aplicaciones inyectivas  $\varphi_i : U_i \rightarrow M$ ,  $i = 1, 2$ , definidas en conjuntos abiertos  $U_i \subset \mathbb{R}^2$  sobre  $M$  tales que:

1.  $\bigcup_i \varphi_i(U_i) = M$ .
2. Para cada par  $i, j = 1, 2$  con  $\varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j) = W \neq \emptyset$ , tenemos que  $\varphi_i^{-1}(W)$ ,  $\varphi_j^{-1}(W)$  son conjuntos abiertos en  $\mathbb{R}^2$ , y que  $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ ,  $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$  son aplicaciones diferenciables.

La pareja  $(U_i, \varphi_i)$  (o la aplicación  $\varphi_i$ ) con  $p \in \varphi_i(U_i)$  es llamada una **parametrización** (o sistema de coordenadas) de  $M$  en  $p$ ; el conjunto  $\varphi_i(U_i)$  se denomina una **vecindad coordinada** (o entorno coordinado) y si  $q = \varphi_i(u_i, v_i) \in M$  decimos que  $(u_i, v_i)$  son las coordenadas de  $q$  en dicho sistema coordinado; la familia  $\{(U_i, \varphi_i)\}$

es llamada una **estructura diferencial** de  $M$ .

Sea  $H^2$  el *Semiespacio* de  $\mathbb{R}^2$  definido por:

$$H^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0\}.$$

**Definición 1.1.4 (2-Variedad diferenciable con frontera)** Una **2-variedad diferenciable con frontera** es un conjunto  $M$  dotado de una familia de aplicaciones inyectivas  $\varphi_i : U_i \rightarrow M$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , definidas en conjuntos abiertos  $U_i \subset H^2$  en  $M$  tales que:

1.  $\bigcup_i \varphi_i(U_i) = M$ .
2. Para cada par  $i, j = 1, 2$  con  $\varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j) = W \neq \emptyset$ , los conjuntos  $\varphi_i^{-1}(W)$  y  $\varphi_j^{-1}(W)$  son conjuntos abiertos en  $H^2$  y los mapeos  $\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$ ,  $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$  son diferenciables.

**Definición 1.1.5** Sean  $M_1$  y  $M_2$  2-variedades diferenciables. Una aplicación  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  es **diferenciable en**  $p \in M_1$  si dada una parametrización  $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M_2$  alrededor de  $\varphi(p)$  existe una parametrización  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M_1$  alrededor de  $p$  tal que  $\varphi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$  y tal que la aplicación:

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (1.1)$$

es diferenciable en  $\mathbf{x}^{-1}(p)$ . Se dice que  $\varphi$  es **diferenciable en**  $M_1$  si es diferenciable en cada  $p \in M_1$ .

Esta definición no depende de la elección de las parametrizaciones. La aplicación (1.1), se denomina **expresión** de la función  $\varphi$  en las parametrizaciones  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

**Definición 1.1.6** Sea  $M$  una 2-variedad diferenciable. Una aplicación diferenciable  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  se denomina una **curva** sobre  $M$ . Suponga que  $\alpha(0) = p \in M$  y sea  $D$  el conjunto de las funciones sobre  $M$  que son diferenciables en  $p$ . El **vector tangente** a la curva  $\alpha$  en  $t = 0$  es la función  $\alpha'(0) : D \rightarrow \mathbb{R}$  definida por,

$$\alpha'(0)(f) = \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha) \right|_{t=0}, f \in D.$$

Un **vector tangente**  $v$  en un punto  $p \in M$  es el vector tangente en  $t = 0$  a alguna curva diferenciable  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  con  $\alpha(0) = p$ .

El conjunto de todos los vectores tangentes a  $M$  en  $p$ , se denominará **espacio tangente a  $M$  en  $p$**  y se denota por:

$$T_p(M) = \{\alpha'(0) | \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M, \alpha(0) = p\}.$$

Dado  $X \in T_p M$  existe una curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = X$ . Así si  $f \in D$ , escribiremos  $Xf = \alpha'(0)f$ .

**Definición 1.1.7 (Bracket)** Sean  $X$  y  $Y$  campos vectoriales diferenciables sobre una variedad diferenciable  $M$ . Sea  $D$  el conjunto de las funciones diferenciables sobre  $M$ . Entonces existe un único campo vectorial  $Z$ , tal que para todo  $f \in D$ ,  $Zf = (XY - YX)f$ . El vector  $Z$ , es llamado **bracket**  $[X, Y] = XY - YX$  de  $X$  y  $Y$ .

**Proposición 1.1.8** Si  $X, Y$  y  $Z$  son campos vectoriales diferenciables sobre una variedad diferenciable  $M$ ,  $a, b$  son números reales, y  $f, g$  son funciones diferenciables, entonces:

- (a)  $[X, Y] = -[Y, X]$  (anticonmutatividad),
- (b)  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$  (linealidad),
- (c)  $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$  (identidad de Jacobi),
- (d)  $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$ .

**Definición 1.1.9 (La diferencial)** Sean  $M_1$  y  $M_2$  2-variedades diferenciales y sea  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  una aplicación diferenciable. Para cada  $p \in M_1$  y cada  $w \in T_p(M_1)$ , considérese una curva diferenciable  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M_1$ , con  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha'(0) = w$ . Sea  $\beta = \varphi \circ \alpha$ . La aplicación  $d\varphi_p : T_p(M_1) \rightarrow T_{\varphi(p)}(M_2)$  dada por  $d\varphi_p(w) = \beta'(0)$  es una aplicación lineal bien definida, denominada **la diferencial** de  $d\varphi$  en  $p$ .

**Definición 1.1.10 (2-Variedad riemanniana)** Una **2-variedad riemanniana** es una 2-variedad diferenciable  $M$  dotada de un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  en cada plano tangente  $T_p(M)$ ,  $p \in M$ , que varía diferenciablemente con respecto a  $p$  en el siguiente sentido: Para alguna (por tanto para toda) parametrización  $\mathbf{x} : U \rightarrow M$  en torno a  $p$ ,  $\mathbf{x}(u, v)$ , las funciones:

$$E(u, v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle, \quad F(u, v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle, \quad G(u, v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle,$$

son funciones diferenciales en  $U$ . El producto interior  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  se denomina habitualmente una **métrica riemanniana** sobre  $M$ .

**Definición 1.1.11 (Primera forma fundamental)** Sea  $M$  una 2- variedad dotada de un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  en cada plano tangente  $T_p(M)$ ,  $p \in M$ .

Si  $w_1, w_2 \in T_p(M)$ , entonces a este producto interno,  $\langle w_1, w_2 \rangle_p$  (que es lineal y es una forma bilineal simétrica), le corresponde una forma cuadrática  $I_p : T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0,$$

denominada la **primera forma fundamental** de la 2-variedad en  $p \in M$ .

### Observaciones.

1. Sea  $\mathbf{x}(u, v)$  una parametrización de  $M$  en  $p$ . Denotaremos como  $\mathbf{x}_u$  a la derivada parcial de  $\mathbf{x}$  con respecto a la variable  $u$ , es decir,

$$\mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}.$$

2. La primera forma fundamental expresada en la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$  asociada a la parametrización  $\mathbf{x}(u, v)$  en  $p$  es dada como:

$$E(u, v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p, \quad F(u, v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p, \quad G(u, v) = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p. \quad (1.2)$$

Estos son llamados los **coeficientes de la primera forma fundamental** en la base  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ .

## 1.2 Conexiones

La idea de una Conexión en una variedad riemanniana es la de poder definir la derivada de un campo vectorial en la dirección de un vector determinado. Para campos vectoriales en  $\mathbb{R}^2$  lo podemos hacer de manera natural, definiendo para un campo  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y un vector  $v$  en  $\mathbb{R}^2 = T_p\mathbb{R}^2$ :

$$\nabla_v X(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (X(p + tv) - X(p)) = DX(p) \cdot v.$$

La dificultad en una variedad  $M$  es que en general si tomamos un vector  $v \in T_p M$  y una curva  $\alpha(t)$  en  $M$ , tal que,  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = v$  entonces la diferencia  $X(\alpha(t)) - X(p)$  no tiene sentido porque  $X(\alpha(t))$  y  $X(p)$  están definidos en espacios vectoriales distintos y por lo tanto, su resta no está definida. En  $\mathbb{R}^2$  esto es posible ya que todos los planos tangentes  $T_p\mathbb{R}^2$  pueden identificarse. Así que la labor de la conexión será proporcionar una forma de derivar en la variedad.

Si pensamos en qué exigirle a una derivada direccional de campos vectoriales, lo mínimo que debemos pedir es que tal operación sea lineal y la regla de Leibniz se cumpla. Tomando esto en cuenta se define:

**Definición 1.2.1 (Conexión Afín)** Sean  $M$  una 2-variedad diferenciable y  $\chi(M)$  el conjunto formado por los campos vectoriales. Una **conexión afín**  $D$  sobre  $M$  es una función:

$$D : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M),$$

que se denota por  $(X, Y) \rightarrow D(X, Y) := D_X Y$  y satisface las propiedades siguientes:

1.  $D_{fX+gY} Z = fD_X Z + gD_Y Z$ ,
2.  $D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z$ ,
3.  $D_X(fY) = fD_X Y + X(f)Y$ ,

donde  $X, Y, Z \in \chi(M)$  y  $f, g \in C^\infty(M)$ .

**Definición 1.2.2 (Conexión simétrica y compatible)** Dada  $(M, g)$  una 2-variedad riemanniana, se dirá que una conexión  $D : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$  es **simétrica** si:

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y],$$

y **compatible** con la métrica si:

$$Zg(X, Y) = g(D_Z X, Y) + g(X, D_Z Y).$$

**Teorema 1.2.3 (Levi Civita)** Sea  $(M, g)$  una 2-variedad riemanniana, entonces existe una única conexión simétrica y compatible con la métrica.

**Demostración.**

Primero se probará la unicidad, supongamos la existencia de una conexión  $D$ . Entonces:

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle, \quad (1.3)$$

$$Y\langle Z, X \rangle = \langle D_Y Z, X \rangle + \langle Z, D_Y X \rangle, \quad (1.4)$$

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle D_Z X, Y \rangle + \langle X, D_Z Y \rangle. \quad (1.5)$$

Sumando (1.3) y (1.4), luego restando (1.5), se tiene usando la simetría de  $D$ , que:

$$X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle = \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2\langle Z, D_Y X \rangle.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\langle Z, D_Y X \rangle &= \frac{1}{2} \{X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ &- \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle\}.\end{aligned}\tag{1.6}$$

La expresión (1.6) muestra que  $D$ , está únicamente determinado por la métrica  $\langle, \rangle$ . Así que, si existe es única. Para probar la existencia, definamos  $D$  como (1.6).  $D$  está bien definida y satisface las condiciones deseadas. ■

### Observación.

Nos referiremos de ahora en adelante a la conexión del teorema anterior como la *conexión de Levi Civita* sobre  $M$ .

## 1.3 Coordenadas Normales

Sea  $p \in T_p M$  donde  $M$  es una variedad diferenciable y un vector  $v \in T_p M$  no nulo. Existe una única geodésica parametrizada  $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  con  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma'(0) = v$ , la geodésica  $\gamma$  tiene dependencia respecto al vector  $v$ , es decir,  $\gamma = \gamma(t, v)$ .

**Lema 1.3.1** *Si la geodésica  $\gamma(t, v)$  está definida para  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ , entonces la geodésica  $\gamma(t, \lambda v)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , donde  $\lambda$  es no nulo, está definida para  $t \in (-\frac{\epsilon}{\lambda}, \frac{\epsilon}{\lambda})$  y  $\gamma(t, \lambda v) = \gamma(\lambda t, v)$ .*

De ahora en adelante, si  $v \in T_p M$  es tal que  $\gamma(|v|, \frac{v}{|v|}) = \gamma(\frac{|v|}{|v|}, v) = \gamma(1, v)$ , está bien definido.

Denotaremos por

$$\exp_p v = \gamma(1, v) \text{ y } \exp_p 0 = p$$

a llamada la **aplicación exponencial**.

**Proposición 1.3.2** *Dado  $p \in M$  existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\exp_p$  está definida y es diferenciable en el interior de un disco  $B_\epsilon$  de radio  $\epsilon$  y centro de origen en  $T_p M$ .*

**Proposición 1.3.3** *La aplicación  $\exp_p : B_\epsilon \subset T_p M \rightarrow M$  es un difeomorfismo en un entorno  $U \subset B_\epsilon$  del origen  $0$  de  $T_p M$ .*

Ahora, como la aplicación  $(exp_p)$  es un difeomorfismo en  $U$ , esta puede usarse para introducir coordenadas en  $V$ .

Las coordenadas normales corresponden a un sistema de coordenadas rectangulares en el plano tangente  $T_pM$ .

**Definición 1.3.4 (Coordenadas Normales)** . *Elijamos en el plano  $T_pM$ ,  $p \in M$  dos vectores ortogonales unitarios  $e_1$  y  $e_2$ . Como la aplicación  $(exp_p)$  es un difeomorfismo, satisface las condiciones de parametrización en  $p$ . Si  $q \in V$ , entonces  $q = exp_p(w)$  donde  $w = ue_1 + ve_2 \in U$  y decimos que  $q$  tiene coordenadas  $(u, v)$ .*

Observe que en el punto  $p$  los coeficientes de la primera forma fundamental con respecto a dicho sistema son:

$$E(p) = G(p) = 1 \quad \text{y} \quad F(p) = 0.$$

## 1.4 Los Símbolos de Christoffel

**Definición 1.4.1 (Símbolos de Christoffel)** Sean una 2-variedad riemanniana  $M$ , una conexión afín  $D$  y  $(U, x)$  un sistema de coordenadas, donde  $\mathbf{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ . Es costumbre llamar a las funciones  $\Gamma_{ij}^k$  definidas sobre  $U$  por  $D_{X_i}X_j = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k X_k$ , los coeficientes de la conexión  $D$  sobre  $U$  o los **símbolos de Christoffel** de la conexión.

Sea  $g$  la matriz  $2 \times 2$  con componentes,

$$g_{11} = E, \quad g_{12} = g_{21} = F \quad \text{y} \quad g_{22} = G.$$

Su matriz inversa  $g^{-1}$  tiene componentes,

$$g^{11} = \frac{G}{EG - F^2}, \quad g^{12} = g^{21} = \frac{-F}{EG - F^2} \quad \text{y} \quad g^{22} = \frac{E}{EG - F^2},$$

donde  $E$ ,  $F$  y  $G$  son como en (1.2).

Denotemos por  $\partial_j$  a  $\frac{\partial x}{\partial x_j}$ ,  $j=1,2$ . De (1.6) tenemos que:

$$\langle \partial_k, D_{\partial_i} \partial_j \rangle = \frac{1}{2} \{ (g_{jk})_i + (g_{ki})_j - (g_{ij})_k \}.$$

Por otro lado como  $D_{\partial_i} \partial_j = \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l \partial_l$ , entonces,

$$\langle D_{\partial_i} \partial_j, \partial_k \rangle = \left\langle \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l \partial_l, \partial_k \right\rangle = \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l \langle \partial_l, \partial_k \rangle = \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l g_{lk}.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \{ (g_{jk})_i + (g_{ki})_j - (g_{ij})_k \}.$$

Que se puede reescribir como:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u = \frac{1}{2} (g_{11})_u, \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v = (g_{12})_u - \frac{1}{2} (g_{11})_v, \\ \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v = \frac{1}{2} (g_{11})_v, \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u = \frac{1}{2} (g_{22})_u, \\ \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2} G_u = (g_{12})_v - \frac{1}{2} (g_{22})_u, \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v = \frac{1}{2} (g_{22})_v. \end{cases} \quad (1.7)$$

**Notación.**

Denotaremos a  $E_u = E_1 = (g_{11})_1$ ,  $E_v = E_2 = (g_{11})_2$ ,  $F_u = F_1 = (g_{12})_1$ ,  $F_v = F_2 = (g_{12})_2$ ,  $G_u = G_1 = (g_{22})_1$  y  $G_v = G_2 = (g_{22})_2$ .

**Observaciones.**

1. Como  $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$ , se concluye que  $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1$  y  $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$ , está es, los ***símbolos de Christoffel*** son simétricos respecto a los índices inferiores.

2. Usando el sistema de ecuaciones (1.7), obtenemos que,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_1 + FE_2 - 2FF_1}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_1 - EE_2 - FE_1}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{GE_2 - FG_1}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{EG_1 - FE_2}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{GF_2 - \frac{1}{2}(GG_1 + FG_2)}{(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{-FF_2 + \frac{1}{2}(FG_1 + EG_2)}{(EG - F^2)}. \tag{1.8}
\end{aligned}$$

Para introducir la curvatura gaussiana  $K$  sobre una variedad riemanniana  $M$  con la métrica  $g$  se usará la relación mostrada en el libro *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, de M. do Carmo. Está es conocida como la **fórmula de Gauss** y será tomada como la definición.

**Definición 1.4.2 (Curvatura gaussiana)** Sean  $(M, g)$  una variedad riemanniana,  $\Gamma_{ij}^k$  los símbolos de Christoffel de la métrica  $g$  y  $E = g_{11}$ ; se define la **curvatura gaussiana**  $K$  por la relación:

$$-EK = (\Gamma_{12}^2)_1 - (\Gamma_{11}^2)_2 + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_2^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2. \tag{1.9}$$

Luego, si  $\tilde{g} = e^{2f}g$  es la métrica conforme a  $g$  entonces la curvatura gaussiana  $\tilde{K}$  está dada por:

$$-\tilde{E}\tilde{K} = (\tilde{\Gamma}_{12}^2)_1 - (\tilde{\Gamma}_{11}^2)_2 + \tilde{\Gamma}_{12}^1\tilde{\Gamma}_{11}^2 + \tilde{\Gamma}_{12}^2\tilde{\Gamma}_{12}^2 - \tilde{\Gamma}_{11}^2\tilde{\Gamma}_2^2 - \tilde{\Gamma}_{11}^1\tilde{\Gamma}_{12}^2. \tag{1.10}$$

**Definición 1.4.3 (Curvatura geodésica)** La curvatura geodésica en  $p \in \partial M$  está definida como:

$$h(p) = g(\nabla_{\partial_1}\partial_2, \partial_1)(p),$$

donde  $M = \{\partial_1, \partial_2\}$  es un marco local ortonormal tal que  $\partial_1$  es tangente a  $\partial M$  y  $\eta = \partial_2$  es normal a  $M$  en  $p$ . Se dice entonces que  $h$  es la **curvatura geodésica** en el punto  $p$ .

## 1.5 El Gradiente, la Divergencia y el Laplaciano

Sea  $|g|$  el determinante de la matriz  $g$  de dimensión 2 con componentes,

$$g_{11} = E, \quad g_{12} = g_{21} = F \quad \text{y} \quad g_{22} = G.$$

Es decir, el determinante  $|g|$  está dado por

$$|g| = EG - F^2 = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2.$$

La matriz inversa de  $g$  tiene componentes  $g^{jk}$ , donde  $j, k = 1, 2$ . Sea  $f$  una función definida en una variedad  $M$  y  $\{\partial_1, \partial_2\}$  base de  $T_p M$ .

### 1.5.1 El Gradiente

**Definición 1.5.1 (Gradiente)** Sean  $M$  una 2-variedad diferenciable y  $\varphi$  una función diferenciable  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Definimos el **gradiente** de  $\varphi$ , denotado por  $\nabla\varphi$ , como el campo vectorial en  $M$  para el cual:

$$\langle \nabla\varphi, v \rangle = v\varphi,$$

para todo  $v \in T_p(M)$ .

**Teorema 1.5.2 (Propiedades del Gradiente  $\nabla$ )** Sean  $f$  y  $h$  funciones diferenciables en  $M$ , donde  $M$  es una 2-variedad diferenciable, entonces,

$$\begin{aligned} \text{i). } \nabla(f+h) &= \nabla f + \nabla h, \\ \text{ii). } \nabla(fh) &= h(\nabla f) + f(\nabla h). \end{aligned} \tag{1.11}$$

### Cálculo del Gradiente en términos de las coordenadas

Como  $\langle \nabla f, v \rangle = v f$ , entonces existen funciones  $A, B$  tales que:

$$\nabla f = A\partial_1 + B\partial_2.$$

Ahora;

$$\begin{aligned} \langle \nabla f, \partial_1 \rangle &= \langle A\partial_1 + B\partial_2, \partial_1 \rangle = \partial_1 f = Ag_{11} + Bg_{21}, \\ \langle \nabla f, \partial_2 \rangle &= \langle A\partial_1 + B\partial_2, \partial_2 \rangle = \partial_2 f = Ag_{12} + Bg_{22}. \end{aligned}$$

Así tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} Ag_{11} + Bg_{21} = \partial_1 f, \\ Ag_{12} + Bg_{22} = \partial_2 f. \end{cases} \tag{1.12}$$

Multiplicando por  $g_{12}$  en la primera ecuación del sistema (1.12) y a la segunda ecuación por  $g_{11}$  al restarlas se tiene que:

$$B(g_{12}g_{21} - g_{11}g_{22}) = g_{12}\partial_1 f - g_{11}\partial_2 f.$$

Despejando  $B$  se obtiene,

$$B = \frac{g_{12}\partial_1 f - g_{11}\partial_2 f}{g_{12}g_{21} - g_{11}g_{22}} = \frac{g_{11}\partial_2 f - g_{12}\partial_1 f}{|g|}.$$

Por otro lado, multiplicando por  $g_{22}$  en la primera ecuación del sistema (1.12) y a la segunda ecuación por  $g_{21}$  al restarlas tenemos que:

$$A(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}) = g_{22}\partial_1 f - g_{21}\partial_2 f$$

y despejando  $A$ ,

$$A = \frac{g_{22}\partial_1 f - g_{21}\partial_2 f}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}} = \frac{g_{22}\partial_1 f - g_{21}\partial_2 f}{|g|}.$$

Por tanto el gradiente de  $f$ ,  $\nabla f$ , está dado como sigue;

$$\nabla f = \frac{1}{|g|}[(g_{22}\partial_1 f - g_{21}\partial_2 f)\partial_1 + (g_{11}\partial_2 f - g_{12}\partial_1 f)\partial_2].$$

Escribiendo el gradiente de  $f$  en términos de los coeficientes de la matriz inversa de  $g$ , se tiene que,

$$\nabla f = (g^{11}\partial_1 f + g^{21}\partial_2 f)\partial_1 + (g^{22}\partial_2 f + g^{12}\partial_1 f)\partial_2 = \sum_{l,k=1}^2 (g^{kl}\partial_l f)\partial_k.$$

## 1.5.2 La Divergencia

**Definición 1.5.3 (Divergencia)** Sea  $M$  una 2-variedad diferenciable. y  $X \in C^k(M)$ ,  $k \geq 1$  un campo vectorial, se define la **divergencia** de  $X$  como una función de valor real,  $\text{div}X : M \longrightarrow \mathbb{R}$ , por,

$$(\text{div}X)_p = \text{traza}(V \longmapsto D_V X)_p,$$

donde  $V$  es un campo vectorial en  $M$ .

**Teorema 1.5.4 (Propiedades de la divergencia)** Sea  $M$  una 2-variedad diferenciable,  $f$  una función definida en  $M$  y  $X, Y$  campos vectoriales en  $M$ , entonces,

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \text{div}(X + Y) &= \text{div}X + \text{div}Y, \\ \text{ii)} \quad \text{div}(fX) &= f \text{div}X + \langle Df, X \rangle. \end{aligned} \tag{1.13}$$

## Cálculo de la Divergencia

Recordemos que la conexión  $D$  satisface en una vecindad de  $p \in M$ :

$$D_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \partial_k. \quad (1.14)$$

Sea  $V \in T_p M$  un campo diferenciable y  $X$  un campo vectorial en la variedad  $M$ , entonces,

$$V = \sum_{j=1}^2 v_j \partial_j \quad \text{y} \quad X = \sum_{j=1}^2 x_j \partial_j.$$

Para calcular la divergencia, veamos primero que es  $D_V X$ , para esto se aplicaran las propiedades (1.2.1):

$$\begin{aligned} D_V X &= D_{(\sum_{i=1}^2 v_i \partial_i)} X = \sum_{i=1}^2 v_i D_{\partial_i} X = \\ &= \sum_{i=1}^2 v_i D_{\partial_i} \left( \sum_{j=1}^2 x_j \partial_j \right) = \sum_{i=1}^2 v_i \left( \sum_{j=1}^2 D_{\partial_i} x_j \partial_j \right) = \\ &= \sum_{i,j=1}^2 v_i \left( x_j D_{\partial_i} \partial_j + (\partial_i x_j) \partial_j \right) = \\ &= \sum_{i,j=1}^2 \left( v_i x_j D_{\partial_i} \partial_j + v_i (\partial_i x_j) \partial_j \right). \end{aligned}$$

Sustituyendo (1.14) en la ecuación anterior y reorganizando los términos se tiene que:

$$\begin{aligned} D_V X &= \sum_{i,j=1}^2 \left( v_i x_j \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \partial_k + v_i (\partial_i x_j) \partial_j \right) = \\ &= \sum_{i,j,k=1}^2 v_i x_j \Gamma_{ij}^k \partial_k + \sum_{i,j=1}^2 v_i (\partial_i x_j) \partial_j. \end{aligned}$$

Cambiando en la segunda expresión  $j$  por  $k$ , factorizando  $\partial_k$  y sumando sobre  $k$  se encuentra que,

$$\begin{aligned} D_V X &= \sum_{i,j,k=1}^2 v_i x_j \Gamma_{ij}^k \partial_k + \sum_{i,k=1}^2 v_i (\partial_i x_k) \partial_k = \\ &= \sum_{k=1}^2 \left( \sum_{i,j=1}^2 v_i x_j \Gamma_{ij}^k + \sum_{i=1}^2 v_i (\partial_i x_k) \right) \partial_k. \end{aligned}$$

Factorizando  $v_i$  y sumando sobre  $k$  e  $i$  se llega a que,

$$D_V X = \sum_{k,i=1}^2 v_i \left( \sum_{j=1}^2 x_j \Gamma_{ij}^k + (\partial_i x_k) \right) \partial_k.$$

Ahora, como la divergencia es la traza de la aplicación  $V \mapsto D_V X$ , se sigue que,

$$\operatorname{div}(X) = \sum_{i=1}^2 \left( (\partial_i x_i) + \sum_{j=1}^2 x_j \Gamma_{ij}^i \right). \quad (1.15)$$

### 1.5.3 El Laplaciano

**Definición 1.5.5 (Laplaciano)** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Para cualquier función  $f \in C^k(M)$ ,  $k \geq 2$ , definimos la función **laplaciano** de  $f$ , denotada como  $\Delta f$ , por,

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Si  $f, h \in C^k(M)$ ,  $k \geq 2$ , de la definición del laplaciano (1.5.5) y de las propiedades de la divergencia (1.13) se tiene que se cumple el siguiente teorema.

**Teorema 1.5.6 (Propiedades del Laplaciano)** Sean  $f, h \in C^k(M)$ ,  $k \geq 2$ , entonces,

$$\begin{aligned} \text{i). } \Delta(f+h) &= \Delta f + \Delta h, \\ \text{ii). } \Delta(fh) &= f\Delta h + h\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla h \rangle, \\ \text{iii). } \operatorname{div}(h\nabla f) &= h\Delta f + \langle \nabla h, \nabla f \rangle. \end{aligned} \quad (1.16)$$

### Cálculo del Laplaciano

**Proposición 1.5.7** Sea  $M$  una 2-variedad diferenciable y  $\{\partial_1, \partial_2\}$  una base de  $T_p M$ , donde  $p \in M$ . Entonces,

$$\sum_{j=1}^2 \left( \sum_{k=1}^2 \partial_j \left( \frac{1}{\sqrt{|g|}} \right) (\sqrt{|g|} g^{jk} \partial_k f) \right) + \sum_{i,j=1}^2 \left( \sum_{k=1}^2 g^{jk} \partial_k f \right) \Gamma_{ij}^j = 0.$$

**Demostración.**

Se tiene que,

$$\partial_j \left( \frac{1}{\sqrt{|g|}} \right) = -\frac{1}{2|g|^{\frac{3}{2}}} \{g_{22}(g_{11})_j + g_{11}(g_{22})_j + 2g_{12}(g_{12})_j\}.$$

Así que,

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^2 \left( \partial_j \left( \frac{1}{\sqrt{|g|}} \right) (\sqrt{|g|} g^{jk} \partial_k f) \right) &= \sum_{j,k=1}^2 \frac{-1}{2|g|^{\frac{3}{2}}} \{g_{22}(g_{11})_j + g_{11}(g_{22})_j + 2g_{12}(g_{12})_j\} (\sqrt{|g|} g^{jk} \partial_k f) = \\
&= -\frac{1}{2|g|} \sum_{j,k=1}^2 \{g_{22}(g_{11})_j + g_{11}(g_{22})_j + 2g_{12}(g_{12})_j\} (g^{jk} \partial_k f) = \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^2 \{g^{11}(g_{11})_j + g^{22}(g_{22})_j + 2g^{12}(g_{12})_j\} (g^{jk} \partial_k f).
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando (1.8),

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^2 \left( \sum_{k=1}^2 g^{jk} \partial_k f \right) \Gamma_{ij}^j &= \sum_{j,k=1}^2 \{\Gamma_{1j}^j + \Gamma_{2j}^j\} (g^{jk} \partial_k f) = \\
&= \sum_{k=1}^2 \{\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2\} (g^{1k} \partial_k f + g^{2k} \partial_k f) = \\
&= \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2} \{g^{11}(g_{11})_1 - g^{12}(g_{11})_2 + 2g^{12}(g_{12})_1 + g^{22}(g_{22})_1 + g^{12}(g_{11})_2 + g^{11}(g_{11})_2 + \\
&+ g^{12}(g_{22})_1 + 2g^{12}(g_{12})_2 - g^{12}(g_{22})_1 + g^{22}(g_{22})_2\} (g^{1k} \partial_k f + g^{2k} \partial_k f) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \{g^{11}(g_{11})_1 + g^{11}(g_{11})_2 + g^{22}(g_{22})_1 + g^{22}(g_{22})_2 + \\
&+ 2g^{12}(g_{12})_1 + 2g^{12}(g_{12})_2\} (g^{1k} \partial_k f + g^{2k} \partial_k f) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^2 \{g^{11}(g_{11})_j + g^{22}(g_{22})_j + 2g^{12}(g_{12})_j\} (g^{jk} \partial_k f).
\end{aligned}$$

De las dos ecuaciones anteriores, se concluye que,

$$\sum_{j=1}^2 \left( \sum_{k=1}^2 \partial_j \left( \frac{1}{\sqrt{|g|}} \right) (\sqrt{|g|} g^{jk} \partial_k f) \right) + \sum_{i,j=1}^2 \left( \sum_{k=1}^2 g^{jk} \partial_k f \right) \Gamma_{ij}^j = 0.$$

■

Teniendo en cuenta que  $\operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f$  y usando el resultado anterior (1.15) se tiene que,

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \sum_{i=1}^2 \left( \partial_i \left( \sum_{k=1}^2 g^{ik} \partial_k f \right) + \sum_{j=1}^2 \left( \sum_{k=1}^2 g^{jk} \partial_k f \right) \Gamma_{ij}^i \right) = \\
&= \sum_{i=1}^2 \left( \partial_i \left( \sum_{k=1}^2 \frac{\sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} g^{ik} \partial_k f \right) + \sum_{j=1}^2 \left( \sum_{k=1}^2 g^{jk} \partial_k f \right) \Gamma_{ij}^i \right) = \\
&= \sum_{i=1}^2 \left( \sum_{k=1}^2 \partial_i \left( \frac{1}{\sqrt{|g|}} \right) (\sqrt{|g|} g^{ik} \partial_k f) + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{k=1}^2 \partial_i (\sqrt{|g|} g^{ik} \partial_k f) + \sum_{j=1}^2 \left( \sum_{k=1}^2 g^{jk} \partial_k f \right) \Gamma_{ij}^i \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,k=1}^2 \partial_i (\sqrt{|g|} g^{ik} \partial_k f) + \sum_{i=1}^2 \left( \sum_{k=1}^2 \partial_i \left( \frac{1}{\sqrt{|g|}} \right) (\sqrt{|g|} g^{ik} \partial_k f) + \sum_{j=1}^2 \left( \sum_{k=1}^2 g^{jk} \partial_k f \right) \Gamma_{ij}^i \right).
\end{aligned}$$

Reemplazando los símbolos de Christoffel del sistema (1.8) y reagrupando términos se llega a que el Laplaciano  $\Delta f$  está dado por:

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i,k=1}^2 \partial_i (g^{ik} \sqrt{|g|} \partial_k (f)). \quad (1.17)$$

Entonces en el punto p,

$$\Delta f(p) = f_{11} + f_{22} + \frac{1}{2} \{ [f_1(g_{22})_1 - (g_{11})_1] + f_2[(g_{11})_2 - (g_{22})_2] \} - [f_1(g_{12})_2 + f_2(g_{12})_1], \quad (1.18)$$

donde  $\partial_1(f) = f_1$  y  $\partial_2(f) = f_2$ .

### Observación.

La ecuación (1.18) se puede escribir también como:

$$\begin{aligned}
\Delta f(p) &= f_{11} + f_{22} + \frac{1}{2} \{ [f_1 G_1 - E_1] + f_2 [(E_2 - G_2)] \} - [f_1 F_2 + f_2 F_1] = \\
&= f_{11} + f_{22} + \frac{1}{2} \{ f_1 [(g_{22})_1 - (g_{11})_1] + f_2 [(g_{12})_2 - (g_{22})_2] \} - [f_1 (g_{12})_2 + f_2 (g_{12})_1]. \quad (1.19)
\end{aligned}$$

## Capítulo 2

# Métricas Conformes

**Definición 2.0.1 (Métrica conforme)** Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana. Se dice que la métrica  $\tilde{g}$  es conforme a la métrica  $g$  si  $\tilde{g} = fg$  para alguna función suave y positiva  $f$  de  $M$  en  $\mathbb{R}$ .

**Observación.**

Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana y  $\tilde{g} = e^{2f}g$  una métrica conforme a la métrica  $g$ , entonces las componentes de  $\tilde{g}$  están dadas por,

$$\tilde{g}_{11} = \tilde{E} = e^{2f}E, \quad \tilde{g}_{12} = \tilde{g}_{21} = \tilde{F} = e^{2f}F \quad \text{y} \quad \tilde{g}_{22} = \tilde{G} = e^{2f}G.$$

Su matriz inversa  $\tilde{g}^{-1}$  tiene componentes,

$$\tilde{g}^{11} = \frac{\tilde{G}}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}, \quad \tilde{g}^{12} = \tilde{g}^{21} = \frac{-\tilde{F}}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2} \quad \text{y} \quad \tilde{g}^{22} = \frac{\tilde{E}}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}$$

y el sistema (1.8) se transforma en,

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{11}^1 &= \frac{\tilde{G}\tilde{E}_1 + \tilde{F}\tilde{E}_2 - 2\tilde{F}\tilde{F}_1}{2(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)}, \\ \tilde{\Gamma}_{11}^2 &= \frac{2\tilde{E}\tilde{F}_1 - \tilde{E}\tilde{E}_2 - \tilde{F}\tilde{E}_1}{2(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)}, \\ \tilde{\Gamma}_{12}^1 &= \frac{\tilde{G}\tilde{E}_2 - \tilde{F}\tilde{G}_1}{2(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)}, \\ \tilde{\Gamma}_{12}^2 &= \frac{\tilde{E}\tilde{G}_1 - \tilde{F}\tilde{E}_2}{2(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)}, \\ \tilde{\Gamma}_{22}^1 &= \frac{\tilde{G}\tilde{F}_2 - \frac{1}{2}(\tilde{G}\tilde{G}_1 + \tilde{F}\tilde{G}_2)}{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}, \end{aligned}$$

$$\tilde{\Gamma}_{22}^2 = \frac{-\tilde{F}\tilde{F}_2 + \frac{1}{2}(\tilde{F}\tilde{G}_1 + \tilde{E}\tilde{G}_2)}{(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)}, \quad (2.1)$$

donde,  $E_1 = (g_{11})_1$ ,  $E_2 = (g_{11})_2$ ,  $G_1 = (g_{22})_1$ ,  $G_2 = (g_{22})_2$ ,  $F_1 = (g_{12})_1 = (g_{21})_1$  y  $F_2 = (g_{12})_2 = (g_{21})_2$ .

**Proposición 2.0.2** Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana y  $\tilde{g} = e^{2f}g$  la métrica conforme a  $g$ , entonces los símbolos de Christoffel  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$  de la métrica  $\tilde{g}$  se relacionan con los  $\Gamma_{ij}^k$  de la métrica  $g$  como sigue:

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1 = \Gamma_{11}^1 + f_1 g_{11} g^{11} + (2f_1 g_{12} - f_2 g_{11}) g^{12}, \quad (2.2)$$

$$\tilde{\Gamma}_{11}^2 = \Gamma_{11}^2 + f_1 g_{11} g^{12} + (2f_1 g_{12} - f_2 g_{11}) g^{22}, \quad (2.3)$$

$$\tilde{\Gamma}_{12}^2 = \Gamma_{21}^1 + f_1 g_{22} g^{22} + f_2 g_{11} g^{12}, \quad (2.4)$$

$$\tilde{\Gamma}_{12}^2 = \Gamma_{12}^2 + f_1 g_{22} g^{21} + f_2 g_{11} g^{11}, \quad (2.5)$$

$$\tilde{\Gamma}_{22}^1 = \Gamma_{22}^1 + (2f_2 g_{21} - f_1 g_{22}) g^{11} + f_2 g_{22} g^{21}, \quad (2.6)$$

$$\tilde{\Gamma}_{22}^2 = \Gamma_{22}^2 + (2f_2 g_{21} - f_1 g_{22}) g^{12} + f_2 g_{22} g^{22}. \quad (2.7)$$

### Demostración.

Puesto que  $\tilde{g} = e^{2f}g$ , entonces usando el sistema anterior (2.1) tenemos que,

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{11}^1 &= \frac{\tilde{G}\tilde{E}_1 + \tilde{F}\tilde{E}_2 - 2\tilde{F}\tilde{F}_1}{2(\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2)} = \\ &= \frac{e^{2f}G(2f_1 e^{2f}E + e^{2f}E_1) + e^{2f}F(2f_2 e^{2f}E + e^{2f}E_2) - 2e^{2f}F(2f_1 e^{2f}F + e^{2f}F_1)}{2\{e^{2f}Ee^{2f}G - (e^{2f}F)^2\}} = \\ &= \frac{e^{4f}\{G(2f_1 E + E_1) + F(2f_2 E + E_2) - 2F(2f_1 F + F_1)\}}{e^{4f}\{2(EG - F^2)\}} = \\ &= \frac{GE_1 + FE_2 - 2FF_1}{2(EG - F^2)} + \frac{2f_1 EG + 2f_2 EF - 4f_1(F^2)}{2(EG - F^2)} = \\ &= \Gamma_{11}^1 + \frac{f_1 EG + f_2 EF - 2f_1(F^2)}{EG - F^2} = \\ &= \Gamma_{11}^1 + f_1 g_{11} g^{11} - f_2 g_{11} g^{12} + 2f_1 g_{12} g^{12}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\tilde{\Gamma}_{11}^1 = \Gamma_{11}^1 + f_1 g_{11} g^{11} + (2f_1 g_{12} - f_2 g_{11}) g^{12}.$$

De manera análoga se demuestran las ecuaciones (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) y (2.7). ■

Del sistema de ecuaciones dado en la Proposición 2.0.2, las ecuaciones (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) y (2.7) se pueden reescribir como:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{11}^1 &= \Gamma_{11}^1 + (f_1 g_{11} + f_1 g_{11} - f_1 g_{11})g^{11} + (f_1 g_{12} + f_1 g_{12} - f_2 g_{11})g^{21}, \\
\tilde{\Gamma}_{11}^2 &= \Gamma_{11}^2 + (f_1 g_{11} + f_1 g_{11} - f_1 g_{11})g^{12} + (f_1 g_{12} + f_1 g_{12} - f_2 g_{11})g^{22}, \\
\tilde{\Gamma}_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 + (f_1 g_{21} + f_2 g_{11} - f_1 g_{12})g^{11} + (f_1 g_{22} + f_2 g_{12} - f_2 g_{12})g^{22}, \\
\tilde{\Gamma}_{12}^2 &= \Gamma_{12}^2 + (f_1 g_{21} + f_2 g_{11} - f_1 g_{12})g^{11} + (f_1 g_{22} + f_2 g_{12} - f_2 g_{12})g^{21}, \\
\tilde{\Gamma}_{22}^1 &= \Gamma_{22}^1 + (f_2 g_{21} + f_2 g_{21} - f_1 g_{22})g^{11} + (f_2 g_{22} + f_2 g_{22} - f_2 g_{22})g^{21}, \\
\tilde{\Gamma}_{22}^2 &= \Gamma_{22}^2 + (f_2 g_{21} + f_2 g_{21} - f_1 g_{22})g^{12} + (f_2 g_{22} + f_2 g_{22} - f_2 g_{22})g^{22}.
\end{aligned}$$

De donde podemos encontrar una ecuación que las generaliza y está dada por,

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \sum_{l=1}^2 (f_i g_{jl} + f_j g_{il} - f_l g_{ij})g^{lk}, \quad (2.8)$$

donde  $i, j = 1, 2$ .

**Teorema 2.0.3** *Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana y  $\tilde{g} = e^{2f}g$  la métrica conforme a  $g$  entonces la curvatura gaussiana  $K$  de la métrica  $g$  en un punto  $p$  esta relacionada con la curvatura gaussiana  $\tilde{K}$  de la métrica  $\tilde{g}$  como sigue,*

$$K = e^{2f} \tilde{K} + \Delta f.$$

### **Demostración.**

Sea  $p \in M$ . Tomemos un sistema de coordenadas normales alrededor de  $M$ . Usando (1.10) y (2.8) tenemos que,

$$\begin{aligned}
-\tilde{E}\tilde{K} &= (\Gamma_{12}^2)_1 - (\Gamma_{11}^2)_2 + (f_1)_1 + (f_2)_2 + f_1[(g_{22})_1 + (g^{22})_1 - (g^{12})_2 - 2(g_{12})_2] + \\
&+ f_2[(g^{12})_1 + (g_{11})_2 + (g^{22})_2] + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + f_2(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) + \\
&+ \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + f_1[2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2].
\end{aligned}$$

Agrupando términos,

$$\begin{aligned}
-\tilde{E}\tilde{K} &= \left( (\Gamma_{12}^2)_1 - (\Gamma_{11}^2)_2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 \right) + f_{11} + f_{22} + \\
&+ f_1[(g_{22})_1 + (g^{22})_1 - (g^{12})_2 - 2(g_{12})_2 + 2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2] + \\
&+ f_2[(g^{12})_1 + (g_{11})_2 + (g^{22})_2 + \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1].
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior por (1.9), se tiene que,

$$\begin{aligned} -\tilde{E}\tilde{K} &= -EK + f_1[(g_{22})_1 + (g^{22})_1 - (g^{12})_2 - 2(g_{12})_2 + 2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2] + \\ &+ f_{11} + f_{22} + f_2[(g^{12})_1 + (g_{11})_2 + (g^{22})_2 + \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1]. \end{aligned}$$

Como  $(g^{ij})_k = -(g_{ij})_k$ , cuando  $i, j, k = 1, 2$  en el punto p, se obtiene,

$$\begin{aligned} -\tilde{E}\tilde{K} &= -EK + f_{11} + f_{22} + f_1[-(g_{12})_2 + \frac{1}{2}(g_{22})_1 - \frac{1}{2}(g_{11})_1] + \\ &+ f_2[-(g_{12})_1 + \frac{1}{2}(g_{11})_2 - \frac{1}{2}(g_{22})_2]. \end{aligned}$$

Como  $\tilde{E} = e^{2f}E$  y  $E = 1$  en el punto p, reemplazando, haciendo agrupación de términos y despejando la curvatura  $K$  llegamos a que,

$$\begin{aligned} K &= e^{2f}\tilde{K} + \left[ f_{11} + f_{22} + \frac{1}{2}\{f_1[(g_{22})_1 - (g_{11})_1] + f_2[(g_{12})_2 - (g_{22})_2]\} \right. \\ &- \left. [f_1(g_{12})_2 + f_2(g_{12})_1] \right]. \end{aligned}$$

Usando la ecuación (1.19) se concluye que,

$$K = e^{2f}\tilde{K} + \Delta f.$$

■

**Proposición 2.0.4** Sean  $(M, g)$  una 2-variedad riemanniana con frontera y  $\tilde{g} = e^{2f}g$  la métrica conforme a  $g$  con  $f$  suave sobre  $M$ . La curvatura geodesica  $\tilde{h}$  respecto a la métrica  $\tilde{g}$  está dada por,

$$\tilde{h} = e^{-f} \left( h + \frac{\partial f}{\partial \eta} \right). \quad (2.9)$$

### **Demostración.**

Sea  $p \in \partial M$ , y  $\{\partial_1, \partial_2\}$  un marco local ortonormal tal que el vector normal exterior respecto a la métrica  $g$  es tomado como  $\eta = \partial_2$ .

El vector normal exterior  $\tilde{\eta}$  con respecto a la métrica  $\tilde{g}$  esta dado por  $\tilde{\eta} = e^{-f}\eta$  y

$$\tilde{g}(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}) = e^{2f}g(\tilde{\eta}, \tilde{\eta}) = e^{2f}g(e^{-f}\tilde{\eta}, e^{-f}\tilde{\eta}) = e^{2f}e^{-2f}g(\eta, \eta) = g(\eta, \eta) = 1.$$

Por definición 1.2.1 y la ecuación (2.8), se tiene que,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\partial_1}\eta = \tilde{\nabla}_{\partial_1}\partial_2 &= (\Gamma_{12}^1 + f_2)\partial_1 + (\Gamma_{12}^2 + f_1)\partial_2 = \\
&= (\Gamma_{12}^1\partial_1 + \Gamma_{12}^2\partial_2) + f_2\partial_1 + f_1\partial_2 = \\
&= \sum_{l=1}^2 \Gamma_{12}^l\partial_l + f_2\partial_1 + f_1\partial_2 = \\
&= \nabla_{\partial_1}\partial_2 + f_2\partial_1 + f_1\partial_2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\tilde{\nabla}_{\partial_1}\eta = \nabla_{\partial_1}\eta + f_2\partial_1 + f_1\partial_2. \quad (2.10)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que  $g(\partial_1, \partial_2) = 0$  y usando la definici3n 1.2.1;

$$\begin{aligned}
\tilde{h} &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{\tilde{\partial}_1}\tilde{\partial}_2, \tilde{\partial}_1) = e^{2f}g(\tilde{\nabla}_{\tilde{\partial}_1}\tilde{\partial}_2, \tilde{\partial}_1) = \\
&= e^{2f}g(\tilde{\nabla}_{e^{-f}\partial_1}e^{-f}\partial_2, e^{-f}\partial_1) = \\
&= e^{2f}g(e^{-f}\tilde{\nabla}_{e^{-f}\partial_1}\partial_2 + e^{-f}(e^{-f}\partial_1)\partial_2, e^{-f}\partial_1) = \\
&= e^{2f}(e^{-2f})g(\tilde{\nabla}_{e^{-f}\partial_1}\partial_2, \partial_1) = \\
&= g(e^{-f}\tilde{\nabla}_{\partial_1}\partial_2, \partial_1).
\end{aligned}$$

Ahora usando (2.10),

$$\begin{aligned}
\tilde{h} &= e^{-f}g(\nabla_{\partial_1}\partial_2 + f_2\partial_1 + f_1\partial_2, \partial_1) = \\
&= e^{-f}[g(\nabla_{\partial_1}\partial_2, \partial_1) + g(f_2\partial_1, \partial_1)] = \\
&= e^{-f}[h + f_2].
\end{aligned}$$

As3 que,

$$\tilde{h} = e^{-f} \left( h + \frac{\partial f}{\partial \eta} \right).$$

■

## Capítulo 3

### Proyección estereográfica

Denotemos por  $\mathbb{R}$  al conjunto de los números reales y por  $\mathbb{R}^2$  al espacio producto formado por las duplas  $(x_1, x_2)$ , donde  $x_i \in \mathbb{R}$  para  $i = 1, 2$ . Sean  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  vectores de  $\mathbb{R}^2$ . El producto interno usual se define por,

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Y los vectores  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$  forman una base de  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 3.0.1 (Proyección estereográfica en el plano)** *Consideremos la circunferencia unitaria  $S^1$  y un punto  $N$  sobre ella. Sea  $S$  el punto en la circunferencia diametralmente opuesto a  $N$  y  $\Sigma$  la recta tangente a  $S^1$  en el punto  $S$ . Tomemos un punto  $M$  de  $S^1$  diferente de  $N$  y sea  $NM$  la recta determinada por los puntos  $N$  y  $M$ . Sea  $M'$  el punto de intersección de la recta  $NM$  con la recta  $\Sigma$ . Diremos que  $M'$  es **la proyección estereográfica**, con centro de proyección  $N$  del punto  $M$  de  $S^1$  a la recta  $\Sigma$ . (Ver Fig 3.1)*

*Esta correspondencia define una función biyectiva entre  $S^1 \setminus N$  y la recta  $\Sigma$ .*

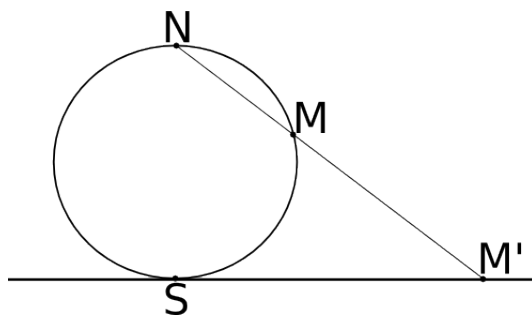


Figure 3.1: Proyección Estereográfica.

A continuación, con métodos elementales, extenderemos la proyección estereográfica a una función definida sobre el disco unitario con centro en el origen.

**Teorema 3.0.2** Sea  $S^1$  la circunferencia unitaria con centro en el origen. Sea  $M(x, y)$  un punto en la circunferencia distinto a  $N$ . La proyección estereográfica envía un punto  $M$  en el punto  $M'(u, -1)$  donde,

$$u = \frac{2x}{1-z}.$$

La función inversa de la proyección estereográfica esta dada por:  $x = \frac{4u}{u^2+4}$ ,  $z = \frac{u^2-4}{u^2+4}$ .

**Demostración.**

Por la definición de la proyección estereográfica, existe un número real  $\lambda$ , ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ) tal que,

$$\overrightarrow{NM'} = \lambda \overrightarrow{NM},$$

así que:

$$(u, -2) = \lambda(x, z - 1).$$

Entonces  $u = \lambda x$  y  $-2 = \lambda(z - 1)$ , de donde  $\lambda = \frac{2}{1-z}$ . y  $u = \frac{2x}{1-z}$ .

Por otro lado, como  $x = \frac{u}{\lambda}$  y  $z = \frac{\lambda-2}{\lambda}$ , se tiene que:

$$1 = x^2 + z^2 = \frac{u^2 + (\lambda - 2)^2}{\lambda^2}.$$

Por consiguiente,  $\lambda = \frac{u^2+4}{4}$  y

$$x = \frac{4u}{u^2+4}, z = \frac{u^2-4}{u^2+4}.$$

■

A continuación, con métodos elementales, extenderemos la proyección estereográfica a una función definida sobre el disco unitario 2-dimensional con centro en el origen; esta función conserva las dos propiedades enunciadas de la proyección estereográfica; esto es, envía rectas en rectas y los puntos sobre el disco en la recta  $z = -1$ .

**Teorema 3.0.3** Sea  $B^2$  el disco unitario con centro en el origen. La función definida por:

$$\phi(x, z) = \left( \frac{4x}{x^2+(z-1)^2}, \frac{x^2+(z+1)^2-4}{x^2+(z-1)^2} \right),$$

es una extensión de la proyección estereográfica  $\varphi : S^1 \setminus \{N\} \rightarrow \Sigma$  que envía  $B^2 \setminus \{N\}$  en el semiespacio  $\mathbb{R}_-^2 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : z \leq -1\}$ .

**Demostración.**

Consideremos los puntos  $A(-a, z)$  y  $B(a, z)$ , sobre la frontera del disco  $\{(x, y, z) \in B^2 \setminus \{N\} : x^2 + z^2 = 1\}$ , y el segmento  $\overline{AB}$ . Sea  $C = (x, z)$  un punto del interior del segmento  $AB$ . La proyección estereográfica envía los puntos  $A$  y  $B$  en los puntos:

$$\varphi(A) = A' = \left(\frac{-2a}{1-z}, -1\right), \quad \varphi(B) = B' = \left(\frac{2a}{1-z}, -1\right).$$

Ahora, considere la circunferencia que pasa por el polo norte  $N(0, 1)$ , y los puntos  $A'$  y  $B'$  como antes (Ver Fig 3.2).

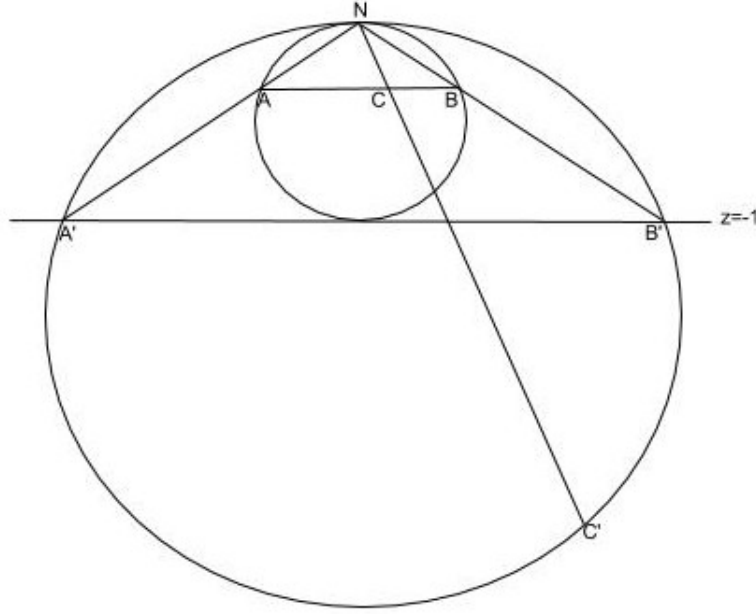


Figure 3.2:

El centro de esta circunferencia es el punto  $P = (0, w_0)$ , donde  $w_0 = \frac{-a^2}{(1-z)^2}$  que coincide con la intersección de las mediatrices del triángulo  $A'B'N$  y su radio  $r = (1 - w_0)$  es la distancia de este punto a uno de los vértices del triángulo; luego la ecuación que describe esta circunferencia es  $u^2 + (w - w_0)^2 = (1 - w_0)^2$ .

Definamos la función  $\phi$  de manera que envíe el punto  $C = (x, z)$  en el punto  $C'(u, w)$  de intersección de la circunferencia  $u^2 + (w - w_0)^2 = (1 - w_0)^2$  con la recta que contiene el segmento  $\overline{CN}$  y esta dada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} u &= \lambda x, \\ w &= 1 + \lambda(z - 1). \end{cases} \quad (3.1)$$

Entonces resolviendo simultaneamente la ecuación de la circunferencia y las ecuaciones de la recta que contienen a  $\overline{CN}$  se tiene que:

$$\lambda = \frac{-2(z-1)(1-w_0)}{x^2+y^2+(z-1)^2},$$

Teniendo en cuenta que  $w_0 = \frac{-a^2}{(1-z)^2}$  y  $a^2 + z^2 = 1$  se llega a que:

$$\lambda = \frac{4}{x^2+y^2+(z-1)^2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{cases} u &= \frac{4x}{x^2+(z-1)^2}, \\ w &= \frac{x^2+(z+1)^2-4}{x^2+(z-1)^2}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Es decir,

$$\phi(x, z) = \left( \frac{4x}{x^2+(z-1)^2}, \frac{x^2+(z+1)^2-4}{x^2+(z-1)^2} \right).$$

■

**Proposición 3.0.4** *La función  $\phi$  se puede reescribir en la forma:*

$$\phi(z) = \frac{4(z-N)}{\|z-N\|^2} + N,$$

donde  $z \in B^2 \setminus \{N\}$ ,  $z = (y, s)$  con  $s \in (-1, 1)$  y  $N$  es el polo norte.

**Demostración.**

Del teorema anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} \phi(y, s) &= \frac{(4y, y^2 + (s+1)^2 - 4)}{y^2 + (s-1)^2} = \\ &= \frac{(4y, y^2 + (s-1)^2 - 4 + (s+1)^2 - (s-1)^2)}{y^2 + (s-1)^2} = \\ &= \frac{(4y, 4(s-1))}{y^2 + (s-1)^2} + \frac{(0, 1)}{y^2 + (s-1)^2} = \\ &= \frac{4((y, s) - (0, 1))}{y^2 + (s-1)^2} + (0, 1). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\phi(z) = \frac{4(z - N)}{\|z - N\|^2} + N.$$

■

Observe que la función  $\phi$  se extiende naturalmente a una función, que llamaremos también  $\phi$ , definida sobre  $\mathbb{R}^2 \setminus \{N\}$ . Más aún  $\phi$  es su propia inversa.

**Lema 3.0.5** *La función  $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{N\}$  es su propia inversa.*

**Demostración.**

Se tiene que,

$$\begin{aligned} \phi(\phi(z)) &= 4 \frac{\phi(z) - N}{\|\phi(z) - N\|^2} + N = 4 \left( \frac{4 \frac{z - N}{\|z - N\|^2}}{\|4 \frac{z - N}{\|z - N\|^2}\|^2} \right) + N = \\ &= \frac{\frac{z - N}{\|z - N\|^2}}{\frac{\|z - N\|^2}{\|z - N\|^4}} + N = z - N + N = z. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\phi(\phi(z)) = z.$$

■

La función  $\phi$  también satisface la siguiente relación:

**Lema 3.0.6** *Si  $\phi(z) = z'$ , con  $\|\cdot\|_s$  la distancia tomada desde el polo sur ( $S$ ), entonces se cumple que:*

$$\|z'\|_s^2 = \frac{4\|z\|_s^2}{\|z\|_s^2 - 4s},$$

donde  $z = (y, s) \in \mathbb{R}^2$ .

**Demostración.**

Considere  $\|\cdot\|$  la distancia al origen, y  $\|\cdot\|_s$  la distancia tomada desde el polo sur ( $S$ ).

Dado que  $\phi(z) = 4 \frac{z - N}{\|z - N\|^2} + N$ , se tiene que,

$$\|\phi(z) - S\|^2 = \left\| 4 \frac{z - N}{\|z - N\|^2} + 2N \right\|^2$$

y

$$\begin{aligned}
||z'||_s^2 &= \frac{1}{||z - N||^4} (16||z - N||^2 + 16(z - N)N||z - N||^2 + 4||z - N||^4) = \\
&= \frac{||4N + 2(z - N)||^2}{||z - N||^2} = \\
&= 4 \frac{||z + N||^2}{||z - N||^2} = \\
&= 4 \frac{||z - S||^2}{||z + S||^2} = \\
&= \frac{4||z||^2}{||z - S + 2S||^2} = \\
&= \frac{4||z||_s^2}{||z - S||^2 + 4S(z - S) + 4}.
\end{aligned}$$

Así que,

$$||z'||_s^2 = \frac{4||z||_s^2}{||z||_s^2 - 4zS}.$$

Pero ya que  $z = (y, s)$ , entonces,  $z.S = s$  y

$$||z'||_s^2 = \frac{4||z||_s^2}{||z||_s^2 - 4s}.$$

■

## Capítulo 4

# Métricas Conformes a la métrica euclidiana en $B^2$ .

Sea  $\{e_1, e_2\}$  la base usual de  $\mathbb{R}^2$ . Denotemos por  $\delta_{ij} = e_i \cdot e_j$  donde  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  y  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ , el producto interno usual de  $\mathbb{R}^2$ .

Así, si  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  son dos vectores de  $\mathbb{R}^2$  entonces podemos escribir:

$$\delta_{ij}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

**Definición 4.0.1** Sean  $g$  una métrica riemanniana sobre  $\mathbb{R}^2$  y  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función biyectiva diferenciable con la derivada  $Df(p)$  biyectiva para todo  $p \in \mathbb{R}^2$ . La función  $f$  define una nueva métrica en  $\mathbb{R}^2$ , denotada por  $f^*(g)$  como:

$$f_p^*(g)(u, v) = g(Df(p)(u), Df(p)(v)) = g(\nabla_u f(p), \nabla_v f(p)),$$

donde  $u$  y  $v$  son vectores aplicados en un punto  $p$  de  $\mathbb{R}^2$  y  $Df(p)$  envía vectores en  $p$  a vectores en  $f(p)$ .

**Definición 4.0.2** Se dice que una **métrica**  $g$  sobre el disco euclidiano es **conforme** a la métrica euclidiana  $\delta_{ij}$  si existe una función positiva  $m$  tal que  $g = m\delta_{ij}$ .

Para nuestro caso tomaremos la función  $m = e^{2f}$ .

**Proposición 4.0.3** Sea  $\mathbb{R}^2_{-1} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : t \leq -1\}$ . Si  $\delta_{ij}$  es la métrica euclidiana en  $\mathbb{R}^2_{-1}$  inducida por la inclusión en  $\mathbb{R}^2$ , entonces la métrica  $\phi^*(\delta_{ij})$  inducida en  $B^2$  por la función  $\phi$  está dada por:

$$\phi_z^*(\delta_{ij}) = \frac{16\delta_{ij}}{(y^2 + (s-1)^2)^2}, \text{ donde } y, s \in \mathbb{R} \text{ y } z = (y, s) \in B^2.$$

**Demostración.**

Derivando parcialmente la función  $\phi$  se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{1}{(y^2 + (s-1)^2)^2} (4((s-1)^2 - y^2), -8y(s-1)) . \\ \frac{\partial \phi}{\partial s} &= \frac{1}{(y^2 + (s-1)^2)^2} (-8y(s-1), -4((s-1)^2 - y^2)) ,\end{aligned}$$

Tomando  $y = y_1$  y  $s = y_2$ , se sigue que:

$$\phi_z^*(\delta_{ij})(e_i, e_j) = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial y_i}, \frac{\partial \phi}{\partial y_j} \right\rangle = \frac{16\delta_{ij}}{(y^2 + (s-1)^2)^2}.$$

■

**Definición 4.0.4 (Dilatación)** Sea  $z' = (x, t) \in \mathbb{R}_{-1}^2$ , donde  $x, t \in \mathbb{R}$ . Tomando la distancia de un punto desde el polo sur tenemos que  $\|z'\|_s^2 = x_s^2 + (t+1)^2$ . La dilatación  $T : \mathbb{R}_{-1}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_{-1}^2$  se define como:

$$T(x, t) = (\beta x, \beta(t+1) - 1).$$

Para  $\beta > 0$ , esta función dilata o contrae los vectores desde el punto de coordenadas en  $(0, -1)$ .

**Proposición 4.0.5** La dilatación  $T$  cumple que  $T^*(\delta_{ij}) = \beta^2 \delta_{ij}$ .

**Demostración.**

Puesto que para  $x$  y  $t$ ,

$$dT(z')(e_1) = \frac{\partial T}{\partial x}(z') = \beta e_1$$

y

$$dT(z')(e_2) = \frac{\partial T}{\partial t}(z') = \beta e_2,$$

entonces para  $i = 1, 2$  se tiene que  $dT(z')(e_i) = \beta e_i$ , además:

$$T_{z'}^*(\delta_{ij}) = \langle dT(e_i), dT(e_j) \rangle = \langle \beta e_i, \beta e_j \rangle = \beta^2 \delta_{ij}.$$

■

**Teorema 4.0.6** Sean  $\beta, \psi$  funciones suaves tales que  $\beta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  y  $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ , donde ambas son aplicaciones biyectivas con diferencial biyectivo, entonces:

$$(\psi \circ \beta)^*(\delta_{ij}) = \beta^*(\psi^*(\delta_{ij})).$$

**Demostración.**

Sean  $v, w$  vectores de  $\mathbb{R}^2$  aplicados en un punto  $p_1 \in \mathbb{R}^2$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
 (\psi \circ \beta)_{p_1}^*(\delta_{ij})(v, w) &= \delta_{ij}(d(\psi \circ \beta)_{p_1}(v), d(\psi \circ \beta)_{p_1}(w)) = \\
 &= \delta_{ij}(d(\psi)_{\beta p_1}(d\beta_{p_1}(v)), d(\psi)_{\beta p_1}(d\beta_{p_1}(w))) = \\
 &= \psi^*(\delta_{ij})_{\beta p_1}(d\beta_{p_1}(v), d\beta_{p_1}(w)) = \\
 &= \beta_{p_1}^*(\psi_{\beta p_1}^*(\delta_{ij}))(v, w).
 \end{aligned}$$

■

**Teorema 4.0.7** *La función  $\phi^{-1} \circ T \circ \phi$  induce sobre el disco  $B^2$  la métrica:*

$$(\phi^{-1} \circ T \circ \phi)^*(\delta_{ij})(z) = \frac{16\beta^2}{[(\beta - 1)^2||z||^2 + 4s(\beta - 1) + 4\beta]^2} \delta_{ij},$$

conforme a la métrica euclidiana  $\delta_{ij}$ . Con esta métrica, la frontera del disco tiene curvatura geodésica uno.

**Demostración.**

Sean  $e_1, e_2$  los vectores de la base canónica de  $\mathbb{R}^2$  aplicados en el punto  $z = (y, s) \in B^2$ , donde  $y, s \in \mathbb{R}$ .

Sea  $z' = \phi(z)$ , aplicando el teorema anterior 4.0.6 tenemos que:

$$\begin{aligned}
 (\phi^{-1} \circ T \circ \phi)^*(\delta_{ij})(z) &= \phi_z^* T_{z'}^*((\phi^{-1})_{T(z')}^*(\delta_{ij})) = \\
 &= \phi_z^* T_{z'}^*\left(\frac{16}{[(\beta x)^2 + (\beta(t+1) - 2)^2]^2} \delta_{ij}\right) = \\
 &= \frac{16}{(\beta x^2 + (\beta(t+1) - 2)^2)^2} \phi_z^* T_{z'}^*(\delta_{ij}) = \\
 &= \frac{16\beta^2}{((\beta x)^2 + (\beta(t+1) - 2)^2)^2} \phi_z^*(\delta_{ij}) = \\
 &= \frac{16\beta^2}{((\beta x)^2 + (\beta(t+1) - 2)^2)^2} \cdot \frac{16\delta_{ij}}{(||y||^2 + (s-1)^2)^2}.
 \end{aligned}$$

Sea  $z' = (x, t) \in \mathbb{R}_{-1}^2$ .

Como  $||z'||^2 = x^2 + (t+1)^2$ , además  $||z'||^2 = \frac{4||z||^2}{||z||^2 - 4s}$  y  $t = \frac{||y||^2 + (s+1)^2 - 4}{||y||^2 + (s-1)^2} = \frac{||z||^2 - 4}{||z||^2 - 4s}$ ,

reemplazando encontramos que,

$$\begin{aligned}
& \frac{16\beta^2}{(\|\beta x\|^2 + (\beta(t+1) - 2)^2)^2} \cdot \frac{16}{(\|y\|^2 + (s-1)^2)^2} \delta_{ij} = \\
& = \frac{16\beta^2}{(\beta^2\|z'\|^2 - 4\beta(t+1) + 4)^2} \cdot \frac{16}{(\|z\|^2 - 4s)^2} \delta_{ij} = \\
& = \frac{256\beta^2 \delta_{ij}}{\left( \beta^2 \frac{4\|z\|^2}{\|z\|^2 - 4s} + 4 - 4\beta \left( \frac{\|z\|^2 - 4}{\|z\|^2 - 4s} + 1 \right)^2 (\|z\|^2 - 4s)^2 \right)} = \\
& = \frac{16\beta^2 \delta_{ij}}{((\beta-1)^2\|z\|^2 + 4s(\beta-1) + 4\beta)^2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(\phi^{-1} \circ T \circ \phi)^*(\delta_{ij})(z) = \frac{16\beta^2}{[(\beta-1)^2\|z\|^2 + 4s(\beta-1) + 4\beta]^2} \delta_{ij}.$$

Como la función  $\phi$  induce sobre  $B^2$  la métrica estándar con curvatura geodésica uno sobre su frontera y la métrica inducida por la función  $T$  sobre  $\mathbb{R}_{-1}^2$  es la métrica euclidiana, se concluye que la métrica inducida por la función  $\phi^{-1} \circ T \circ \phi$  tiene curvatura geodésica uno sobre la frontera del disco. ■

Del teorema anterior tenemos que la métrica inducida por la función  $(\phi^{-1} \circ T \circ \phi)$  es  $(\phi^{-1} \circ T \circ \phi)^*(\delta_{ij})(z) = e^{2f} \delta_{ij}$ , donde,

$$f(z) = \ln \frac{4\beta}{(\beta-1)^2\|z\|^2 + 4s(\beta-1) + 4\beta} \quad \text{y } z = (y, s).$$

**Proposición 4.0.8** *La función  $f : B^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\beta > 0$ , definida por:*

$$f(x, y) = \ln \frac{4\beta}{(\beta-1)^2(x^2 + (y+1)^2) + 4y(\beta-1) + 4\beta},$$

*satisface el problema:*

$$\Delta f = 0 \text{ en } B^2 \text{ y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} + 1 = e^f \text{ sobre } S^1,$$

donde,  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  es el Laplaciano de la función  $f$  en  $\mathbb{R}^2$  y

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x, y) = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot (x, y),$$

es la derivada con respecto a la normal exterior  $\eta = (x, y)$ .

**Demostración.**

Sea  $C = (\beta - 1)^2(x^2 + y^2 + (z + 1)^2) + 4z(\beta - 1) + 4\beta$ , entonces  $u = \frac{4\beta}{C}$ .

Ahora derivando parcialmente se llega a que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-2(\beta - 1)^2 x}{C}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{2(\beta - 1)^2(y + 1) + 4(\beta - 1)}{C}.\end{aligned}$$

De aquí,

$$\frac{\partial f}{\partial \eta}(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = -\frac{2(\beta - 1)^2 x^2 + 2(\beta - 1)^2 y(y + 1) + 4y(\beta - 1)}{C};$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \eta}(x, y) &= \frac{-1}{C}[(\beta - 1)^2(x^2 + y(y + 1)) + 4y(\beta - 1) + \{(\beta - 1)^2 x^2 + y(y + 1)(\beta - 1)^2\}] = \\ &= \frac{-1}{C}[(\beta - 1)^2(x^2 + (y + 1)^2) + 4y(\beta - 1) + 4\beta + \\ &+ \{(\beta - 1)^2(x^2 + (y + 1)(y - 1)) - 4\beta\}] = \\ &= \frac{-1}{C}[C + \{(\beta - 1)^2(x^2 + y^2 - 1) - 4\beta\}] = \\ &= -1 - \frac{1}{C}\{(\beta - 1)^2(x^2 + y^2 - 1) - 4\beta\}.\end{aligned}$$

Como se está sobre  $S^1$ , se tiene que  $x^2 + y^2 = 1$ , además reemplazando  $\frac{1}{C} = \frac{e^f}{4\beta}$  y simplificando se concluye que:

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = -1 - e^f.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{4(\beta - 1)^4 x^2}{C^2} - \frac{2(\beta - 1)^2}{C}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{[2(\beta - 1)^2(y + 1 + 4(\beta - 1))]^2}{C^2} - \frac{2(\beta - 1)^2}{C},\end{aligned}$$

Sumando estas dos últimas igualdades, encontramos que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f = 0 \text{ en } B^2.$$

■

**Corolario 4.0.9** *Para todo  $\beta > 0$ , la métrica  $\tilde{g} = e^{2f}\delta_{ij}$  conforme a la métrica euclidiana donde,*

$$f(z) = \ln \frac{4\beta}{(\beta - 1)^2 ||z||^2 + 4s(\beta - 1) + 4\beta}$$

*y  $z = (y, s)$ , es una métrica con curvatura gaussiana 0 y curvatura geodésica 1.*

**Demostración.** Se sigue directamente del teorema 2.0.3, del teorema 2.0.4 y el teorema anterior. ■

# Conclusiones

1. Dadas una variedad riemanniana 2-dimensional  $(M, g)$  con frontera y una métrica  $\tilde{g}$  conforme a  $g$ , se dieron las relaciones entre los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  y  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ , las curvaturas gaussianas  $K$  y  $\tilde{K}$  y las curvaturas geodésicas  $h$  y  $\tilde{h}$  de las variedades  $(M, g)$  y  $(M, \tilde{g})$  respectivamente.
2. Se extendió la proyección estereográfica  $\varphi : S^1 \setminus \{N\} \rightarrow \Sigma$  a una función que envía  $B^2 \setminus \{N\}$  en el semiespacio  $\mathbb{R}_-^2 = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : z \leq -1\}$ , dada por

$$\phi(x, z) = \left( \frac{4x}{x^2 + (z-1)^2}, \frac{x^2 + (z+1)^2 - 4}{x^2 + (z-1)^2} \right).$$

3. Usando la proyección estereográfica extendida al disco, se construyó una familia de métricas sobre el disco conformes a la métrica euclidiana y se demostró que dichas métricas tienen curvatura Gaussiana 0 sobre el disco y curvatura geodésica 1 sobre la frontera del disco.

# Referencias

1. GARCÍA, G., ORTIZ, A. (2013). *La Proyección Estereográfica*. Universidad del valle, Cali, Colombia.
2. Ortiz, A. (2010). *Soluciones subcríticas en el problema de prescribir curvatura media sobre la bola* (Tesis de maestría). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
3. Do Carmo, M. (1993). *Riemmanian Geometry*. Instituto de Matematica Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brazil.
4. Do Carmo, M. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Instituto de Matematica Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brazil.
5. Do Carmo, M. (1971). *Differential Forms and Applications*. Instituto de Matematica Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brazil.