

GAS DE CHAPLYGIN EN TEORÍAS ESCALAR-TENSORIALES DE ENERGÍA OSCURA

GUSTAVO ADOLFO PARRA CERQUERA



**Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Programa Académico de Física
Santiago de Cali
2014**

GAS DE CHAPLYGIN EN TEORÍAS ESCALAR-TENSORIALES DE ENERGÍA OSCURA

GUSTAVO ADOLFO PARRA CERQUERA

Trabajo de grado presentado al Programa Académico de Física como requisito para
optar al título de Físico

Director

Dr. LUIS NORBERTO GRANDA VELÁSQUEZ

**Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Programa Académico de Física
Santiago de Cali
2014**

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Programa Académico de Física
Santiago de Cali
2014

AUTOR: GUSTAVO ADOLFO PARRA CERQUERA, 1991

TÍTULO: GAS DE CHAPLYGIN EN TEORÍAS ESCALAR-TENSORIALES DE ENERGÍA OSCURA

Palabras clave: energía oscura, gas de chaplygin, gas de chaplygin generalizado, gas de chaplygin modificado, Gauss, Bonnet.

Nota de aprobación

El trabajo de grado titulado **Gas de Chaplygin en teorías escalar-tensoriales de energía oscura**, presentado por la estudiante **Gustavo Adolfo Parra Cerquera**, para optar al título de Físico, fue revisado por el jurado y calificado como:

APROBADO () NO APROBADO ()

Jurado

Director
Dr. Luis Norberto Granda
Velásquez

Índice general

1. INTRODUCCIÓN	4
1.1. Un universo en expansión acelerada	4
1.2. Universo homogéneo e isótropo	6
1.3. Métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)	6
1.3.1. Ecuaciones de evolución	6
1.3.2. Ecuación de estado	8
1.4. Gas de Chaplygin	9
2. MODELO	13
2.1. Ecuaciones en términos de la variable de Slow-Roll	15
3. Dinámica cosmológica	17
3.1. Dinámica para $V = 0$	17
3.1.1. Dinámica con gas de Chaplygin - $V = 0$	17
3.1.2. Dinámica con gas de Chaplygin generalizado - $V = 0$	19
3.1.3. Dinámica con gas de Chaplygin modificado - $V = 0$	20
3.2. Dinámica para $V \neq 0$	23
3.2.1. Dinámica con gas de Chaplygin - $V \neq 0$	23
3.2.2. Dinámica con gas de Chaplygin generalizado - $V \neq 0$	25
3.2.3. Dinámica con gas de Chaplygin modificado - $V \neq 0$	26
3.2.4. Solución sin restricción de H^2	28
4. Conclusiones	30

A. Tensor Energía-Momento correspondiente con el campo escalar	31
B. Tensor Energía-Momento correspondiente al acople cinético	33
C. Tensor Energía-Momento correspondiente al acople GB	36
Bibliografía	40

RESUMEN

Basándose en los trabajos [1] y [2], se estudian las características de la energía oscura para un acople cinético no mínimo a la curvatura y un acoplamiento de Gauss-Bonnet, utilizando tres modelos: gas de Chaplygin con una relación entre la densidad y la presión de la forma $p = -\frac{A}{\rho}$, gas de Chaplygin generalizado de la forma $p = -\frac{A}{\rho^\alpha}$, gas de Chaplygin modificado de la forma $p = B\rho - \frac{A}{\rho^\alpha}$, donde A, B y α son constantes.

Se estudia dos casos diferentes, potencial nulo y potencial no nulo, para los cuales se determinan las condiciones del campo escalar para satisfacer la ecuación diferencial. Además, se parte de un campo escalar directamente proporcional al logaritmo natural del factor de escala y un potencial dependiente del cuadrado del parámetro de Hubble, con el fin de mostrar que siempre y cuando se cumplan ciertas restricciones en los parámetros del modelo, se satisface la solución para cualquier escogencia físicamente posible del parámetro de Hubble.

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

1.1. Un universo en expansión acelerada

Se sabe por un gran número de observaciones que el universo en la actualidad no solo se está expandiendo, sino que lo hace de una manera acelerada. Entre los experimentos se encuentra la observación de supernovas (SN Ia) [3, 4, 5], medición de rayos-X de cúmulos de galaxias [6, 7], y el análisis de la radiación cósmica de fondo (RCF¹) [8, 9, 10, 11], en el cual también se observa la anisotropía del espectro y que aparentemente vivimos en un universo plano. El hecho de que el universo se esté expandiendo de una manera acelerada no concuerda en principio con la TGR², por ende se considera que la densidad de energía del universo actual está dominada por un fluido con presión negativa que se conoce como “energía oscura” y que es capaz de producir la aceleración. Junto con la energía oscura se predice además un tipo de materia diferente a la materia ordinaria³ conocida como “materia oscura” que es responsable de eventos gravitatorios en estrellas y galaxias, así como de las anisotropías del CMB. De acuerdo a estudios [7], se estima que la densidad de energía actual del universo está distribuida de la siguiente manera 68.3 % de energía oscura, 26.8 % de materia oscura y 4.9 % de materia ordinaria.

Sin embargo, la introducción de la energía oscura presenta nuevos interrogantes acerca de el modelo teórico que más se aproxime a las observaciones. El modelo estándar o Lambda-Cold Dark Matter (Λ CDM) consiste en agregar una constante (Λ) a las ecuaciones de campo de Einstein [12, 13] y considerar un tipo de materia oscura en la cual la mayoría de sus partículas se mueven mucho más lento que la velocidad de la luz, que se conoce como materia oscura fría [14]; este modelo coincide bien con observaciones recientes pero tiene algunas inconsistencias, entre ellas, el hecho de que sea una constante, implica que el universo tuvo un comportamiento similar en todas sus etapas, lo que lleva al problema de la coincidencia cósmica [15, 16] el cual explica que el universo tuvo que presentar cambios en la densidad de materia, radiación y energía oscura que involucraron cambios en la aceleración, para tener un universo como el que conocemos en

¹Cosmic Microwave Background

²Teoría General de la Relatividad

³La materia ordinaria compone todas las estructuras del universo observable

la actualidad, además de contradecirse también con la época de expansión desacelerada [17, 18]; adicionalmente se tiene “el problema de la constante cosmológica” [19] el cual consiste en que la predicción de la teoría cuántica de campos de la constante Λ y su valor experimental se diferencian en un orden de magnitud de 120. Existen también modelos de campo escalar de energía oscura, los cuales permiten una ecuación de estado variable con el tiempo, por ende, se pueden adaptar a los diferentes estados del universo en sus diferentes épocas lo cual no es posible con la ecuación de estado “ $w = \frac{p}{\rho} = -1$ ” del Λ CDM.

Entre estos modelos de campo escalar se encuentra Quintessence [15, 20] que se describe por un campo escalar ϕ mínimamente acoplado a la gravedad junto con un potencial que depende explícitamente del campo, lo cual lleva a una ecuación de estado dependiente del campo y del potencial con un rango de variación $-1 \leq w \leq \frac{1}{3}$, donde el límite $w = -1$ reproduce el modelo de la constante cosmológica y $w = \frac{1}{3}$ la ecuación de estado para la radiación. Le sigue el modelo K-essence [21, 22] en el que se reemplaza el potencial con la posibilidad de un campo escalar con un término no canónico de la energía cinética que conlleva a una ecuación de estado variable. El campo de Tachyon [23, 24] es un modelo que nace de la teoría de cuerdas, y al igual que el quintessence muestra una ecuación de estado variable, con la diferencia que solo hay dependencia del campo y no del potencial. El modelo de campo fantasma [25, 26] abarca la posibilidad de una ecuación de estado $w < -1$. Aparte de los modelos de campo escalar, se encuentra el gas de Chaplygin [27], que involucra un fluido con una ecuación de estado específica, así como el gas generalizado [28] y el gas modificado de Chaplygin [29] que agregan variables a dicha ecuación de estado.

Posteriormente se realizan modificaciones a los modelos anteriores en busca de que sus predicciones sean más acertadas teniendo en cuenta las correcciones cuánticas, por lo que se agrega a la teoría campos escalares con acoples no mínimos los cuales se usaron para estudiar el principio de inflación [30, 31, 32, 33, 34] y además para dar una posible fuente de energía oscura [35, 36, 37, 38]; entre los acoples no-mínimos se destacan los acoples cinéticos como se puede evidenciar en [39, 40, 41, 32]. Adicionalmente se utiliza el acople de Gauss-Bonnet [42, 43, 44, 45, 46] el cual es topológicamente invariante en cuatro dimensiones, por lo que en principio no afecta la ecuación de movimiento, pero al acoplarse con el campo escalar mediante una función arbitraria F es capaz de cambiar la dinámica del problema.

Por otro lado, existen teorías como la gravedad modificada [47, 48, 49] que asume la teoría general de la relatividad como una aproximación de una teoría más general, introduciendo funciones arbitrarias del escalar de Ricci $f(R)$, lo cual sería capaz de explicar la evolución del universo sin introducir los conceptos de materia y energía oscura; y más reciente la teoría de la gravedad extendida [50] que es una consecuencia de la dinámica Newtoniana modificada MoND [51, 52] la cual estudia el replanteamiento de la segunda ley de Newton, al afirmar que la fuerza no siempre es directamente proporcional a la aceleración, en vez de eso, varía según la distancia e interacción que tengan los cuerpos.

En este trabajo se estudia un modelo escalar-tensorial, con un acople no-mínimo cinético a la curvatura junto con un acople de Gauss-Bonnet dado por una función arbitraria del campo escalar. Se toma como un hecho la isotropía y homogeneidad a gran escala del universo, por ende se trabaja con la métrica FRW [53] con $K=0$. Se analiza las ecuaciones

de movimiento usando los modelos del gas de Chaplygin, gas de Chaplygin generalizado y gas de Chaplygin modificado para un potencial cero y un potencial general.

1.2. Universo homogéneo e isótropo

Las observaciones de la radiación cósmica de fondo (CMB) [54] han mostrado que el universo actual tiene propiedades isótropas⁴, lo cual da indicios de que el universo es plano⁵ [55, 56]. Además, las diferentes observaciones a cúmulo de galaxias [57] muestran que el universo es aproximadamente homogéneo⁶ a grandes escalas. El suponer estas características especiales de la isotropía y homogeneidad a gran escala del universo se conoce como el principio cosmológico [58]

1.3. Métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

La métrica FRW es una solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein que se obtiene partiendo de la suposición de validez del principio cosmológico (homogeneidad e isotropía a grandes escalas) y asumiendo que la componente espacial es dependiente del tiempo y está dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [dx^2 + dy^2 + dz^2], \quad (1.1)$$

donde x , y y z son las coordenadas espaciales, t es el tiempo cósmico, y $a(t)$ es el factor de escala y el causante de la expansión acelerada del universo y de la dinámica del mismo. El factor de escala $a(t)$ se puede determinar por medio de las ecuaciones de Einstein.

1.3.1. Ecuaciones de evolución

Tomando las ecuaciones de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

Se puede calcular el factor de escala $a(t)$, así como la evolución temporal de la ecuación de estado. Donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, el cual depende de la métrica y sus derivadas, R es el escalar de Ricci que se genera en la contracción de dos índices del tensor de Ricci, y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía - momento. En la métrica FRW las componentes no-nulas del tensor de Ricci son:

⁴Lo que implica que sus propiedades físicas no dependen de la dirección de observación

⁵Quiere decir que la constante K en la métrica FRW es cero y así se tomará durante todo el texto

⁶La materia se distribuye por igual en todo el espacio

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad (1.3)$$

$$R_{ij} = a^2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} \right) \delta_{ij}, \quad (1.4)$$

$$R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right). \quad (1.5)$$

Considerando un fluido perfecto, el tensor de energía - momento se expresa.

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

Donde ρ y p son la densidad de energía y presión del fluido. Así pues, usando las ecuaciones (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) y (1.6) se determinan dos ecuaciones independientes:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} = \frac{\kappa^2\rho}{3}, \quad (1.7)$$

$$-3H^2 - 2\dot{H} = \kappa^2 p, \quad (1.8)$$

donde H es el parámetro de Hubble y estas relaciones se conocen como las ecuaciones de Friedmann. Derivando (1.7) y reemplazando en (1.8) se llega a la ecuación de continuidad,

$$\dot{\rho} + 3H(p + \rho) = 0. \quad (1.9)$$

Ahora derivando H^2 y por medio de (1.7) y (1.8) se encuentra:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6}(3p + \rho). \quad (1.10)$$

Debido a que el factor de escala $a(t)$ acompaña la componente espacial de la métrica, se obtiene un universo acelerado solo si la segunda derivada de este factor es positiva, por lo tanto se concluye que existe una expansión acelerada solo si se cumple la siguiente condición:

$$3p + \rho < 0. \quad (1.11)$$

De esta manera, la energía oscura es un fluido que debe tener una presión negativa para lograr modelar un universo en expansión acelerada.

1.3.2. Ecuación de estado

Se considera que el universo está lleno de un fluido barotrópico perfecto, el cual tiene una ecuación de estado.

$$w = \frac{p}{\rho}, \quad (1.12)$$

y asumiendo que la ecuación de estado w es constante. Con las ecuaciones (1.7) (1.8) (1.9) se obtiene.

$$H = \frac{2}{3(t-t_0)(w+1)}, \quad (1.13)$$

$$a(t) \propto (t-t_0)^{\frac{2}{3(w+1)}}, \quad (1.14)$$

$$\rho \propto a^{-3(w+1)}, \quad (1.15)$$

donde t_0 es una constante de integración. Se evidencia por (1.13) que la solución tiene la restricción $w = -1$. Para un universo dominado por radiación se tiene que $p = \frac{\rho}{3}$ o $w = 1/3$, mientras que para un universo dominado por materia ordinaria esta no influye en la expansión por lo que la presión es nula o $w = 0$. Para ambas situaciones se tiene de acuerdo a (1.14) y (1.15).

$$a(t) \propto (t-t_0)^{\frac{1}{2}}; \quad \rho \propto a^{-4} \quad \text{Radiación}, \quad (1.16)$$

$$a(t) \propto (t-t_0)^{\frac{2}{3}}; \quad \rho \propto a^{-3} \quad \text{Materia}. \quad (1.17)$$

Sin embargo, ninguno de los dos casos cumple la condición (1.11), por lo cual reproducen un universo de expansión desacelerada. Reemplazando la ecuación de estado en (1.11), muestra que para un universo con expansión acelerada se debe cumplir que $w < -\frac{1}{3}$. Para lograr esta condición se debe introducir un nuevo fluido que pueda contribuir a la densidad de energía y presión, llamado “energía oscura”. De acuerdo a estas condiciones, se puede notar que no se puede conseguir un universo en expansión acelerada con la gravedad Newtoniana; por ejemplo, si se supone una esfera de radio a y densidad de energía ρ , combinando la ley de gravitación universal [59] y la segunda ley de Newton para una masa en esta esfera, se tiene:

$$m\ddot{a} = -\frac{Gm}{a^2} \left(\frac{4\pi a^3 \rho}{3} \right), \quad (1.18)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho. \quad (1.19)$$

La diferencia de (1.19) con (1.10), es que los efectos relativistas implican la inclusión de la presión, lo que permite la posibilidad con una presión negativa de tener $\ddot{a} > 0$ para la expansión acelerada; contrario a (1.19) que solo es posible $\ddot{a} < 0$ que reproduce una expansión desacelerada.

De acuerdo a la ecuación de continuidad (1.9), si se toma la ecuación de estado $w = -1$ la densidad de energía es constante. En este caso el parámetro de Hubble también es constante, debido a (1.7), lo que lleva a un factor de escala.

$$a \propto e^{Ht}. \quad (1.20)$$

Hasta ahora se proponen soluciones con una ecuación de estado constante que satisface $w \geq -1$, no obstante se puede considerar un campo fantasma de la energía oscura para el cual la ecuación de estado satisface $w < -1$, pero bajo esta condición la ecuación (1.14) describe un universo en contracción, sin embargo hay otra solución dada por.

$$a(t) \propto (t_s - t)^{\frac{2}{3(w+1)}}, \quad (1.21)$$

donde t_s es una constante de integración, esta ecuación corresponde a una solución super inflacionaria, donde se encuentra que:

$$H = \frac{n}{t_s - t}, \quad (1.22)$$

donde,

$$n = -\frac{2}{3(1+w)} > 0, \quad (1.23)$$

y

$$R = 6(2H^2 + \dot{H}) = \frac{6n(2n+1)}{(t_s - t)^2}. \quad (1.24)$$

Se observa que el parámetro de Hubble diverge cuando el tiempo tiende a t_s , lo que corresponde a una densidad de energía infinita en un tiempo finito; así como la curvatura también tiende a infinito cuando el tiempo se acerca a t_s , esto se conoce como una singularidad Big Rip [60].

1.4. Gas de Chaplygin

Existe un tipo de modelo de energía oscura que involucra un fluido conocido como gas de Chaplygin. Este fluido describe la aceleración del universo en la época actual y su ecuación de estado está representada por:

$$p = -\frac{A}{\rho}, \quad (1.25)$$

donde A es una constante positiva.

La ecuación de estado del gas de Chaplygin (1.25) puede ser reemplazada en la ecuación de continuidad (1.9) para ser integrada, de lo cual se obtiene.

$$\rho = \sqrt{A + \frac{B}{a^6}}, \quad (1.26)$$

siendo B una constante de integración. Tomando los límites asintóticos de esta ecuación se puede ver que:

$$\rho \sim \frac{\sqrt{B}}{a^3}, \quad (1.27)$$

para $a \ll (\frac{B}{A})^{1/6}$ y.

$$\rho \sim \sqrt{A}, \quad (1.28)$$

para $a \gg (\frac{B}{A})^{1/6}$. Si este resultado de la densidad se reemplaza en (1.25), se llega a que $p \sim -\sqrt{A}$, lo cual implica $\rho \sim -p$.

Estos son unos resultados interesantes ya que cuando “a” tiende al límite inferior, es decir a tiempos tempranos, la densidad del gas es proporcional con a^{-3} que corresponde a un universo dominado por materia como se ve en (1.17). Por el contrario cuando “a” tiende al límite superior, es decir a tiempo presente, el gas predice una aceleración con $w = -1$, es decir con el modelo de la constante cosmológica. La posibilidad de representar estas dos etapas del universo hacen del gas de Chaplygin un modelo interesante capaz en principio de unificar los términos de materia oscura y energía oscura.

Al agregarse una variable más en forma de exponente a la ecuación de estado (1.25) del gas de Chaplygin, se obtiene el gas de Chaplygin generalizado.

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha}. \quad (1.29)$$

Reemplazando en la ecuación de continuidad (1.9), se obtiene la relación para la densidad.

$$\rho = \left(\frac{B}{a^{3(\alpha+1)}} + A \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (1.30)$$

Para la cual, los límites asintóticos son

$$\rho \sim \frac{B^{\frac{1}{\alpha+1}}}{a^3}, \quad (1.31)$$

para $a \ll \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{3(\alpha+1)}}$, y

$$\rho \sim A^{\frac{1}{\alpha+1}}, \quad (1.32)$$

para $a \gg \left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{3(\alpha+1)}}$. Si este resultado de la densidad de energía se reemplaza en (1.29) se llega a que $p \sim -A^{\frac{1}{\alpha+1}}$, lo cual implica $\rho \sim -p$. Se pueden observar las mismas características del gas de Chaplygin, con la ventaja de tener límites asintóticos regulables por medio de α .

Si se le agrega un término proporcional a la densidad a la ecuación (1.29) se obtiene el gas modificado de Chaplygin.

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha} + B\rho. \quad (1.33)$$

Reemplazando en (1.9) e integrando, se obtiene

$$\rho = \left(\frac{A}{B+1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \left(\frac{1}{BW_r^{\alpha+1}} + 1\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (1.34)$$

donde $W_r = \frac{W}{W_0}$ con $W = a^{3(B+1)}$ y $W_0 = a_0^{3(B+1)}$, y la constante de integración se tomó como $D = \frac{AW_0^{\alpha+1}}{B}$.

Para un factor de escala grande se tiene que $W_r \gg 1$, lo que implica de (1.34) que

$$\rho \sim \left(\frac{A}{B+1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}, \quad (1.35)$$

Reemplazando en (1.33)

$$p \sim -\left(\frac{A}{B+1}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}, \quad (1.36)$$

Lo que conlleva a que $\rho \sim -p$ como en los anteriores modelos. Usando el límite $W_r \ll 1$ en (1.34)

$$\rho \sim \left(\frac{A}{B(B+1)}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \frac{1}{W_r}, \quad (1.37)$$

y sustituyendo en (1.33), se obtiene

$$p \sim B \left(\frac{A}{B(B+1)}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \frac{1}{W_r}. \quad (1.38)$$

Por lo que para un factor de escala pequeño, el gas de Chaplygin modificado se comporta con una ecuación de estado $P = B\rho$, donde B es una constante positiva. Este resultado muestra que este modelo intercala entre una fase del universo dominada por materia, con una ecuación de estado $w = B$ y una fase de Sitter $p \sim -\rho$. Además si en (1.34) se toma $W_r = 1$, la densidad toma la forma.

$$\rho = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (1.39)$$

Reemplazando este valor de la densidad de energía en (1.33) se obtiene una presión cero. En conclusión este modelo de el gas modificado de Chaplygin reproduce un universo en tres fases límites, con las siguientes ecuaciones de estado:

$$w = \begin{cases} -1 & \text{para } W_r \gg 1, \\ 0 & \text{para } W_r = 1, \\ B & \text{para } W_r \ll 1. \end{cases} \quad (1.40)$$

Capítulo 2

MODELO

En el presente trabajo se utiliza la siguiente acción que determina la dinámica del espacio-tiempo

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} R - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + F_1(\phi) G_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - V(\phi) + F_2(\phi) \mathcal{G} \right], \quad (2.1)$$

donde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$, R es el escalar de Ricci, ϕ es el campo escalar, F_1 es el término de acople cinético, $V(\phi)$ el potencial que depende del campo, $\mathcal{G}$ es el invariante 4-dimensional de Gauss-Bonnet: $\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$. Además de los acoples a la curvatura con términos cinéticos, se espera que el término con acople de Gauss-Bonnet sea relevante para la explicación de los fenómenos de la energía oscura.

Tomando la variación de la acción (2.1) respecto a la métrica, se obtiene la expresión

$$\kappa^2 T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (2.2)$$

donde $\kappa^2 = 8\pi G$ y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momentum que representa la variación de los términos que dependen del campo escalar, acople cinético y Gauss-Bonnet (GB)

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\text{GB}} + T_{\mu\nu}^K + T_{\mu\nu}^\phi, \quad (2.3)$$

donde $T_{\mu\nu}^\phi$ corresponde a las variaciones de los términos mínimamente acoplados, $T_{\mu\nu}^K$ a los acoples cinéticos y $T_{\mu\nu}^{\text{GB}}$ a la variación del acople GB. Los aportes derivados de los términos cinéticos acoplados a la curvatura y de GB se consideran como efectivos. Las variaciones están dadas por

$$T_{\mu\nu}^\phi = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi - V(\phi) g_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^K = & \left(R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \frac{1}{2} R \right) F_1(\phi) \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi + g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda (F_1(\phi) \nabla_\gamma \phi \nabla^\gamma \phi) \\
& - \frac{1}{2} (\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu) (F_1(\phi) \nabla_\lambda \phi \nabla^\lambda \phi) + R F_1(\phi) \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \\
& - 2 F_1(\phi) (R_{\mu\lambda} \nabla^\lambda \phi \nabla_\nu \phi + R_{\nu\lambda} \nabla^\lambda \phi \nabla_\mu \phi) + g_{\mu\nu} R_{\lambda\gamma} F_1(\phi) \nabla^\lambda \phi \nabla^\gamma \phi \\
& + \nabla_\lambda \nabla_\mu (F_1(\phi) \nabla^\lambda \phi \nabla_\nu \phi) + \nabla_\lambda \nabla_\nu (F_1(\phi) \nabla^\lambda \phi \nabla_\mu \phi) \\
& - \nabla_\lambda \nabla^\lambda (F_1(\phi) \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi) - g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla_\gamma (F_1(\phi) \nabla^\lambda \phi \nabla^\gamma \phi),
\end{aligned} \tag{2.5}$$

y

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{GB} = & -4([\nabla_\mu \nabla_\nu F_2(\phi)]R - g_{\mu\nu}[\nabla_\rho \nabla^\rho F_2(\phi)] - 2[\nabla^\rho \nabla_\mu F_2(\phi)]R_{\nu\rho} - 2[\nabla^\rho \nabla_\nu F_2(\phi)]R_{\mu\rho} \\
& + 2[\nabla_\rho \nabla^\rho F_2(\phi)]R_{\mu\nu} + 2g_{\mu\nu}[\nabla^\rho \nabla^\sigma F_2(\phi)]R_{\rho\sigma} - 2[\nabla^\rho \nabla^\sigma F_2(\phi)]R_{\mu\rho\nu\sigma}),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

donde en la última expresión se han usado las propiedades de invarianza de GB [43] y [61]. Variando la acción (2.1) con respecto al campo escalar ϕ se obtiene la siguiente ecuación de movimiento [62]

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu [\sqrt{-g} (R F_1(\phi) \partial^\mu \phi - 2 R^{\mu\nu} F_1(\phi) \partial_\nu \phi + \partial^\mu \phi)] + \frac{dV}{d\phi} \\
& \frac{dF_1}{d\phi} (R \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - 2 R_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi) - \frac{dF_2}{d\phi} \mathcal{G} = 0.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Tomando el campo con una dependencia solo temporal, es decir homogéneo; el espacio-tiempo dado por la métrica de FRW (1.1), las componentes (00) y (11) de (2.2) y los tensores (2.4)(2.5)(2.6) encontrados con la variación de la acción, se obtienen las ecuaciones de Friedmann.

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \rho_{eff} = \frac{\kappa^2}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + 9H^2 F_1(\phi) \dot{\phi}^2 - 24H^3 \frac{dF_2}{d\phi} \dot{\phi} \right), \tag{2.8}$$

y

$$\begin{aligned}
-2\dot{H} - 3H^2 = & \frac{\kappa^2}{3} p_{eff} \\
= & \kappa^2 \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) - (3H^2 + 2\dot{H}) F_1(\phi) \dot{\phi}^2 - 2H \left(2F_1(\phi) \dot{\phi} \ddot{\phi} + \frac{dF_1}{d\phi} \dot{\phi}^3 \right) \right. \\
& \left. + 8H^2 \frac{dF_2}{d\phi} \ddot{\phi} + 8H^2 \frac{d^2 F_2}{d\phi^2} \dot{\phi}^2 + 16H \dot{H} \frac{dF_2}{d\phi} \dot{\phi} + 16H^3 \frac{dF_2}{d\phi} \dot{\phi} \right].
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Con las ecuaciones de Euler-Lagrange para el lagrangiano que se muestra en la acción se encuentra la ecuación de movimiento

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} + 3H^2 \left(2F_1(\phi)\ddot{\phi} + \frac{dF_1}{d\phi}\dot{\phi}^2 \right) + 18H^3 F_1(\phi)\dot{\phi} \\ 12H\dot{H}F_1(\phi)\dot{\phi} - 24 \left(\dot{H}H^2 + H^4 \right) \frac{dF_2}{d\phi} = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Es interesante observar que sin importar la función $F_1(\phi)$, si se considera el caso en que $F_2(\phi)$ y ϕ sean constantes, se obtiene que el potencial V también sería constante y $H = H_0 = \kappa\sqrt{\frac{V_0}{3}}$, lo que representa una solución tipo de-Sitter.

2.1. Ecuaciones en términos de la variable de Slow-Roll

Definiendo la variable Slow-Roll $x = \ln(a)$ que representa un crecimiento suave respecto al factor de escala, y derivando se obtiene $dt = \frac{dx}{H}$. Reemplazando en (2.8) y (2.10) se obtiene

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left[\frac{1}{2}H^2(x)\theta(x) + V(x) + 9H^4(x)F_1(x)\theta(x) - 24H^4(x)\frac{dF_2(x)}{dx} \right], \quad (2.11)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(H^2(x)\theta(x)) + 3H^2(x)\theta(x) + \frac{dV(x)}{dx} + 9\xi H^2(x)(F_1(x)\theta(x))\frac{dH^2(x)}{dx} \\ + 3\xi H^4(x)\frac{d}{dx}(F_1(x)\theta(x)) + 18\xi H^4(x)(F_1(x)\theta(x)) \\ - 12H^2(x)\frac{dH^2(x)}{dx}\frac{dF_2(x)}{dx} - 24H^4(x)\frac{dF_2(x)}{dx} = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde $\theta(x) = \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2$. Despejando $F_1(x)\theta(x)$ de la ecuación (2.11) se obtiene

$$F_1(x)\theta(x) = \frac{1}{3\kappa^2 H^2(x)} - \frac{\theta(x)}{18H^2(x)} - \frac{V(x)}{9H^4(x)} + \frac{8}{3}\frac{dF_2(x)}{dx}. \quad (2.13)$$

Substituyendo en (2.12) se tiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned}
& 2H^4(x)\frac{d\theta(x)}{dx} + \theta H^2(x)\frac{dH^2(x)}{dx} + 12H^4(x)\theta(x) + 4H^2(x)\frac{dV(x)}{dx} - 2V(x)\frac{dH^2(x)}{dx} \\
& - 12H^2(x)V(x) + 12H^2(x)\frac{dH^2(x)}{dx} + 36H^4(x) + 72H^4(x)\frac{dH^2(x)}{dx}\frac{dF_2(x)}{dx} \\
& + 36H^4(x) + 72H^4(x)\frac{dH^2(x)}{dx}\frac{dF_2(x)}{dx} + 144H^6(x)\frac{dF_2(x)}{dx} + 48H^6(x)\frac{d^2F_2(x)}{dx^2} = 0.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

donde las unidades se han considerado tal que $\kappa^2 = 1$. También por simplicidad se establece la relación para el acople al termino GB como

$$\frac{dF_2(x)}{dx} = \frac{g}{H^2(x)}, \tag{2.15}$$

donde g es una constante de proporcionalidad. Así la eucación (2.14) toma la forma

$$\begin{aligned}
& 2H^4(x)\frac{d\theta(x)}{dx} + \theta(x)H^2(x)\frac{dH^2(x)}{dx} + 12H^4(x)\theta(x) + 4H^2(x)\frac{dV(x)}{dx} \\
& - 2V(x)\frac{dH^2(x)}{dx} - 12H^2(x)V(x) + 12H^2(x)\frac{dH^2(x)}{dx} \\
& + 36H^4(x) + 24gH^2(x)\frac{dH^2(x)}{dx} + 144gH^4(x) = 0.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Capítulo 3

Dinámica cosmológica

3.1. Dinámica para $V = 0$

En esta sección se estudiará la dinámica del problema representada en la ecuación diferencial (2.16), en el caso particular de un potencial nulo.

3.1.1. Dinámica con gas de Chaplygin - $V = 0$

La ecuación de estado para el gas de Chaplygin es

$$p = -\frac{A}{\rho}. \quad (3.1)$$

Reemplazando en la ecuación de continuidad, se obtiene

$$\dot{\rho} + 3H(\rho - \frac{A}{\rho}) = \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\frac{\rho^2 - A}{\rho}) = 0, \quad (3.2)$$

Ahora haciendo una separación de variables

$$\frac{d\rho\rho}{\rho^2 - A} = -3\frac{da}{a}. \quad (3.3)$$

Integrando se obtiene la relación para la densidad:

$$\rho = \sqrt{A + \frac{B}{a^6}}. \quad (3.4)$$

Reemplazando en (1.7) se obtiene

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \sqrt{A + \frac{B}{a^6}}. \quad (3.5)$$

Definiendo las constantes normalizadas $A_1 = \frac{\kappa^4}{9}A$ y $B_1 = \frac{\kappa^4}{9}B$ y renombrandolas como A y B para simplicidad de los cálculos, la anterior expresión toma la siguiente forma

$$H^2 = \sqrt{A + \frac{B}{a^6}}. \quad (3.6)$$

Por último reescribiendo en términos de x ($x = \ln(a)$):

$$H^2 = \sqrt{A + Be^{-6x}}. \quad (3.7)$$

Reemplazando (3.7) en (2.16), tomando $V = 0$ e integrando θ respecto a x , se obtiene:

$$\theta(x) = \frac{Ce^{-\frac{9x}{2}}}{\sqrt[4]{Ae^{6x} + B}} + (4g + 3) {}_2F_1 \left(1, 1; \frac{7}{4}; -\frac{Ae^{6x}}{B} \right) - 12g - 3, \quad (3.8)$$

donde ${}_2F_1$ es una función hipergeométrica [63]. Con el fin de simplificar el resultado para cancelar la parte hipergeométrica, se establece la condición para la constante g :

$$g = -\frac{3}{4}. \quad (3.9)$$

Por lo que $\theta(x)$ se simplifica a

$$\theta(x) = \frac{Ce^{-\frac{9x}{2}}}{(B + Ae^{6x})^{1/4}} + 6. \quad (3.10)$$

Si en el anterior resultado se reemplaza $(\frac{d\phi}{dx})^2 = \theta(x)$ y se integra respecto a x , se obtiene un resultado para $\phi(x)$ con una función hipergeométrica, nuevamente para simplificar el resultado se toma la constante de integración $C = 0$, por lo que

$$\theta(x) = \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = 6, \quad (3.11)$$

De lo que resulta

$$\phi(x) = \sqrt{6}x + \phi_0. \quad (3.12)$$

Por lo cual bajo las anteriores consideraciones, el campo se comporta como una función lineal de la variable “ x ”, o logarítmico al factor de escala “ a ”. Substituyendo los resultados de H^2 y $\phi(x)$ en (2.13), se llega a que la función de acople cinético es

$$F_1(\phi) = -\frac{1}{3} \frac{e^{\frac{\sqrt{6}}{2}\phi}}{(B + Ae^{\sqrt{6}\phi})^{1/2}}, \quad (3.13)$$

Reemplazando H^2 en (2.15) e integrando, se obtiene la función de acople al término GB

$$F_2(\phi) = -\frac{\text{Ln}\left(A + \sqrt{A}(A + Be^{-\sqrt{6}\phi})^{1/2}\right)}{4\sqrt{A}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2A}}\phi, \quad (3.14)$$

en donde se tomó la constante de integración del campo nula, $\phi_0 = 0$. Por ende, para el gas de Chaplygin con acoples cinéticos y GB, las soluciones son simples funciones exponenciales del campo ϕ .

3.1.2. Dinámica con gas de Chaplygin generalizado - $V = 0$

La ecuación de estado para el gas de Chaplygin generalizado es

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha}, \quad (3.15)$$

Reemplazando en la ecuación de continuidad, se obtiene

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho - \frac{A}{\rho^\alpha}\right) = \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\frac{\rho^{1+\alpha} - A}{\rho^\alpha}\right) = 0, \quad (3.16)$$

Haciendo separación de variables:

$$\frac{d\rho\rho^\alpha}{\rho^{1+\alpha} - A} = -3\frac{da}{a}, \quad (3.17)$$

e integrando se obtiene la relación para la densidad,

$$\rho = \left(A + \frac{B}{a^{3(1+\alpha)}}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (3.18)$$

Reemplazando en (1.7), se obtiene

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left(A + \frac{B}{a^{3(1+\alpha)}}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (3.19)$$

Definiendo las constantes normalizadas $A_1 = \left(\frac{\kappa^2}{3}\right)^{1+\alpha} A$ y $B_1 = \left(\frac{\kappa^2}{3}\right)^{1+\alpha} B$ y renombrándolas como A y B por simplicidad en los cálculos, se obtiene

$$H^2 = \left(A + \frac{B}{a^{3(1+\alpha)}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (3.20)$$

Por último reescribiendo en términos de x ($x = Ln(a)$):

$$H^2 = \left(A + Be^{-3(1+\alpha)x} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (3.21)$$

Reemplazando (3.21) en (2.16), tomando $V = 0$ e integrando θ respecto a x , se obtiene.

$$\begin{aligned} \theta(x) = & Ce^{-\frac{9x}{2}} \left(Ae^{3(\alpha+1)x} + B \right)^{-\frac{1}{2(\alpha+1)}} \\ & + (4g + 3) {}_2F_1 \left(1, \frac{2}{\alpha+1}; 1 + \frac{3}{2(\alpha+1)}; -\frac{Ae^{3x(\alpha+1)}}{B} \right) - 12g - 3. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Nuevamente para simplificar la expresión, se toma $g = -3/4$ para cancelar el término hipergeométrico, por lo que:

$$\theta(x) = \frac{Ce^{-9x/2}}{(B + Ae^{3(\alpha+1)x})^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}} + 6. \quad (3.23)$$

Nuevamente para evitar términos hipergeométricos en el campo, se toma la constante de integración $C = 0$, por lo cual $\phi(x) = \sqrt{6}x + \phi_0$. Substituyendo H^2 y $\phi(x)$ en (2.13), se obtiene

$$F_1(\phi) = -\frac{1}{3} \left[A + Be^{-\frac{3(1+\alpha)}{\sqrt{6}}\phi} \right]^{-\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (3.24)$$

y el acople F_2 se obtiene reemplazando H^2 en (2.15) e integrando

$$F_2(\phi) = -\frac{1}{4B^{\frac{1}{1+\alpha}}} e^{\sqrt{\frac{3}{2}}\phi} {}_2F_1 \left(\frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{\alpha+1}; \frac{\alpha+2}{\alpha+1}; -\frac{Ae^{\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha+1)\phi}}{B} \right), \quad (3.25)$$

donde ${}_2F_1$ es una función hiergeométrica. Es de notar que la función de acople GB para el gas de Chaplygin generalizado pierde simplicidad por el término hipergeométrico en comparación al gas de Chaplygin.

3.1.3. Dinámica con gas de Chpalygin modificado - $V = 0$

La ecuación de estado para el gas de Chaplygin modificado es

$$p = B\rho - \frac{A}{\rho^\alpha}, \quad (3.26)$$

Nuevamente, reemplazando en la ecuación de continuidad, se obtiene

$$\dot{\rho} + 3H((B+1)\rho - \frac{A}{\rho^\alpha}) = \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\frac{(B+1)\rho^{1+\alpha} - A}{\rho^\alpha}) = 0. \quad (3.27)$$

Haciendo separación de variables:

$$\frac{d\rho\rho^\alpha}{(B+1)\rho^{1+\alpha} - A} = -3\frac{da}{a}, \quad (3.28)$$

e integrando, se obtiene la relación para la densidad:

$$\rho = \left(\frac{A}{B+1} + \frac{D}{(B+1)a^{3(1+\alpha)(B+1)}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (3.29)$$

Reemplazando en (1.7)

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \left(\frac{A}{B+1} + \frac{D}{(B+1)a^{3(1+\alpha)(B+1)}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (3.30)$$

y definiendo las constantes normalizadas $A_1 = \left(\frac{\kappa^2}{3(B+1)} \right)^{1+\alpha} A$ y $D_1 = \left(\frac{\kappa^2}{3(B+1)} \right)^{1+\alpha} D$ y renombrandolas como A y D para simplicidad de los cálculos, se tiene:

$$H^2 = \left(A + \frac{D}{a^{3(1+\alpha)(B+1)}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (3.31)$$

Ahora reescribiendo en términos de x ($x = \ln(a)$), la anterior ecuación se reduce a:

$$H^2 = (A + Be^{-3E(1+\alpha)x})^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (3.32)$$

Para la cual se define $E = B + 1$. Para analizar los límites asintóticos de la densidad, se define la variable $W_r = a^{3(B+1)}$, por lo que la densidad toma la forma

$$\rho = \left(\frac{A}{B+1} + \frac{D}{(B+1)W^{1+\alpha}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (3.33)$$

Se toma la constante de integración como $D = \frac{AW_0^{1+\alpha}}{B}$, donde $W_0 = a_0^{3(B+1)}$, y por lo tanto:

$$\rho = \left(\frac{A}{B+1} + \frac{AW_0^{1+\alpha}}{B(B+1)W^{1+\alpha}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} = \left(\frac{A}{B+1} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}} \left(1 + \frac{1}{BW_r^{1+\alpha}} \right)^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (3.34)$$

Retomando (3.32) y estableciendo el potencial como (3.43), implica que la ecuación diferencial es igual a la del gas de Chaplygin generalizado (3.46) y sustituyendo (3.32)

$$2(A + De^{-3E(1+\alpha)x}) \frac{d\theta}{dx} + 3(4A + (4-E)De^{-3E(1+\alpha)x})\theta + 6De^{-3E(1+\alpha)x}[12g(2-E) - V_0g(E+2) + 6(1-E)] + 12A(12g - V_0g + 3) = 0. \quad (3.35)$$

Para simplificar la ecuación, se toma $E = 4$ con el fin de cancelar el término exponencial que acompaña a la función $\theta(x)$:

$$2(A + De^{-3E(1+\alpha)x}) \frac{d\theta}{dx} + 12A\theta + 36De^{-12(1+\alpha)x}(-4g - V_0g - 3) + 12A(12g - V_0g + 3) = 0. \quad (3.36)$$

Integrando la anterior ecuación para $\theta(x)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \theta(x) = & C(Ae^{12(\alpha+1)x} + D)^{-\frac{1}{2(\alpha+1)}} \\ & - \frac{3D(gV_0 + 4g + 3)e^{-12(\alpha+1)x} {}_2F_1\left(1, 1; 2 - \frac{1}{2(\alpha+1)}; -\frac{De^{-12x(\alpha+1)}}{A}\right)}{2\alpha A + A} \\ & + gV_0 \left(1 - \left(\frac{Ae^{12(\alpha+1)x}}{D} + 1\right)^{-\frac{1}{2(\alpha+1)}}\right) + 12g \left(\frac{Ae^{12(\alpha+1)x}}{D} + 1\right)^{-\frac{1}{2(\alpha+1)}} \\ & + 3 \left(\frac{Ae^{12(\alpha+1)x}}{D} + 1\right)^{-\frac{1}{2(\alpha+1)}} - 12g - 3. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Para cancelar el término hipergeométrico de la solución, se establece $V_0 = -\frac{3}{g} - 4$. Reemplazando y agrupando términos comunes

$$\theta(x) = -6 - 16g + (6 + 16g) \left(\frac{Ae^{12(\alpha+1)x}}{D} + 1\right)^{-\frac{1}{2(\alpha+1)}} + C(Ae^{12(\alpha+1)x} + D)^{-\frac{1}{2(\alpha+1)}}. \quad (3.38)$$

Si se toma $g = -\frac{3}{4}$ el potencial se anula ya que $V_0 = 0$ por la restricción para cancelar el término hipergeométrico, de esta manera la función se simplifica a:

$$\theta(x) = 6 - 6 \left(\frac{Ae^{12(\alpha+1)x}}{D} + 1\right)^{-\frac{1}{2(\alpha+1)}} + C(Ae^{12(\alpha+1)x} + D)^{-\frac{1}{2(\alpha+1)}}. \quad (3.39)$$

Tomando la constante de integración $C = 6D^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}$, se obtiene

$$\theta(x) = 6. \quad (3.40)$$

De lo anterior se ve que nuevamente el campo se relaciona directamente proporcional a x siendo $\sqrt{6}$ la pendiente, como se muestra en (3.12).

Reemplazando (3.32), (3.12) en (2.13) y (2.15) y despejando e integrando respecto a x respectivamente, se encuentra que para el gas de Chaplygin modificado con potencial nulo, los acoplos F_1 y F_2 son.

$$F_1(\phi) = -\frac{1}{3} \frac{e^{2\sqrt{6}\phi}}{(D + Ae^{2\sqrt{6}(1+\alpha)\phi})^{\frac{1}{1+\alpha}}}, \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} F_2(\phi) &= \frac{1}{12}g \left(A + De^{-2\sqrt{6}(\alpha+1)\phi} \right)^{-\frac{1}{\alpha+1}} \left(\frac{Ae^{2\sqrt{6}(\alpha+1)\phi}}{D} + 1 \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \\ &\quad * {}_2F_1 \left(\frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{\alpha+1}; \frac{\alpha+2}{\alpha+1}; -\frac{Ae^{2\sqrt{6}(\alpha+1)\phi}}{D} \right) \\ &= \frac{g}{12D^{1+\alpha}} e_2^{2\sqrt{6}\phi} F_1 \left(\frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{\alpha+1}; \frac{\alpha+2}{\alpha+1}; -\frac{Ae^{2\sqrt{6}(\alpha+1)\phi}}{D} \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.2. Dinámica para $V \neq 0$

En esta sección se analizará la dinámica del problema representada en la ecuación diferencial (2.16), pero a diferencia de la sección anterior, ahora se propone un potencial conveniente no nulo.

3.2.1. Dinámica con gas de Chaplygin - $V \neq 0$

Observando la ecuación diferencial (2.16), se concluye que hay 3 tipos de terminos, los factores $\theta'(x)$, de θ y de los términos independientes de θ . Analizando distintas posibilidades, se observa que la parte hipergeométrica de la solución depende principalmente del resultado del término independiente de θ , es decir gran parte está determinado por el potencial, por lo cual se busca un potencial distinto a cero el cual pueda contribuir en el resultado.

Se propone un potencial que esté relacionado con el cuadrado del parámetro de Hubble para que al reemplazar en la ecuación de movimiento (2.16) los términos se puedan factorizar y simplificar la ecuación diferencial.

$$V = V_0 g H^2. \quad (3.43)$$

De donde,

$$\frac{dV}{dx} = g V_0 \frac{dH^2}{dx}. \quad (3.44)$$

Reemplazando (3.43) y (3.44) en los términos en los que aparece el potencial de la ecuación (2.16) se obtiene

$$\begin{aligned} 4H^2 \frac{dV}{dx} - 2V \frac{dH^2}{dx} - 12H^2 V &= 4V_0 g H^2 \frac{dH^2}{dx} - 2V_0 g H^2 \frac{dH^2}{dx} - 12V_0 g H^4 \\ &= 2V_0 g H^2 \frac{dH^2}{dx} - 12V_0 g H^4, \end{aligned} \quad (3.45)$$

Reemplazando en (2.16) y agrupando términos comunes, se tiene

$$2H^2 \frac{d\theta}{dx} + \theta \frac{dH^2}{dx} + 12\theta H^2 + 2 \frac{dH^2}{dx} (V_0 g + 12g + 6) + 12H^2 (12g - V_0 g + 3) = 0. \quad (3.46)$$

Reemplazando en la anterior ecuación la expresión de H^2 para el gas de Chaplygin (3.7) e integrando θ respecto a x , se obtiene

$$\theta(x) = \frac{C e^{-\frac{9x}{2}}}{\sqrt[4]{A e^{6x} + B}} + (g V_0 + 4g + 3) {}_2F_1 \left(1, 1; \frac{7}{4}; -\frac{A e^{6x}}{B} \right) + g V_0 - 12g - 3. \quad (3.47)$$

Por lo que la condición para eliminar el término hipergeométrico de la solución es:

$$g V_0 + 4g + 3 = 0. \quad (3.48)$$

Por ende la constante del potencial V_0 queda restringida a la constante g por:

$$V_0 = -\frac{3}{g} - 4. \quad (3.49)$$

Sustituyendo la restricción de V_0 en (3.47), se llega a la siguiente expresión:

$$\theta(x) = \frac{C e^{-\frac{9x}{2}}}{\sqrt[4]{A e^{6x} + B}} + \left(-\frac{3}{g} - 4 \right) g - 12g - 3 = \frac{C e^{-\frac{9x}{2}}}{\sqrt[4]{A e^{6x} + B}} - 16g - 6. \quad (3.50)$$

Nuevamente para evitar el término hipergeométrico en la solución del campo, se escoge la constante de integración $C = 0$, por lo tanto

$$\theta(x) = -16g - 6. \quad (3.51)$$

Como $\theta = \dot{\phi}$, al integrar el campo respecto a x se obtiene:

$$\phi(x) = \sqrt{-16g - 6}x + \phi_0. \quad (3.52)$$

Hay que resaltar que la raíz cuadrada permite que la solución solo sea viable para $g < -\frac{3}{8}$, y además para $g = -\frac{3}{4}$ se recrea el resultado ($\phi = \sqrt{6}x + \phi_0$) para un potencial nulo ($V_0 = 0$)

La importancia de incluir este tipo de potencial, radica en que el campo ϕ sigue teniendo una solución sencilla, lineal con x , pero ganando la libertad de escoger la pendiente del campo en función de x de acuerdo a la definición de la constante g y esta pendiente influye en el exponente de las funciones de acople F_1 y F_2

$$F_1(\phi) = \frac{(4g + 1)(e^{\frac{3}{\sqrt{-16g-6}}\phi})}{(-16g - 6)\left(B + Ae^{\frac{6}{\sqrt{-16g-6}}\phi}\right)^{1/2}}, \quad (3.53)$$

y

$$F_2(\phi) = \frac{g}{3\sqrt{A}} \ln \left(A + \sqrt{A}(A + Be^{-\frac{6}{\sqrt{-16g-6}}\phi})^{1/2} \right) 4\sqrt{A} + \frac{g}{\sqrt{-A(6 + 16g)}}\phi. \quad (3.54)$$

3.2.2. Dinámica con gas de Chaplygin generalizado - $V \neq 0$

Tomando el parámetro de Hubble para el gas de Chaplygin generalizado (1.29)

$$H^2 = (A + Be^{-3(1+\alpha)x})^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (3.55)$$

Reemplazando en (3.46) y factorizando se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{2d\theta (A + Be^{-3(\alpha+1)x})}{dx} + 3\theta (4A + 3Be^{-3(\alpha+1)x}) \\ + 12A (g(-V_0) + 12g + 3) + 18B (4g - gV_0) e^{-3(\alpha+1)x} = 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Resolviendo la ecuación diferencial y simplificando se obtiene para $\theta(x)$:

$$\begin{aligned}\theta(x) = & C e^{-\frac{9x}{2}} (A e^{3(\alpha+1)x} + B)^{-\frac{1}{2(\alpha+1)}} \\ & + (gV_0 + 4g + 3) {}_2F_1 \left(1, \frac{2}{\alpha+1}; 1 + \frac{3}{2(\alpha+1)}; -\frac{A e^{3x(\alpha+1)}}{B} \right) + gV_0 - 12g - 3.\end{aligned}\quad (3.57)$$

Al igual que las anteriores sesiones, se busca simplificar el resultado eliminando el término hipergeométrico, para esto V_0 se toma de la siguiente forma:

$$V_0 = -\frac{3}{g} - 4, \quad (3.58)$$

para obtener

$$\theta(x) = C e^{-\frac{9x}{2}} (A e^{3(\alpha+1)x} + B)^{-\frac{1}{2(\alpha+1)}} - 16g - 6. \quad (3.59)$$

Tomando la consante de integración $C = 0$, se tiene:

$$\theta(x) = -16g - 6. \quad (3.60)$$

Nuevamente integrando el campo respecto a x con el resultado de θ , se obtiene el campo en función de x como.

$$\phi(x) = \sqrt{-16g - 6}x + \phi_0. \quad (3.61)$$

Siempre y cuando $g \leq -\frac{3}{8}$. Por lo que las funciones de acople para el gas de Chaplygin generalizado con un potencial no nulo son:

$$F_1(\phi) = -\frac{4g+1}{6+16g} \left(A + B e^{\frac{-3(1+\alpha)\phi}{\sqrt{-16g-6}}} \right)^{-\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (3.62)$$

$$F_2(\phi) = -\frac{1}{4B^{\frac{1}{1+\alpha}}} e^{-\frac{3}{\sqrt{-6-16g}}\phi} {}_2F_1 \left(\frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{\alpha+1}; \frac{\alpha+2}{\alpha+1}; -\frac{A e^{-\frac{3}{\sqrt{-6-16g}}(\alpha+1)\phi}}{B} \right). \quad (3.63)$$

3.2.3. Dinámica con gas de Chaplygin modificado- $V \neq 0$

Considerando la relación entre la densidad de presión y densidad de energía del gas de Chaplygin modificado (1.33), se obtiene por (1.7)

$$H^2 = (A + D e^{-3E(1+\alpha)x})^{\frac{1}{1+\alpha}}. \quad (3.64)$$

Al igual que en la sección para $V = 0$, se establece el potencial como (3.43) por lo que la ecuación diferencial es igual para el gas de Chaplygin generalizado (3.46), sustituyendo en (3.64):

$$2(A + De^{-3E(1+\alpha)x}) \frac{d\theta}{dx} + 3(4A + (4 - E)De^{-3E(1+\alpha)x}) \theta + 6De^{-3E(1+\alpha)x} [12g(2 - E) - V_0g(E + 2) + 6(1 - E)] + 12A(12g - V_0g + 3) = 0. \quad (3.65)$$

Para simplificar la ecuación, se toma $E = 4$ con el fin de cancelar el término exponencial que acompaña a la función $\theta(x)$.

$$2(A + De^{-3E(1+\alpha)x}) \frac{d\theta}{dx} + 12A\theta + 36De^{-12(1+\alpha)x} (-4g - V_0g - 3) + 12A(12g - V_0g + 3) = 0. \quad (3.66)$$

Integrando $\theta(x)$ respecto a x , se obtiene:

$$\begin{aligned} \theta(x) = & C(Ae^{12(\alpha+1)x} + D)^{-\frac{1}{2(\alpha+1)}} - \frac{3D(gV_0 + 4g + 3)e^{-12(\alpha+1)x} {}_2F_1\left(1, 1; 2 - \frac{1}{2(\alpha+1)}; -\frac{De^{-12x(\alpha+1)}}{A}\right)}{2\alpha A + A} \\ & + gV_0 \left(1 - \left(\frac{Ae^{12(\alpha+1)x}}{D} + 1\right)^{-\frac{1}{2(\alpha+1)}}\right) + 12g \left(\frac{Ae^{12(\alpha+1)x}}{D} + 1\right)^{-\frac{1}{2(\alpha+1)}} \\ & + 3 \left(\frac{Ae^{12(\alpha+1)x}}{D} + 1\right)^{-\frac{1}{2(\alpha+1)}} - 12g - 3. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Para cancelar el término hipergeométrico de la solución, se establece $V_0 = -\frac{3}{g} - 4$. Reemplazando y agrupando términos comunes, se tiene

$$\theta(x) = -6 - 16g + (6 + 16g) \left(\frac{Ae^{12(\alpha+1)x}}{D} + 1\right)^{-\frac{1}{2(\alpha+1)}} + C(Ae^{12(\alpha+1)x} + D)^{-\frac{1}{2(\alpha+1)}}. \quad (3.68)$$

La diferencia con la sección (2.1.3) es que se busca simplificar el término sin anular el potencial, para esto se toma la constante de integración como $C = -(6 + 16g)D^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}$, los dos últimos términos se cancelan, llevando nuevamente a una solución de $\theta(x)$ constante.

$$\theta(x) = -6 - 16g. \quad (3.69)$$

Y un campo

$$\phi(x) = \sqrt{-6 - 16g}x + \phi_0, \quad (3.70)$$

siempre y cuando $g \leq -\frac{3}{8}$. Sustituyendo en (2.13) y (2.15) (considerando $\phi_0 = 0$), se determinan las funciones de acople:

$$F_1(\phi) = -\frac{4g+1}{6+16g} \left(A + D e^{\frac{-12(1+\alpha)}{\sqrt{-6-16g}}\phi} \right)^{-\frac{1}{1+\alpha}}, \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} F_2(\phi) &= \frac{1}{12}g \left(A + D e^{-\frac{12}{\sqrt{-6-16g}}(\alpha+1)\phi} \right)^{-\frac{1}{\alpha+1}} \left(\frac{A e^{-\frac{12}{\sqrt{-6-16g}}(\alpha+1)\phi}}{D} + 1 \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \\ &\quad * {}_2F_1 \left(\frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{\alpha+1}; \frac{\alpha+2}{\alpha+1}; -\frac{A e^{-\frac{12}{\sqrt{-6-16g}}\phi(\alpha+1)}}{D} \right) \\ &= \frac{g}{12D^{1+\alpha}} e_2^{-\frac{12}{\sqrt{-6-16g}}\phi} F_1 \left(\frac{1}{\alpha+1}, \frac{1}{\alpha+1}; \frac{\alpha+2}{\alpha+1}; -\frac{A e^{-\frac{12}{\sqrt{-6-16g}}\phi(\alpha+1)}}{D} \right). \end{aligned} \quad (3.72)$$

3.2.4. Solución sin restricción de H^2

Como se puede notar en las secciones 2.1.4, 2.1.5 y 2.1.6, las restricciones del campo y potencial para solucionar la dinámica del problema son iguales sin importar si el parámetro de Hubble obedece a un modelo de gas de Chaplygin, gas de Chaplygin generalizado o gas de Chaplygin modificado lo cual da un indicio de que la solución se puede generalizar para otro tipo de parámetro de Hubble. En esta sección se parte desde el resultado de las anteriores secciones, para el campo y el potencial, es decir.

$$\theta(x) = -6 - 16g, \quad (3.73)$$

lo cual es equivalente a suponer un campo directamente proporcional al logaritmo natural del factor de escala.

$$\phi(a) = \sqrt{-6 - 16g} \ln(a), \quad (3.74)$$

donde g es la constante definida para el acople GB (2.15) y está limitada a $g \leq -\frac{3}{8}$ para que el campo escalar (3.74) tenga sentido físico. Al ser $\theta(x)$ una constante, el primer término de (2.16) se cancela ya que $\frac{d\theta}{dx} = 0$, y la ecuación diferencial toma la forma:

$$6H^2 \frac{dH^2}{dx} + 8gH^2 \frac{dH^2}{dx} - 36H^4 - 48gH^4 + 4H^2 \frac{dV}{dx} - 2V \frac{dH^2}{dx} - 12H^2 V = 0. \quad (3.75)$$

Ahora se define el potencial de una manera conveniente como:

$$V = V_0 g H^2, \quad (3.76)$$

y por lo tanto

$$\frac{dV}{dx} = V_0 g \frac{dH^2}{dx}. \quad (3.77)$$

Sustituyendo en (3.75)

$$6H^2 \frac{dH^2}{dx} + 8gH^2 \frac{dH^2}{dx} - 36H^4 - 48gH^4 + 2V_0 g H^2 \frac{dH^2}{dx} - 12H^4 V_0 g = 0, \quad (3.78)$$

y agrupando términos semejantes, se obtiene

$$2H^2 \frac{dH^2}{dx} (3 + 4g + V_0 g) - 12H^4 (3 + 4g + V_0 g) = 0, \quad (3.79)$$

$$\left(2H^2 \frac{dH^2}{dx} - 12H^4 \right) (3 + 4g + V_0 g) = 0. \quad (3.80)$$

Se puede observar de la anterior ecuación, que la solución puede ser independiente de H^2 siempre y cuando se cumpla la siguiente restricción entre las constantes g y V_0 :

$$3 + 4g + V_0 g = 0. \quad (3.81)$$

Por lo que se restringe V_0 a:

$$V_0 = -\frac{3}{g} - 4. \quad (3.82)$$

Finalmente, las funciones de acople $F_1(\phi)$ y $F_2(\phi)$, quedan determinadas por.

$$F_1(\phi) = -\frac{4g + 1}{(6 + 16g)H^2}, \quad (3.83)$$

$$F_2(\phi) = g \int \frac{1}{H^2}. \quad (3.84)$$

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo se consideró la modificación de la acción de la Relatividad General por medio de la introducción de un acople entre la curvatura, el campo escalar y el término cinético; además de un acople de Gauss-Bonnet, como posible explicación de la energía oscura. Se estudió la dinámica del universo por medio de la ecuación de estado de gas de Chaplygin, gas de Chaplygin generalizado y gas de Chaplygin modificado para dos casos particulares, potencial nulo y potencial no nulo; para el caso del potencial nulo se encontraron en los 3 tipos de gases un campo escalar directamente proporcional a x o $\ln(a)$ con pendiente $\sqrt{6}$ y se determinaron las funciones de acople $F_1(\phi)$ y $F_2(\phi)$; para el caso del potencial no nulo, se escoge convenientemente el potencial de acuerdo a la ecuación diferencial de tal manera que se llega a un campo escalar directamente proporcional a x o $\ln(a)$ pero con pendiente $\sqrt{-6-16g}$, que reproduce el caso particular $V = 0$ para $g = -\frac{3}{4}$ y se encontraron los acoples $F_1(\phi)$ y $F_2(\phi)$.

Por otro lado, se determinó que la dinámica del problema se puede resolver sin necesidad de especificar el parámetro de Hubble. Sólo con las consideraciones $\theta(x) = -6 - 16g$ y $V = V_0 g H^2$ se satisface la ecuación diferencial, lo que implica que la solución no se limita solo a los 3 tipos de gases de Chaplygin, sino para cualquier función de estado físicamente posible y se determinaron los acoples $F_1(\phi)$ y $F_2(\phi)$ para este caso.

Apéndice A

Tensor Energía-Momento correspondiente con el campo escalar

El tensor Energía-Momento se relaciona con la acción como

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta S_K}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta S_{GB}}{\delta g^{\mu\nu}} \right), \quad (\text{A.1})$$

Para lo cual se satisface que

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.2})$$

La acción correspondiente al campo escalar es

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right), \quad (\text{A.3})$$

Variando respecto a la métrica inversa y teniendo en cuenta que

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.4})$$

y se obtiene

$$\begin{aligned} \delta S_\phi &= \int d^4x (\delta \sqrt{-g}) \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) + \int d^4x \sqrt{-g} \delta \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right) - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \\ &= \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right) - \frac{1}{2} \sqrt{-g} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right) \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Usando (A.1) (A.2) y combinandolos con la última igualdad de (A.5), se obtiene el tensor energía-momento correspondiente para el campo escalar

$$T_{\mu\nu}^{\phi} = \partial_{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial_{\alpha}\phi\partial^{\alpha}\phi - g_{\mu\nu}V(\phi). \quad (\text{A.6})$$

Apéndice B

Tensor Energía-Momento correspondiente al acople cinético

La acción para el acople al término cinético se expresa como

$$S_K = \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) G^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi, \quad (\text{B.1})$$

y reemplazando el tensor de Einstein por $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu}$, se tiene

$$S_K = \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) R_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) R g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi. \quad (\text{B.2})$$

Variando respecto a la métrica inversa se obtiene,

$$\begin{aligned} \delta S_K = & \int d^4x (\delta \sqrt{-g}) F_1(\phi) R_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) \delta (R_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi) \\ & - \frac{1}{2} \int d^4x (\delta \sqrt{-g}) F_1(\phi) R g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) \delta (R g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Para el primer y tercer término se usa (A.4); para el segundo término la siguiente relación.

$$\begin{aligned} \delta (R_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi) &= \delta R_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + R_{\mu\nu} \delta (\partial^\mu \phi \partial^\nu \phi) \\ &= \delta R_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + R_{\mu\nu} \delta (\partial^\mu \phi) \partial^\nu \phi + R_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \delta (\partial^\nu \phi) \\ &= \delta R_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi + 2 R_{\mu\alpha} \delta g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \partial^\alpha \phi, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

donde se usó la relación,

$$\begin{aligned} \delta (\partial^\alpha \phi) &= \delta (g^{\alpha\beta} \partial_\beta \phi) \\ &= \delta g^{\alpha\beta} \partial_\beta \phi. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Usando el hecho de que,

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}, \quad (\text{B.6})$$

y reemplazando en el cuarto término, se tiene

$$\begin{aligned} \delta(Rg^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi) &= \delta(Rg^{\mu\nu})\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \\ &= \delta Rg^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + R\delta g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \\ &= \delta R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi + R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi + R\delta g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Ahora sustituyendo los resultados en (B.3)

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}F_1(\phi)R_{\alpha\beta}\partial^\alpha\phi\partial^\beta\phi + \int d^4x\sqrt{-g}F_1(\phi)\delta R_{\mu\nu}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi \\ &\quad + 2\int d^4x\sqrt{-g}F_1(\phi)R_{\mu\alpha}\delta g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\partial^\alpha\phi + \frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}F_1(\phi)R\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi \\ &\quad - \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}F_1(\phi)\delta R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}F_1(\phi)R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi \\ &\quad - \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}F_1(\phi)R\delta g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Usando (B.9) en el segundo y quinto término de (B.8) y teniendo en cuenta que.

$$\delta R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = -\nabla_\mu\nabla_\nu(\delta g^{\mu\nu}) + g_{\mu\nu}\nabla_\lambda\nabla^\lambda(\delta g^{\mu\nu}). \quad (\text{B.9})$$

Se obtiene

$$\begin{aligned} &\int d^4x\sqrt{-g}F_1(\phi)\delta R_{\mu\nu}\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}F_1(\phi)\delta R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi = \\ &\quad - \int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\nu(F_1(\phi)\partial_\mu\phi\partial^\alpha\phi) + \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla^\rho\nabla_\rho(F_1(\phi)\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\nabla_\beta\nabla_\alpha(F_1(\phi)\partial^\alpha\phi\partial^\beta\phi) + \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\nabla_\nu\nabla_\mu(F_1(\phi)\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi) \\ &\quad - \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\nabla^\lambda\nabla_\lambda(F_1(\phi)\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Reemplazando en (B.8), se tiene

$$\begin{aligned}
\delta S = & -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} F_1(\phi) R_{\alpha\beta} \partial^\alpha \phi \partial^\beta \phi + \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) R_{\mu\alpha} \delta g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \partial^\alpha \phi \\
& + \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) R_{\nu\alpha} \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial^\alpha \phi + \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} F_1(\phi) R \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi \\
& - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} F_1(\phi) R \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \\
& - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\mu (F_1(\phi) \partial_\nu \phi \partial^\alpha \phi) - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\nu (F_1(\phi) \partial_\mu \phi \partial^\alpha \phi) \\
& + \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \nabla^\rho \nabla_\rho (F_1(\phi) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) + \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \nabla_\beta \nabla_\alpha (F_1(\phi) \partial^\alpha \phi \partial^\beta \phi) \\
& + \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu (F_1(\phi) \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi) + \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \nabla_\nu \nabla_\mu (F_1(\phi) \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi) \\
& - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \nabla_\lambda (F_1(\phi) \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi). \quad (\text{B.11})
\end{aligned}$$

Al comparar (B.11) con (A.1) y (A.2) se obtiene el tensor de energíamomento correspondiente al campo escalar:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^K = & \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) F_1(\phi) \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi + g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda (F_1(\phi) \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi) \\
& - \frac{1}{2} (\nabla_\mu \nabla_\nu + \nabla_\nu \nabla_\mu) (F_1(\phi) \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi) + R F_1(\phi) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \\
& - 2 F_1(\phi) (R_{\mu\alpha} \partial^\alpha \phi \partial_\nu \phi + R_{\nu\alpha} \partial^\alpha \phi \partial_\mu \phi) + g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} F_1(\phi) \partial^\alpha \phi \partial^\beta \phi \\
& + \nabla_\alpha \nabla_\mu (F_1(\phi) \partial^\alpha \phi \partial_\nu \phi) + \nabla_\alpha \nabla_\nu (F_1(\phi) \partial^\alpha \phi \partial_\mu \phi) \\
& - \nabla_\rho \nabla^\rho (F_1(\phi) \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) - g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta (F_1(\phi) \partial^\alpha \phi \partial^\beta \phi). \quad (\text{B.12})
\end{aligned}$$

Apéndice C

Tensor Energía-Momento correspondiente al acople GB

La acción correspondiente al acople de Gauss-Bonnet es

$$S_{GB} = - \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) \mathcal{G}. \quad (\text{C.1})$$

Recordando la definición del acople GB, la acción toma la forma :

$$S_{GB} = - \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) (R^2 - 4R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma} + R_{\phi\gamma\kappa\lambda} R^{\phi\gamma\kappa\lambda}). \quad (\text{C.2})$$

Esta ecuación se puede separar en varias partes para facilitar el cálculo:

$$S_1 = - \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) R^2, \quad (\text{C.3})$$

$$S_2 = 4 \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma}, \quad (\text{C.4})$$

$$S_4 = - \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) R_{\phi\gamma\kappa\lambda} R^{\phi\gamma\kappa\lambda}. \quad (\text{C.5})$$

Ahora se realizará la variación respecto a la métrica para S_1 , S_2 y S_3 y la suma dará el resultado de la variación del acople GB.

La variación de S_1 es igual a

$$\delta S_1 = -\delta \int d^4x \sqrt{-g} F_2 R^2 = - \int d^4x [F_2 \delta(\sqrt{-g}) R^2 + 2F_2 \sqrt{-g} \delta(R)]. \quad (\text{C.6})$$

Para poder comparar con (A.2) y hallar el tensor, es necesario escribir la acción en términos de la variación de la métrica, por lo tanto se toman (A.4), (B.6), y además,

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \nabla_\lambda \nabla^\lambda \delta g^{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \nabla_\nu \nabla_\mu \delta g^{\alpha\beta} - g_{\mu\beta} \nabla_\alpha \nabla_\nu \delta g^{\alpha\beta} - g_{\nu\alpha} \nabla_\beta \nabla_\mu \delta g^{\alpha\beta}), \quad (\text{C.7})$$

reemplazando en la anterior ecuación, se tiene

$$\delta S_1 = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} F_2 R^2 g_{\mu\nu} - 2 F_2 R R_{\mu\nu} - 2 g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \nabla_\sigma (F_2 R) + 2 \nabla_\nu \nabla_\mu (F_2 R) \right] \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{C.8})$$

Ahora la variación para S_2 ,

$$\delta S_2 = 4\delta \int d^4x \sqrt{-g} F_2(\phi) R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma} = 4\delta \int d^4x [F_2 \delta(\sqrt{-g}) R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma} + F_2 \sqrt{-g} \delta(R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma})]. \quad (\text{C.9})$$

Dado que $R^{\phi\gamma} = g^{\phi\sigma} g^{\gamma\rho} R_{\sigma\rho}$,

$$\begin{aligned} \delta S_2 &= 4 \int d^4x [F_2 \delta(\sqrt{-g}) R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma} + F_2 \sqrt{-g} \delta(g^{\phi\sigma} g^{\gamma\rho} R_{\sigma\rho} R_{\phi\gamma})] \\ &= \int d^4x [F_2 \delta(\sqrt{-g}) R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma} + 2 F_2 \sqrt{-g} g^{\gamma\rho} R_{\sigma\rho} R_{\phi\gamma} \delta g^{\phi\sigma} - 2 F_2 \sqrt{-g} g^{\phi\sigma} g^{\gamma\rho} R_{\phi\gamma} \delta R_{\sigma\rho}]. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Nuevamente expresando la variación de la acción en términos de la variación de la métrica, se reemplaza (A.4), (B.6), (B.9), y

$$\begin{aligned} \delta R_{\alpha\beta\kappa\lambda} &= \frac{1}{2} (\nabla_\kappa \nabla_\beta \delta g_{\lambda\alpha} + \nabla_\lambda \nabla_\alpha \delta g_{\kappa\beta} - \nabla_\kappa \nabla_\alpha \delta g_{\lambda\beta} \\ &\quad - \nabla_\lambda \nabla_\beta \delta g_{\kappa\alpha} + R_{\beta\kappa\lambda}^\gamma \delta g_{\gamma\alpha} - R_{\alpha\kappa\lambda}^\gamma \delta g_{\beta\gamma}), \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

en la anterior ecuación. As se obtiene

$$\begin{aligned} \delta S_2 &= \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} [-2 F_2 g_{\mu\nu} R_{\phi\gamma} R^{\phi\gamma} + 8 F_2 g^{\gamma\rho} R_{\nu\rho} R_{\mu\gamma} - 4 \nabla^\phi \nabla_\mu (F_2 R_{\phi\nu}) \\ &\quad - 4 \nabla^\phi \nabla_\nu (F_2 R_{\phi\mu}) + 4 \nabla^\lambda \nabla_\lambda (F_2 R_{\mu\nu}) + 4 g_{\mu\nu} \nabla^\phi \nabla^\gamma (F_2 R_{\phi\gamma})]. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Por otro lado la variación para S_3 es

$$\delta S_3 = -\delta \int d^4x \sqrt{-g} F_2 R_{\alpha\beta\kappa\lambda} R^{\alpha\beta\kappa\lambda}. \quad (\text{C.13})$$

Usando la regla de Leibniz

$$\delta S_3 = - \int d^4x F_2 \left[\delta(\sqrt{-g}) R_{\alpha\beta\kappa\lambda} R^{\alpha\beta\kappa\lambda} + \sqrt{-g} \delta (R_{\alpha\beta\kappa\lambda} R^{\alpha\beta\kappa\lambda}) \right]. \quad (\text{C.14})$$

Bajando los índices por medio de la métrica en el último del tensor de Riemman de la ecuación, se tiene

$$\delta S_3 = - \int d^4x F_2 \left[\delta(\sqrt{-g}) R_{\alpha\beta\kappa\lambda} R^{\alpha\beta\kappa\lambda} + \sqrt{-g} \delta (g^{\lambda\eta} g^{\kappa\phi} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} R_{\alpha\beta\kappa\lambda} R_{\rho\sigma\phi\eta}) \right]. \quad (\text{C.15})$$

Aplicando la regla de Leibniz en el último diferencial y aplicando álgebra tensorial se llega a

$$\begin{aligned} \delta S_3 = - \int d^4x F_2 \left[\delta(\sqrt{-g}) R_{\alpha\beta\kappa\lambda} R^{\alpha\beta\kappa\lambda} + 4\sqrt{-g} g^{\kappa\phi} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} R_{\rho\sigma\phi\eta} R_{\alpha\beta\kappa\lambda} \delta g^{\lambda\eta} \right. \\ \left. + 2\sqrt{-g} g^{\lambda\eta} g^{\kappa\phi} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} R_{\rho\sigma\phi\eta} \delta R_{\alpha\beta\kappa\lambda} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Reemplazando (A.4) y (C.11) para determinar el diferencial del tensor de Riemann en la expresión anterior, se tiene

$$\begin{aligned} \delta S_3 = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} F_2 g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta\kappa\lambda} R^{\alpha\beta\kappa\lambda} - 2F_2 R_{\alpha\beta\kappa\mu} R_{\rho\sigma\phi\nu} g^{\kappa\phi} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} \right. \\ \left. + 4\nabla^\sigma \nabla^\phi (F_2 R_{\nu\sigma\phi\mu}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Sumando los resultados de S_1 (C.8), S_2 (C.12) y S_3 (C.17) se obtiene la variación de la acción para el acople GB:

$$\begin{aligned} \delta S_{GB} = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} F_2 \mathcal{G}_{\mu\nu} - 2F_2 R R_{\mu\nu} - 2g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \nabla_\sigma (F_2 R) + 2\nabla_\nu \nabla_\mu (F_2 R) \right. \\ \left. + 8F_2 g^{\gamma\rho} R_{\nu\rho} R_{\mu\gamma} - 4\nabla^\phi \nabla_\mu (F_2 R_{\phi\nu}) - 4\nabla^\phi \nabla_\nu (F_2 R_{\phi\mu}) + 4\nabla^\lambda \nabla_\lambda (F_2 R_{\mu\nu}) \right. \\ \left. + 4g_{\mu\nu} \nabla^\phi \nabla^\gamma (F_2 R_{\phi\gamma}) - 2F_2 R_{\alpha\beta\kappa\mu} R_{\rho\sigma\phi\nu} g^{\kappa\phi} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} + 4\nabla^\sigma \nabla^\phi (F_2 R_{\nu\sigma\phi\mu}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Aplicando las derivadas y usando (A.4) y (C.11), se obtiene.

$$\begin{aligned}
\delta S_{GB} = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} & \left[\frac{1}{2} F_2 \mathcal{G} g_{\mu\nu} - 2 F_2 R R_{\mu\nu} - 2 g_{\mu\nu} (\nabla^\sigma \nabla_\sigma F_2) R + 2 (\nabla_\nu \nabla_\mu F_2) R \right. \\
& + 4 F_2 R_\mu^\rho R_{\nu\rho} - 4 (\nabla^\sigma \nabla_\mu F_2) R_{\phi\nu} - 4 (\nabla^\sigma \nabla_\nu F_2) R_{\phi\mu} + 4 (\nabla^\lambda \nabla_\lambda F_2) R_{\mu\nu} \\
& + 4 g_{\mu\nu} (\nabla^\phi \nabla^\gamma F_2) R_{\phi\gamma} - 2 F_2 R_{\alpha\beta\kappa\mu} R_{\rho\sigma\phi\nu} g^{\kappa\phi} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} + 4 (\nabla^\sigma \nabla^\phi F_2) R_{\nu\sigma\phi\mu} \\
& \left. + 4 F_2 R_{\tau\mu\omega\nu} R^{\omega\tau} \right].
\end{aligned} \tag{C.19}$$

Comparando esta ecuación con (A.1) y (A.2) se ve que el tensor es:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{GB} = & -F_2 \mathcal{G} g_{\mu\nu} + 4 F_2 R R_{\mu\nu} + 4 g_{\mu\nu} (\nabla^\sigma \nabla_\sigma F_2) R - 4 (\nabla_\nu \nabla_\mu F_2) R - 8 F_2 R_\mu^\rho R_{\nu\rho} \\
& + 8 (\nabla^\phi \nabla_\mu F_2) R_{\phi\nu} + 8 (\nabla^\phi \nabla_\nu F_2) R_{\phi\mu} - 8 (\nabla^\lambda \nabla_\lambda F_2) R_{\mu\nu} - 8 g_{\mu\nu} (\nabla^\phi \nabla^\gamma F_2) R_{\phi\gamma} \\
& + 4 F_2 R_{\alpha\beta\kappa\mu} R_{\rho\sigma\phi\nu} g^{\kappa\phi} g^{\beta\sigma} g^{\alpha\rho} - 8 (\nabla^\sigma \nabla_\phi F_2) R_{\nu\sigma\phi\mu} - 8 F_2 R_{\tau\mu\omega\nu} R^{\omega\tau}.
\end{aligned} \tag{C.20}$$

Debido a que el invariante $\mathcal{G}$ es una divergencia en cuatro dimensiones, los términos proporcionales a la función de acople F_2 que no incluyan derivadas, se anulan. Usando este hecho y la propiedad del tensor de Riemann $R_{\nu\sigma\phi\mu} = -R_{\mu\phi\nu\sigma}$, finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu}^{GB} = & -4 ([\nabla_\nu \nabla_\mu F_2] R - g_{\mu\nu} [\nabla^\sigma \nabla_\sigma F_2] R - 2 [\nabla^\phi \nabla_\mu F_2] R_{\phi\nu} - 2 [\nabla^\phi \nabla_\nu F_2] R_{\phi\mu} \\
& + 2 [\nabla^\lambda \nabla_\lambda F_2] R_{\mu\nu} + 2 g_{\mu\nu} [\nabla^\phi \nabla^\lambda F_2] R_{\phi\gamma} - 2 [\nabla^\sigma \nabla^\phi F_2] R_{\mu\phi\nu\sigma}).
\end{aligned} \tag{C.21}$$

Bibliografía

- [1] LN Granda. Late time cosmological scenarios from scalar field with gauss bonnet and non-minimal kinetic couplings. *International Journal of Theoretical Physics*, 51(9):2813–2829, 2012.
- [2] LN Granda, E Torrente-Lujan, and JJ Fernandez-Melgarejo. Non-minimal kinetic coupling and chaplygin gas cosmology. *The European Physical Journal C*, 71(7):1–7, 2011.
- [3] Adam G Riess, Peter E Nugent, Brian P Schmidt, John Tonry, Mark Dickinson, Ronald L Gilliland, Rodger I Thompson, Tamas Budavari, Stefano Casertano, Aaron S Evans, et al. The farthest known supernova: support for an accelerating universe and a glimpse of the epoch of deceleration. *arXiv preprint astro-ph/0104455*, 2001.
- [4] Adam G Riess, Alexei V Filippenko, Peter Challis, Alejandro Clocchiatti, Alan Diercks, Peter M Garnavich, Ron L Gilliland, Craig J Hogan, Saurabh Jha, Robert P Kirshner, et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009, 1998.
- [5] Adam G Riess, Alexei V Filippenko, Michael C Liu, Peter Challis, Alejandro Clocchiatti, Alan Diercks, Peter M Garnavich, Craig J Hogan, Saurabh Jha, Robert P Kirshner, et al. Tests of the accelerating universe with near-infrared observations of a high-redshift type ia supernova. *The Astrophysical Journal*, 536(1):62, 2000.
- [6] SW Allen, DA Rapetti, RW Schmidt, H Ebeling, RG Morris, and AC Fabian. Improved constraints on dark energy from chandra x-ray observations of the largest relaxed galaxy clusters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 383(3):879–896, 2008.
- [7] A Mantz, SW Allen, H Ebeling, and D Rapetti. New constraints on dark energy from the observed growth of the most x-ray luminous galaxy clusters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 387(3):1179–1192, 2008.
- [8] Wayne Hu and Scott Dodelson. Cosmic microwave background anisotropies. *arXiv preprint astro-ph/0110414*, 2001.
- [9] Timothy J Pearson, BS Mason, ACS Readhead, MC Shepherd, JL Sievers, PS Udomprasert, JK Cartwright, AJ Farmer, S Padin, ST Myers, et al. The anisotropy of the microwave background to $l = 3500$: mosaic observations with the cosmic background imager. *The Astrophysical Journal*, 591(2):556, 2003.

- [10] Pea de Bernardis, PAR Ade, JJ Bock, JR Bond, J Borrill, A Boscaleri, K Coble, BP Crill, G De Gasperis, PC Farese, et al. A flat universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation. *Nature*, 404(6781):955–959, 2000.
- [11] CB Netterfield, Peter AR Ade, James J Bock, JR Bond, J Borrill, A Boscaleri, K Coble, CR Contaldi, BP Crill, P de Bernardis, et al. A measurement by boomerang of multiple peaks in the angular power spectrum of the cosmic microwave background. *The Astrophysical Journal*, 571(2):604, 2002.
- [12] P James E Peebles and Bharat Ratra. The cosmological constant and dark energy. *Reviews of Modern Physics*, 75(2):559, 2003.
- [13] Thanu Padmanabhan. Cosmological constant—the weight of the vacuum. *Physics Reports*, 380(5):235–320, 2003.
- [14] Scott Dodelson, Evalyn I Gates, and Michael S Turner. Cold dark matter. *Science*, 274(5284):69–75, 1996.
- [15] Ivaylo Zlatev, Limin Wang, and Paul J Steinhardt. Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant. *Physical Review Letters*, 82(5):896, 1999.
- [16] Diego Pavón and Winfried Zimdahl. Holographic dark energy and cosmic coincidence. *Physics Letters B*, 628(3):206–210, 2005.
- [17] JM Marcaide, A Alberdi, E Ros, P Diamond, II Shapiro, JC Guirado, DL Jones, F Mantovani, MA Perez-Torres, RA Preston, et al. Deceleration in the expansion of sn 1993j. *The Astrophysical Journal Letters*, 486(1):L31, 1997.
- [18] Adam G Riess, Louis-Gregory Strolger, John Tonry, Stefano Casertano, Henry C Ferguson, Bahram Mobasher, Peter Challis, Alexei V Filippenko, Saurabh Jha, Weidong Li, et al. Type ia supernova discoveries at $z \leq 1$ from the hubble space telescope: evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution. *The Astrophysical Journal*, 607(2):665, 2004.
- [19] Steven Weinberg. *The cosmological constant problems*. Springer, 2001.
- [20] Paul J Steinhardt, Limin Wang, and Ivaylo Zlatev. Cosmological tracking solutions. *Physical Review D*, 59(12):123504, 1999.
- [21] Roland de Putter and Eric V Linder. Kinetic ϕ^2 -essence and quintessence. *Astroparticle Physics*, 28(3):263–272, 2007.
- [22] C Armendariz-Picon, V Mukhanov, and Paul J Steinhardt. Essentials of k-essence. *Physical Review D*, 63(10):103510, 2001.
- [23] JS Bagla, Harvinder Kaur Jassal, and T Padmanabhan. Cosmology with tachyon field as dark energy. *Physical Review D*, 67(6):063504, 2003.
- [24] GW Gibbons. Cosmological evolution of the rolling tachyon. *Physics Letters B*, 537(1):1–4, 2002.
- [25] Parampreet Singh, Mohammad Sami, and Naresh Dadhich. Cosmological dynamics of a phantom field. *Physical Review D*, 68(2):023522, 2003.

- [26] M Sami and Alexey Toporensky. Phantom field and the fate of the universe. *Modern Physics Letters A*, 19(20):1509–1517, 2004.
- [27] Abha Dev, JS Alcaniz, and Deepak Jain. Cosmological consequences of a chaplygin gas dark energy. *Physical Review D*, 67(2):023515, 2003.
- [28] MC Bento, O Bertolami, and AA Sen. Generalized chaplygin gas, accelerated expansion, and dark-energy-matter unification. *Physical Review D*, 66(4):043507, 2002.
- [29] Ujjal Debnath, Asit Banerjee, and Subenoy Chakraborty. Role of modified chaplygin gas in accelerated universe. *Classical and Quantum Gravity*, 21(23):5609, 2004.
- [30] Nobuyoshi Makino and Misao Sasaki. The density perturbation in the chaotic inflation with non-minimal coupling. *Progress of Theoretical Physics*, 86(1):103–118, 1991.
- [31] Valerio Faraoni. Non-minimal coupling of the scalar field and inflation. *arXiv preprint astro-ph/9602111*, 1996.
- [32] Mark P Hertzberg. On inflation with non-minimal coupling. *Journal of High Energy Physics*, 2010(11):1–14, 2010.
- [33] Seong Chan Park and Satoshi Yamaguchi. Inflation by non-minimal coupling. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2008(08):009, 2008.
- [34] Cristiano Germani and Alex Kehagias. New model of inflation with non-minimal derivative coupling of standard model higgs boson to gravity. *arXiv preprint arXiv:1003.2635*, 2010.
- [35] Masata Ito. Holographic-dark-energy model with non-minimal coupling. *EPL (Europhysics Letters)*, 71(5):712, 2005.
- [36] MR Setare and EN Saridakis. Non-minimally coupled canonical, phantom and quintom models of holographic dark energy. *Physics Letters B*, 671(3):331–338, 2009.
- [37] J Sadeghi, MR Setare, A Banijamali, and F Milani. Non-minimally coupled quintom model inspired by string theory. *Physics Letters B*, 662(2):92–96, 2008.
- [38] MR Setare and EN Saridakis. Coupled oscillators as models of quintom dark energy. *Physics Letters B*, 668(3):177–181, 2008.
- [39] LN Granda. Non-minimal kinetic coupling to gravity and accelerated expansion. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010(07):006, 2010.
- [40] LN Granda and W Cardona. General non-minimal kinetic coupling to gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010(07):021, 2010.
- [41] LN Granda. Non-minimal kinetic coupling and the phenomenology of dark energy. *Classical and Quantum Gravity*, 28(2):025006, 2011.
- [42] LN Granda. Dark energy from scalar field with gauss–bonnet and non-minimal kinetic coupling. *Modern Physics Letters A*, 27(04), 2012.

- [43] Shin'ichi Nojiri, Sergei D Odintsov, and Misao Sasaki. Gauss-bonnet dark energy. *Physical Review D*, 71(12):123509, 2005.
- [44] Shinji Tsujikawa and M Sami. String-inspired cosmology: a late time transition from a scaling matter era to a dark energy universe caused by a gauss–bonnet coupling. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2007(01):006, 2007.
- [45] Tomi Koivisto and David F Mota. Gauss-bonnet quintessence: Background evolution, large scale structure, and cosmological constraints. *Physical Review D*, 75(2):023518, 2007.
- [46] Tomi Koivisto and David F Mota. Cosmology and astrophysical constraints of gauss–bonnet dark energy. *Physics Letters B*, 644(2):104–108, 2007.
- [47] Shin'ichi Nojiri and Sergei D Odintsov. Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 4(01):115–145, 2007.
- [48] Shin'ichi Nojiri and Sergei D Odintsov. Modified $f(r)$ gravity consistent with realistic cosmology: From a matter dominated epoch to a dark energy universe. *Physical Review D*, 74(8):086005, 2006.
- [49] Maria Christina B Abdalla, Shin'ichi Nojiri, and Sergei D Odintsov. Consistent modified gravity: dark energy, acceleration and the absence of cosmic doomsday. *Classical and Quantum Gravity*, 22(5):L35, 2005.
- [50] S Mendoza, X Hernandez, JC Hidalgo, and T Bernal. A natural approach to extended newtonian gravity: tests and predictions across astrophysical scales. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 411(1):226–234, 2011.
- [51] Robert H Sanders and Stacy S McGaugh. Modified newtonian dynamics as an alternative to dark matter. *arXiv preprint astro-ph/0204521*, 2002.
- [52] WJG De Blok and SS McGaugh. Testing modified newtonian dynamics with low surface brightness galaxies: rotation curve fits. *The Astrophysical Journal*, 508(1):132, 1998.
- [53] Shin'ichi Nojiri, Sergei D Odintsov, and Sachiko Ogushi. Friedmann–robertson–walker brane cosmological equations from the five-dimensional bulk (a) d s black hole. *International Journal of Modern Physics A*, 17(32):4809–4870, 2002.
- [54] NW Halverson, EM Leitch, C Pryke, J Kovac, JE Carlstrom, WL Holzapfel, M Dragovan, JK Cartwright, BS Mason, S Padin, et al. Degree angular scale interferometer first results: a measurement of the cosmic microwave background angular power spectrum. *The Astrophysical Journal*, 568(1):38, 2002.
- [55] Pea de Bernardis, PAR Ade, JJ Bock, JR Bond, J Borrill, A Boscaleri, K Coble, BP Crill, G De Gasperis, PC Farese, et al. A flat universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation. *Nature*, 404(6781):955–959, 2000.
- [56] David N Spergel, R Bean, O Doré, MR Nolta, CL Bennett, J Dunkley, G Hinshaw, N Jarosik, E Komatsu, L Page, et al. Three-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: implications for cosmology. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 170(2):377, 2007.

- [57] WB Bonnor and GFR Ellis. Observational homogeneity of the universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 218:605–614, 1986.
- [58] FK Hansen, AJ Banday, and KM Górski. Testing the cosmological principle of isotropy: local power-spectrum estimates of the wmap data. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 354(3):641–665, 2004.
- [59] I Bernard Cohen. Newton’s third law and universal gravity. *Journal of the History of Ideas*, 48(4):571–593, 1987.
- [60] F Briscese, E Elizalde, S Nojiri, and SD Odintsov. Phantom scalar dark energy as modified gravity: Understanding the origin of the big rip singularity. *Physics Letters B*, 646(2):105–111, 2007.
- [61] Mehrdad Farhoudi. Lovelock tensor as generalized einstein tensor. *General Relativity and Gravitation*, 41(1):117–129, 2009.
- [62] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*, volume 1. 2004.
- [63] Lucy Joan Slater. *Generalized hypergeometric functions*. University Press Cambridge, 1966.