



La constante de cuantización para retículos euclidianos de Tipo I en las primeras dimensiones superiores

Norida Manuela Iquinás Volverás

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Matemáticas
Santiago de Cali, Colombia
2025

La constante de cuantización para retículos euclidianos de Tipo I en las primeras dimensiones superiores

Norida Manuela Iquinás Volverás

Trabajo de investigación presentado como requisito
parcial para optar por el título de Magíster en Ciencias Matemáticas

Director:
Dr. Juan Miguel Velásquez Soto

Universidad del Valle
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Departamento de Matemáticas
Santiago de Cali, Colombia
2025

A mi madre por supuesto.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi director de tesis, el profesor Juan Miguel Velásquez Soto; como también, agradezco el gran apoyo brindado por mi madre, mis hermanas, hermano y Manolo.

Además, quiero agradecer al Departamento de Matemáticas, al posgrado en matemáticas, y en especial al Laboratorio Centro de Cómputo Jürgen Tischer, porque gracias a sus recursos brindados fue posible el desarrollo de este trabajo.

Resumen

En este trabajo de investigación se pretende realizar una compilación de conceptos y resultados concernientes a la teoría de retículos euclidianos (o lattices), como también de algunos elementos de la teoría de grafos y la combinatoria, con el objetivo de estudiar el problema del retículo cuantizador óptimo. Dicho estudio nos permite, en algunas dimensiones, brindar una fórmula de la constante de cuantización para lattices de Tipo I, en función de los parámetros de Selling.

La estrategia para calcular la fórmula de la constante de cuantización consiste en realizar una descripción de la celda de Voronoi del lattice, la cual nos permite obtener una partición en símlices de la celda, y por medio de un resultado expuesto por Conway y Sloane en [1] se logra deducir la fórmula. En este proceso se utilizan algoritmos ejecutados en SageMath para verificar las cuentas.

Luego, con la fórmula hallada, se hace un estudio numérico de la fórmula, lo cual permite verificar algunos resultados establecidos en [1], con relación a la constante de cuantización para lattices de primer tipo, ésto también se lleva a cabo por medio de algoritmos realizados en SageMath.

Palabras claves:

Retículos euclidianos, Parámetros de Selling, Celdas de Voronoi, Símplex.

Contenido

Agradecimientos	v
Resumen	vii
Introducción	xi
1 Preliminares	1
1.1 Definiciones y resultados básicos	1
1.2 Superbases y parámetros de Selling	8
1.3 Tipos de coordenadas asociadas	11
1.4 Celdas de Voronoi y Vectores de Voronoi	12
2 Descripción de la celda de Voronoi	17
2.1 Caracterización combinatoria de la celda de Voronoi	17
2.2 Caracterización vectorial de la celda de Voronoi	21
2.2.1 Vértices de la Celda	21
2.2.2 Aristas de la celda	23
2.2.3 Caras 2-dimensionales de la celda	25
2.2.4 Caras k -dimensionales de la celda	27
2.3 Árboles de Búsqueda Binarios	32
2.4 Cálculo del Volumen de un Símpex	35
2.5 Segundo momento de un símpex	38
3 El problema del lattice cuantizador óptimo	41
3.1 Politopos	41
3.1.1 Segundo momento de politopos	42
3.1.2 Permutoedros	43
3.2 Constante de cuantización para lattices en dimensión 2	44
3.3 Constante de cuantización para lattices en dimensión 3	50
3.4 Constante de cuantización para lattices de Tipo I en dimensión 4	58
3.5 Constante de cuantización para lattices de Tipo I en dimensión 5	62

4	Exploración numérica	65
4.1	Propiedades de la fórmula de la constante de cuantización para lattices Tipo I	65
4.2	Exploración del mínimo local de la fórmula de la constante de cuantización .	66
5	Conclusiones	71

Introducción

Al proceso de asignar a valores de entrada, en un conjunto “grande” valores de salida en un conjunto más “pequeño” se denomina cuantizar. El redondeo y el truncamiento son ejemplos de procesos de cuantización. Dicho proceso está involucrado en casi todo el procesamiento de señales digitales, dado que representar una señal digital implica redondeo.

Un dispositivo que realice la cuantización se denomina cuantizador. Así, un cuantizador o conversor analógico - digital es un aparato que transforma señales continuas en discretas, también se puede pensar como un aparato que sirve para discretizar o comprimir datos. Los cuantizadores los encontramos en instrumentos de medición digital o dispositivos de grabación y en sistemas de comunicación digital.

Ahora, si consideramos un subconjunto discreto H de $\mathbb{R}^n$, lo que hace un cuantizador es, dado un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, identificarlo con un punto $\mathbf{P}_i \in H$, que cumple la condición de ser el más próximo a $\mathbf{x}$. Más formalmente, un cuantizador (Figura 1¹) sobre H es una función que asigna a cada punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un punto $\mathbf{P}_i \in H$, tal que la distancia euclidiana de $\mathbf{x}$ a H sea igual a la distancia entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{P}_i$.

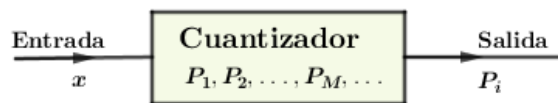


Figura 1. Representación de un cuantizador n -dimensional.

La asignación que realiza el cuantizador, es decir, al cambiar los puntos de $\mathbb{R}^n$ por los puntos de H introduce errores, además, dado que este estudio está basado en lo desarrollado por Conway y Sloane en [1], entonces el error a considerar es el error cuadrático medio.

Luego, si tenemos una entrada $\mathbf{x}$ con distribución de probabilidad $p(\mathbf{x})$ y un cuantizador sobre H , la magnitud del error se medirá por la distancia euclídea desde el punto $\mathbf{x}$ al punto

¹Figura tomada de [1].

más cercano $\mathbf{P}_i$. Dichos puntos se deberán escoger con la finalidad de que el error cuadrático medio sea mínimo.

Dado que $\mathbf{x}$ tiene función de probabilidad $p(\mathbf{x})$, el error cuadrático medio es

$$E = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^n} N(\mathbf{x} - \mathbf{P}_i(\mathbf{x})) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1)$$

siendo N la distancia euclidiana al cuadrado.

Por otro lado, la celda de Voronoi de un punto $\mathbf{P}_i$, es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ cuya distancia a dicho punto sea menor o igual que la distancia a cualquier otro punto de H . En la Figura 2 tenemos una partición en celdas de Voronoi del plano, siendo H un conjunto de once puntos.

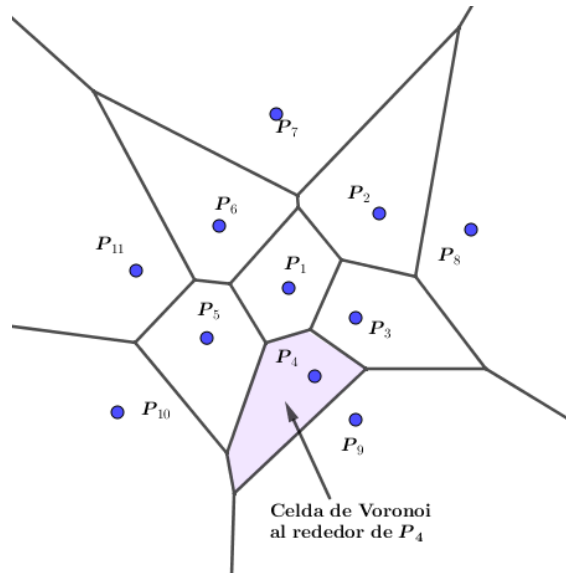


Figura 2. Representación de un cuantizador 2-dimensional.

Luego, si H consiste de los puntos $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_M \in \mathbb{R}^n$, para M muy grande, entonces $\mathbb{R}^n$ se particiona en celdas de Voronoi, y el error cuadrático medio dado en (1) se expresa de la forma

$$E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^M \int_{V(\mathbf{P}_i)} N(\mathbf{x} - \mathbf{P}_i) p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Podemos ver que E depende de la dimensión del espacio, el número de puntos M y de la función de probabilidad p . Además, dada la importancia de que E sea mínimo, deseamos encontrar el ínfimo

$$E(n, M, p) = \inf_{\{\mathbf{P}_i\}} E,$$

es decir, el error más pequeño alcanzado para cualquier subconjunto de M puntos $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_M \in \mathbb{R}^n$.

Bajo suposiciones muy generales, en [1], se muestra que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} M^{2/n} E(n, M, p) = G_n \left(\int_{\mathbb{R}^n} p(\mathbf{x})^{n/(n+2)} d\mathbf{x} \right)^{\frac{n+2}{n}}, \quad (2)$$

donde G_n sólo depende de n . Si se fija adecuadamente $p(\mathbf{x})$, es posible encontrar G_n de la última igualdad, entonces, como lo mencionó Conway en [1], por simplicidad, se va a suponer que $\mathbf{x}$ se distribuye uniformemente en una región grande de $\mathbb{R}^n$, por el hecho de que así el error cuadrático medio se minimiza si cada punto $\mathbf{P}_i$ está en el centroide de su región de Voronoi.

De ahora en adelante, vamos a considerar que la cantidad de puntos M crece indefinidamente y que la entrada $\mathbf{x}$ se distribuye uniformemente en una bola grande de $\mathbb{R}^n$, así E y G_n tienen la forma

$$E = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^M \int_{V(\mathbf{P}_i)} N(\mathbf{x} - \mathbf{P}_i) d\mathbf{x}}{\sum_{i=1}^M \int_{V(\mathbf{P}_i)} d\mathbf{x}}, \quad (3)$$

$$G_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{E(n, M, p)}{\left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \int_{V(\mathbf{P}_i)} d\mathbf{x} \right)^{2/n}}. \quad (4)$$

Por consiguiente, para una cuantización óptima de una entrada uniformemente distribuida en una región grande de $\mathbb{R}^n$, y con una gran cantidad de puntos, la constante de cuantización G_n viene siendo el error cuadrático medio promedio.

En virtud de la discusión anterior, decimos que el *problema del cuantizador* consiste en elegir puntos $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_M$ en $\mathbb{R}^n$ para minimizar

$$\frac{1}{n} \frac{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \int_{V(\mathbf{P}_i)} N(\mathbf{x} - \mathbf{P}_i) d\mathbf{x}}{\left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \text{vol}(V(\mathbf{P}_i)) \right)^{1+\frac{2}{n}}}. \quad (5)$$

En consecuencia, de (3) y (4) resulta que G_n es el límite cuando $M \rightarrow \infty$ del ínfimo de (5) cuando se recorren todas las posibles elecciones de los $\mathbf{P}_i$. Así, la solución al problema del cuantizador proporciona el cuantizador óptimo para entradas uniformemente distribuidas en una región muy grande de $\mathbb{R}^n$.

Podemos notar que el trabajo de hallar una distribución de puntos que minimice la expresión dada en (5) no es tarea fácil, porque para cada elección de $\mathbf{P}_i$ tenemos una celda de Voronoi que no necesariamente es congruente a las de otras celdas generadas por otros puntos. Luego, si las celdas de Voronoi son todas congruentes entre sí, tenemos que los puntos forman un

retículo euclidiano. Mas aún, si $P = V(\mathbf{0})$ es la celda centrada en el origen, la fórmula de G_n resulta más sencilla, esto es

$$G_n(P) = \frac{\frac{1}{n} \int_P \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} d\mathbf{x}}{\text{vol}(P)^{1+\frac{2}{n}}}, \quad (6)$$

siendo, $G_n(P)$ el segundo momento normalizado de P . Así, *el problema del retículo cuantizador* se basa en encontrar un retículo Λ con la condición de que $G(\Lambda)$ sea mínimo, y escribimos $G_n(\Lambda) = G_n(P)$.

En la Figura 3 (imagen tomada de [2]), tenemos algunos resultados concernientes al problema del cuantizador. Podemos observar la familia de retículos A_n , la curva que representa la cota inferior obtenida al calcular el segundo momento normalizado de la esfera, además de la curva que representa la cota superior dada por Zador (en la ecuación (82) en [1] o en [3]). También, en dicha figura se representa la cota inferior conjeturada por Conway - Sloane en [1].

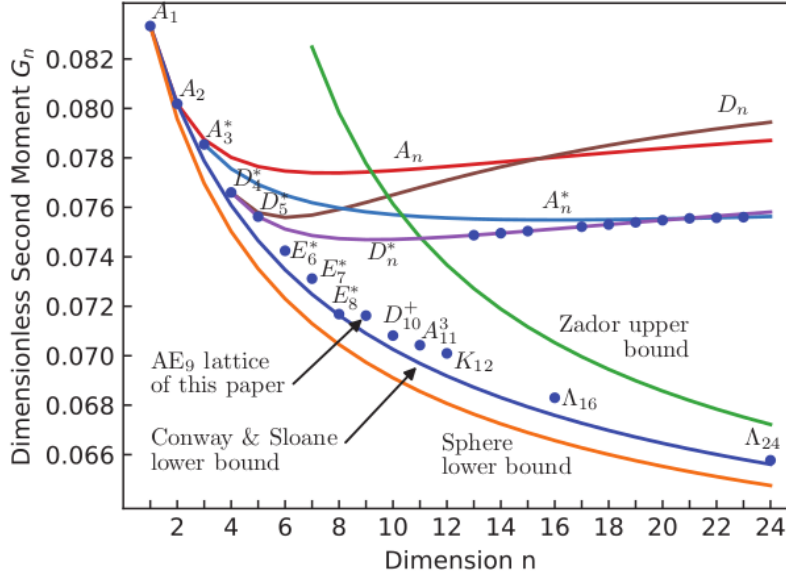


Figura 3. Problema de cuantización en dimensiones menores a 24.

A la fecha, el problema del lattice cuantizador óptimo solo tiene solución para dimensiones 2 y 3, siendo el lattice hexagonal A_2 (ver Ejemplo 1.1.3) el óptimo en dimensión 2 y A_3^* (ver Ejemplo 1.2.3) el óptimo en dimensión 3. En la tabla dada a continuación (la cual fue tomada de [1]), se muestran los mejores cuantizadores conocidos hasta dimensión $n \leq 24$, para algunos de estos retículos el error cuadrático medio $G(\Lambda)$ fue hallado.

Ahora, si el lector quiere profundizar en el tema, en el Capítulo 4 de [1] se muestran los lattices mencionados en la tabla, donde se realiza el estudio de los retículos mencionados; además del Capítulo 21, donde podrá encontrar diversos resultados concernientes a la constante de cuantización en diferentes retículos.

Así las cosas, este trabajo de investigación tiene como objetivo ampliar el conocimiento

sobre la constante de cuantización o error cuadrático medio, es decir, G_n , para ciertos retículos euclidianos. En este proceso, se estudiará el problema del retículo cuantizador óptimo, específicamente los retículos del tipo I.

n	Nombre del cuantizador	Error cuadrático medio G
0	Λ_0	0
1	Z	0,083333
2	$A_2^* \cong A_2$	0,080188
3	$A_3^* \cong D_3^*$	0,078543
	$A_3 \cong D_3$	0,078745
4	$D_4^* \cong D_4$	0,076603
	A_4^*	0,077559
	A_4	0,078020
5	D_5^*	0,075625
	D_5	0,075786
	A_5^*	0,076922
	A_5	0,077647
6	E_6^*	0,074244
	E_6	0,074347
7	E_7^*	0,073116
	E_7	0,073231
8	$E_8^* \cong E_8$	0,071682
	D_8^*	0,074735
	D_8	0,075914
	A_8^*	0,075972
	A_8	0,077391
9	AE_9	0,071622
12	$K_{12}^* \cong K_{12}$	$0,070100 \pm 0,000024$
16	$\Lambda_{16}^* \cong \Lambda_{16}$	$0,068299 \pm 0,000027$
24	$\Lambda_{24}^* \cong \Lambda_{24}$	$0,065771 \pm 0,000074$

Tabla 1. Mejores retículos cuantizadores conocidos en dimensiones menores a 24.

Capítulo 1

Preliminares

Tenemos como objetivo calcular la constante de cuantización para cierto tipo de retículos euclidianos en algunas dimensiones superiores. Entonces, para contextualizar el problema, en este capítulo vamos a presentar algunas definiciones y propiedades básicas concernientes a la teoría de retículos en espacios euclidianos, todo esto basado en lo consignado en [4] y [5]. Además, incluimos ciertos conceptos y resultados, donde la idea de politopo juega un papel importante.

1.1 Definiciones y resultados básicos

Definición 1.1.1. Un subconjunto Λ de $\mathbb{R}^n$ es un *lattice* (o retículo) n -dimensional o de rango n si existe un subconjunto $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ tales que

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i : x_i \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (1.1)$$

A dicho conjunto B se lo llama una *base* del lattice Λ .

De ahora en adelante, vamos a usar el término *lattice* en vez de retículo euclidiano.

A continuación, definimos lo que es la *matriz generadora* M asociada al lattice como una matriz, cuyas columnas son los vectores de la base. Es decir, si consideremos las coordenadas de los vectores de B en la base canónica de $\mathbb{R}^n$, la matriz generadora es

$$M = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

donde las columnas de la matriz, son las componentes de los vectores $\mathbf{v}_i$, con $1 \leq i \leq n$.

La anterior matriz, nos permite definir una matriz fundamental, cuyas entradas son los productos internos de los elementos de la base del lattice, ella se denomina la *matriz de Gram* que se expresa como $A = M^{tr}M$.

Es claro que para cualquier elemento $\mathbf{t} \in \Lambda$, existe $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{tr} \in \mathbb{Z}^n$ tal que $\mathbf{t} = M\mathbf{x}$. En consecuencia, el lattice también se puede representar como $\Lambda = \{M\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n\}$.

Ahora, sean B y B' dos bases que generan el mismo lattice, decimos que dos matrices M y M' generan el mismo lattice si y sólo si existe una matriz $U \in GL_n(\mathbb{Z})$ (el grupo de matrices cuadradas de entradas enteras que tienen una inversa también con entradas enteras) tal que $M' = MU$.

Lo dicho anteriormente nos permite deducir que si A es la matriz de Gram del lattice Λ , entonces $A' = U^{tr}AU$ también es una matriz de Gram del lattice, donde U es una matriz unimodular, es decir, una matriz de enteros con determinante 1 o -1. Luego, inferimos que $\det(A') = \det(A)$.

Dado que dos matrices de Gram asociadas a Λ tienen el mismo determinante, el *determinante del lattice* se define como el determinante de la matriz de Gram, es decir, $\det(\Lambda) = \det(A)$.

Definición 1.1.2. Sea Λ un lattice n -dimensional y $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base para Λ . Al conjunto

$$P := \left\{ \sum_{i=1}^n t_i \mathbf{v}_i : 0 \leq t_i < 1 \right\} \quad (1.3)$$

se le llama *Paralelotopo fundamental* para Λ .

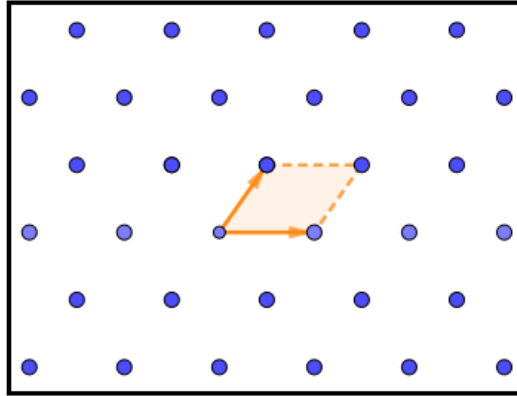


Figura 1.1. Paralelotopo fundamental en dimensión 2.

Podemos ver que cada base del lattice tiene asociado un paralelotopo fundamental, quienes tienen el mismo volumen entonces, a dicho valor es lo que se define como el *volumen del*

lattice y lo denotamos por $\text{vol}(\Lambda)$. Más aún, el volumen del *lattice* y el determinante de la matriz de Gram asociada al *lattice* se relacionan de la siguiente forma:

$$\text{vol}(\Lambda) = \sqrt{\det(A)}. \quad (1.4)$$

Tenemos que las transformaciones rígidas del espacio $\mathbb{R}^n$ que fijan el origen están dadas por el grupo $O(n)$. Luego, es válido pensar que $O(n)$ actúa en el conjunto de *lattices* de $\mathbb{R}^n$. Este hecho lo podemos escribir como $B \cdot \Lambda = \{B\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \Lambda\}$, donde $B \in O(n)$.

Además, si dos *lattices* Λ y Λ' están relacionados por una homotecia, es decir, si existe $t \in \mathbb{R}^+$ tal que $\Lambda' = t\Lambda$, diremos que ellos son *semejantes* (o *equivalentes*), lo que se denota con $\Lambda \cong \Lambda'$.

Dados Λ y Λ' con matrices generadoras M y M' respectivamente, decimos que Λ y Λ' son equivalentes si y sólo si existen $B \in O(n)$ y $U \in GL_n(\mathbb{Z})$ tal que $M' = cBMU$, donde $c > 0$. Con respecto a las matrices de Gram de cada *lattice* se satisface $A' = c^2 U^{tr} A U$. Cuando los *lattices* son congruentes, se cumple $A' = U^{tr} A U$.

Ejemplo 1.1.3.

1. El *lattice* cúbico n -dimensional $\mathbb{Z}^n$ o *lattice* entero está dado por el conjunto

$$\mathbb{Z}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)^{tr} \in \mathbb{R}^n : x_i \in \mathbb{Z}\}.$$

Una matriz generadora es la matriz identidad I_n , y es a la vez la matriz de Gram asociada al *lattice*. Es claro que $\det(\mathbb{Z}^n) = 1$.

2. Consideremos el *lattice* hexagonal, que está generado por los vectores $(1, 0)^{tr}$ y $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})^{tr}$. La matriz generadora y de Gram asociadas al *lattice* son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, el determinante del *lattice* hexagonal es $\det(A) = \frac{3}{4}$.

3. El *lattice* n -dimensional A_n , para $n \geq 1$, se define de la forma

$$A_n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} : x_0 + x_1 + \dots + x_n = 0\}.$$

Este *lattice* está contenido en el hiperplano $\sum_{i=0}^n x_i = 0$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, es decir, es de rango n . Los n vectores que generan a A_n son: $(1, -1, 0, \dots, 0)^{tr}$, $(0, 1, -1, 0, \dots, 0)^{tr}$, $\dots$, $(0, \dots, 0, 1, -1)^{tr}$. Entonces, la matriz de Gram del *lattice* es:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Veamos que $\det(A_n) = n + 1$. En efecto, al calcular el determinante de la matriz utilizando la primera fila, obtenemos que $\det(A_n) = 2\det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2})$. Luego, por la anterior expresión del determinante de A_n y por el Segundo Principio de Inducción concluimos que $\det(A_n) = 2n - (n - 1) = n + 1$.

En particular, consideremos el lattice $A_2 = \{(x_0, x_1, x_2)^{tr} \in \mathbb{Z}^3 : x_0 + x_1 + x_2 = 0\}$. Una base para A_2 es $\{(1, -1, 0)^{tr}, (0, 1, -1)^{tr}\}$. La matriz generadora y de Gram asociadas al lattice son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, el $\det(A_2) = 3$.

4. Ahora, para $n \geq 2$, con $n \in \mathbb{N}$, el lattice D_n se define como el conjunto

$$D_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n : x_1 + x_2 + \dots + x_n \in 2\mathbb{Z}\}.$$

Una base para D_n esta conformada por los vectores $(1, 1, 0, \dots, 0)^{tr}$, $(1, -1, 0, \dots, 0)^{tr}$, $(1, 0, 0, \dots, -1)^{tr}$. En consecuencia, la matriz generadora y Gram de D_n son respectivamente:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

siendo $\det(D_n) = 1/4$.

En particular, si $n = 3$, D_3 está generado por los vectores $(1, 1, 0)^{tr}$, $(1, -1, 0)^{tr}$ y $(1, 0, -1)^{tr}$; de ahí que,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Consideremos el lattice E_8 , el cuál está definido como

$$E_8 = \left\{ \mathbf{v} = (x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{Z}^8 : \mathbf{v} \in D_8 \text{ o } \mathbf{v} + \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}\right) \in D_8 \right\}.$$

Una matriz generadora para E_8 está dada por

$$M_8 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Los lattices E_7 y E_8 están definidos en $\mathbb{R}^8$ como

$$\begin{aligned} E_7 &= \{\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_8) \in E_8 : x_1 = x_2\}, \\ E_6 &= \{\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_8) \in E_8 : x_1 = x_2 = x_3\}. \end{aligned}$$

Una matriz generadora para cada lattice son respectivamente

$$M_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad M_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Los Ejemplos 2 y 3 dados anteriormente tienen una particularidad si al lattice hexagonal lo vemos contenido en $\mathbb{R}^3$, es decir, que esté generado por $\{(1, 0, 0)^{tr}, (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)^{tr}\}$. Podemos mostrar que dicho lattice es equivalente a A_2 . En efecto, se cumple que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}B \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U,$$

donde la matriz ortogonal B y la matriz unimodular U son

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad y \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, otra forma de mostrar que los lattices en cuestión son equivalente es utilizando esta base $\{(1, -1, 0)^{tr}, (0, -1, 1)^{tr}\}$ para A_2 . Podemos ver que las dos matrices de Gram de los lattices cumplen lo siguiente

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición 1.1.4. Sea Λ un lattice en $\mathbb{R}^n$. Al conjunto

$$\Lambda^* = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{Z} \text{ para todo } \mathbf{v} \in \Lambda\},$$

se le llama el *lattice dual* de Λ .

Ejemplo 1.1.5. El lattice dual del lattice $\mathbb{Z}^n$, es él mismo.

Ejemplo 1.1.6. Consideremos el lattice hexagonal, es decir, el lattice generado por los vectores $(1, 0)^{tr}$ y $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})^{tr}$. Un elemento de su dual (x_1, x_2) debe satisfacer lo siguiente:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \cdot (1, 0) &= x_1 = l_1 \in \mathbb{Z} \\ (x_1, x_2) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \frac{x_1}{2} + \frac{\sqrt{3}x_2}{2} = l_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Resolviendo las ecuaciones se obtiene que $(x_1, x_2) = (l_1, (2l_2 - l_1)/\sqrt{3})$, $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$. Así, el dual del lattice hexagonal es el lattice generado por los vectores $(1, -1/\sqrt{3})^{tr}$, $(0, 2/\sqrt{3})^{tr}$. En la siguiente figura podemos ver un bosquejo del lattice hexagonal y su dual.

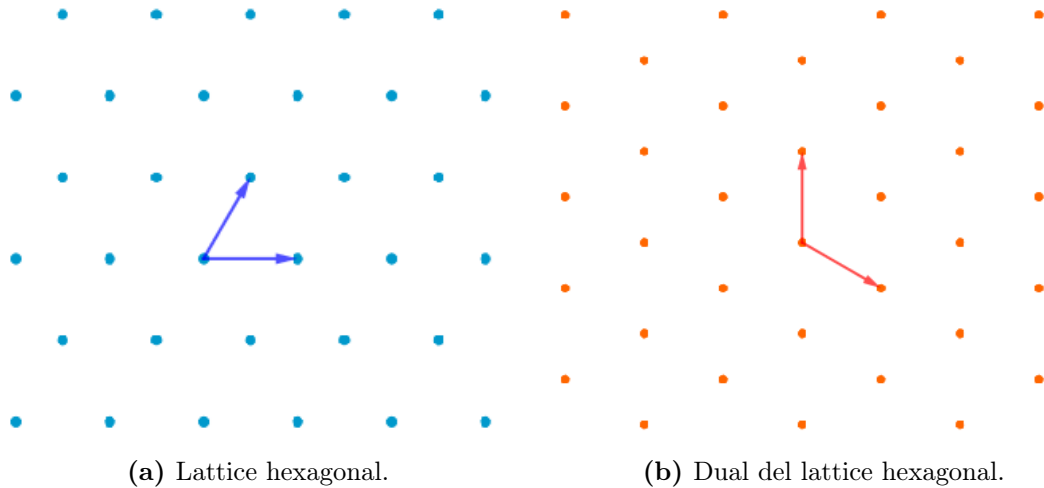


Figura 1.2. Ejemplo de un lattice y su dual.

Proposición 1.1.7. Sea Λ un lattice de $\mathbb{R}^n$ de rango n .

1. Si M es una matriz generadora de Λ , entonces $(M^{tr})^{-1}$ es una matriz generadora de Λ^* .
2. Si A es la matriz de Gram asociada a Λ , entonces A^{-1} es una matriz de Gram para Λ^* .
3. $\text{Vol}(\Lambda^*) = \text{Vol}(\Lambda)^{-1}$.

Demostración.

1. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base para Λ y sea $B^* = \{\mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \dots, \mathbf{v}_n^*\}$ una base para Λ^* . Ahora, consideremos la matriz generadora M^* de Λ^* . Podemos ver que $M^* M^{tr} = I_n$, siendo I_n la matriz identidad y M la matriz generadora del lattice Λ . Dado que M es una matriz cuadrada no singular, entonces $M^* = (M^{tr})^{-1} = (M^{-1})^{tr}$.
2. Si A y A^* son la matriz de Gram de Λ y Λ^* respectivamente, entonces

$$\begin{aligned} A^* A &= M^* (M^*)^{tr} M M^{tr} \\ &= M^* M^{-1} M M^{tr} \\ &= M^* M^{tr} \\ &= (M^{tr})^{-1} M^{tr} \\ &= I_n. \end{aligned}$$

De ahí que $A^* = A^{-1}$.

3. Dado que $A^* A = I_n$, entonces $\det(A^*) \det(A) = 1$, es decir $\det(\Lambda^*) \det(\Lambda) = 1$. Por lo tanto, $\text{vol}(\Lambda^*) \text{vol}(\Lambda) = 1$.

□

Ejemplo 1.1.8.

1. Consideremos el lattice A_n . Entonces, el lattice dual es el conjunto

$$A_n^* = \{\mathbf{w} = (x_0, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n x_i = 0 \text{ y } \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } \mathbf{v} \in A_n\}.$$

Tenemos que la matriz generadora M y Gram A de A_n^* es respectivamente

$$M = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} n & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} n & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

siendo la matriz de Gram de tamaño $n \times n$. Por la Proposición 1.1.7, deducimos que $\det(A_n^*) = \frac{1}{n+1}$.

2. Una matriz generadora para el lattice dual de D_n , es decir, D_n^* , es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1/2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

con $\det(D_n) = 1/4$.

1.2 Superbases y parámetros de Selling

Definición 1.2.1. Sea Λ un lattice en $\mathbb{R}^n$ y $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de $n + 1$ vectores de Λ , decimos que B es una *superbase* de Λ si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de Λ y $\sum_{i=0}^n \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$.

Además, si el producto interno de cualquier par de vectores de B es menor o igual que cero, a B se le llama una *superbase obtusa*.

Si todos los productos internos son estrictamente negativos, diremos que B es una superbase obtusa *estricta*, o *laxa* en caso contrario.

Definición 1.2.2. A los lattices que admiten una superbase obtusa, se los denomina *lattices de Tipo I*.

Ejemplo 1.2.3.

1. El lattice A_2 es de Tipo I, porque una superbase para A_2 es el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Consideremos el lattice A_3^* con la superbase obtusa estricta

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \right\}.$$

Entonces, el $\det(A_3^*) = 1/4$. Así el volumen del lattice es $1/2$.

Definición 1.2.4. Si $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una superbase de un lattice Λ , a los $\binom{n+1}{2}$ valores

$$p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j, \quad \text{con } 0 \leq i < j \leq n \quad (1.5)$$

se les llama *parámetros de Selling* de Λ relativos a la superbase B .

Adicionalmente, con la notación $p_{i|jk\dots l} = p_{ij} + p_{ik} + \dots + p_{il}$, siendo p_{ij} los parámetros de Selling, entonces la matriz de Gram para la superbase es

$$A' = \begin{pmatrix} p_{0|12\dots n} & -p_{01} & \cdots & -p_{0n} \\ -p_{01} & p_{1|02\dots n} & \cdots & -p_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_{0n} & -p_{1n} & \cdots & p_{n|01\dots n-1} \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

El siguiente resultado, nos muestra la relación existente entre los parámetros de Selling y la norma de un vector.

Teorema 1.2.5. (*Selling*). Sea Λ un lattice n -dimensional y $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una superbase de Λ con parámetros de Selling asociados $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ para $0 \leq i < j \leq n$, y sea $\mathbf{X} = \sum_{i=0}^n x_i \mathbf{v}_i$, con $x_i \in \mathbb{R}$. Entonces, la norma de $\mathbf{X}$, es decir, $N(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \cdot \mathbf{X}$ se expresa de la siguiente forma:

$$N(\mathbf{X}) = \sum_{i < j} p_{ij} (x_i - x_j)^2. \quad (1.7)$$

Demostración. Tenemos que $\mathbf{X} = \sum_{i=0}^n x_i \mathbf{v}_i$, de ahí que

$$\begin{aligned} N(\mathbf{X}) &= \left(\sum_{i=0}^n x_i \mathbf{v}_i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^n x_i \mathbf{v}_i \right) \\ &= \sum_{i=0}^n x_i^2 \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i + 2 \sum_{i < k} x_i x_k \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_k \\ &= \sum_{i=0}^n x_i^2 \mathbf{v}_i \cdot \left(- \sum_{j \neq i} \mathbf{v}_j \right) - 2 \sum_{i < k} p_{ik} x_i x_k \\ &= \sum_{i=0}^n x_i^2 \sum_{j \neq i} p_{ij} - 2 \sum_{i < k} p_{ik} x_i x_k \\ &= \sum_{i < j} p_{ij} (x_i^2 + x_j^2) - 2 \sum_{i < k} p_{ik} x_i x_k \\ &= \sum_{i < j} p_{ij} (x_i^2 + x_j^2 - 2x_i x_j) \\ &= \sum_{i < j} p_{ij} (x_i - x_j)^2. \end{aligned}$$

□

A continuación, vamos a considerar algunos conceptos y resultados concernientes a los grafos, los cuáles se encuentran consignados en [6]. En efecto, un *grafo* G consiste de un conjunto V

de vértices, un conjunto E de aristas y una función que asocia cada arista $e \in E$ un par de vértices. Además, se dice que un grafo es *simple* cuando a lo más existe una arista uniendo dos vértices cualesquiera.

El siguiente concepto a considerar es el de *grafo completo*, dicho grafo es denotado por K_n y es un grafo simple de n vértices, con $\binom{n}{2}$ aristas. Adicionalmente, si existe un camino de x a y , para todo $x, y \in G$, entonces G es llamado un *grafo conexo*.

Ahora, si el grafo conexo no contiene caminos cerrados o ciclos, éste es llamado *árbol*. Más aún, si G es un grafo simple, un *árbol generador* de G , es un subgrafo de G , que es un árbol y contiene todos los vértices de G . El siguiente resultado da el numero de árboles generadores de un grafo completo.

Teorema 1.2.6. [7] *Existen n^{n-2} árboles generadores etiquetados del grafo completo K_n .*

Es importante mencionar el hecho de que a un lattice Λ con superbase $B = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ es posible asociarle un grafo completo de $n + 1$ vértices, el cual denotaremos por K_{n+1} . Los vértices de dicho grafo son los vértices de la superbase y la arista que se forma por los vectores v_i y v_j será etiquetada con el parámetro de Selling p_{ij} .

Ejemplo 1.2.7. Consideremos un lattice Λ de dimensión 2, con superbase obtusa $B = \{v_0, v_1, v_2\}$. Tenemos que el grafo completo K_3 asociado al lattice es el que se muestra en la Figura 1.3, junto a sus 3 árboles generadores.

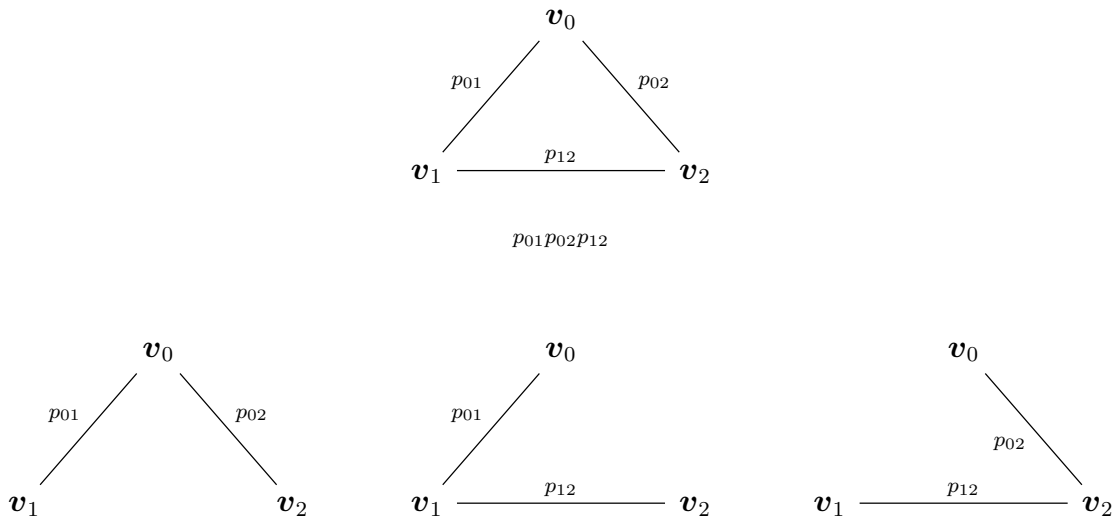


Figura 1.3. Grafo completo K_3 y sus árboles generadores.

El siguiente resultado nos proporciona una expresión para el determinante del lattice en términos de árboles generadores. La demostración del teorema se puede encontrar en [7].

Teorema 1.2.8. [7] Sean Λ un lattice n -dimensional y $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una superbase para Λ . Si $p_{i|jk\dots l} = p_{ij} + p_{ik} + \dots + p_{il}$, con $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ para $0 \leq i < j \leq n$. Entonces el determinante del lattice, $\det(\Lambda)$, viene dado por:

$$\det(\Lambda) = \sum_T \prod_{[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] \in T} p_{ij}, \quad (1.8)$$

donde T recorre todos los árboles generadores de K_{n+1} , tal que los vértices están etiquetados con los elementos de B y las aristas con p_{ij} , además $[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j]$ denota la arista entre los vértices $\mathbf{v}_i$ y $\mathbf{v}_j$.

Del Teorema anterior y el Ejemplo 1.2.7, inferimos que el determinante de un lattice 2-dimensional es

$$\det(\Lambda) = p_{01}p_{02} + p_{01}p_{12} + p_{02}p_{12}.$$

1.3 Tipos de coordenadas asociadas

Existen ciertos tipos de coordenadas para representar un elemento de $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$. En efecto, si consideramos una base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de un lattice n -dimensional Λ , a cada vector $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ se lo puede representar de tres formas:

1. En coordenadas euclídeas.

En este caso, al punto $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ lo podemos escribir en términos de la base canónica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$, es decir, $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)^{tr} = t_1\mathbf{e}_1 + t_2\mathbf{e}_2 + \dots + t_n\mathbf{e}_n$.

2. Las $\mathbf{x}$ -coordenadas de $\mathbf{t}$ asociadas a la base B .

Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{tr}$ entonces, $\mathbf{t} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n$. Además, si M es la matriz generadora del lattice Λ asociada a la base B , se tiene que $\mathbf{t} = M\mathbf{x}$.

3. Si A es la matriz de Gram asociada a la base B , definimos las $\mathbf{y}$ -coordenadas de $\mathbf{t}$ como

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}.$$

De la última igualdad podemos deducir que

$$\mathbf{y} = M^{tr}M\mathbf{x} = M^{tr}\mathbf{t}.$$

En consecuencia, las $\mathbf{y}$ -coordenadas de $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ son los productos internos del vector $\mathbf{t}$ con los elementos de la base B , es decir

$$\mathbf{y} = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{t}, \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{t}, \dots, \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{t})^{tr}. \quad (1.9)$$

Observación 1.3.1. Si consideramos una superbase en lugar de una base del lattice entonces, hablaremos de coordenadas aumentadas.

Ahora, si $\mathbf{t} \in \Lambda$, la norma de $\mathbf{t}$, que denotamos por $N(\mathbf{t})$, la podemos escribir en términos de sus $\mathbf{x}$ -coordenadas, esto es

$$\begin{aligned} N(\mathbf{t}) &= \mathbf{t}^{tr} \mathbf{t} \\ &= (M\mathbf{x})^{tr} M\mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^{tr} A\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Adicionalmente, $N(\mathbf{t})$ podemos expresarla con respecto a las $\mathbf{y}$ -coordenadas de $\mathbf{t}$, luego por la igualdad (1.10) y utilizando el hecho de que $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, concluimos que

$$N(\mathbf{t}) = \mathbf{y}^{tr} A^{-1} \mathbf{y}. \tag{1.11}$$

Sean Δ el determinante del lattice y Δ_{ij} la derivada parcial formal de Δ respecto a p_{ij} , es decir, $\Delta_{ij} = \frac{\partial \Delta}{\partial p_{ij}}$. La proposición que presentaremos a continuación es un resultado de la tesis doctoral del director de este trabajo de investigación.

Proposición 1.3.2. *Sea $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una superbase de un lattice n -dimensional Λ en $\mathbb{R}^n$, con matriz de productos internos $A = (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j)$, con $0 \leq i \leq j \leq n$, $\Delta = \det(\Lambda)$. Sea $\mathbf{t} \in \Lambda$, si $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)^{tr}$ son las $\mathbf{x}$ -coordenadas de $\mathbf{t}$, e $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ son sus $\mathbf{y}$ -coordenadas, entonces*

$$N(\mathbf{t}) = \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^n \Delta_{0i} y_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\Delta_{0i} + \Delta_{0j} - \Delta_{ij}) y_i y_j \right). \tag{1.12}$$

Demostración. Sabemos que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$, siendo $\text{adj}(A)$ la matriz adjunta de A . Así, por lo expresado en (1.11), queda mostrar como es la matriz adjunta en términos de los parámetros de Selling asociados a una superbase. Sin embargo, podemos ver que si $\text{Adj}(A) = (b_{ij})$ entonces, $b_{ii} = \Delta_{0i}$ y $b_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta_{0i} + \Delta_{0j} - \Delta_{ij})$ si $i < j$. $\square$

1.4 Celdas de Voronoi y Vectores de Voronoi

Definición 1.4.1. Sea Λ un lattice n -dimensional, la *celda de Voronoi* que denotamos por $V(\mathbf{u})$, con $\mathbf{u} \in \Lambda$, es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ que están al menos tan cerca de $\mathbf{u}$ como de cualquier otro punto del lattice, esto es:

$$V(\mathbf{u}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : N(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \leq N(\mathbf{x} - \mathbf{v}) \text{ para todo } \mathbf{v} \in \Lambda\}. \tag{1.13}$$

De la definición anterior, podemos inferir que $\bigcup_{\mathbf{u} \in \Lambda} V(\mathbf{u}) = \mathbb{R}^n$. Además, con respecto a la celda de Voronoi $V(\mathbf{0})$, mediante traslaciones de dicha celda, logramos cubrir todo el espacio.

Más aún, todas las celdas de Voronoi de un lattice son politopos convexos congruentes, que forman un teselado o embaldosamiento de $\mathbb{R}^n$. En la Figura 1.4 vemos un teselado por celdas de Voronoi del lattice hexagonal, donde $\mathbf{v}_1 = (1, 0)^{tr}$ y $\mathbf{v}_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})^{tr}$.

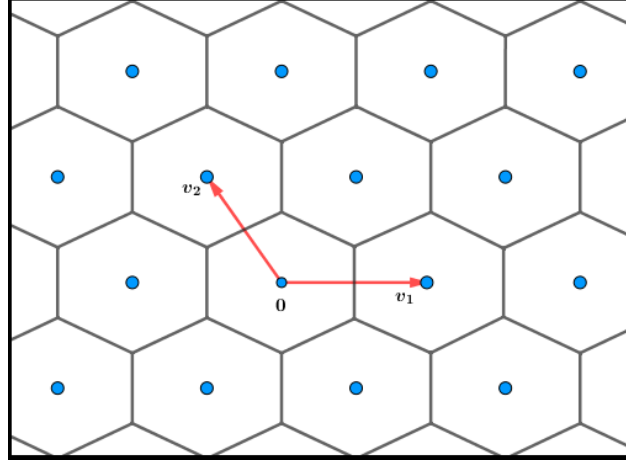


Figura 1.4. Teselación en celdas de Voronoi.

Definición 1.4.2. Sea Λ un lattice n -dimensional, un vector $\mathbf{v} \in \Lambda$ es llamado un *vector de Voronoi* si el hiperplano

$$H' = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\}, \quad (1.14)$$

tiene intersección no vacía con $V(\mathbf{0})$ (la celda de Voronoi centrada en el origen).

Además, decimos que un vector de Voronoi es *estricto* o *relevante*, si la intersección anterior es una *facet* o cara $(n - 1)$ -dimensional de $V(\mathbf{0})$, en caso contrario decimos que es *laxo* o *irrelevante*.

También, si consideramos los semiespacios de la forma $H_{\mathbf{v}} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} \leq \frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\}$, podemos notar que para cada $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ en el lattice, la celda de Voronoi $V(\mathbf{0})$ es la intersección de todos los semiespacios $H_{\mathbf{v}}$.

Es importante mencionar que los puntos en las caras de la celda de Voronoi $V(\mathbf{0})$ satisfacen cierta propiedad. Sea F una cara de $V(\mathbf{0})$, la cual está determinada por el vector de Voronoi $\mathbf{v}$. Si $\mathbf{t} \in F$ entonces, $\mathbf{t} = \frac{1}{2}\mathbf{v} + \mathbf{h}$, con $\mathbf{h} \perp \mathbf{v}$, esto último nos permite deducir que:

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}N(\mathbf{v}). \quad (1.15)$$

A continuación, presentaremos un resultado dado por Conway y Sloane en [5], que nos ofrece una caracterización de los vectores de Voronoi.

Teorema 1.4.3. (*Vectores de Voronoi*). Sea Λ un lattice en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{v}$ un vector no cero de Λ , entonces

1. $\mathbf{v}$ es un vector de Voronoi si y sólo si $\mathbf{v}$ es uno de los vectores más cortos de la clase $\mathbf{v} + 2\Lambda$.

2. $\mathbf{v}$ es un vector de Voronoi estricto si y sólo si $\mathbf{v}$ y $-\mathbf{v}$ son los únicos vectores más cortos en $\mathbf{v} + 2\Lambda$.

Demostración. 1. Supongamos que $\mathbf{v}$ es un vector de Voronoi y a la vez no sea uno de los vectores más cortos de la clase $\mathbf{v} + 2\Lambda$ entonces, existe $\mathbf{w} \in \mathbf{v} + 2\Lambda$ tal que $N(\mathbf{w}) < N(\mathbf{v})$, de ahí que $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in 2\Lambda$ y $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in 2\Lambda$. Luego, $\mathbf{t} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} + \mathbf{w})$ y $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{v} - \mathbf{w})$ pertenecen a Λ . Ahora, sea $\mathbf{p} \in H_{\mathbf{t}} \cap H_{\mathbf{u}}$ por consiguiente, se cumple que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{t} \leq \frac{1}{2}\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}$ y $\mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \leq \frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$. Así, tenemos lo siguiente

$$\mathbf{p} \cdot \left(\frac{\mathbf{v} + \mathbf{w}}{2} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{v} + \mathbf{w}}{2} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{v} + \mathbf{w}}{2} \right) \quad \text{y} \quad \mathbf{p} \cdot \left(\frac{\mathbf{v} - \mathbf{w}}{2} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{v} - \mathbf{w}}{2} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{v} - \mathbf{w}}{2} \right),$$

lo que es equivalente a

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{w} &\leq \frac{1}{4}(N(\mathbf{v}) + N(\mathbf{w})) + \frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \quad \text{y} \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{w} &\leq \frac{1}{4}(N(\mathbf{v}) + N(\mathbf{w})) - \frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Sumando las dos desigualdades anteriores, podemos deducir que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} < \frac{1}{2}N(\mathbf{v})$. Esto último indica que $\mathbf{p} \in H_{\mathbf{v}}$, concluyendo así que $H_{\mathbf{t}} \cap H_{\mathbf{u}} \subset H_{\mathbf{v}}$, es decir, el vector $\mathbf{v}$ no es indispensable en la construcción de la celda de Voronoi, lo que contradice el supuesto de ser $\mathbf{v}$ un vector de Voronoi.

Para el recíproco, supongamos que $\mathbf{v}$ es uno de los vectores más cortos de la clase $\mathbf{v} + 2\Lambda$, y no es un vector de Voronoi. Luego, $H_{\mathbf{v}}$ es irrelevante en la construcción de $V(\mathbf{0})$, así existe $\mathbf{w} \in \Lambda$ tal que $\frac{1}{2}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \geq \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$, lo que implica a tener $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} - N(\mathbf{w}) \geq 0$. Ahora, consideremos a $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - 2\mathbf{w} \in \Lambda$, es claro que $\mathbf{v}' \in \mathbf{v} + 2\Lambda$, además podemos notar que

$$\begin{aligned} N(\mathbf{v}') &= N(\mathbf{v} - 2\mathbf{w}) \\ &= N(\mathbf{v}) + 4N(\mathbf{w}) - 4\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \\ &= N(\mathbf{v}) + 4(N(\mathbf{w}) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \\ &\leq N(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción.

2. La demostración es similar a la desarrollada en el ítem anterior.

□

El siguiente teorema establecido por Conway y Sloane en [5], nos muestra que si un lattice es de Tipo I, es posible hallar los vectores de Voronoi que determina la celda a partir de una superbase obtusa asociada al lattice.

Teorema 1.4.4. *Sea Λ un lattice n -dimensional de Tipo I y $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una superbase obtusa para Λ . Sean S un subconjunto propio de $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ y $\bar{S}$ su complemento, entonces*

1. La suma $\mathbf{v}_S = \sum_{i \in S} \mathbf{v}_i$ es un vector de Voronoi de Λ . Además, $\mathbf{v}_S$ y $\mathbf{v}_{\bar{S}} = -\mathbf{v}_S$ son congruentes modulo 2Λ , es decir, están en la misma clase en $\Lambda/2\Lambda$.
2. Los vectores $\mathbf{v}_S$ son todos estrictos si y sólo si la superbase es estricta.

Demostración. 1. Por el Teorema 1.2.5 tenemos que la norma de $\mathbf{v} = \sum_{i=0}^n m_i \mathbf{v}_i$, con $m_i \in \mathbb{Z}$, es de la forma $N(\mathbf{v}) = \sum_{i < j} p_{ij} (m_i - m_j)^2$. De otro lado, sabemos que $\sum_{i=0}^n \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, de donde deducimos que el vector $\mathbf{v}$ no cambia si a los coeficientes m_i se les suma la misma cantidad, y que la clase $\mathbf{v} + 2\Lambda$ tampoco cambia si a los m_i se les adiciona enteros pares. En consecuencia, un representante de una clase de $\Lambda/2\Lambda$ tiene norma mínima si todos los valores pares de m_i se cambian por 0 y los impares por 1.

Por lo tanto, el vector $\mathbf{v}_S = \sum_{i \in S} \mathbf{v}_i$, siendo S un subconjunto propio de $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ tiene norma mínima en la clase $\mathbf{v}_S + 2\Lambda$, luego por la parte i. del Teorema 1.4.4 concluimos que $\mathbf{v}_S$ es un vector de Voronoi.

Finalmente, podemos ver que $\mathbf{v}_S + \mathbf{v}_{\bar{S}} = \mathbf{0}$, lo cual nos permite inferir que $\mathbf{v}_S$ y $\mathbf{v}_{\bar{S}}$ sean congruentes modulo 2Λ .

2. Si todos los vectores $\mathbf{v}_S$ son estrictos, de su definición deducimos que $p_{ij} > 0$, con $0 \leq i < j \leq n$, es decir, la superbase es estricta. Para la otra implicación, si todos los $p_{ij} > 0$ y además suponemos que $\mathbf{v} = \sum_{i=0}^n m_i \mathbf{v}_i$ entonces, la norma de $\mathbf{v}$ se minimiza sólo si todos los m_i son 0 o 1. Luego, $\mathbf{v}_S$ y $-\mathbf{v}_S$ son los únicos vectores más cortos en la clase $\mathbf{v}_S + 2\Lambda$, así por la parte 2 del Teorema 1.4.4 inferimos que $\mathbf{v}_S$ es estricto. $\square$

El resultado que presentamos a continuación, permite calcular la norma de los vectores de Voronoi para lattices de Tipo I.

Corolario 1.4.5. (*Norma de los vectores de Voronoi en lattices de Tipo I*). Si Λ es un lattice de Tipo I y $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una superbase obtusa de Λ con parámetros de Selling $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ y $0 \leq i < j \leq n$. Entonces, las normas de los vectores de Voronoi de Λ vienen dadas por:

$$N(\mathbf{v}_S) = \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} p_{ij}. \quad (1.16)$$

Donde S recorre todos los subconjuntos propios de $\{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Demostración. Sea S un subconjunto propio de $\{0, 1, 2, \dots, n\}$. Por la parte 2 del Teorema anterior, tenemos que $\mathbf{v}_S = -\mathbf{v}_{\bar{S}}$, de ahí que

$$\begin{aligned} N(\mathbf{v}_S) &= \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{v}_S \\ &= -\mathbf{v}_S \cdot \mathbf{v}_{\bar{S}} \\ &= \sum_{i \in S, j \in \bar{S}} p_{ij}. \end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 2

Descripción de la celda de Voronoi

Hemos estado observando que es de gran relevancia la descripción de la celda de Voronoi en el proceso de calcular la constante de cuantización para un lattice de primer tipo, así que, familiarizarnos con su geometría, además de evidenciar su caracterización combinatoria va a jugar un papel crucial en nuestro estudio.

En este capítulo nos dedicaremos a la descripción geométrica de la celda, a mostrar la relación existente entre la celda de Voronoi de un lattice de Tipo I y el permutaedro. Todo lo aquí mencionado será basado en lo desarrollado por Daniel Tovar en su trabajo de investigación [8], específicamente lo consignado en el Capítulo 2.

2.1 Caracterización combinatoria de la celda de Voronoi

En el capítulo anterior se pudo observar que para dimensiones 2, 3 y 4 a cada vector de Voronoi le corresponde una cara de la celda de Voronoi. Más aún, el hecho de que F_A y F_B sean caras vecinas es equivalente a tener $A \subset B$ ó $B \subset A$. Como veremos a continuación, lo ya mencionado también es válido para un lattice n -dimensional de primer tipo.

Proposición 2.1.1. *Sea Λ un lattice n -dimensional de Tipo I y sea $B = \{\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una superbase obtusa. Sean F_A y F_B dos caras $n-1$ dimensional de la celda de Voronoi, entonces, F_A y F_B son caras vecinas (comparten una cara $n-2$ dimensional) si y sólo si $A \subset B$ ó $B \subset A$.*

Por otro lado, sabemos que si a un lattice n -dimensional Λ de primer tipo le asociamos una superbase obtusa $B = \{\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_n\}$, por Teorema 1.4.4 inferimos que la celda de Voronoi del lattice está definida por $2^{n+1} - 2$ vectores de Voronoi, que están en correspondencia con los subconjuntos propios de $\{0, 1, \dots, n\}$. Más aún, tenemos que a cada cara $n-1$ dimensional de la celda le corresponde un vector de Voronoi.

Ahora, con respecto a los vértices, sea $\mathbf{P}$ un vértice de la celda, el cual está definido por la intersección de n caras de dimensión $n - 1$ y sea σ una permutación de $\{0, 1, \dots, n\}$, es decir, $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n) \in S_{n+1}$. Si $\mathbf{P} \in F_A \cap F_B$, de la Proposición 2.1.1 tenemos que $A \subset B$ o $B \subset A$, con $A, B \subset \{0, 1, \dots, n\}$. Dado que $\mathbf{P}$ pertenece a n caras $n - 1$ dimensionales, podemos inferir que $\mathbf{P}$ es la intersección de las caras $F_{\sigma_0}, F_{\sigma_0\sigma_1}, \dots, F_{\sigma_0\dots\sigma_n}$, siendo dicha intersección única, y se ha considerado en la notación de las caras sólo los elementos de los conjuntos $\{\sigma_0\}, \{\sigma_0, \sigma_1\}, \dots, \{\sigma_0, \dots, \sigma_n\}$.

Así las cosas, si $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n) \in S_{n+1}$, vamos a denotar a un vértice de la celda de Voronoi por $\mathbf{P}_{\sigma_0\sigma_1\dots\sigma_n}$ o $\mathbf{P}_\sigma$. En consecuencia, por como se ha caracterizado un vértice de la celda de Voronoi, podemos notar que el número de vértices de la celda de Voronoi es $(n + 1)!$.

En el resultado dado a continuación, vamos a determinar cómo se caracterizan los vértices de una cara $(n - 1)$ -dimensional de la celda.

Proposición 2.1.2. *El número de vértices en la cara $F_{\sigma_0\dots\sigma_i}$ correspondiente a una celda de Voronoi para un lattice de Tipo I es $(i + 1)!(n - i)!$.*

Demostración. Podemos notar que la cara $F_{\sigma_0\dots\sigma_i}$ está conformada por los vértices de la forma $\mathbf{P}_{\sigma_0\dots\sigma_n}$, donde los primeros $i + 1$ subíndices son reordenaciones de $(\sigma_0, \dots, \sigma_i)$, es decir, son $(i + 1)!$ y el resto de subíndices son reordenaciones de $(\sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$, que son $((n + 1) - (i + 1))! = (n - i)!$, lo cual nos permite concluir lo pedido. $\square$

Hemos venido hablando de la importancia de caracterizar combinatoriamente la celda de Voronoi, ya sabemos cuántos vértices conforman la celda y como los podemos identificar con el grupo S_{n+1} . Lo que haremos a continuación, es seguir identificando propiedades que guardan los vértices de la celda, así que expondremos el siguiente resultado concerniente al número de vértices al interceptar dos caras $n - 1$ dimensionales de la celda.

Proposición 2.1.3. *Para un lattice n -dimensional de Tipo I, el número de vértices en la intersección de las caras $F_{\sigma_0\dots\sigma_i}$ y $F_{\sigma_0\dots\sigma_j}$ en una celda de Voronoi es $(i + 1)!(j - i)!(n - j)!$.*

Demostración. Por el resultado anterior, tenemos que la cara $F_{\sigma_0\dots\sigma_i}$, tiene vértices de la forma $\mathbf{P}_{\sigma'_0\dots\sigma'_i\sigma'_{i+1}\dots\sigma'_n}$, donde $\sigma'_0\dots\sigma'_i$ son permutaciones de $\sigma_0\dots\sigma_i$ y $\sigma'_{i+1}\dots\sigma'_n$ son permutaciones de $\sigma_{i+1}\dots\sigma_n$. También, la cara $F_{\sigma_0\dots\sigma_j}$ tiene vértices de la forma $\mathbf{P}_{\sigma'_0\dots\sigma'_j\sigma'_{j+1}\dots\sigma'_n}$, siendo $\sigma'_0\dots\sigma'_j$ permutaciones de $\sigma_0\dots\sigma_j$ y $\sigma'_{j+1}\dots\sigma'_n$ permutaciones de $\sigma_{j+1}\dots\sigma_n$.

Lo anterior nos permite concluir, que si $i < j$, entonces los vértices de la celda de Voronoi que están en la intersección de las caras $F_{\sigma_0\dots\sigma_i}$ y $F_{\sigma_0\dots\sigma_j}$ son de la forma:

$$\mathbf{P}_{\sigma'_0\dots\sigma'_i\sigma'_{i+1}\dots\sigma'_j\sigma'_{j+1}\dots\sigma'_n},$$

donde $\sigma'_0\dots\sigma'_i$, $\sigma'_{i+1}\dots\sigma'_j$ y $\sigma'_{j+1}\dots\sigma'_n$ son permutaciones de $\sigma_0\dots\sigma_i$, $\sigma_{i+1}\dots\sigma_j$ y $\sigma_{j+1}\dots\sigma_n$ respectivamente.

Lo dicho anteriormente nos permite inferir que el número de vértices en la intersección de dos caras $n - 1$ dimensionales de la celda de Voronoi es $(i + 1)!(j - i)!(n - j)!$. $\square$

Ya caracterizamos los vértices de la celda de Voronoi, ahora, lo que sigue es caracterizar las caras de la celda; para ello, primero veamos el comportamiento de las caras de celda para un lattice en dimensión 3.

Ejemplo 2.1.4. Sea Λ un lattice 3-dimensional con superbase obtusa $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Sabemos que la celda de Voronoi tiene $4!$ vértices, y provienen de las permutaciones de $\{0, 1, 2, 3\}$, además de tener 8 caras hexagonales y 6 en forma de cuadrilátero, es decir, tiene 14 caras 2-dimensionales; también, que los vectores de Voronoi son obtenidos al realizar la suma $\sum_S \mathbf{v}_S$ donde S son los subconjuntos propios de $\{0, 1, 2, 3\}$ y en este caso son 14 vectores.

En particular, consideremos la arista definida por la intersección de las dos caras 2-dimensionales F_3 y F_{23} , la cual está conformada por los vértices $\mathbf{P}_{3210}$ y $\mathbf{P}_{3201}$. A continuación, construyamos los conjuntos haciendo uso de los subíndices de las caras que definen la arista, esto es, $S_0 = \{3\}$, $S_1 = \{23\}$; más aún, sea $B_0 = S_0$, $B_1 = S_1 - S_0$ y $B_2 = \{0, 1, 2, 3\} - S_1$, así, $B_0 = \{3\}$, $B_1 = \{2\}$ y $B_2 = \{01\}$. A partir de lo anterior, decimos que la arista está en correspondencia biunívoca con la partición B_0, B_1 y B_2 de $\{0, 1, 2, 3\}$ y se denota por $F(B_0|B_1|B_2)$.

De hecho, las caras 1-dimensionales están en correspondencia biunívoca con las particiones ordenadas del conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ en 3 bloques no vacíos, donde necesariamente uno de estos bloques tiene dos elementos y los otros bloques un elemento. Ahora, siguiendo con la partición de $\{0, 1, 2, 3\}$ hallada anteriormente, es decir, $\{B_0, B_1, B_2\}$; se obtienen $3!$ reordenaciones posibles de los bloques y que son unas de las particiones ordenadas que están en correspondencia con las siguientes caras 1-dimensionales de la celda:

$$\begin{array}{ll} F(B_0|B_1|B_2) & F(B_0|B_2|B_1) \\ F(B_1|B_0|B_2) & F(B_1|B_2|B_0) \\ F(B_2|B_0|B_1) & F(B_2|B_1|B_0) \end{array}$$

En consecuencia, el número de caras 1-dimensionales en la celda para un lattice de dimensión 3 es $3! \cdot (\mathbf{s}(4, 3)) = 6 \cdot 6 = 36$, donde $\mathbf{s}(4, 3)$ es el número de Stirling de segunda especie de 4 en 3, y representa la cantidad de particiones posibles para un conjunto de 4 elementos en tres bloques no vacíos.

Ahora, con respecto a las caras 2 dimensionales de la celda de Voronoi, estas caras están en correspondencia biunívoca con las particiones ordenadas del conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ en 2 bloques no vacíos. En consecuencia, existen dos casos en la partición; el primero es que exista un bloque de tres elementos y el otro de un elemento, en el segundo caso es que hayan dos bloques de dos elementos.

En particular, consideremos la cara F_3 , quien está en correspondencia biunívoca con la partición $B_0 = \{3\}$ y $B_1 = \{0, 1, 2\}$, de esta partición salen $2!$ reordenaciones de los bloques que son unas de las particiones ordenadas y están en correspondencia con las siguientes caras 2 dimensionales de la celda $F(B_0|B_1)$ y $F(B_1|B_0)$. Así, el número de caras 2-dimensionales en la celda es $2! \cdot (\mathbf{s}(4, 2)) = 2 \cdot 7 = 14$, donde $\mathbf{s}(4, 2)$ es el número de Stirling de segunda

especie de 4 en 2, que representa la cantidad de particiones posibles de un conjunto de 4 elementos en dos bloques no vacíos.

El siguiente resultado generaliza el comportamiento mostrado en las caras de la celda de Voronoi para un lattice 3-dimensional, es decir, expone la correspondencia existente entre una cara k -dimensional de la celda y las particiones ordenadas de $\{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Proposición 2.1.5. *Las caras k -dimensionales de la celda de Voronoi están en correspondencia biunívoca con las particiones ordenadas del conjunto $\{0, \dots, n\}$ en $n - k + 1$ bloques no vacíos $B_0, \dots, B_{n-k}$.*

Demostración. Tenemos que una cara k -dimensional de la celda de Voronoi se genera al interceptar $n - k$ caras vecinas dos a dos de dimensión $n - 1$. Entonces, debemos de escoger $n - k$ subconjuntos de $U = \{0, \dots, n\}$, los cuales denotaremos por $S_0, S_1, \dots, S_{n-k-1}$ y cumplen la propiedad de estar encajados. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_{n-k-1}$ y generamos la siguiente partición de U :

$$\{S_0, S_1 - S_0, \dots, S_{n-k-1} - S_{n-k-2}, U - S_{n-k-1}\}.$$

Consideremos un vértice de la cara k -dimensional, sabemos que cada conjunto S_i genera la correspondiente cara F_i , luego, dicho vértice resulta de la intersección de las caras $F_{S_0}, \dots, F_{S_{n-k-1}}$ y la denotaremos por

$$F(B_0 | \dots | B_{k-1} | B_k) \tag{2.1}$$

donde

$$B_0 = S_0, B_1 = S_1 - S_0, \dots, B_{k-1} = S_{k-1} - S_{k-2}, B_k = U - S_{k-1},$$

quienes son $n - k + 1$ bloques no vacíos. □

Luego, utilizando la notación dada en la proposición anterior, las caras 0-dimensionales para el lattice 3-dimensional considerado en el Ejemplo 2.1.4 también se pueden escribir de la forma $F(\sigma_0 | \sigma_1 | \sigma_2 | \sigma_3)$, donde $\sigma_i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Ahora, vemos que la Proposición 2.1.3 nos indica el número de vértices en una cara $n - 2$ dimensional, luego, es válido preguntarnos por el número de vértices que hay en la intersección de más de dos caras de la celda, esto es, si al interceptar m caras de dimensión $n - 1$, ¿cuántos vértices tiene la cara resultante de dimensión $n - m$?, esto lo responderemos en el siguiente resultado.

Corolario 2.1.6. *Una cara k -dimensional de la celda de Voronoi de un lattice tipo I dada por $F(B_0 | B_1 | \dots | B_{n-1-k})$ contiene $|B_0|! \cdot |B_1|! \cdot \dots |B_{n-1-k}|!$ vértices.*

Demostración. Los vértices en la cara correspondiente a la subdivisión en bloques $B_0, \dots, B_{n-k}$ están dados por las $n - k$ intersecciones de los conjuntos $F_{B_0}, F_{B_0 \cup B_1}, \dots, F_{B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_{n-k}}$, de ahí que el número de vértices sea $|B_0|! \cdot |B_1|! \cdot \dots |B_{n-1-k}|!$. □

El siguiente corolario expone el número de caras k -dimensionales que tiene la celda de Voronoi, hecho que ya habíamos observado en el Ejemplo 2.1.4.

Corolario 2.1.7. *La celda de Voronoi para un lattice n -dimensional de Tipo I contiene $(n + 1 - k)! \cdot s(n + 1, n + 1 - k)$ caras k -dimensionales, donde*

$$s(m, d) = \frac{1}{d!} \sum_{j=0}^d (-1)^{d-j} \binom{k}{j} j^m,$$

es la fórmula general para los números de Stirling de segunda especie.

Demostración. De la Proposición 2.1.5 tenemos que los vértices están en correspondencia biunívoca con las subdivisiones ordenadas de $U = \{0, \dots, n\}$ en $n + 1$ bloques ordenados no vacíos. Además, dado que la cantidad de bloques de la división coincide con la cantidad de elementos en U , entonces cada bloque debe contener solo un elemento. Por lo tanto, los vértices pueden representarse como permutaciones del conjunto U . $\square$

2.2 Caracterización vectorial de la celda de Voronoi

En la sección anterior mostramos una descripción combinatoria de la celda de Voronoi de un lattice n -dimensional de primer tipo, ahora lo dado a continuación es la caracterización vectorial de los vértices, además de las caras de la celda; todo ello en términos de los parámetros de Selling del lattice.

2.2.1 Vértices de la Celda

Sabemos que cada vértice $\mathbf{P}_{\sigma_0 \dots \sigma_n} = F_{\sigma_0} \cap F_{\sigma_0 \sigma_1} \cap \dots \cap F_{\sigma_0 \dots \sigma_{n-1}}$, pertenece a los hiperplanos (1.14) generados por los Vectores de Voronoi $\mathbf{v}_{\sigma_0}, \mathbf{v}_{\sigma_0 \sigma_1}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma_0 \dots \sigma_{n-1}}$, de donde se infiere las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}_{\sigma_0} &= (\mathbf{v}_{\sigma_0})^2 \\ 2\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}_{\sigma_0 \sigma_1} &= (\mathbf{v}_{\sigma_0 \sigma_1})^2 \\ &\vdots \\ 2\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}_{\sigma_0 \dots \sigma_{n-1}} &= (\mathbf{v}_{\sigma_0 \dots \sigma_{n-1}})^2 \\ -2\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}_{\sigma_n} &= (\mathbf{v}_{\sigma_n})^2 \end{aligned}$$

Haciendo uso de las $\mathbf{y}$ -coordenadas del vértice y las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\begin{aligned}
2\mathbf{y}_{\sigma_0} &= (\mathbf{v}_{\sigma_0})^2 \\
2\mathbf{y}_{\sigma_1} &= (\mathbf{v}_{\sigma_0} + \mathbf{v}_{\sigma_1})^2 - (\mathbf{v}_{\sigma_0})^2 \\
&\vdots \\
2\mathbf{y}_{\sigma_i} &= (\mathbf{v}_{\sigma_0} + \cdots + \mathbf{v}_{\sigma_i})^2 - (\mathbf{v}_{\sigma_0} + \cdots + \mathbf{v}_{\sigma_{i-1}})^2 \\
&\vdots \\
2\mathbf{y}_{\sigma_{n-1}} &= (\mathbf{v}_{\sigma_0} + \cdots + \mathbf{v}_{\sigma_{n-1}})^2 - (\mathbf{v}_{\sigma_0} + \cdots + \mathbf{v}_{\sigma_{n-2}})^2 \\
-2\mathbf{y}_{\sigma_0} &= (\mathbf{v}_{\sigma_0})^2
\end{aligned}$$

De ahí que

$$\begin{aligned}
2\mathbf{y}_{\sigma_i} &= (\mathbf{v}_{\sigma_0} + \cdots + \mathbf{v}_{\sigma_i})^2 - (\mathbf{v}_{\sigma_0} + \cdots + \mathbf{v}_{\sigma_{i-1}})^2 \\
&= (\mathbf{v}_{\sigma_0} + \cdots + \mathbf{v}_{\sigma_{i-1}}) + 2(\mathbf{v}_{\sigma_0} + \cdots + \mathbf{v}_{\sigma_{i-1}}) \cdot \mathbf{v}_{\sigma_i} + \mathbf{v}_{\sigma_i}^2 - (\mathbf{v}_{\sigma_0} + \cdots + \mathbf{v}_{\sigma_{i-1}})^2 \\
&= 2(\mathbf{v}_{\sigma_0} + \cdots + \mathbf{v}_{\sigma_{i-1}}) \cdot \mathbf{v}_{\sigma_i} + \mathbf{v}_{\sigma_i}^2 \\
&= -2 \sum_{j < i} p_{\sigma_j \sigma_i} + \mathbf{v}_{\sigma_i}^2.
\end{aligned}$$

La última igualdad se tiene de la Proposición 1.4.5, dado que $\mathbf{v}_{\sigma_i}^2 = \sum_{\sigma_j \neq \sigma_i} p_{\sigma_i \sigma_j}$. Por lo tanto, tenemos que

$$2\mathbf{y}_{\sigma_i} = -2 \sum_{j < i} p_{\sigma_j \sigma_i} + \sum_{\sigma_j \neq \sigma_i} p_{\sigma_i \sigma_j},$$

así obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.2.1. *Sea $\sigma \in S_{n+1}$, un vértice de la celda de Voronoi, tal que $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$, con $\sigma_i \in \{0, 1, \dots, n\}$ y $0 \leq i \leq n$. Entonces, la coordenada σ_i de las $\mathbf{y}$ -coordenadas aumentadas del vértice σ están dadas por:*

$$\mathbf{y}_{\sigma_i} = -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{i-1} p_{\sigma_i \sigma_j} + \frac{1}{2} \sum_{j=i+1}^n p_{\sigma_i \sigma_j} = -\frac{1}{2} p_{\sigma_i | \sigma_0 \cdots \sigma_{i-1}} + \frac{1}{2} p_{\sigma_i | \sigma_{i+1} \cdots \sigma_n}, \quad (2.2)$$

donde $p_{\sigma_i \sigma_j} = p_{\sigma_j \sigma_i}$.

Podemos notar que el término $p_{\sigma_i \sigma_j}$ aparece en dos de las coordenadas del vértice dado por σ , en la coordenada σ_i y σ_j , más aún, el término $p_{\sigma_i \sigma_j}$ aparece en dos de las coordenadas del vértice dado por σ , en la coordenada σ_i y σ_j .

Definición 2.2.2. Sean $\sigma_i, \sigma_j \in \{0, 1, \dots, n\}$ y $\sigma_i < \sigma_j$. Los vectores cuyas componentes son cero, excepto en las posiciones σ_i, σ_j , las cuales le corresponden p_{σ_i, σ_j} y $-p_{\sigma_i, \sigma_j}$ respectivamente, se denominarán *vectores principales* y los denotaremos por $e_{\sigma_i \sigma_j}$ o $e_{\sigma_j \sigma_i}$.

Sea $\mathbf{P}(\sigma)$ las $\mathbf{y}$ -coordenadas aumentadas del vértice σ , podemos observar que estas se pueden expresar en términos de los vectores principales, es decir, como la suma de todos los vectores principales $e_{\sigma_i \sigma_j}$ multiplicado por el signo de $\sigma_j - \sigma_i$, es decir

$$\mathbf{P}(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{i < j} sg(\sigma_j - \sigma_i) e_{\sigma_i \sigma_j}, \quad (2.3)$$

donde sg es la función signo. Ahora, para interiorizar lo mencionado, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2.3. Consideremos el lattice 3-dimensional y la permutación $\sigma = (2, 0, 1, 3)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(2, 0, 1, 3) &= \frac{1}{2} sg(1 - 0) e_{01} + \frac{1}{2} sg(0 - 2) e_{02} + \frac{1}{2} sg(3 - 0) e_{03} + \frac{1}{2} sg(1 - 2) e_{12} + \frac{1}{2} sg(3 - 1) e_{13} \\ &\quad + \frac{1}{2} sg(3 - 2) e_{23} \\ &= \frac{1}{2} e_{01} - \frac{1}{2} e_{02} + \frac{1}{2} e_{03} - \frac{1}{2} e_{12} + \frac{1}{2} e_{13} + \frac{1}{2} e_{23} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{01} \\ -p_{01} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{02} \\ 0 \\ -p_{02} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{03} \\ 0 \\ 0 \\ -p_{03} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ p_{12} \\ -p_{12} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ p_{13} \\ 0 \\ -p_{13} \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_{23} \\ -p_{23} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{01} - p_{02} + p_{03} \\ -p_{01} - p_{12} + p_{13} \\ p_{02} + p_{12} + p_{23} \\ -p_{03} - p_{13} - p_{23} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.2.2 Aristas de la celda

Sea Λ un lattice de dimensión n . En la sección pasada vimos que las aristas de la celda de Voronoi del lattice están en correspondencia biunívoca con las particiones ordenadas de $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ y ejemplificamos algunos resultados para un lattice 3-dimensional.

Ahora, considerando de nuevo el caso $n = 3$ y la arista conformada por los vértices $\mathbf{P}_{3210}$, $\mathbf{P}_{3201}$, sabemos que

$$\mathbf{P}(3210) = \frac{1}{2} (-e_{01} - e_{02} - e_{03} - e_{12} - e_{13} - e_{23})$$

$$\mathbf{P}(3201) = \frac{1}{2} (e_{01} - e_{02} - e_{03} - e_{12} - e_{13} - e_{23}),$$

de ahí que $\mathbf{P}(3201) - \mathbf{P}(3210) = e_{01}$.

Uno de los aspectos más relevantes del ejemplo anterior es la relación entre los vectores principales y las aristas de la celda de Voronoi. A continuación, exploraremos este concepto de manera más general.

Sea Λ un lattice de Tipo I n -dimensional, tenemos que las caras 1-dimensionales de la celda contienen exactamente dos vértices en sus extremos, hemos podido observar que éstos dos vértices solo difieren en la transposición de dos elementos consecutivos. Denotemos estos vértices como $\sigma = \sigma_0 \cdots \sigma_i \sigma_{i+1} \cdots \sigma_n$ y $\sigma' = \sigma_0 \cdots \sigma_{i+1} \sigma_i \cdots \sigma_n$, donde la única diferencia es la permutación entre σ_i y σ_{i+1} . De acuerdo con la ecuación (2.3), tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\sigma) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{k < j, \\ k \neq i, \\ j \neq i+1}} sg(\sigma_j - \sigma_k) e_{\sigma_k \sigma_j} + \frac{1}{2} sg(\sigma_{i+1} - \sigma_i) e_{\sigma_i \sigma_{i+1}}, \\ \mathbf{P}(\sigma') &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{k < j, \\ j \neq i, \\ k \neq i+1}} sg(\sigma_j - \sigma_k) e_{\sigma_k \sigma_j} + \frac{1}{2} sg(\sigma_i - \sigma_{i+1}) e_{\sigma_i \sigma_{i+1}}, \end{aligned}$$

Dado que el signo del vector principal $e_{\sigma_i \sigma_{i+1}}$ es distinto en cada vértice, se cumple que:

$$\mathbf{P}(\sigma') - \mathbf{P}(\sigma) = sg(\sigma_{i+1} - \sigma_i) e_{\sigma_i \sigma_{i+1}} \quad (2.4)$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\sigma_i < \sigma_{i+1}$. Al reordenar adecuadamente la resta, tenemos que $\sigma_{i+1} - \sigma_i > 0$. Así, obtenemos una caracterización vectorial de las aristas mediante los vectores principales de la celda de Voronoi.

Ahora, tenemos que la cara 1-dimensional determinada por dichos vértices se representa como:

$$F(B_0 | B_1 | \cdots | B_i | \cdots | B_n),$$

siendo $B_0 = \{\sigma_0\}$, $B_1 = \{\sigma_1\}$, ..., $B_i = \{\sigma_i, \sigma_{i+1}\}$, ..., $B_{n-1} = \sigma_n$. Luego, el baricentro de cada arista es:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{P}(\sigma') + \mathbf{P}(\sigma)) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k < j, \\ k \neq i, \\ j \neq i+1}} sg(\sigma_j - \sigma_k) e_{\sigma_k \sigma_j} \quad (2.5)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k < j} sg(\sigma_j - \sigma_k) e_{\sigma_k \sigma_j} - \frac{1}{2} \sum_{B_i} \sum_{\substack{k < j, \\ \sigma_k, \sigma_j \in B_i}} sg(\sigma_j - \sigma_k) e_{\sigma_k \sigma_j} \quad (2.6)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{l < m} \sum_{\substack{\sigma_k \in B_l, \\ \sigma_j \in B_m}} sg(\sigma_j - \sigma_k) e_{\sigma_k \sigma_j} \quad (2.7)$$

Ahora, denotemos por $e_{C_0|C_1}$ al vector:

$$e_{C_0|C_1} = \sum_{\substack{\sigma_k \in C_0, \\ \sigma_j \in C_1}} sg(\sigma_j - \sigma_k) e_{\sigma_k \sigma_j}, \quad (2.8)$$

donde C_0 y C_1 son subconjuntos disjuntos de $U = \{0, \dots, n\}$.

Luego, la ecuación (2.7) se puede reescribir como:

$$\frac{1}{2} \sum_{l < m} e_{B_l|B_m}. \quad (2.9)$$

Observación 2.2.4.

1. Podemos notar que la coordenada i de $e_{C_0|C_1}$ se puede expresar como: $p_{i|C_1}$ si $i \in C_0$, $-p_{i|C_1}$ si $i \in C_1$ y 0 en otro caso.
2. Además, la suma de las coordenadas de $e_{C_0|C_1}$ en $C_0 \cup C_1$ es 0. Si sumamos las coordenadas indexadas por C_0 (C_1 respectivamente), obtenemos $p_{C_0|C_1}$ ($-p_{C_0|C_1}$ respectivamente).

Ejemplo 2.2.5. De nuevo, considerando un lattice 3-dimensional y siguiendo con la arista $F(32|10)$ definida por los vértices $\mathbf{P}_{3210}$, $\mathbf{P}_{3201}$; tenemos que su baricentro es:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ba}(F(3|2|10)) &= \frac{1}{2}(-e_{02} - e_{03} - e_{12} - e_{13} - e_{23}) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -p_{02} - p_{03} \\ -p_{12} - p_{13} \\ p_{12} - p_{23} \\ p_{03} + p_{13} + p_{23} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por otro lado, podemos calcular la magnitud de cada arista determinando las normas de los vectores principales. En efecto, de la Definición 2.2.2, el vector principal e_{ij} , con $i < j$, está definido por sus componentes σ_i, σ_j , que corresponden a p_{σ_i, σ_j} y $-p_{\sigma_i, \sigma_j}$ respectivamente. Aplicando la Proposición 1.3.2, deducimos que:

$$|e_{ij}| = p_{ij} \sqrt{\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}}. \quad (2.10)$$

2.2.3 Caras 2-dimensionales de la celda

De la Proposición 2.1.5 se tiene que cada cara 2-dimensional de la celda de Voronoi para un lattice n -dimensional de Tipo I, esta en correspondencia con una partición ordenada de $\{0, \dots, n\}$ en $n - 1$ bloques. Lo cual nos indica, que en las particiones pueden pasar dos

cosas, la primera es tener un conjunto de 3 elementos y $n - 2$ conjuntos de 1 elemento, la segunda es tener dos conjuntos de 2 elementos y $n - 3$ de 1.

En particular, consideremos la cara de un lattice 3-dimensional, determinada por los vértices $\mathbf{P}_{3210}$, $\mathbf{P}_{3201}$, $\mathbf{P}_{2301}$, $\mathbf{P}_{2310}$. Esta cara es un cuadrilátero y la denotamos por $F(32|01)$, según el Teorema 3.1.2, podemos ver que el baricentro de dicha cara es:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ba}(F(32|01)) &= \frac{1}{4}(\mathbf{P}(3201) + \mathbf{P}(3201) + \mathbf{P}(2301) + \mathbf{P}(2310)) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -p_{02} - p_{03} \\ -p_{12} - p_{13} \\ p_{02} - p_{12} \\ p_{03} + p_{13} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por otro lado, consideremos la figura de la cara que estamos hallando el baricentro:

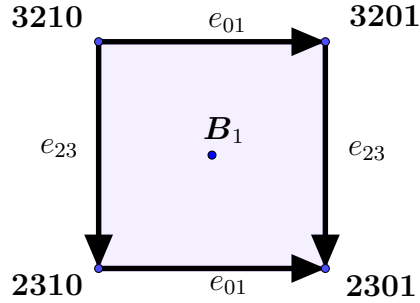


Figura 2.1. Cara 2-dimensional de la celda de Voronoi para un lattice de dimesión 3.

De la anterior figura vemos que el baricentro B_1 se puede hallar sumando el vértice $\mathbf{P}(3210)$ y $\frac{1}{2}(e_{01} + e_{23})$, de ahí que

$$\begin{aligned} \mathbf{Ba}(F(32|01)) &= \mathbf{P}(3210) + \frac{1}{2}(e_{01} + e_{23}) \\ &= \frac{1}{2}(-e_{01} - e_{02} - e_{03} - e_{12} - e_{13} - e_{23}) + \frac{1}{2}(e_{01} + e_{23}) \\ &= \frac{1}{2}(-e_{02} - e_{03} - e_{12} - e_{13}) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -p_{02} - p_{03} \\ -p_{12} - p_{13} \\ p_{02} - p_{12} \\ p_{03} + p_{13} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En consecuencia, las $\mathbf{y}$ -coordenadas del baricentro se pueden encontrar realizando la suma de uno de los vértices de la cara del respectivo baricentro, con la mitad de sumas o restas de los vectores principales involucrados en las aristas de estas caras.

Más aún, podemos notar que el baricentro también se puede ver de la forma:

$$\frac{1}{2} \sum_{l < m} e_{B_l | B_m},$$

en donde se está sumando solo las contribuciones de los vectores principales e_{ij} generados por índices que viven en diferentes bloques.

2.2.4 Caras k -dimensionales de la celda

A continuación, vamos a generalizar la descripción vectorial de las caras, para ello primero consideremos el siguiente concepto.

Definición 2.2.6. En una celda de Voronoi correspondiente a un lattice de primer tipo, el *vértice opuesto* σ' de un vértice σ en una cara k -dimensional se define como aquel vértice tal que la semisuma $\frac{1}{2}(\sigma' + \sigma)$ resulta en el baricentro de dicha cara.

Teorema 2.2.7. Sea Λ un lattice n -dimensional de Tipo I y sea $\mathbf{F}$ una cara k -dimensional de la celda de Voronoi, correspondiente a la partición ordenada $B_0, B_1, \dots, B_{n-1-k}$ de $U = \{0, 1, \dots, n\}$, entonces el baricentro de $\mathbf{F}$ en $\mathbf{y}$ -coordenadas aumentadas está dado por

$$\mathbf{Ba}(\mathbf{F}) = \frac{1}{2} \sum_{l < m} \sum_{\substack{\sigma_k \in B_l, \\ \sigma_j \in B_m}} sg(\sigma_j - \sigma_k) e_{\sigma_k \sigma_j} = \frac{1}{2} \sum_{l < m} e_{B_l | B_m},$$

donde $sg(\sigma_k - \sigma_j)$ es la función de signo, que es igual a 1 si $\sigma_k > \sigma_j$ y a -1 si $\sigma_k < \sigma_j$.

Demostración. Consideremos $\mathbf{F}$, la cara k -dimensional de la celda de Voronoi, correspondiente a la partición ordenada $B_0, B_1, \dots, B_{n-1-k}$ de $U = \{0, 1, \dots, n\}$. Sabemos que el baricentro de un politopo se define como el promedio de sus vértices, es decir,

$$\mathbf{Ba} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{v}_i,$$

donde m es la cantidad de vértices en el politopo y $\mathbf{v}_i$ son los vértices. En nuestro caso, el baricentro de la cara $\mathbf{F}$ se calcula de la misma manera, pero considerando $m = |B_0| \cdot |B_1| \cdots |B_{n-1-k}|$. Recordemos que los vértices están representados por un reordenamiento de $\{0, \dots, n\}$ en $n-1-k$ subconjuntos ordenados. Estos subconjuntos se organizan de forma que los primeros $|B_0|$ elementos corresponden al orden específico de B_0 , seguidos por $|B_1|$ elementos reordenados de B_1 , y así sucesivamente hasta que los últimos $|B_{n-1-k}|$ elementos sean un reordenamiento de B_{n-1-k} .

De esta manera, las $\mathbf{y}$ -coordenadas de todos los vértices σ , denotados como $\mathbf{P}(\sigma)$, se expresan como:

$$\mathbf{P}(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma_i < \sigma_j} sg(\sigma_j - \sigma_i) e_{\sigma_i \sigma_j},$$

en $\mathbf{F}$. Observamos que cada contribución de los vectores principales, representados por índices σ_i, σ_j que pertenecen a bloques diferentes, tienen el mismo signo, ya que los bloques tienen un orden específico. Dado que hay m vértices, hay también m contribuciones idénticas de estos vectores principales. Así, el baricentro de $\mathbf{F}$ se puede expresar como:

$$\mathbf{Ba}(\mathbf{F}) = \frac{1}{m} \frac{1}{2} \sum_{B_i} \sum_{\beta \in S_{B_i}} \sum_{\beta_k < \beta_j} sg(\beta_j - \beta_k) e_{\beta_k \beta_j} + \frac{1}{m} \left(m \frac{1}{2} \sum_{l < h} \sum_{\substack{\sigma_k \in B_l, \\ \sigma_j \in B_h}} sg(\sigma_j - \sigma_k) e_{\sigma_k \sigma_j} \right) \quad (2.11)$$

Donde S_{B_i} es el conjunto de permutaciones del conjunto B_i , y $\beta_k, \beta_j \in \beta$. Notamos que la expresión anterior (2.11) ya nos proporciona el resultado del teorema. Solo resta demostrar que

$$\sum_{B_i} \sum_{\beta \in S_{B_i}} \sum_{\beta_k < \beta_j} sg(\beta_j - \beta_k) e_{\beta_k \beta_j} = 0. \quad (2.12)$$

Podemos observar que (2.12) representa la suma de las contribuciones de todos los vértices de los vectores principales, los cuales tienen índices pertenecientes al mismo bloque de la partición. Esta suma tiene en cuenta todas las permutaciones dentro de cada bloque.

Sin pérdida de generalidad, demostraremos para B_i que

$$\sum_{\beta \in S_{B_i}} \sum_{\beta_k < \beta_j} sg(\beta_j - \beta_k) e_{\beta_k \beta_j} = 0.$$

Es necesario que $|B_i| = r > 1$, para que se puedan seleccionar dos índices y generar un vector principal. Tomemos $\beta = \beta_0 \cdots \beta_i \cdots \beta_j \cdots \beta_{r-1} \in S_{B_i}$. De esta permutación se genera el vector principal $sg(\beta_j - \beta_i) e_{\beta_i \beta_j}$, el cual está incluido en la suma mencionada. Por otro lado, la permutación $(\beta_i \beta_j) \beta = \beta_0 \cdots \beta_j \cdots \beta_i \cdots \beta_{r-1}$ también está en S_{B_i} porque este consta de todas las permutaciones de B_i . Por lo tanto, también está presente el vector principal $sg(\beta_i - \beta_j) e_{\beta_i \beta_j}$ en la suma, lo que significa que este vector principal se cancela. Este proceso es repetible para cualquier par de elementos de cualquier permutación de B_i , lo que nos lleva a concluir que

$$\sum_{\beta \in S_{B_i}} \sum_{\beta_k < \beta_j} sg(\beta_j - \beta_k) e_{\beta_k \beta_j} = 0,$$

y, finalmente,

$$\mathbf{Ba}(\mathbf{F}) = \frac{1}{2} \sum_{l < m} \sum_{\substack{\sigma_k \in B_l, \\ \sigma_j \in B_m}} sg(\sigma_j - \sigma_k) e_{\sigma_k \sigma_j} = \frac{1}{2} \sum_{l < m} e_{B_l | B_m}.$$

□

El grupo simétrico S_m es el conjunto de todas las permutaciones posibles de un conjunto con m elementos. Una permutación simplemente implica una reorganización de estos elementos.

Regresemos a $\mathbf{F}$, la cara k -dimensional de la celda de Voronoi, asociada con la partición ordenada $B_0, B_1, \dots, B_{n-1-k}$ de $U = \{0, 1, \dots, n\}$. Desde la perspectiva de S_n , un vértice σ puede ser representado por la concatenación en orden de las palabras obtenidas a partir de las permutaciones σ_{B_i} con $\sigma_{B_i} \in S_{B_i}$, para cada $i \in \{0, 1, \dots, n+1-k\}$. Así,

$$\sigma = \sigma_{B_0} || \sigma_{B_1} || \dots || \sigma_{B_{n+1-k}},$$

donde $||$ denota la operación de concatenación de palabras.

Dado que S_m es un grupo, cada permutación tiene su inversa. El inverso de una permutación es aquella que deshace los intercambios realizados por la permutación original. Por ende, si σ es una permutación en S_m , su inversa, denotada como σ^{-1} , se define como la permutación que deshace los intercambios realizados por σ . Específicamente, si $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m$, donde σ_i es el elemento en la posición i , entonces su inversa σ^{-1} está dada por:

$$\sigma^{-1} = \sigma_m \sigma_{m-1} \dots \sigma_2 \sigma_1.$$

Tomando en consideración este concepto, el siguiente resultado demostrará la relación entre los vértices opuestos en una cara de la celda de Voronoi y los inversos en el grupo simétrico.

Corolario 2.2.8. *Sea L un lattice de primer tipo en $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{F}$ una cara k -dimensional de la celda de Voronoi, correspondiente a la partición ordenada $B_0, B_1, \dots, B_{n-1-k}$ de $U = \{0, 1, \dots, n\}$, entonces, dado un vértice $\sigma = \sigma_{B_0} || \sigma_{B_1} || \dots || \sigma_{B_{n+1-k}}$, su opuesto en la cara $\mathbf{F}$, denotado por $op_{\mathbf{F}}(\sigma)$, esta dado por*

$$op_{\mathbf{F}}(\sigma) = \sigma_{B_0}^{-1} || \sigma_{B_1}^{-1} || \dots || \sigma_{B_{n+1-k}}^{-1}.$$

Donde $\sigma_{B_i}^{-1}$ es el inverso de σ_{B_i} en S_{B_i}

Desde el inicio se ha hecho énfasis que para calcular la fórmula de la constante de cuantización de un lattice n -dimensional de Tipo 1 necesitamos dividir la celda de Voronoi en símplex, porque haciendo uso del Teorema 3.1.2 se calcula el momento de inercia y el segundo momento no normalizado de cada símplex, lo cual nos permite obtener el segundo momento de la celda y por ende la fórmula requerida.

A continuación vamos a presentar el proceso para llevar a cabo una partición de la celda de Voronoi en términos de símplexes, para un lattice n -dimensional de Tipo I. Dicha partición está basada en lo desarrollado por Daniel Tovar en el Capítulo 3 de su trabajo de investigación [8].

En primer lugar, recordemos que un símplex es la envolvente convexa de un conjunto de $n+1$ puntos distintos $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n+1} \in \mathbb{R}^n$. Estos puntos se seleccionarán de la siguiente forma:

- Primero, seleccionamos un vértice $\sigma = \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_n$ de la celda de Voronoi. Este vértice corresponde a la intersección de las n caras $C = \{F_{\sigma_0}, F_{\sigma_0 \sigma_1}, \dots, F_{\sigma_0 \dots \sigma_{n-1}}\}$.
- Ahora, el vértice cero del símplex será el centro de la celda, es decir, el baricentro de la celda de Voronoi, denotado por $\mathbf{0}$. Cabe destacar que este primer baricentro coincide con $\mathbf{Ba}(F(U))$, donde $U = \{0, 1, \dots, n\}$.
- El vértice uno del símplex será el baricentro de una de las caras $(n-1)$ -dimensionales de la celda que contiene el vértice inicial. Específicamente, tenemos n opciones para seleccionar esta cara, denotada como $F_{\sigma_0 \dots \sigma_{\tau_0}}$. Así, el segundo vértice estará dado por $\mathbf{Ba}(F_{\sigma_0 \dots \sigma_{\tau_0}})$, donde $\tau_0 \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.
- El segundo vértice del símplex será el baricentro de una de las caras $(n-2)$ -dimensionales de la celda que está contenida dentro de la cara previamente seleccionada $F_{\sigma_0 \dots \sigma_{\tau_0}}$. Las caras $(n-2)$ -dimensionales son las intersecciones de dos caras $(n-1)$ -dimensionales, por lo que necesitamos elegir otro elemento de C que sea distinto de $F_{\sigma_0 \dots \sigma_{\tau_0}}$. Esta elección se puede realizar de $n-1$ maneras. Supongamos que la cara seleccionada es $F_{\sigma_0 \dots \sigma_{\tau_1}}$. Entonces, el tercer vértice estará dado por $\mathbf{Ba}(F_{\sigma_0 \dots \sigma_{\tau_0}} \cap F_{\sigma_0 \dots \sigma_{\tau_1}})$, donde $\tau_1 \in \{0, 1, \dots, n-1\} \setminus \{\tau_0\}$.
- En general, el vértice i -ésimo del símplex será el baricentro de una de las caras $(n-i)$ -dimensionales de la celda que contiene el vértice. Esta cara está contenida en la intersección de las caras obtenidas en los pasos anteriores, específicamente $F_{\sigma_0 \dots \sigma_{\tau_0}} \cap F_{\sigma_0 \dots \sigma_{\tau_1}} \cap \dots \cap F_{\sigma_0 \dots \sigma_{\tau_{i-2}}}$. Las caras $(n-i)$ -dimensionales son la intersección de i caras $(n-1)$ -dimensionales, por lo que debemos escoger otro elemento de C que no haya sido previamente seleccionado. Para ello, existen $n-i+1$ opciones. Suponiendo que la cara elegida sea $F_{\sigma_0 \dots \sigma_{\tau_{i-1}}}$, el vértice i -ésimo será $\mathbf{Ba}(F_{\sigma_0 \dots \sigma_{\tau_0}} \cap F_{\sigma_0 \dots \sigma_{\tau_1}} \cap \dots \cap F_{\sigma_0 \dots \sigma_{\tau_{i-1}}})$, con $\tau_{i-1} \notin \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{i-2}\}$.

Este proceso termina cuando llegamos al vértice σ , que corresponde al baricentro de la cara 0-dimensional, la cual es la intersección de todas las caras de C . En consecuencia, para cada vértice, existen $n!$ formas de construir un símplex, también, por este método se construyen símplexes, siendo todos disjuntos, cuya unión forman la celda de Voronoi, por lo tanto, la partición está bien definida.

El número total de símplexes generados en este procedimiento es el producto de $(n+1)!$, que es el número de vértices, y $n!$, que es el número de símplexes que se pueden construir a partir de un vértice dado. Finalmente, estos símplexes se pueden etiquetar con elementos del conjunto $S_{n+1} \times S_n$.

Así, existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de símplexes generados por es-

ta partición y $S_{n+1} \times S_n$. Una pareja ordenada (σ, τ) en $S_{n+1} \times S_n$ representa los vértices del simplex determinado por el proceso descrito en los puntos anteriores. En este caso, σ representa el vértice y τ es el conjunto ordenado $\{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{i-2}\}$, que corresponde a los baricentros generados en dicho proceso. A continuación, veamos un ejemplo del procedimiento ya establecido.

Ejemplo 2.2.9. Consideremos para un lattice de dimensión 3 el simplex asociado a la pareja $(\sigma, \tau) = (2301, 210)$, éste está delimitado por los siguientes vértices:

- **Vértice 0:** Este vértice está determinado por el baricentro de la celda, es decir, $\mathbf{Ba}(F(2301)) = \mathbf{0}$, que es el centro de la celda.
- **Vértice 1:** Como el primer elemento de τ es 2, este vértice está determinado por el baricentro de la cara F_{230} . Según el proceso, tomamos los índices desde la posición 0 hasta la posición 2, lo que nos da:

$$2\mathbf{Ba}(F(230|1)) = -e_{12} - e_{13} + e_{01} \quad (2.13)$$

$$= \begin{pmatrix} p_{01} \\ -p_{01} - p_{12} - p_{13} \\ p_{12} \\ p_{13} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

En cualquier dimensión, el vértice 1 siempre está determinado por la mitad de un vector de Voronoi.

- **Vértice 2:** Como el segundo elemento de τ es 1, este vértice está determinado por el baricentro de la cara $F_{230} \cap F_{23}$, el cual es:

$$2\mathbf{Ba}(F(23|0|1)) = -e_{12} - e_{13} + e_{01} - e_{02} - e_{03} \quad (2.15)$$

$$= \begin{pmatrix} p_{01} - p_{02} - p_{03} \\ -p_{01} - p_{12} - p_{13} \\ p_{12} + p_{02} \\ p_{13} + p_{03} \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

- **Vértice 3:** Finalmente, dado que el último elemento de τ es 0, este vértice está determinado por el baricentro de la cara $F_{230} \cap F_{23} \cap F_2$, que es precisamente el vértice σ . Esto es:

$$2\mathbf{Ba}(F(2|3|0|1)) = -e_{12} - e_{13} + e_{01} - e_{02} - e_{03} + e_{23} \quad (2.17)$$

$$= \begin{pmatrix} p_{01} - p_{02} - p_{03} \\ -p_{01} - p_{12} - p_{13} \\ p_{12} + p_{02} + p_{23} \\ p_{13} + p_{03} - p_{23} \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Por lo tanto, el simplex está determinado por el conjunto de vértices:

$$\Delta(\sigma, \tau) = \{\mathbf{0}, e_{12} - e_{13} + e_{01}, e_{12} - e_{13} + e_{01} - e_{02} - e_{03}, e_{12} - e_{13} + e_{01} - e_{02} - e_{03} + e_{23}\}$$

En la siguiente figura se muestra el proceso realizado para hallar el simplex $\Delta(2301, 210)$.

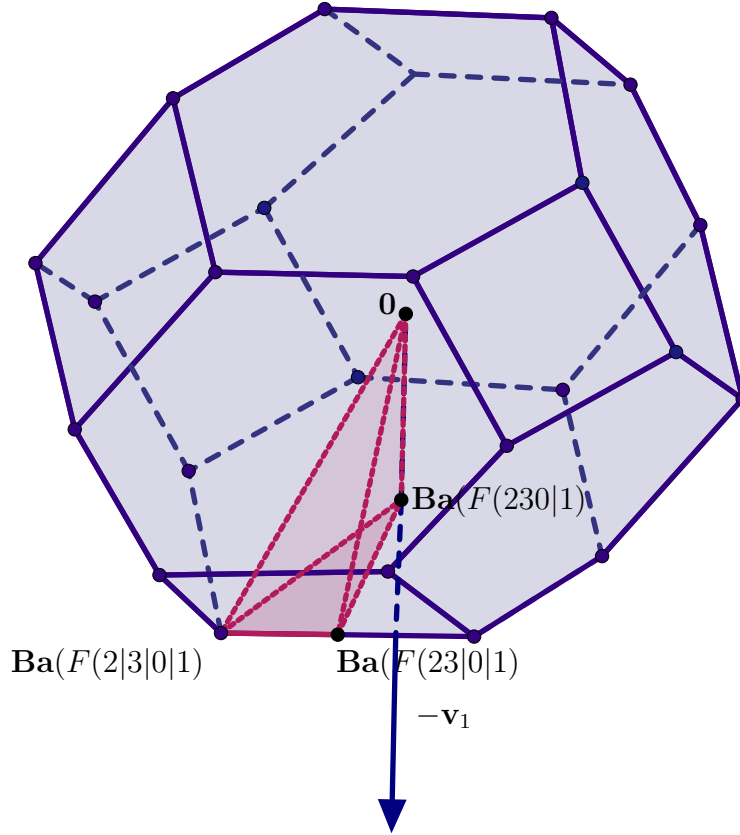


Figura 2.2. Simplex $\Delta(2301, 210)$ de un lattice 3-dimensional.

2.3 Árboles de Búsqueda Binarios

En esta instancia se requiere introducir algunos conceptos acerca de los árboles binarios, dada la importancia que van a tener a la hora de representar los simples que vamos a construir, además que nos van a ayudar en el cálculo del volumen de un simplex.

Un *árbol binario plano* es un tipo de árbol en el que cada nodo tiene como máximo dos hijos, un hijo izquierdo y un hijo derecho. El tamaño de un árbol se refiere al número total de nodos que contiene. El número de árboles binarios planos de tamaño n está dado por el número catalán C_n , definido como:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{2n!}{n!(n+1)!}.$$

Un árbol etiquetado es aquel al que se le ha asignado una etiqueta a cada nodo. En nuestro caso, inicialmente etiquetaremos el conjunto completo $\{0, 1, \dots, n-1\}$, que serán los elementos con los cuales construiremos τ .

Además, Un *subárbol* de un árbol binario es una parte del árbol que se forma al seleccionar un nodo específico, junto con todos los nodos descendientes de él (aquellos conectados en niveles inferiores), y las aristas que los vinculan.

Definición 2.3.1. Un árbol de búsqueda binario es una estructura de datos en forma de árbol en la que cada nodo puede tener como máximo dos hijos, denominados hijo izquierdo e hijo derecho. Además, para cada nodo, todos los elementos en el subárbol izquierdo son menores que el nodo, mientras que todos los elementos en el subárbol derecho son mayores que el nodo.

Por consiguiente, para construir un árbol de búsqueda binario $T(w)$ a partir de una palabra w , realizamos lo siguiente:

1. **Leer la palabra w :** Recorrer la palabra w de izquierda a derecha y tomar cada carácter.
2. **Inserción en el árbol:** Insertar cada carácter en el árbol siguiendo las reglas que se detallan a continuación:
 - Si el árbol está vacío, se crea un nodo raíz con el primer carácter de w .
 - Si el carácter es menor que el nodo actual, se inserta en el subárbol izquierdo de manera recursiva.
 - Si el carácter es mayor que el nodo actual, se inserta en el subárbol derecho de manera recursiva.

Para contextualizar la construcción de un árbol de búsqueda binario, consideremos el árbol $T(6412530)$ que representa la palabra 6412530 y el esquema dado en la Figura 2.3, en donde se muestra el proceso de como se va construyendo el árbol, siendo el árbol buscado el dado al final.

Por otro lado, sean $\sigma = (\sigma_0 \cdots \sigma_n) \in S_{n+1}$ y $\tau = (\tau_0 \cdots \tau_{n-1}) \in S_n$, donde los elementos de τ representan permutaciones de los espacios entre los elementos de σ . Esto se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \sigma = (\sigma_0 & \sigma_1 & \cdots & \sigma_i & \sigma_{i+1} & \cdots & \sigma_n) \\
 \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 0 & 1 & i-1 & i & i+1 & n-1 &
 \end{array} \tag{2.19}$$

Con esta representación, la cual nos muestra la relación existente entre un elemento de S_n y S_{n+1} , vamos a construir árboles de búsqueda.

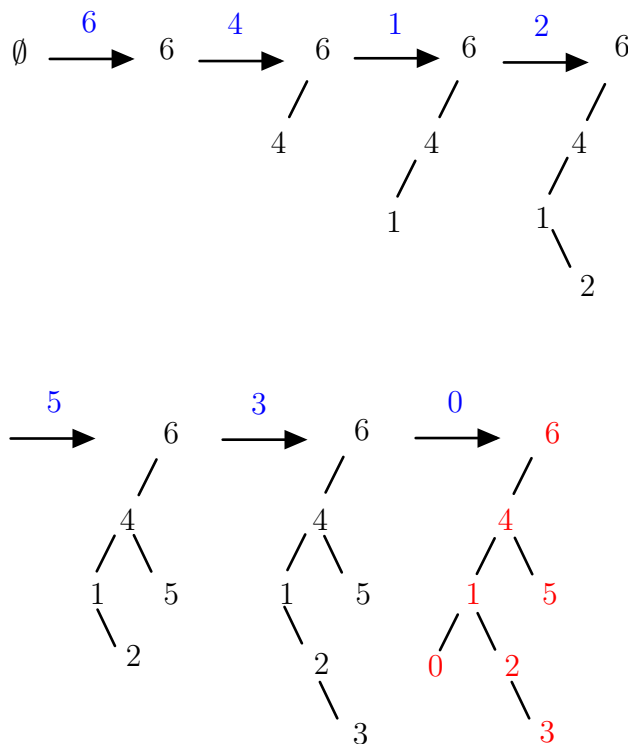


Figura 2.3. Construcción del árbol de búsqueda binario $T(6412530)$.

Definición 2.3.2. Para cada par $(\sigma, \tau) \in S_{n+1} \times S_n$, se construye el árbol de búsqueda binario $T(\sigma, \tau)$ siguiendo los siguientes pasos:

1. Se genera un nodo raíz etiquetando los espacios de σ con los índices de 0 a $n - 1$, como se mostró en 2.19.

Luego, se sustituye el espacio τ_0 por una subdivisión $|$, dividiendo así la secuencia en dos partes: una izquierda y una derecha.
2. Para cada i desde 1 hasta $n - 1$, se genera un nuevo nodo subdividiendo la secuencia que contiene el espacio τ_i en el nodo N más inferior en el que dicho espacio aparezca. Este nuevo nodo se posiciona como hijo izquierdo o derecho de N , dependiendo de si la secuencia subdividida pertenece a la parte izquierda o derecha de N .
3. El proceso concluye una vez que se han procesado todos los elementos de τ .

Podemos notar que en el árbol $T(\sigma, \tau)$, cada nodo N representa una subdivisión de una palabra σ' en dos subpalabras. Como consecuencia, el conjunto de caracteres de cualquier nodo perteneciente al subárbol con raíz en N dentro de $T(\sigma, \tau)$ no incluye caracteres que no estuvieran originalmente en σ' .

Además, excluyendo el baricentro inicial 0 , el i -ésimo baricentro $\mathbf{d}_i$ generado durante la

construcción de un símplex $\Delta(\sigma, \tau)$ se obtiene como la suma:

$$\mathbf{d}_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i e_{N^j}, \quad (2.20)$$

donde N^j denota el j -ésimo nodo insertado en la construcción del árbol $T(\sigma, \tau)$.

A continuación, como ilustración, se muestra el árbol de búsqueda binario $T(03264751, 6412530)$:

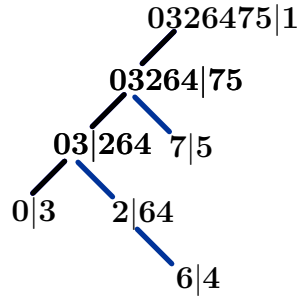


Figura 2.4. Árbol de búsqueda binario $T(03264751, 6412530)$.

2.4 Cálculo del Volumen de un Símplex

A continuación demostraremos el siguiente resultado que nos muestra el volumen de un símplex, haciendo uso de la terminología de los árboles de búsqueda binarios.

Teorema 2.4.1. *Sea $\Delta(\sigma, \tau)$ la representación de un símplex proveniente de la partición de una celda de Voronoi para un lattice de Tipo I. Entonces el volumen de este símplex está dado por:*

$$\text{vol}(\sigma, \tau) = \frac{1}{2^n n! \Delta^{1/2}} \prod_{v \in V} p_v, \quad (2.21)$$

donde V es el conjunto de nodos del árbol de búsqueda binario $T(\sigma, \tau)$.

Consideremos que los vértices de un símplex n -dimensional (σ, τ) en coordenadas euclidianas en $\mathbb{R}^n$ están dados por $\mathbf{v}_i = (\mathbf{v}_{1i}, \mathbf{v}_{2i}, \dots, \mathbf{v}_{ni})^t$ para $0 \leq i \leq n$. En este caso, el volumen de $\Delta(\sigma, \tau)$ viene dado por la siguiente expresión:

$$\text{vol}(\sigma, \tau) = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mathbf{v}_{10} & \mathbf{v}_{11} & \cdots & \mathbf{v}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_{n0} & \mathbf{v}_{n1} & \cdots & \mathbf{v}_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.22)$$

Si los vértices están representados en coordenadas $\mathbf{y}$ en lugar de coordenadas euclidianas, esta fórmula no puede utilizarse directamente. Recordemos que, en este caso, las coordenadas $\mathbf{y}$ de un vértice se obtienen mediante la relación $\mathbf{d} = M^T \mathbf{v}_i$, donde M es la matriz generadora de la red. De ahí que $(M^T)^{-1} \mathbf{d} = \mathbf{v}_i$.

Si extendemos la matriz $(M^T)^{-1}$ con una fila y una columna adicionales, de la siguiente forma:

$$(M^{-1})' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & (M^T)^{-1} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

se cumple que $\det(M^{-1})' = \det(M^T)^{-1}$. Asimismo, si extendemos el vector $\mathbf{d}$ a:

$$\mathbf{d}' = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n \end{bmatrix}$$

entonces las columnas de la matriz en la ecuación (2.22) pueden expresarse como $(M^{-1})' \mathbf{d}'_i$, donde $\mathbf{d}'_i$ es el vector en coordenadas $\mathbf{y}$ aumentado con un 1. Por lo tanto, el volumen del símplex puede escribirse como:

$$\text{vol}(\sigma, \tau) = \frac{1}{n!} \left| (M^{-1})' \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mathbf{d}_{10} & \mathbf{d}_{11} & \cdots & \mathbf{d}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{d}_{n0} & \mathbf{d}_{n1} & \cdots & \mathbf{d}_{nn} \end{bmatrix} \right| \quad (2.23)$$

$$= \frac{1}{n! \Delta^{1/2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mathbf{d}_{10} & \mathbf{d}_{11} & \cdots & \mathbf{d}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{d}_{n0} & \mathbf{d}_{n1} & \cdots & \mathbf{d}_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.24)$$

Dado que el primer vértice es $\mathbf{d}_0 = \mathbf{0}$, la ecuación anterior se simplifica a:

$$\frac{1}{n! \Delta^{1/2}} \begin{vmatrix} \mathbf{d}_{11} & \cdots & \mathbf{d}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{d}_{n1} & \cdots & \mathbf{d}_{nn} \end{vmatrix} \quad (2.25)$$

Cada columna de esta matriz está asociada a un nodo del árbol de búsqueda binario $T(\sigma, \tau)$, y el determinante de esta matriz se calcula mediante operaciones de reducción en filas. Aplicando las observaciones sobre la estructura de subdivisiones de $T(\sigma, \tau)$, podemos concluir que:

$$\text{vol}(\sigma, \tau) = \frac{1}{2^n n! \Delta^{1/2}} \prod_{v \in V} p_v \quad (2.26)$$

donde V es el conjunto de nodos del árbol de búsqueda binario $T(\sigma, \tau)$. Este resultado prueba el Teorema 2.4.1.

Por consiguiente, podemos plantearnos la cuestión de cuántos y cuáles otros símplexes (σ', τ') poseen el mismo volumen que un símplex dado $\Delta(\sigma, \tau)$. Dado que como $p_{C_1|C_0} = p_{C_0|C_1}$ entonces, si intercambiamos un nodo $N = C_0|C_1$ por su versión reflejada $N' = C_1|C_0$ e intercambiamos los subárboles izquierdo y derecho de N , obtenemos otro par (σ', τ') con el mismo volumen que (σ, τ) . Esto sugiere una simetría en la estructura de los árboles de búsqueda binarios que determina clases de equivalencia de símplexes con volumen invariante.

Definición 2.4.2. Sea $(\sigma, \tau) \in S_{n+1} \times S_n$. Definimos la transformación r_i como aquella que toma el símplex $\Delta(\sigma, \tau)$ y lo convierte en un único símplex $\Delta(\sigma', \tau')$ cumpliendo las siguientes condiciones:

- La transformación r_i actúa sobre el árbol binario $T(\sigma, \tau)$, generando un nuevo árbol $T(\sigma', \tau')$ mediante el intercambio entre la palabra izquierda y derecha, junto con el intercambio entre el subárbol izquierdo y derecho del i -ésimo nodo N^i que aparece en la construcción de $T(\sigma, \tau)$.
- La transformación conserva el orden en que aparecen los nodos en $T(\sigma, \tau)$, con la única diferencia de que el nodo N^i es reemplazado por el nodo resultante tras la aplicación de la transformación.

Es importante mencionar que las transformaciones r_i afectan exclusivamente al nodo N^i , sin alterar ningún otro nodo del árbol original. Por lo tanto, si dos árboles $T(\sigma, \tau)$ y $T(\sigma', \tau')$ están relacionados por una transformación r_i , entonces los símplexes $\Delta(\sigma, \tau)$ y $\Delta(\sigma', \tau')$ tendrán el mismo volumen.

Más aún, si consideramos el nodo N^i en el árbol $T(\sigma, \tau)$ y su correspondiente nodo transformado $N^{i'}$ en $T(\sigma', \tau')$, tenemos que los vectores e_{N^i} y $e_{N^{i'}}$ son opuestos en signo.

2.5 Segundo momento de un símplex

De acuerdo con el Teorema 3.1.2, los vértices de un símplex n -dimensional (σ, τ) en $\mathbf{y}$ -coordenadas están dados por $\mathbf{d}_i = (\mathbf{d}_{1i}, \mathbf{d}_{2i}, \dots, \mathbf{d}_{ni})^t$ para $0 \leq i \leq n$, entonces el momento de inercia alrededor del origen se expresa como:

$$I(\sigma, \tau) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(\left\| \sum_{i=0}^n \mathbf{d}_i \right\|^2 + \sum_{i=0}^n \|\mathbf{d}_i\|^2 \right). \quad (2.27)$$

Por 2.20 y considerando el hecho de que $\mathbf{d}_0 = 0$, tenemos:

$$I(\sigma, \tau) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left(\left\| \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i e_{N^j} \right\|^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i e_{N^j} \right\|^2 \right). \quad (2.28)$$

Además, dado que

$$\left\| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i e_{N^j} \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n (n+1-i) e_{N^i} \right\|^2.$$

Por lo tanto, reescribiendo la ecuación (2.28):

$$I(\sigma, \tau) = \frac{1}{4(n+1)(n+2)} \left(\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n (n+1-i) e_{N^i} \right)^2}_{S_1} + \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\sum_{j=1}^i e_{N^j} \right)^2}_{S_2} \right). \quad (2.29)$$

Expandiendo S_1 y S_2 en (2.29) y reordenando términos, obtenemos expresiones de la forma $\alpha_{kl} e_{N^k} \cdot e_{N^l}$ con $k, l \in \{1, \dots, n\}$.

- Para $k = l$, de S_1 se obtiene $(n+1-k)^2 e_{N^k}^2$, y de S_2 se obtiene $(n+1-k) e_{N^k}^2$. Así, el coeficiente α_{kk} es:

$$\alpha_{kk} = (n+1-k)(n+2-k). \quad (2.30)$$

- Para $k < l$, de S_1 obtenemos $2(n+1-k)(n+1-l) e_{N^k} \cdot e_{N^l}$, y de S_2 obtenemos $2(n+1-l) e_{N^k} \cdot e_{N^l}$. Por lo tanto, el coeficiente α_{kl} es:

$$\alpha_{kl} = 2(n+2-k)(n+1-l). \quad (2.31)$$

Reescribiendo (2.29):

$$I(\sigma, \tau) = a \cdot \left(\sum_{k=1}^n (n+1-k)(n+2-k)e_{N^k}^2 + \sum_{k < l}^n 2(n+2-k)(n+1-l)e_{N^k} \cdot e_{N^l} \right), \quad (2.32)$$

donde $a = \frac{1}{4(n+1)(n+2)}$.

Dado que existen n transformaciones r_i , una por cada nodo, aplicables a $\Delta(\sigma, \tau)$, y considerando que cada nodo N^i tiene dos opciones (aplicar o no r_i), se generan 2^n símplices al aplicar todas las combinaciones posibles de transformaciones.

Cuando aplicamos una transformación r_i , la única diferencia entre $I(\sigma, \tau)$ e $I(\Delta(\sigma', \tau'))$ es en el signo de los términos $\alpha_{kl}e_{N^k} \cdot e_{N^l}$ cuando $k = i \vee l = i$.

Sumando las inercias de los 2^n símplices generados, sobreviven únicamente los términos con $k = l$. Así, considerando el conjunto:

$$R = \{r_i(\Delta(\sigma, \tau)) : i \in \{1, \dots, n\}\}, \quad (2.33)$$

se tiene:

$$\sum_{\delta \in R} (I(\delta)) = \frac{2^n}{4(n+1)(n+2)} \left(\sum_{k=1}^n (n+1-k)(n+2-k)e_{N^k}^2 \right). \quad (2.34)$$

Es importante destacar que todos los símplices en R tienen el mismo volumen, lo que permite calcular el segundo momento no normalizado:

$$U(\Delta(\sigma, \tau)) = I(\sigma, \tau) \cdot \text{vol}(\Delta(\sigma, \tau)). \quad (2.35)$$

A partir de lo anterior, no solo podemos calcular U para cada símplex, sino también la suma de U en todos los símplices de R .

Capítulo 3

El problema del lattice cuantizador óptimo

En este capítulo primeramente, nos centraremos en mostrar el estado del arte entorno al problema del lattice cuantizador óptimo. Después, evidenciaremos el proceso de calcular la constante de cuantización para lattices de Tipo I en dimensión 2, desarrollado por Conway y Sloane en [5]; también, lo establecido por Barnes y Sloane para dimensión 3, consignado en [9] y finalmente lo realizado por Velásquez en [7] con respecto a los lattices 4-dimensionales, para determinar una fórmula en función de los parámetros de Selling asociados al lattice.

Dicho proceso está basado en lograr dividir en símplex la celda de Voronoi centrada en el origen, además de la identificación de la celda con un permutoedro, siendo este último un objeto combinatorio de gran importancia debido a que nos permitirá lograr una manipulación de la celda y así realizar los cálculos necesarios para obtener la constante de cuantización de un lattice.

Es importante destacar que a cada fórmula de la constante de cuantización desarrollada por los autores ya mencionados, en este capítulo vamos a ver que cada una de ellas se va a poder expresar en términos de ciertos árboles generadores, que están relacionados con la superbase asociada al lattice.

3.1 Politopos

Esta sección se basa en lo establecido por Conway y Sloane en el Capítulo 21 de [1]. Un *politopo* es una región convexa cerrada y acotada de $\mathbb{R}^n$, que es la intersección de un número finito de semi-espacios. Tal concepto juega un papel importante en el procedimiento de hallar la fórmula de la constante de cuantización para lattices Tipo I, a razón de ello, vamos a presentar algunas definiciones y resultados relacionados con dicho concepto en cuestión.

3.1.1 Segundo momento de politopos

Sea P un politopo en $\mathbb{R}^n$ entonces, su segundo momento no normalizado respecto al origen lo denotamos por $U(P)$ y está dado de la siguiente forma:

$$U(P) = \int_P \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} d\mathbf{x}. \quad (3.1)$$

El momento de inercia de P respecto al origen, el cual se va a denotar por $I(P)$, se expresa como sigue:

$$I(P) = \frac{U(P)}{\text{vol}(P)}, \quad (3.2)$$

donde $\text{vol}(P) = \int_P d\mathbf{x}$ es el volumen de P .

El segundo momento normalizado de P respecto al origen es:

$$G(P) = \frac{1}{n} \frac{U(P)}{\text{vol}(P)^{1+2/n}} = \frac{1}{n} \frac{I(P)}{\text{vol}(P)^{2n}}. \quad (3.3)$$

Ahora, veamos lo que es un símplex.

Definición 3.1.1. Un *símplex* o *n-símplex* (o *símplice*) es un politopo y es la envoltura convexa de un conjunto de $n + 1$ puntos independientes $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ afines, es decir, tales que $\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j$, son linealmente independientes para $1 \leq i \leq n + 1$, $i \neq j$ y $j \in \{1, \dots, n + 1\}$.

Así, un 0-símplex es un punto, un 2-símplex es un triángulo, y un 3-símplex le corresponde un tetraedro.

El siguiente teorema nos permite calcular el segundo momento de un símplex, su demostración se encuentra consignada en [1].

Teorema 3.1.2. [1] Sea T un símplex n -dimensional en $\mathbb{R}^n$ con vértices $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$, para $0 \leq i \leq n$, entonces:

1. El centroide de T es el baricentro de los vértices:

$$\mathbf{Ba} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \mathbf{v}_i. \quad (3.4)$$

2. El volumen de T es:

$$\text{vol}(T) = \frac{1}{n!} \det \begin{bmatrix} 1 & v_{01} & \cdots & v_{0n} \\ 1 & v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

3. El momento de inercia al rededor del origen es:

$$I(T) = \frac{n+1}{n+2} \|\mathbf{Ba}\|^2 + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{i=0}^n \|\mathbf{v}_i\|^2. \quad (3.6)$$

De la Definición 3.2 y el Teorema 3.1.2 podemos deducir que si Q es una partición en n -símplices de un politopo P entonces, el segundo momento no normalizado de P se puede expresar de la siguiente forma:

$$U(P) = \sum_{T \in Q} U(T), \quad (3.7)$$

donde $U(T) = I(T)\text{vol}(T)$.

La anterior relación tendrá una gran relevancia a la hora de hallar el segundo momento normalizado de la celda de Voronoi.

3.1.2 Permutoedros

Ya hemos venido hablando de que todas las celdas de Voronoi de un lattice son politopos convexos, otro concepto relacionado con dicho término es el que daremos a continuación, el cual fue tomado de [10] junto con otras características del permutoedro.

Definición 3.1.3. El *permutoedro* $(n-1)$ -dimensional, Π_{n-1} , es el convex hull o casco convexo de $n!$ puntos $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$, donde σ recorre todas las permutaciones de $\{1, 2, \dots, n\}$.

De la definición anterior, tenemos que este politopo está contenido en el hiperplano

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = n(n+1)/2\}. \quad (3.8)$$

Sea S_n el grupo simétrico de todas las permutaciones de $\{1, 2, \dots, n\}$. Para una permutación $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n)) \in S_n$, tenemos que $(\sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(n)) \in \Pi_{n-1}$.

Ejemplo 3.1.4. El permutoedro 2-dimensional, Π_2 , es el hexágono que se muestra en la Figura 3.1 (a). El permutoedro 3-dimensional, Π_3 , es un octaedro truncado, el cual se muestra en la Figura 3.1 (b).

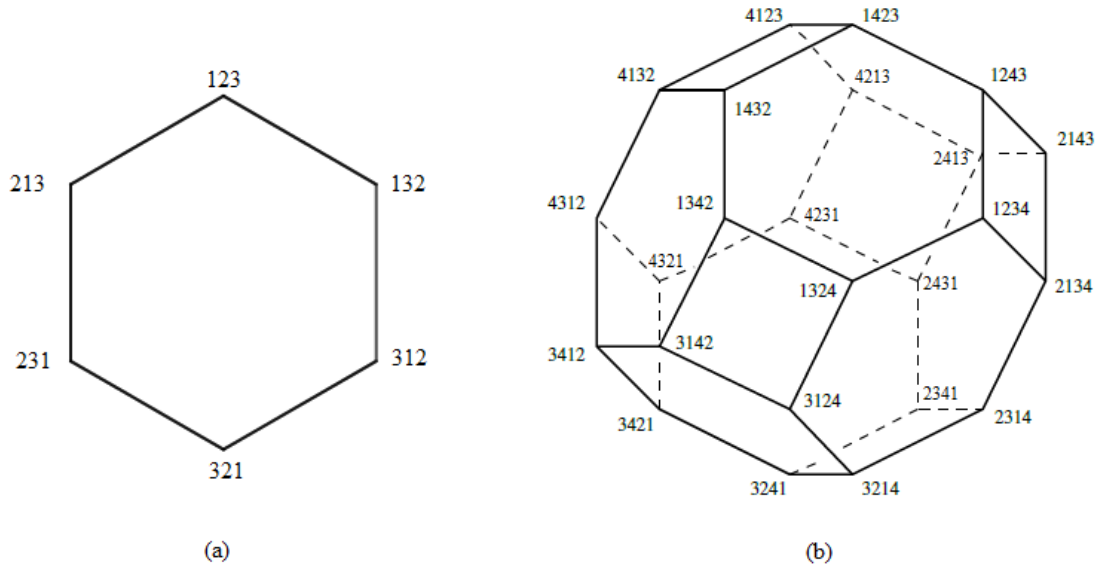


Figura 3.1. (a) Permutoedro 2-dimensional y (b) Permutoedro 3-dimensional.

El hecho de identificar la celda de Voronoi con un permutoedro nos permitirá desarrollar una descripción topológica - combinatoria de la celda. Dicha descripción será de gran relevancia, porque nos conducirá al cálculo de la constante de cuantización para los lattices de Tipo I en algunas dimensiones.

3.2 Constante de cuantización para lattices en dimensión 2

Lo que desarrollaremos a continuación está basado en lo realizado por Conway y Sloane en [5] respecto a los lattices en dimensión 2. Sea Λ un lattice 2-dimensional generado por los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_0 = -\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, siendo el conjunto $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ una superbase obtusa para Λ con parámetros de Selling p_{ij} y $0 \leq i < j \leq 2$. Si $p_{12} \neq 0$, los vectores de Voronoi son $\pm\mathbf{v}_0, \pm\mathbf{v}_1, \pm\mathbf{v}_2$ y la celda de Voronoi es un hexágono. Ahora, si $p_{12} = 0$, además de los anteriores vectores, también $\pm(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$ son vectores de Voronoi y la celda es un cuadrado.

A la celda de Voronoi del tipo hexagonal se le denomina *primitiva*, porque en el embaledamiento generado, en cada vértice se encuentra el mínimo número posible de celdas, 3 en este caso. En general, para un lattice n -dimensional una celda de Voronoi es primitiva si en el embaledamiento generado para cada vértice se encuentran $n + 1$ de ellas, que es el mínimo número posible de celdas que pueden coincidir en un vértice.

De otro lado, tenemos que la matriz de Gram de un lattice 2-dimensional es:

$$A = \begin{bmatrix} p_{01} + p_{12} & -p_{12} \\ -p_{12} & p_{02} + p_{12} \end{bmatrix}.$$

Ahora, denotemos por Δ el determinante del lattice, entonces:

$$\Delta = p_{01}p_{02} + p_{01}p_{12} + p_{02}p_{12}. \quad (3.9)$$

Para hallar la constante de cuantización de un lattice 2-dimensional en función de los parámetros de Selling, es necesario identificar las $\mathbf{y}$ -coordenadas aumentadas de sus vértices. En efecto, sea $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2)^{tr}$, las $\mathbf{y}$ -coordenadas de un vértice, donde $y_0 + y_1 + y_2 = 0$.

Ahora, consideremos la celda de Voronoi centrada en el origen $V(\mathbf{0})$, en la Figura 3.2 se muestra las notaciones de las caras y los vértices de $V(\mathbf{0})$. Vemos que denotamos por F_0, F_1, F_2 a las caras determinadas por los vectores de Voronoi $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ respectivamente y por F_{12}, F_{02}, F_{01} sus caras opuestas; más aún un vértice de la celda conformado por la intersección de las caras F_i y F_{ij} es identificado por $\mathbf{P}_{ijk}$.

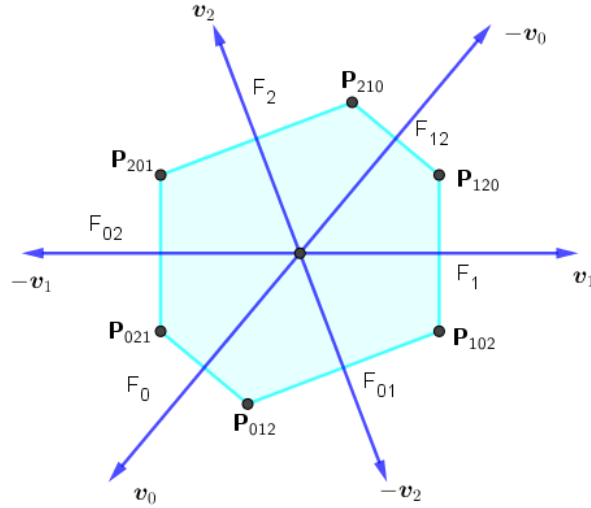


Figura 3.2. Etiquetamiento de la celda de Voronoi en dimensión 2.

Ahora, vamos a calcular las $\mathbf{y}$ -coordenadas de un vértice arbitrario de $V(\mathbf{0})$. Sea $i \ j \ k$ un reordenamiento de los índices 0 1 2 y además sea $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2)^{tr}$ las $\mathbf{y}$ -coordenadas del vértice $\mathbf{P}_{ijk}$. Dado que $\mathbf{P}_{ijk} \in F_i$ y $\mathbf{P}_{ijk} \in F_{ij}$, de la igualdad (1.15) resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_i &= \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_i) \\ \mathbf{t} \cdot (\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j) &= \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j). \end{aligned}$$

Por las igualdades anteriores deducimos:

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_i) \\ y_i + y_j &= \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Sabemos que $y_i + y_j + y_k = 0$, también del Corolario 1.4.5, se tiene que $N(\mathbf{v}_i) = p_{ij} + p_{ik}$ y $N(\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_j) = p_{ik} + p_{jk}$, luego, de las igualdades dadas en (3.10) logramos inferir que las $\mathbf{y}$ -coordenadas aumentadas del vértice $\mathbf{P}_{ijk}$ son:

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ik}) \\ y_j &= \frac{1}{2}(-p_{ij} + p_{jk}) \\ y_k &= \frac{1}{2}(-p_{ik} - p_{jk}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Si $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$ tiene $\mathbf{y}$ -coordenadas aumentadas $(y_0, y_1, y_2)^{tr}$, y Δ es el determinante del lattice, por la Proposición 1.3.2, deducimos que la norma de $\mathbf{t}$ es:

$$N(\mathbf{t}) = \frac{1}{\Delta}(p_{12}y_0^2 + p_{02}y_1^2 + p_{01}y_2^2). \quad (3.12)$$

Reemplazando las $\mathbf{y}$ -coordenadas del vértice $\mathbf{P}_{ijk}$ dadas en (3.11) en la fórmula (3.12) obtenemos que la norma del vértice $\mathbf{P}_{ijk}$ es:

$$N(\mathbf{P}_{ijk}) = \frac{1}{4\Delta}(p_{ij} + p_{ik})(p_{ij} + p_{jk})(p_{ik} + p_{jk}) \quad (3.13)$$

Para calcular la constante de cuantización del lattice $G(\Lambda)$, primero realicemos una partición en símplex de la celda de Voronoi $V(\mathbf{0})$ como se muestra en la Figura 3.3.

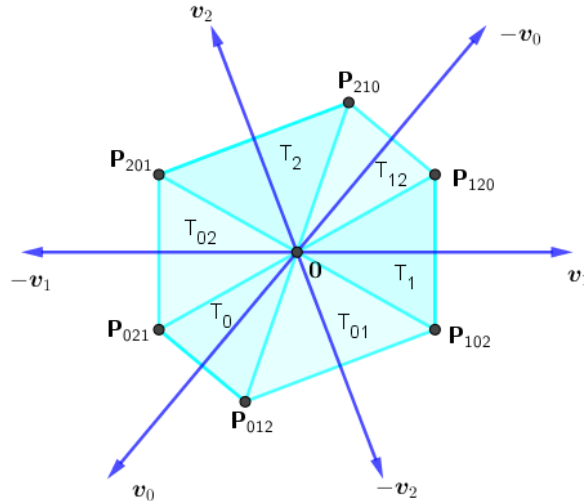


Figura 3.3. Partición de la celda de Voronoi en dimensión 2.

A continuación, para mostrar el procedimiento del cálculo de $G(\Lambda)$, vamos a considerar el símplex T_0 de la celda de Voronoi, hallaremos su momento de inercia $I(T_0)$ y su segundo momento no normalizado $U(T_0)$. En efecto, tenemos que los vértices del triángulo T_0 son $\mathbf{0}$, $\mathbf{P}_{021}$ y $\mathbf{P}_{012}$.

Sean $(y_0, y_1, y_2)^{tr}$ las $\mathbf{y}$ -coordenadas aumentadas de $\mathbf{P}_{021}$. De las ecuaciones dadas en (3.11), deducimos que las $\mathbf{y}$ -coordenadas aumentadas del vértice $\mathbf{P}_{021}$ son:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} \\ -p_{01} - p_{12} \\ -p_{02} + p_{12} \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, utilizando (3.13) y las $\mathbf{y}$ -coordenadas de $\mathbf{P}_{021}$, obtenemos:

$$N(\mathbf{P}_{021}) = \frac{1}{4\Delta}(p_{01} + p_{02})(p_{01} + p_{12})(p_{02} + p_{12}).$$

Por consiguiente, consideremos el vértice $\mathbf{P}_{012} \in F_0 \cap F_{01}$ y sean $(y'_0, y'_1, y'_2)^{tr}$ las $\mathbf{y}$ -coordenadas aumentadas de $\mathbf{P}_{012}$. De nuevo, por las ecuaciones dadas en 3.11, obtenemos que las $\mathbf{y}$ -coordenadas aumentadas del vértice $\mathbf{P}_{012}$ son:

$$\begin{pmatrix} y'_0 \\ y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} \\ -p_{01} + p_{12} \\ -p_{02} - p_{12} \end{pmatrix}.$$

Más aún, tenemos que $N(\mathbf{P}_{012}) = N(\mathbf{P}_{021})$.

Seguidamente, con respecto al baricentro de T_0 , sabemos por (3.4), que él se puede expresar como $\mathbf{Ba} = \frac{1}{3}(\mathbf{0} + \mathbf{P}_{021} + \mathbf{P}_{012}) = \frac{1}{3}(\mathbf{P}_{021} + \mathbf{P}_{012})$. En consecuencia, las $\mathbf{y}$ -coordenadas aumentadas de $\mathbf{Ba}$ son:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_0 \\ \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} y_0 + y'_0 \\ y_1 + y'_1 \\ y_2 + y'_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} p_{01} + p_{02} \\ -p_{01} \\ -p_{02} \end{pmatrix}.$$

Además, tenemos de la expresión (3.12), que la norma de $\hat{\mathbf{v}}$ en términos de sus $\mathbf{y}$ -coordenadas viene dada por:

$$N(\mathbf{Ba}) = \frac{1}{9}(p_{01} + p_{02}).$$

Sabemos de (3.6), que el momento de inercia de T_0 está dado por $I(T_0) = \frac{3}{4}N(\mathbf{Ba}) + \frac{1}{12}(N(\mathbf{P}_{012}) + N(\mathbf{P}_{021}))$, entonces, reemplazando las normas de los vértices y la del baricentro tenemos

$$I(T_0) = \frac{1}{24\Delta}(p_{01} + p_{02})(3\Delta + p_{12}^2).$$

De otro lado, de (3.5), resulta que el volumen de T_0 se puede expresar como sigue:

$$\text{vol}(T_0) = \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \left| \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{pmatrix} \right|.$$

Así, utilizando las $\mathbf{y}$ -coordenadas de los vértices $\mathbf{P}_{021}$ y $\mathbf{P}_{012}$ del símplex T_0 , concluimos que el volumen de T_0 es:

$$\text{vol}(T_0) = \frac{1}{4\sqrt{\Delta}} p_{12}(p_{01} + p_{02}).$$

Por consiguiente, de (3.2) se deduce que el segundo momento no normalizado respecto al origen es $U(T_0) = I(T_0)\text{vol}(T_0)$, de ahí que

$$U(T_0) = \frac{p_{12}(p_{01} + p_{02})^2(3\Delta + p_{12}^2)}{96\Delta^{3/2}}.$$

Para hallar el momento de inercia y el segundo momento no normalizado de los símplex T_1 y T_2 procedemos como en el caso anterior. En efecto, consideremos el símplex T_1 , por medio de la ecuaciones dadas en (3.11) inferimos que las $\mathbf{y}$ -coordenadas de los vértices $\mathbf{P}_{102}$ y $\mathbf{P}_{120}$ son respectivamente:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -p_{01} + p_{02} \\ p_{01} + p_{12} \\ -p_{02} - p_{12} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -p_{01} - p_{02} \\ p_{01} + p_{12} \\ p_{02} - p_{12} \end{pmatrix}.$$

Luego, haciendo uso de las $\mathbf{y}$ -coordenadas de los vértices de T_1 , se deduce que el momento de inercia de T_1 es:

$$I(T_1) = \frac{1}{24\Delta}(p_{01} + p_{12})(3\Delta + p_{02}^2).$$

También, que el volumen de T_1 es:

$$\text{vol}(T_1) = \frac{1}{4\sqrt{\Delta}}p_{02}(p_{01} + p_{12}).$$

En consecuencia, el segundo momento no normalizado de T_1 , es decir $U(T_1)$ es:

$$U(T_1) = \frac{p_{02}(p_{01} + p_{12})^2(3\Delta + p_{02}^2)}{96\Delta^{3/2}}.$$

Con respecto al símplex T_2 , tenemos que las $\mathbf{y}$ -coordenadas de los vértices $\mathbf{P}_{201}$ y $\mathbf{P}_{210}$ son:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_{01} - p_{02} \\ -p_{01} - p_{12} \\ p_{02} + p_{12} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -p_{01} - p_{02} \\ p_{01} - p_{12} \\ p_{02} + p_{12} \end{pmatrix}.$$

Con dichas $\mathbf{y}$ -coordenadas, se infiere que el momento de inercia y el volumen de T_2 , son respectivamente:

$$I(T_2) = \frac{1}{24\Delta}(p_{02} + p_{12})(3\Delta + p_{01}^2).$$

$$\text{vol}(T_2) = \frac{1}{4\sqrt{\Delta}}p_{01}(p_{02} + p_{12}).$$

Por lo tanto, el segundo momento no normalizado respecto al origen $U(T_2)$ es:

$$U(T_2) = \frac{p_{01}(p_{02} + p_{12})^2(3\Delta + p_{01}^2)}{96\Delta^{3/2}}.$$

Dado que el triángulo T_0 es congruente con T_{12} , entonces $U(T_0) = U(T_{12})$. Es más, con los demás triángulos es claro que T_1 es congruente con T_{02} y T_2 es congruente con T_{01} , concluyendo así que $U(T_1) = U(T_{02})$ y $U(T_2) = U(T_{01})$. Luego, por (3.7) se infiere que el segundo momento no normalizado de la celda de Voronoi $V(\mathbf{0})$ es:

$$U(V(\mathbf{0})) = 2U(T_0) + 2U(T_1) + 2U(T_2).$$

Remplazando cada segundo momento no normalizado de los símlices en la fórmula anterior y simplificando, deducimos lo siguiente:

$$U(V(\mathbf{0})) = \frac{(p_{01}p_{02} + p_{01}p_{12} + p_{02}p_{12})(p_{01} + p_{02} + p_{12}) + p_{01}p_{02}p_{12}}{12\Delta^{1/2}}.$$

Sabemos que el volumen de la celda de Voronoi es $\sqrt{\Delta}$, luego reemplazando $U(V(\mathbf{0}))$ y $\text{vol}(V(\mathbf{0}))$ en (3.3) concluimos que la fórmula de la constante de cuantización para un lattice 2-dimensional es:

$$G(\Lambda) = \frac{1}{2} \frac{U(V(\mathbf{0}))}{\text{vol}(V(\mathbf{0}))^2} = \frac{(p_{01}p_{02} + p_{01}p_{12} + p_{02}p_{12})(p_{01} + p_{02} + p_{12}) + p_{01}p_{02}p_{12}}{24\Delta^{3/2}}. \quad (3.14)$$

De esta manera, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.1. *Sea Λ un lattice 2-dimensional con parámetros de Selling asociados p_{ij} , donde $0 \leq i < j \leq 2$. Sea Δ el determinante del lattice, si definimos a $S_1 = p_{01} + p_{02} + p_{12}$ y $K = p_{01}p_{02}p_{12}$ entonces, la constante de cuantización de Λ está dada por la siguiente expresión:*

$$G_2(\Lambda) = \frac{\Delta S_1 + K}{24\Delta^{3/2}}.$$

De otro lado, hemos considerado que $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una superbase obtusa del lattice Λ . Del capítulo anterior vimos que al lattice podemos asociarle el grafo completo K_3 con vértices $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y aristas los parámetros de Selling p_{01}, p_{12}, p_{02} , dicho grafo tiene 3 árboles generadores.

También, de (3.14) tenemos

$$G_2(\Lambda) = \frac{p_{01}^2 p_{02} + p_{01}^2 p_{12} + p_{01} p_{02}^2 + p_{02}^2 p_{12} + p_{01} p_{12}^2 + p_{02} p_{12}^2 + 2(p_{01} p_{02} p_{12})}{24\Delta^{3/2}}. \quad (3.15)$$

De la expresión anterior, podemos ver que en el numerador de $G_2(\Lambda)$ se encuentra el término $p_{01}^2 p_{02}$, el cual le podemos asociar el árbol generador con un ciclo, de etiquetas p_{01}^2, p_{02} , donde el cuadrado en p_{01} indica la longitud del ciclo, 2 en este caso. Dicho árbol lo podemos ver en la Figura 3.4 y lo denotamos por $p_{01}^2 p_{02}$. También, en la siguiente figura podemos ver los árboles generadores con un ciclo de longitud 2 de los términos $p_{01} p_{02}^2$ y $p_{01} p_{12}^2$ respectivamente.

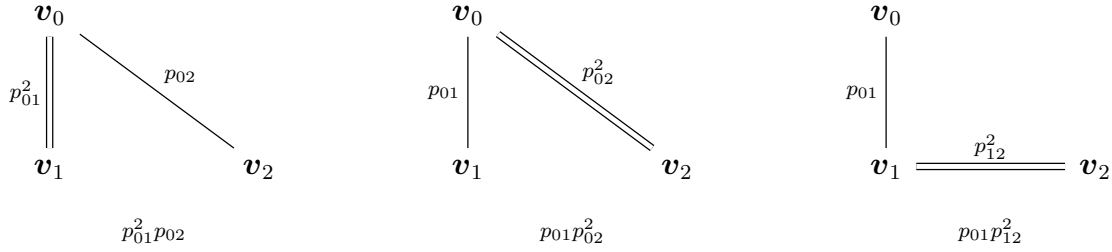


Figura 3.4. Algunos árboles generadores de K_3 , cada uno con un ciclo de longitud 2.

Más aún, el último término del numerador de $G_2(\Lambda)$ en (3.15) le asociamos el ciclo de longitud 3, con etiquetas p_{01} , p_{02} y p_{12} , el cual se muestra en la siguiente figura:

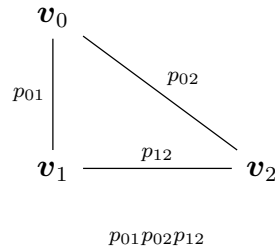


Figura 3.5. Ciclo de longitud 3.

En consecuencia, al numerador de $G_2(\Lambda)$ le podemos asociar a los 6 primeros términos los árboles generadores con un ciclo de longitud 2 de K_3 y al último término el ciclo de longitud 3. De ahí que

$$G_2(\Lambda) = \frac{C_2 + 4C_3}{24\Delta^{3/2}}, \quad (3.16)$$

donde C_2 denota la suma de los términos obtenidos al multiplicar las etiquetas de los árboles generadores de K_3 , a los cuales se les ha añadido una arista para formar un ciclo de longitud 2 y C_3 denota la multiplicación de las aristas de un ciclo de longitud 3, es decir, $p_{01}p_{02}p_{03}$.

3.3 Constante de cuantización para lattices en dimensión 3

Es importante destacar que dado un lattice en $\mathbb{R}^3$ siempre es posible asociarle una superbase obtusa. En [5] Conway y Sloane demuestran que todo lattice 3-dimensional es de Tipo I, además muestran que hay cinco formas de la celda de Voronoi, siendo una de ellas primitiva, y corresponde a un octaedro truncado.

Así las cosas, sea Λ un lattice 3-dimensional y supongamos que $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una superbase obtusa estricta del lattice. Además, sea $(y_0, y_1, y_2, y_3)^{tr} = (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{t}, \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{t}, \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{t}, \mathbf{v}_3 \cdot$

$\mathbf{t})^{tr}$ las $\mathbf{y}$ -coordenadas aumentadas de $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$, dado que $\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = 0$ entonces, $y_0 + y_1 + y_2 + y_3 = 0$.

Dada la importancia de la celda de Voronoi $V(\mathbf{0})$ en el cálculo de la constante de cuantización de un lattice, es conveniente realizar una descripción de la celda, para ello nos apoyaremos en lo consignado en [9]. Primero, veamos cuáles son los vectores de Voronoi que definen dicha celda. En efecto, el Teorema 1.4.4 nos dice que los vectores de Voronoi del lattice son de la forma $\mathbf{v}_S = \sum_{i \in S} \mathbf{v}_i$, donde S es un subconjunto propio de $\{0, 1, 2, 3\}$, esto implica que tales vectores sean los siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_3, \quad \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_3, \quad \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \quad \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \\ \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \quad \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \quad \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

Sabemos que cada vector de Voronoi determina una cara 2-dimensional de $V(\mathbf{0})$ entonces, la celda de Voronoi tiene 14 caras 2-dimensionales. Denotemos por F_S la 2-cara de $V(\mathbf{0})$ dirigida por el vector $\mathbf{v}_S$, siendo S un subconjunto propio de $\{0, 1, 2, 3\}$. La siguiente lista muestra las 2-caras correspondientes a los vectores de Voronoi descritos anteriormente:

$$\begin{aligned} F_0, \quad F_1, \quad F_2, \quad F_3, \quad F_{01}, \quad F_{02}, \quad F_{03}, \quad F_{12}, \quad F_{13}, \quad F_{23}, \\ F_{012}, \quad F_{013}, \quad F_{023}, \quad F_{123}. \end{aligned}$$

Análogamente a lo desarrollado en dimensión 2, si F es una cara 2-dimensional de $V(\mathbf{0})$ determinada por el vector de Voronoi $\mathbf{v}$, el punto $\mathbf{t} \in F$ satisface $\mathbf{t} = \frac{1}{2}\mathbf{v} + \mathbf{h}$, con $\mathbf{h} \perp \mathbf{v}$, de ahí que

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}N(\mathbf{v}). \quad (3.17)$$

Ahora, si $i \ j \ k \ l$ es un reordenamiento de $0 \ 1 \ 2 \ 3$, por (3.17) los puntos $\mathbf{t}$ de la cara F_i cumplen la siguiente condición $\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_i = \frac{1}{2}N(\mathbf{v}_i)$. Luego, podemos inferir que las $\mathbf{y}$ -coordenadas aumentadas de $\mathbf{P}_{ijkl}$ satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ik} + p_{il}) \\ y_i + y_j &= \frac{1}{2}(p_{ik} + p_{il} + p_{jk} + p_{jl}) \\ y_i + y_j + y_k &= \frac{1}{2}(p_{il} + p_{jl} + p_{kl}) \\ y_l &= \frac{1}{2}(-p_{il} - p_{jl} - p_{kl}). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Así, las $\mathbf{y}$ -coordenadas aumentadas del vértice $\mathbf{P}_{ijkl}$ son:

$$\begin{aligned} y_i &= \frac{1}{2}(p_{ij} + p_{ik} + p_{il}) \\ y_j &= \frac{1}{2}(-p_{ij} + p_{jk} + p_{jl}) \\ y_k &= \frac{1}{2}(-p_{ik} - p_{jk} + p_{kl}) \\ y_l &= \frac{1}{2}(-p_{il} - p_{jl} - p_{kl}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Sea $\bar{S} = \{0, 1, 2, 3\} \setminus S$, entonces las 2-caras F_S y $F_{\bar{S}}$ son opuestas respecto al origen. Más aún, podemos notar que las *caras vecinas o adyacentes* de F_i , es decir, con las que comparte una arista son las caras $F_{ij}, F_{ik}, F_{il}, F_{ijk}, F_{ijl}$ y F_{ikl} . En consecuencia las facet del tipo F_i y sus opuestas son hexágonos. Ahora, con respecto a la cara F_{ij} vemos que sus caras vecinas son F_i, F_j, F_{ijk} y F_{ijl} , es decir que las caras del tipo F_{ij} y sus opuestas son cuadriláteros.

Sabemos que un vértice de la celda está definido por la intersección de tres 2-caras, las cuales son vecinas dos a dos. Por consiguiente, si P_{ijkl} denota un vértice de $V(\mathbf{0})$, donde $i j k l$ es un reordenamiento de 0 1 2 3 entonces, dicho vértice está definido por la intersección de las caras F_i, F_{ij} y F_{ijk} .

En resumen, vemos que para cada permutación de $\{0, 1, 2, 3\}$ se tiene un vértice de la celda de Voronoi, es decir, $V(\mathbf{0})$ está compuesto por 24 vértices, además de tener 8 caras hexagonales y 6 en forma de cuadrilátero. Por lo tanto, para un lattice 3-dimensional Λ , su celda de Voronoi es un octaedro truncado o permutoedro Π_3 . En la Figura 3.6 se muestra el etiquetamiento tanto de los vértices como de las caras de la celda de Voronoi.

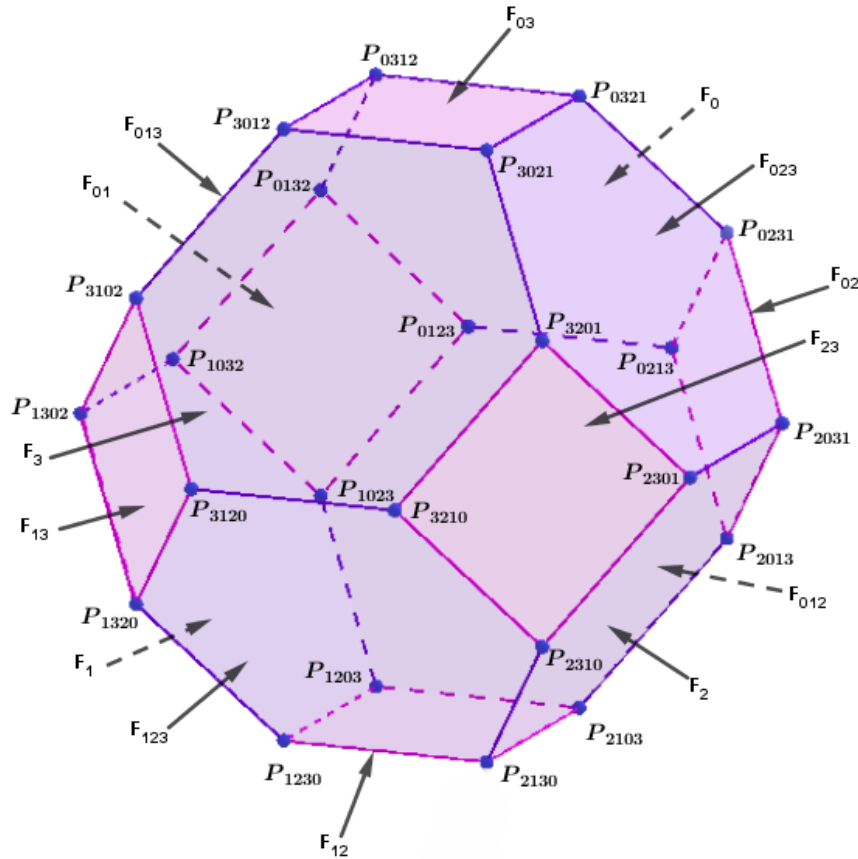


Figura 3.6. Etiquetamiento de la celda de Voronoi en dimensión 3.

De otro lado, si consideramos la matriz de Gram del lattice, tenemos que dicha matriz es de

la forma:

$$A = \begin{pmatrix} p_{01} + p_{12} + p_{13} & -p_{12} & -p_{13} \\ -p_{12} & p_{02} + p_{12} + p_{23} & -p_{23} \\ -p_{13} & -p_{23} & p_{03} + p_{13} + p_{23} \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Luego, su determinante está dado por:

$$\begin{aligned} \Delta = & p_{01}p_{02}p_{03} + p_{01}p_{02}p_{13} + p_{01}p_{02}p_{23} + p_{01}p_{03}p_{12} + p_{01}p_{03}p_{23} + p_{01}p_{12}p_{13} \\ & + p_{01}p_{12}p_{23} + p_{01}p_{13}p_{23} + p_{02}p_{03}p_{12} + p_{02}p_{03}p_{13} + p_{02}p_{12}p_{13} + p_{02}p_{12}p_{23} \\ & + p_{02}p_{13}p_{23} + p_{03}p_{12}p_{13} + p_{03}p_{12}p_{23} + p_{03}p_{13}p_{23}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

El procedimiento que vamos a llevar a cabo está basado en lo desarrollado por Barnes y Sloane en [9]. Sea Λ un lattice 3-dimensional, con superbase obtusa estricta $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Nuestro objetivo es hallar la fórmula de la constante de cuantización para lattices de tipo I en función de sus parámetros de Selling. Con el fin de realizar esto, debemos calcular el segundo momento no normalizado de la celda de Voronoi centrada en el origen $V(\mathbf{0})$, así pues, primero realizaremos una partición en simplex de la celda de Voronoi.

En efecto, dado que la celda es un octaedro truncado (Figura 3.6) entonces, si a cada cara hexagonal la dividimos en 6 triángulos que tienen como punto en común el centro de la cara, y además unimos dichos triángulos con el origen, obtenemos 6 tetraedros con respecto a una cara. Luego, realizando el mismo procedimiento a las otras caras, se determina que hay 48 tetraedros generados por las caras hexagonales.

Ahora, si a cada cara en forma de cuadrilátero la dividimos en cuatro triángulos, que tienen como punto en común el centro de la cara, así, junto con el origen y los triángulos tendremos 4 tetraedros en cada cara. En consecuencia, las caras con dicha forma generan 24 tetraedros. Por lo tanto, en la celda de Voronoi centrada en el origen hay en total 72 tetraedros.

Para visualizar el procedimiento del cálculo de $G(\Lambda)$, en particular, vamos a considerar la cara hexagonal F_1 y sea $\mathbf{m}_1$ el centro de F_1 . Uno de los seis tetraedros que se forman por la cara F_1 es el que tiene vértices $\mathbf{0}, \mathbf{m}_1, \mathbf{P}_{1203}$ y $\mathbf{P}_{1230}$, el cual lo denotaremos por T_1 . Veamos cuáles son las $\mathbf{y}$ -coordenadas de tales vértices. En efecto, las $\mathbf{y}$ -coordenadas de $\mathbf{0}$ son $(0, 0, 0)^{tr}$; en el caso de $\mathbf{m}_1$, podemos ver que $\mathbf{m}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1$, y dado que las $\mathbf{y}$ -coordenadas aumentadas de $\mathbf{v}_1$ son $(-p_{01}, p_{01} + p_{12} + p_{13}, -p_{12}, -p_{13})^{tr}$, inferimos que las de $\mathbf{m}_1$ son $\frac{1}{2}(-p_{01}, p_{01} + p_{12} + p_{13}, -p_{12}, -p_{13})^{tr}$.

Ahora, de (3.19) deducimos que las $\mathbf{y}$ -coordenadas aumentadas del vértice $\mathbf{P}_{1203}$ son:

$$\frac{1}{2}(-p_{01} - p_{02} + p_{03}, p_{01} + p_{12} + p_{13}, p_{02} - p_{12} + p_{23}, -p_{03} - p_{13} - p_{23})^{tr}.$$

Además, que las $\mathbf{y}$ -coordenadas aumentadas de $\mathbf{P}_{1230}$ son:

$$\frac{1}{2}(-p_{01} - p_{02} - p_{03}, p_{01} + p_{12} + p_{13}, p_{02} - p_{12} + p_{23}, p_{03} - p_{13} - p_{23})^{tr}.$$

De la relación que hay entre $\mathbf{m}_1$ y $\mathbf{v}_1$ resulta sencillo inferir que la norma de $\mathbf{m}_1$ es

$$N(\mathbf{m}_1) = \frac{1}{4}(p_{01} + p_{12} + p_{13}).$$

De otro lado, de la Proposición 1.11 obtenemos que la norma de un punto $\mathbf{t}$ del lattice la podemos expresar en términos de sus $\mathbf{y}$ -coordenadas, y está dada por:

$$N(\mathbf{t}) = \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^3 \Delta_{0i} y_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (\Delta_{0i} + \Delta_{0j} - \Delta_{ij}) y_i y_j \right). \quad (3.22)$$

Luego, por la fórmula anterior y las $\mathbf{y}$ -coordenadas de los vértices $\mathbf{P}_{1203}$, $\mathbf{P}_{1230}$ deducimos que sus normas son respectivamente

$$\begin{aligned} N(\mathbf{P}_{1203}) &= \frac{1}{4\Delta} (\Delta S_1 - K - 4\lambda_2 \lambda_3), \\ N(\mathbf{P}_{1230}) &= \frac{1}{4\Delta} (\Delta S_1 - K - 4\lambda_1 \lambda_3), \end{aligned}$$

donde $S_1 = p_{01} + p_{02} + p_{03} + p_{12} + p_{13} + p_{23}$, $K = \sum^{(4)} p_{01} p_{02} p_{03} (p_{12} + p_{13} + p_{23})$, $\lambda_1 = p_{01} p_{23}$, $\lambda_2 = p_{02} p_{13}$ y $\lambda_3 = p_{03} p_{12}$.

Para calcular el momento de inercia del tetraedro T_1 , es decir $I(T_1)$, sólo resta determinar la norma del baricentro $\mathbf{Ba}_1$ de T_1 , para ello veamos cuáles son sus $\mathbf{y}$ -coordenadas aumentadas. En efecto, tenemos que $\mathbf{Ba}_1 = \frac{1}{4}(\mathbf{m}_1 + \mathbf{P}_{1203} + \mathbf{P}_{1230})$, luego dichas coordenadas $(\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)^{tr}$ satisfacen

$$\hat{y}_0 = \frac{1}{4}(y_0 + y'_0), \quad \hat{y}_1 = \frac{1}{4}(y_1 + y'_1), \quad \hat{y}_2 = \frac{1}{4}(y_2 + y'_2) \quad \text{y} \quad \hat{y}_3 = \frac{1}{4}(y_3 + y'_3).$$

En consecuencia, las $\mathbf{y}$ -coordenadas aumentadas de $\mathbf{b}_1$ son:

$$\left(-\frac{3}{2}p_{01} - p_{02}, \frac{3}{2}(p_{01} + p_{12} + p_{13}), p_{02} - \frac{3}{2}p_{12} + p_{23}, -\frac{3}{2}p_{13} - p_{23} \right)^{tr}.$$

Por la fórmula dada en (3.22) y las $\mathbf{y}$ -coordenadas de $\mathbf{Ba}_1$ obtenemos la norma del baricentro. Dado que el momento de inercia de T_1 es de la forma $I(T_1) = \frac{4}{5}N(\mathbf{b}_1) + \frac{1}{20}(N(\mathbf{m}_1) + N(\mathbf{P}_{1203}) + N(\mathbf{P}_{1230}))$, entonces

$$\begin{aligned} I(T_1) &= \frac{1}{40\Delta} [\Delta(6p_{01} + 3p_{02} + p_{03} + 6p_{12} + 6p_{13} + 3p_{23}) - p_{01}p_{02}p_{03}(3p_{12} + p_{13} + p_{23}) \\ &\quad - 3p_{01}p_{02}p_{12}(p_{13} + p_{23}) - p_{01}p_{03}(p_{12}p_{13} + 4p_{12}p_{23} + p_{13}p_{23}) \\ &\quad - p_{02}p_{03}(4p_{12}p_{13} + p_{12}p_{23} + p_{13}p_{23}) - 3p_{12}p_{13}p_{23}(p_{01} + p_{02} + p_{03})]. \end{aligned}$$

A continuación, calculemos el volumen del tetraedro T_1 . Para ello, consideremos el hecho de que el volumen de un tetraedro T de la celda de Voronoi se puede expresar como:

$$\text{vol}(T) = \frac{1}{6\Delta^{1/2}} |\det(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3)|,$$

donde $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{Y}_2$ y $\mathbf{Y}_3$ son las $\mathbf{y}$ -coordenadas de los vértices de T . Entonces, utilizando las $\mathbf{y}$ -coordenadas de los vértices de T_1 se infiere que

$$\text{vol}(T_1) = \frac{1}{24\Delta^{1/2}} p_{03}(p_{02} + p_{23})(p_{01} + p_{12} + p_{13}).$$

Queremos calcular el segundo momento no normalizado respecto al origen de la celda de Voronoi, es decir $U(V(\mathbf{0}))$. Ya sabemos que tenemos 72 símplex de la celda, entonces para calcular $U(V(\mathbf{0}))$, debemos de calcular el segundo momento no normalizado de cada símplex y haciendo uso de 3.7 podremos calcular $U(V(\mathbf{0}))$.

Además, dado que el volumen de $V(\mathbf{0})$ es $\Delta^{1/2}$, de (3.3) concluimos que la constante de cuantización de la celda de Voronoi centrada en el origen es:

$$G(V(\mathbf{0})) = \frac{U(V(\mathbf{0}))}{3\Delta^{5/6}}.$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.3.1. (*Barnes-Sloane*). Sean $p_{ij} = -\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$, con $0 \leq i < j \leq 3$ los parámetros de Selling asociados a una superbase obtusa de un lattice 3-dimensional Λ , y sean

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum^{(4)} p_{01}p_{02}p_{03} + \sum^{(3)} p_{01}p_{23}(p_{02} + p_{03} + p_{12} + p_{13}) \\ S_1 &= p_{01} + p_{02} + p_{03} + p_{12} + p_{13} + p_{23} \\ S_2 &= p_{01}p_{02}p_{13}p_{23} + p_{01}p_{03}p_{12}p_{23} + p_{02}p_{03}p_{12}p_{13} \\ K &= \sum^{(4)} p_{01}p_{02}p_{03}(p_{12} + p_{13} + p_{23}). \end{aligned}$$

Entonces, la constante de cuantización de Λ es:

$$G_3(\Lambda) = \frac{\Delta S_1 + 2S_2 + K}{36\Delta^{4/3}}. \quad (3.23)$$

Es importante mencionar que la expresión de $G_3(\Lambda)$ dada en (3.23), también se puede expresar en términos de los árboles generadores del grafo K_4 , donde éste último tiene como vértices los elementos de la superbase y sus aristas etiquetadas con los parámetros de Selling, así p_{ij} denota la arista conformada por los vértices $\mathbf{v}_i$ y $\mathbf{v}_j$, siendo $0 \leq i < j \leq 3$.

El grafo K_4 lo podemos observar en la Figura 3.7. Dicho grafo completo tiene 16 árboles generadores, y son de cuatro tipos, los cuales se muestran en la Figura 3.8, donde, para cada tipo de árbol generador hay 4 de ellos.

Por otro lado, al expandir el numerador de la constante de cuantización para lattices 3-dimensionales, dada en (3.23), tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} & p_{01}^2 p_{02} p_{03} + p_{01} p_{02}^2 p_{03} + p_{01} p_{02} p_{03}^2 + p_{01}^2 p_{03} p_{12} + p_{02}^2 p_{03} p_{12} + p_{01} p_{03}^2 p_{12} + p_{02} p_{03}^2 p_{12} + p_{01} p_{03} p_{12}^2 + \\ & p_{02} p_{03} p_{12}^2 + p_{01}^2 p_{02} p_{13} + p_{01} p_{02}^2 p_{13} + p_{02}^2 p_{03} p_{13} + p_{02} p_{03}^2 p_{13} + p_{02} p_{03} p_{13}^2 + p_{01}^2 p_{12} p_{13} + p_{02}^2 p_{12} p_{13} + p_{03}^2 p_{12} p_{13} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& p_{01}p_{12}^2p_{13} + p_{02}p_{12}^2p_{13} + p_{03}p_{12}^2p_{13} + p_{01}p_{02}p_{13}^2 + p_{02}p_{03}p_{13}^2 + p_{01}p_{12}p_{13}^2 + p_{02}p_{12}p_{13}^2 + p_{03}p_{12}p_{13}^2 + \\
& p_{01}^2p_{02}p_{23} + p_{01}p_{02}^2p_{23} + p_{01}^2p_{03}p_{23} + p_{01}p_{03}^2p_{23} + p_{01}^2p_{12}p_{23} + p_{02}^2p_{12}p_{23} + p_{03}^2p_{12}p_{23} + p_{01}p_{12}^2p_{23} + \\
& p_{02}p_{12}^2p_{23} + p_{03}p_{12}^2p_{23} + p_{01}^2p_{13}p_{23} + p_{02}^2p_{13}p_{23} + p_{03}^2p_{13}p_{23} + p_{01}p_{13}^2p_{23} + p_{02}p_{13}^2p_{23} + p_{03}p_{13}^2p_{23} + \\
& p_{01}p_{02}p_{23}^2 + p_{01}p_{03}p_{23}^2 + p_{01}p_{12}p_{23}^2 + p_{02}p_{12}p_{23}^2 + p_{03}p_{12}p_{23}^2 + p_{01}p_{13}p_{23}^2 + p_{02}p_{13}p_{23}^2 + p_{03}p_{13}p_{23}^2 + \\
& 4p_{01}p_{02}p_{03}p_{12} + 4p_{01}p_{02}p_{03}p_{13} + 4p_{01}p_{02}p_{12}p_{13} + 4p_{01}p_{03}p_{12}p_{13} + 4p_{01}p_{02}p_{03}p_{23} + 4p_{01}p_{02}p_{12}p_{23} + \\
& 4p_{02}p_{03}p_{12}p_{23} + 4p_{01}p_{03}p_{13}p_{23} + 4p_{02}p_{03}p_{13}p_{23} + 4p_{01}p_{12}p_{13}p_{23} + 4p_{02}p_{12}p_{13}p_{23} + 4p_{03}p_{12}p_{13}p_{23} + \\
& 6p_{02}p_{03}p_{12}p_{13} + 6p_{01}p_{03}p_{12}p_{23} + 6p_{01}p_{02}p_{13}p_{23}.
\end{aligned}$$

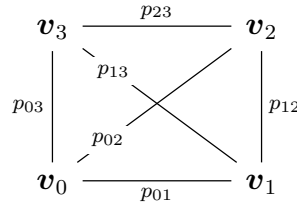


Figura 3.7. El grafo completo K_4 .

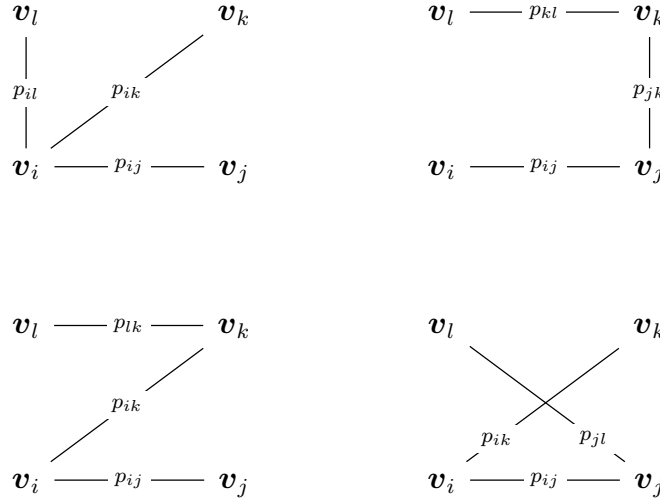


Figura 3.8. Tipos de árboles generadores de K_4 . Variando i, j, k, l en $\{0, 1, 2, 3\}$.

Es importante mencionar que la expresión anterior generada al expandir el numerador de la constante de cuantización, está conformada de términos que podemos relacionar con los árboles generadores de K_4 . Por ejemplo, el término $p_{01}^2p_{02}p_{03}$, lo relacionamos con un árbol generador junto a un ciclo de longitud 2, el cual vemos a continuación:

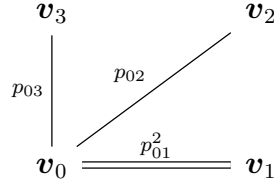


Figura 3.9. Árbol generador de K_4 con un ciclo de longitud 2, asociado al término $p_{01}^2 p_{02} p_{03}$.

En consecuencia, hay en el numerador de $G_3(\Lambda)$ 48 términos que podemos asociarle un tipo de árbol generador dado en la Figura (3.8), al cual se le ha adicionado un ciclo de longitud 2. A la suma de los 48 términos la denotaremos por C_2 .

También, en el numerador de G_3 existen otros términos que podemos relacionar con los árboles generadores de K_4 junto a un ciclo de longitud 3. Por ejemplo, el término $p_{01} p_{02} p_{03} p_{12}$ lo asociamos con el grafo que se muestra a continuación:

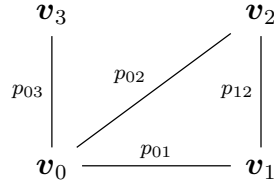


Figura 3.10. Árbol generador de K_4 con un ciclo de longitud 3, asociado al término $p_{01} p_{02} p_{03} p_{12}$.

Así, a la suma de los 12 términos que hacen parte del numerador de $G_3(\Lambda)$ y que le corresponde a cada uno un árbol generador de K_4 junto a un ciclo de longitud 3, se denotará por C_3 . Más aún, existen otros 3 términos en el numerador de la fórmula dada para $G_3(\Lambda)$ que podemos identificar con un árbol generador junto a un ciclo de longitud 4, por ejemplo a $p_{01} p_{02} p_{13} p_{23}$ lo relacionamos con el grafo:

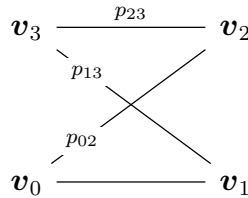


Figura 3.11. Árbol generador de K_4 con un ciclo de longitud 4, asociado a $p_{01} p_{02} p_{13} p_{23}$.

Por lo tanto, a la suma de los 3 términos que identificamos con un árbol generador junto a

un ciclo de longitud 4 la denotamos por C_4 . Así las cosas, a la expresión dada en (3.23), la podemos expresar de la siguiente forma:

$$G_3(\Lambda) = \frac{C_2 + 4C_3 + 6C_4}{36\Delta^{4/3}}, \quad (3.24)$$

donde C_2 , C_3 y C_4 son como se definieron anteriormente.

3.4 Constante de cuantización para lattices de Tipo I en dimensión 4

Es importante mencionar que a diferencia de los lattices en dimensiones 2 y 3, a quienes siempre se les puede asociar una superbase obtusa, es decir, son lattices de Tipo I; en el caso de los lattices 4-dimensionales existen tres lattices de tipo primitivos, a los cuales le corresponden 52 formas de celdas de Voronoi. En este trabajo solamente nos enfocaremos en los lattices de primer tipo.

El procedimiento del cálculo de la constante de cuantización para lattices de Tipo I 4-dimensionales que se mostrará a continuación está basado en lo establecido en [7]. Así las cosas, vamos a suponer que al lattice Λ le asociamos una superbase obtusa $\{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, además como vimos en las dimensiones 2 y 3, para calcular $G(\Lambda)$ es importante describir la celda de Voronoi centrada en el origen $V(\mathbf{0})$.

Del Teorema 1.4.4 podemos inferir que los vectores de Voronoi del lattice Λ son de la forma $\mathbf{v}_S = \sum_{i \in S} \mathbf{v}_i$, siendo S un subconjunto propio de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. De ahí que sean 30 vectores de Voronoi del lattice, los que definen la celda. Ahora, con respecto a las 3-caras o facets F_S de $V(\mathbf{0})$, sabemos que cada facet queda determinada por un vector de Voronoi, es decir, son en total 30 facets las que constituyen a $V(\mathbf{0})$.

También, se tiene que dos facets F y F' de la celda de Voronoi $V(\mathbf{0})$ son *vecinas*, si su intersección es una 2-cara. A los vectores de Voronoi que las dirigen los llamaremos *vectores vecinos*. De lo realizado en las dimensiones 2 y 3, se pudo observar que dos caras F_S y F_T son vecinas si se cumple que $S \subset T$ o $T \subset S$. Para los lattices 4-dimensionales de Tipo I, también se cumple este hecho, el cual describimos a continuación.

Lema 3.4.1. *Sea Λ un lattice 4-dimensional de Tipo I, y $B = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ una superbase obtusa para Λ . Sean F_S y F_T dos facets de la celda de Voronoi $V(\mathbf{0})$ de Λ , entonces*

$$F_S, F_T \text{ son vecinas si y sólo si } S \subset T \text{ ó } T \subset S. \quad (3.25)$$

Demostración. Por la definición anterior, además teniendo en cuenta que a cada cara se le asocia un vector de Voronoi, y a éste último le corresponde un subconjunto propio de $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, deducimos lo que se quiere demostrar. $\square$

Por el anterior Lema, se puede inferir que la celda de Voronoi $V(\mathbf{0})$ tiene 120 vértices, 240 aristas, las 10 facets del tipo F_i son octaedros truncados o permutoedros y las 20 facets del tipo F_{ij} son prismas hexagonales, es decir, $V(\mathbf{0})$ es combinatoriamente equivalente al permutoedro 4-dimensional Π_4 .

Ahora, suponiendo que $p_{ij} \neq 0$, el procedimiento para calcular $G(V(\mathbf{0}))$ es el siguiente:

1. Se realiza una partición Q de $V(\mathbf{0})$ en 1440 símplexes 4-dimensionales. En efecto, para construir la partición de la celda de Voronoi $V(\mathbf{0})$ debemos tener en cuenta que un 4-símplex queda completamente determinado por sus vértices, los cuales son 5. La manera en cómo se escogen dichos vértices la describiremos a continuación.

El origen $\mathbf{0}$ siempre será un vértice, luego elegimos 2 vértices adyacentes $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ de $V(\mathbf{0})$, lo que equivale a seleccionar una de las 240 aristas de la celda. A continuación, elegimos una cara 2-dimensional de la celda que contenga a dicha arista, es decir, tendremos que escoger entre las tres caras 2-dimensionales que contienen a la arista; así, después de seleccionada la cara 2-dimensional realizamos el promedio de sus vértices, el cual será otro vértice del símplex y lo denotaremos por $\mathbf{P}_3$.

Podemos notar que la 2-cara seleccionada con anterioridad está contenida en dos facets, así que el último vértice $\mathbf{P}_4$ será el centro de la facet elegida. La figura 3.12 muestra un 4-símplex de la partición. En consecuencia, por medio de este proceso construimos una partición de $V(\mathbf{0})$, la cual genera $240 \times 3 \times 2 = 1440$ símplexes.

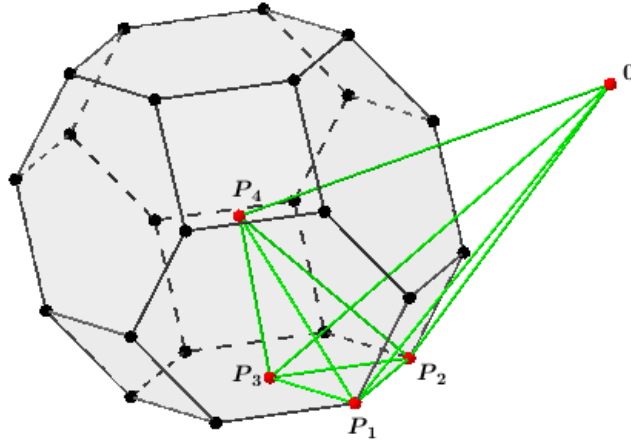


Figura 3.12. Vértices de un 4-símplex.

2. Calculamos el volumen de cada uno de los símplex de la partición Q . Sea Δ el determinante del lattice y T un 4-símplex con vértices $\mathbf{0}, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4$. Si $\mathbf{0}, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3, \mathbf{Y}_4$ son las respectivas $\mathbf{y}$ -coordenadas de los vértices de T , por (3.5) deducimos que el volumen del símplex en términos de las $\mathbf{y}$ -coordenadas de sus vértices lo podemos expresar

de la siguiente forma:

$$\text{vol}(T) = \frac{1}{24\sqrt{\Delta}} |\det(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3, \mathbf{Y}_4)|. \quad (3.26)$$

3. Hallamos el segundo momento no normalizado de $V(\mathbf{0})$. Dado que los vértices del 4-símplex T son $\mathbf{0}, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4$, tenemos que el baricentro del símplex es $\mathbf{Ba} = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 \mathbf{P}_i$, luego por (3.6) inferimos que el momento de inercia de T es:

$$I(T) = \frac{5}{6} \|\mathbf{b}\|^2 + \frac{1}{30} \sum_{i=0}^4 \|\mathbf{P}_i\|^2. \quad (3.27)$$

Por consiguiente, utilizando (3.7) hallamos el segundo momento no normalizado de $V(\mathbf{0})$, es decir, $U(V(\mathbf{0}))$.

4. Finalmente, el segundo momento normalizado de $V(\mathbf{0})$ es calculado reemplazando $U(V(\mathbf{0}))$ y el volumen de la celda en (3.3).

Por lo tanto, teniendo en cuenta las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum^{(10)} p_{ij} \\ S_2 &= \sum^{(60)} p_{ij} p_{jk} p_{kl} p_{lm} p_{mj} + \sum^{(12)} p_{ij} p_{jk} p_{kl} p_{lm} p_{mi} \\ K &= \sum^{(30)} p_{ij} p_{jk} p_{ki} p_{il} p_{im} + \sum^{(60)} p_{ij} p_{jk} p_{ki} p_{il} p_{jm} + \sum^{(60)} p_{ij} p_{jk} p_{ki} p_{il} p_{lm} \\ &\quad + \sum^{(12)} p_{ij} p_{jk} p_{kl} p_{lm} p_{mi}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

donde el índice sobre la sumatoria cuenta la cantidad de términos de la misma, utilizando la relación (3.7) y con la ayuda de algoritmos computacionales se muestra que el segundo momento no normalizado de la celda de Voronoi está dado por la siguiente expresión:

$$U(V(\mathbf{0})) = \frac{\Delta S_1 + 2S_2 + K}{12\Delta^{1/2}}. \quad (3.29)$$

Ahora, reemplazando lo anterior en (3.3) y el volumen del lattice $\Delta^{1/2}$, se establece el siguiente resultado.

Teorema 3.4.2. *(Constante de cuantización para lattices de Tipo I). Sea Λ un lattice de Tipo I con parámetros de Selling reducidos $\rho = [p_{01}, p_{02}, \dots, p_{24}, p_{34}]$, y sean Δ el determinante del lattice, S_1 , S_2 y K definidos como en (3.28). Entonces, la constante de cuantización de Λ está dada por:*

$$G_4(\Lambda) = \frac{\Delta S_1 + 2S_2 + K}{48\Delta^{5/4}}. \quad (3.30)$$

De nuevo, como lo trabajado en dimensiones 2 y 3, para este caso, vamos a considerar el grafo completo K_5 asociado al lattice y mostraremos otra forma de expresar $G_4(\Lambda)$, la cual está dada en términos de los ciclos asociados a los árboles generadores de K_5 . Como hemos estado viendo, el grafo completo lo podemos representar haciendo uso de los elementos de una superbase obtusa y los parámetros de Selling (ver Figura 3.13).

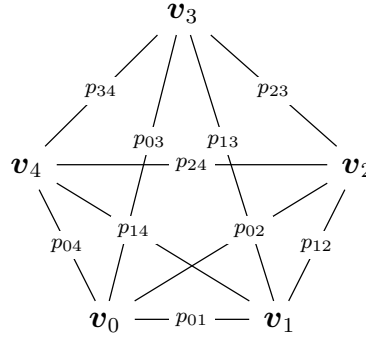


Figura 3.13. El grafo completo K_5 asociado a un lattice 4-dimensional.

Además, por el Teorema 1.2.6 el grafo completo K_5 tiene 125 árboles generadores, que son del tipo:

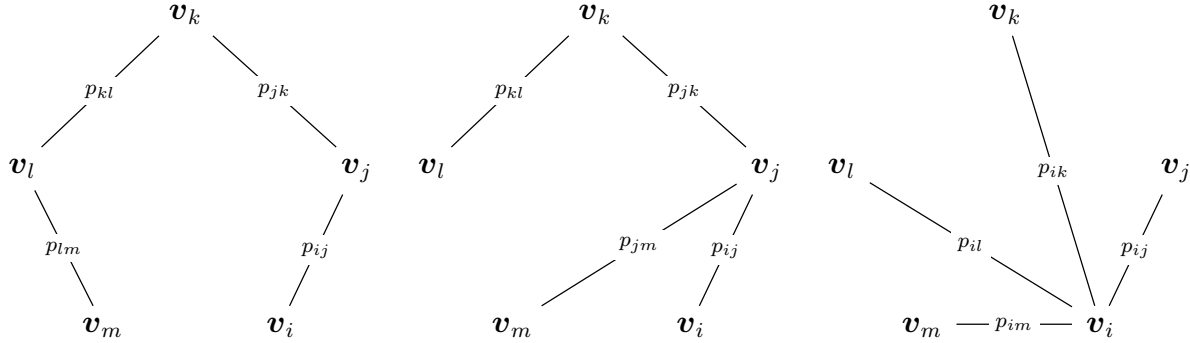


Figura 3.14. Árboles generadores de K_5 .

Análogamente a lo realizado en las dimensiones 2 y 3, podemos asociar los árboles generadores del grafo completo K_5 a los términos que conforman el numerador de la fórmula de $G_4(\Lambda)$ dada en (3.30). De ahí que la fórmula de la constante de cuantización para lattices de Tipo I en dimensión 4 se pueda expresar de la forma:

$$G_4(\Lambda) = \frac{C_2 + 4C_3 + 6C_4 + 8C_5}{48\Delta^{5/4}}, \quad (3.31)$$

donde C_i representa la suma de los términos asociados a un árbol generador de K_5 junto a un ciclo de longitud i .

3.5 Constante de cuantización para lattices de Tipo I en dimensión 5

Para los lattices de Tipo I en dimensión 5 en un trabajo conjunto con el director de este trabajo investigación, el profesor Juan Miguel Velásquez y Daniel Tovar, donde dicho trabajo se encuentra consignado en [8], se logró establecer que la constante de cuantización para lattices de tipo I en dimensión 5 está dada por

$$G_5(\Lambda) = \frac{C_2 + 2(2C_3 + 3C_4 + 4C_5 + 5C_6)}{60\Delta^{6/5}},$$

donde C_i representa la suma de todos los términos obtenidos al multiplicar las etiquetas de los grafos que son árboles generadores del grafo completo K_6 (ver Figura (3.15)) a los cuales se les ha añadido una arista para formar un ciclo de longitud i .

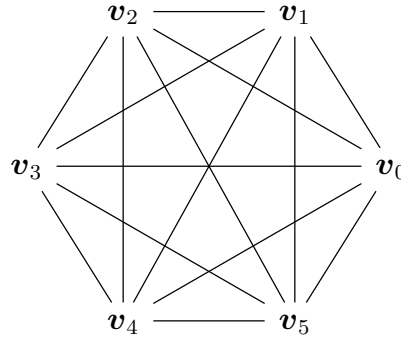


Figura 3.15. Grafo completo K_6 .

La anterior fórmula fue posible comprobarse gracias al siguiente Teorema 3.5.1 que permite calcular el segundo momento no normalizado de la celda de Voronoi, el cual se deduce considerando 2.34 y el Teorema 2.4.1. También, dicha comprobación fue posible gracias a los algoritmos realizados en SageMath, los cuales se pueden encontrar en el archivo Pruebaconjetura.ipynb, consignado en [11].

Teorema 3.5.1. *Sea $\Delta(\sigma, \tau)$ un símplex de la partición de una celda de Voronoi asociada a un lattice de primer tipo, y sea $R = \{r_i(\Delta(\sigma, \tau)) : i \in \{1, \dots, n\}\}$ el conjunto de símplexes obtenidos mediante las transformaciones r_i de la Definición (2.4.2). Entonces, la suma de los segundos momentos no normalizados de los símplexes en R está dada por:*

$$\sum_{\delta \in R} U(\delta) = \frac{1}{4(n+2)!\Delta^{1/2}} \left(\sum_{k=1}^n (n+1-k)(n+2-k)e_{N^k}^2 \right) \prod_{k=1}^n p_{N^k}, \quad (3.32)$$

donde N^k es el k -ésimo nodo insertado en el árbol binario de búsqueda $T(\sigma, \tau)$.

En esta instancia se ha establecido un método para calcular la fórmula de la constante de cuantización $G_n(\Lambda)$ en un lattice n -dimensional de Tipo I, con $2 \leq n \leq 5$, el cual se ha llevado a cabo haciendo uso de una partición en símplex de la celda de Voronoi. Con los resultados obtenidos se ha podido deducir $G_n(\Lambda)$ en términos de ciclos, esto es:

$$G_n(\Lambda) = \frac{C_{2,n} + 2 \sum_{k=2}^n k C_{k+1,n}}{12n\Delta^{\frac{n+1}{n}}}, \quad (3.33)$$

donde $C_{i,n}$ representa la suma de todos los términos obtenidos al multiplicar las etiquetas de los árboles generadores que se le ha añadido una arista para formar un ciclo de longitud i .

Es importante mencionar que la anterior fórmula por ahora, sólo es válida para lattices 5-dimensionales de Tipo I, por consiguiente, es pertinente preguntarnos ¿si para los lattices de Tipo I en dimensión 6 es posible establecer una fórmula que depende de los árboles generadores del grafo completo K_7 , tal que al añadirles una arista se forma un ciclo?

La pregunta anterior no fue posible resolverse dado que para un lattice 6-dimensional de primer tipo, los cálculos que se debían de realizar excedieron la capacidad de la computadora, sin embargo la teoría establecida da indicios que la fórmula también es válida para los lattices en cuestión.

Capítulo 4

Exploración numérica

Ya tenemos una fórmula para hallar la constante de cuantización de un lattice de primer tipo hasta dimensión 5; ahora, nuestro propósito es realizar una exploración numérica de la fórmula. Para llevar a cabo lo mencionado, estudiaremos algunas propiedades de G_n , esto con el fin de facilitar algunos cálculos.

4.1 Propiedades de la fórmula de la constante de cuantización para lattices Tipo I

Sabemos del capítulo anterior que para un lattice Tipo I en dimensiones $2 \leq n \leq 5$, la fórmula de la constante de cuantización se puede expresar de la forma:

$$G_n(\Lambda) = \frac{C_{2,n} + 2 \sum_{k=2}^n k C_{k+1,n}}{12n \Delta^{\frac{n+1}{n}}}.$$

donde $C_{i,n}$ representa la suma de todos los términos obtenidos al multiplicar las etiquetas de los árboles generadores que se le ha añadido una arista para formar un ciclo de longitud i . Más aún, $G_n(\Lambda)$ es una función que depende de $\binom{n+1}{2}$ variables, que son los parámetros de Selling asociados al lattice Λ .

Ahora, sea $\alpha > 0$ y consideramos la homotecia del lattice Λ , es decir, $\alpha\Lambda$. Para este último lattice tenemos que $C_{i,n}(\alpha\Lambda) = \alpha^{2(n+1)} C_{i,n}(\Lambda)$ y por (1.8) inferimos $\Delta(\alpha\Lambda) = \alpha^{2n} \Delta(\Lambda)$, de ahí que $\Delta(\alpha\Lambda)^{\frac{n+1}{n}} = \alpha^{2(n+1)} \Delta(\Lambda)^{\frac{n+1}{n}}$; así $G_n(\alpha\Lambda)$ es:

$$\begin{aligned}
G_n(\alpha\Lambda) &= \frac{\alpha^{2(n+1)}C_{2,n} + \alpha^{2(n+1)}2 \sum_{k=2}^n kC_{k+1,n}}{12n\alpha^{2(n+1)}\Delta^{\frac{n+1}{n}}} \\
&= G_n(\Lambda)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.1.1. *Sea $\alpha > 0$, entonces $G_n(\Lambda) = G_n(\alpha\Lambda)$, es decir, la fórmula de la constante de cuantización es invariante bajo homotecias.*

4.2 Exploración del mínimo local de la fórmula de la constante de cuantización

Ahora, lo que sigue es realizar la búsqueda de mínimos locales en $G_n(\Lambda)$. Sabemos que $vol(\Lambda) = \sqrt{\Delta}$, además que el denominador de 3.33 depende del determinante Δ del lattice. Así, en primer lugar, para simplificar los cálculos, vamos a fijar el volumen del lattice n -dimensional Λ a una constante en particular.

El hecho de fijar el volumen de un lattice no altera la búsqueda de mínimos locales para un lattice arbitrario porque como vimos en la proposición 4.1.1, $G_n(\Lambda)$ es invariante bajo homotecias. Entonces, estudiar los lattices con un volumen en específico es considerar un representante de los lattices.

Por consiguiente, supongamos que el determinante del lattice satisface la condición $\Delta = k$, donde k es el número de árboles generadores del grafo completo K_{n+1} asociado al lattice, es decir, $k = (n+1)^{n-1}$. Dado que queremos hallar mínimos locales de $G_n(\Lambda)$ y además, estamos considerando el hecho de fijar el volumen del lattice entonces, para este estudio emplearemos el método de multiplicadores de Lagrange.

En efecto, nuestra restricción es la función $F = \Delta - k$ y la función lagrangiana a optimizar es $L = G_n(\Lambda) - lF$, donde esta última función depende de los parámetros de Selling del lattice y el parámetro l . Para entender como vamos a emplear el método de multiplicadores de Lagrange, en primer lugar vamos a considerar un lattice 2-dimensional.

Sea Λ un lattice 2-dimensional con parámetros de Selling p_{01}, p_{02} y p_{03} , entonces la función $F(p_{01}, p_{02}, p_{03}) = p_{01}p_{02} + p_{01}p_{12} + p_{02}p_{12} - 3$ es la restricción a considerar y la función lagrangiana a optimizar es

$$\begin{aligned}
L(p_{01}, p_{02}, p_{03}, l) &= p_{01}^2 p_{02} + p_{01} p_{02}^2 + p_{01}^2 p_{12} + 4p_{01} p_{02} p_{12} + p_{02}^2 p_{12} + p_{01} p_{12}^2 + p_{02} p_{12}^2 \\
&\quad - (p_{01} p_{02} + p_{01} p_{12} + p_{02} p_{12} - 3)l.
\end{aligned}$$

En consecuencia, al solucionar el sistema generado por dicho método, se obtienen cuatro soluciones, las cuáles son: $p_{01} = 1, p_{02} = 1, p_{12} = 1, l = 5$; $p_{01} = \sqrt{3}, p_{02} = \sqrt{3}, p_{12} = 0, l = 3\sqrt{3}$; $p_{01} = \sqrt{3}, p_{02} = 0, p_{12} = \sqrt{3}, l = 3\sqrt{3}$ y $p_{01} = 0, p_{02} = \sqrt{3}, p_{12} = \sqrt{3}, l = 3\sqrt{3}$.

Sin embargo, la solución que estamos buscando debe producir un mínimo local, así que, para localizar el punto, vamos a utilizar la matriz Hessiana H de L y el criterio para establecer extremos con una restricción en funciones de varias variables ¹.

Por consiguiente, tenemos que la matriz Hessiana para el caso 2-dimensional es:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & p_{02} + p_{12} & p_{01} + p_{12} & p_{01} + p_{02} \\ p_{02} + p_{12} & 2p_{02} + 2p_{12} & -l + 2p_{01} + 2p_{02} + 4p_{12} & -l + 2p_{01} + 4p_{02} + 2p_{12} \\ p_{01} + p_{12} & -l + 2p_{01} + 2p_{02} + 4p_{12} & 2p_{01} + 2p_{12} & -l + 4p_{01} + 2p_{02} + 2p_{12} \\ p_{01} + p_{02} & -l + 2p_{01} + 4p_{02} + 2p_{12} & -l + 4p_{01} + 2p_{02} + 2p_{12} & 2p_{01} + 2p_{02} \end{pmatrix}.$$

Luego, reemplazando los puntos críticos en la anterior matriz, y calculando los determinantes de las dos menores principales se concluye que el punto crítico en donde la función tiene un mínimo local es $p_{01} = 1, p_{02} = 1, p_{12} = 1, l = 5$. En consecuencia, se satisface la condición del criterio cuando el lattice 2-dimensional Λ tiene parámetros de Selling $p_{01} = p_{02} = p_{12} = 1$. Por lo tanto, el mínimo local para la fórmula de la constante de cuantización $G_2(\Lambda)$ bajo la restricción de fijar el volumen del lattice es $G_2(1, 1, 1)$.

Adicionalmente, podemos ver que al reemplazar el mínimo local en la fórmula de la constante de cuantización, obtenemos $G_2(1, 1, 1) \approx 0,080187537$, cuyo valor corresponde a lo establecido en la Tabla 1, con respecto al lattice A_2^* , el cual tiene parámetros de Selling $p_{01} = 1/3, p_{02} = 1/3, p_{12} = 1/3$ y produce el menor error cuadrático medio. Más aún, los valores de $G_2(1, 1, 1)$ y $G_2(1/3, 1/3, 1/3)$ coinciden porque los lattices asociados a dichos parámetros de Selling son equivalentes.

A continuación, vamos a realizar el proceso anterior para un lattice 3-dimensional. En este caso, el método de multiplicadores de Lagrange produce un sistema de siete ecuaciones y siete incógnitas, lo que hace dicho sistema difícil de solucionar, entonces la estrategia para obtener al menos un punto crítico es verificar si para lattices 3-dimensionales también se cumple, como el caso 2-dimensional, que los parámetro de Selling sean iguales, es decir, si se satisface $p_{01} = 1, p_{02} = 1, p_{03} = 1, p_{12} = 1, p_{13} = 1, p_{23} = 1$ es un punto crítico.

En efecto, en SageMath se realizó un algoritmo (el cuál se puede encontrar en MinimolocaldeG.ipynb [11]) para verificar que $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ es un punto crítico de $G_3(\Lambda)$, además de establecer que para dicho punto en cuestión se satisface el criterio de extremos con una

¹Sea $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sujeta a la restricción $g(\mathbf{x}) = 0$. La función Lagrangiana L está dada por $L(\mathbf{x}, l) = f(\mathbf{x}) - l g(\mathbf{x})$, donde su matriz Hessiana es la siguiente:

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - l \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} - l \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} - l \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} - l \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - l \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} - l \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} - l \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} - l \frac{\partial^2 g}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} - l \frac{\partial^2 g}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

La condición suficiente para que un punto crítico sea mínimo es que el determinante de las $(n-1)$ menores principales de la matriz Hessiana evaluadas en dicho punto sean negativas, es decir, si $\Delta_3 < 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 < 0, \dots$, entonces en el punto crítico la función tiene un mínimo local.

Además, si $\Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 > 0, \dots$, entonces en el punto crítico hay un máximo local de f .

restricción, dado que las cinco menores principales de la matriz Hessiana son negativas, esto último se comprobó utilizando otro algoritmo realizado en SageMath y también se encuentra en MinimolaldeG.ipynb [11].

En consecuencia, inferimos que $(1, 1, 1, 1, 1)$ produce un mínimo local de $G_3(\Lambda)$. De nuevo, al reemplazar dicho punto crítico en $G_3(\Lambda)$ obtenemos el valor dado en la Tabla 1, correspondiente al error cuadrático medio producido por el lattice A_3^* , cuyos parámetros de Selling cumplen la condición $p_{01} = p_{02} = p_{03} = p_{12} = p_{13} = p_{23} = 1/4$.

Ahora, análogamente a lo realizado en lattices de dimensión 2 y 3, comprobamos con algoritmos en SageMath que para los lattices 4-dimensionales de Tipo I, el punto $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ es un punto crítico del sistema generado por el método de multiplicadores de Lagrange, en donde se obtiene un mínimo local para la fórmula de la constante de cuantización.

Luego, al reemplazar el punto crítico en la fórmula obtenemos el valor de $G_4(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \approx 0,077558757$ (haciendo uso de la función definida en Valores-deG.ipynb [11]), el cual coincide con el valor presentado en la Tabla 1 con respecto al lattice A_4^* , cuyos parámetros de Selling son $p_{01} = p_{02} = p_{03} = p_{04} = p_{12} = p_{13} = p_{14} = p_{23} = p_{24} = p_{34} = 1/5$.

Es de aclarar que en la Tabla 1 se muestra que el lattice $D_4^* \cong D_4$ produce un menor error cuadrático medio en comparación a A_4^* , y esto se debe a que la fórmula utilizada para calcular el error cuadrático medio fue desarrollada sólo para lattices de Tipo I y D_4^* no es de primer tipo, así que no es raro tener otro lattice con un error cuadrático medio de menor valor al que produce un lattice de Tipo I.

Sin embargo, la fórmula en la que hemos estado trabajando, si nos permite calcular el valor de la constante de cuantización para el lattice A_4 , que es de Tipo I, cuyos parámetros de Selling son $p_{01} = 1, p_{02} = 0, p_{03} = 0, p_{04} = 1, p_{12} = 1, p_{13} = 0, p_{14} = 0, p_{23} = 1, p_{24} = 0, p_{34} = 1$, de donde obtenemos que $G_4(1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1) \approx 0,078019702$, cuyo valor es mayor al obtenido para el lattice A_4^* , que es un lattice de primer tipo.

Para finalizar, vamos a considerar los lattices de Tipo I en dimensión 5. En este punto, de nuevo, se reafirma el hecho de que solucionar el sistema que se genera al utilizar el método de multiplicadores de Lagrange, donde la función restricción es $F = \Delta - k$ y la función lagrangiana a optimizar es $L = G_n(\Lambda) - lF$, donde esta última función depende de los parámetros de Selling del lattice y el parámetro l , es un trabajo realmente difícil; así las cosas, como en los casos anteriores, sólo queda corroborar si $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ es un punto crítico del sistema.

Utilizando los algoritmos realizados en SageMath se puede concluir que dicho punto es un punto crítico del sistema y que además satisface el criterio para establecer extremos con una restricción en una función de varias variables, es decir, que en tal punto G_5 alcanza un mínimo. En consecuencia, el lattice, cuyos parámetros de Selling satisfacen $p_{ij} = 1$, con $0 \leq i \leq 5, 0 \leq j \leq 5$ y $i \neq j$, produce un error cuadrático medio, cuyo valor es menor con respecto a otros lattices de Tipo I.

En particular esto lo podemos comprobar si calculamos G_5 para el lattice A_5 , cuyos pa-

rámetros de Selling son $p_{01} = 1, p_{02} = 0, p_{03} = 0, p_{04} = 0, p_{05} = 1, p_{12} = 1, p_{13} = 0, p_{14} = 0, p_{15} = 0, p_{23} = 1, p_{24} = 0, p_{25} = 0, p_{34} = 1, p_{35} = 0, p_{45} = 1$ de ahí que $G_5(1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1) \approx 0,077647458$ sea el valor del error cuadrático medio para A_5 , como se muestra en la Tabla 1, y que además es mayor respecto al dado por $G_5(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \approx 0,076921949$, donde este último coincide con el valor dado por el lattice A_5^* , cuyos parámetros de Selling son $p_{ij} = 1/6$ con $0 \leq i \leq 5, 0 \leq j \leq 5$ y $i \neq j$.

Por lo tanto, hemos obtenido al menos un mínimo local de la función constante de cuantización $G_n(\Lambda)$, para los casos $n = 2, 3, 4, 5$, haciendo uso del método de multiplicadores de Lagrange, donde dicho mínimo ocurre en el punto crítico conformado por los parámetros de Selling del lattice, quienes tienen la característica de ser iguales a 1.

Por último, es importante mencionar que en dimensión 4 y 5, existen lattices con error cuadrático medio menor que el brindado por el lattice con parámetros de Selling iguales a 1, esto se debe a que la fórmula $G_n(\Lambda)$ está desarrollada en base a lattices de Tipo I y hay que recordar el hecho de la existencia de lattices que no son de primer tipo para las dimensiones mencionadas inicialmente.

Capítulo 5

Conclusiones

En este estudio, en conjunto con el profesor Juan Miguel Velásquez y Daniel Tovar se mostró que la fórmula de la constante de cuantización (3.33) para lattices Tipo I en términos de los ciclos asociados al grafo completo K_n , donde $n = 2, \dots, 5$, es válida. La comprobación se realizó haciendo uso de los resultados establecidos para llevar a cabo la partición en símplex de la celda de Voronoi.

La incorporación de una nueva partición en símplex de la celda hizo que dicha comprobación fuera posible para dimensión 5, dado que para dimensiones 2, 3 y 4, la partición de la celda estaba basada en los resultados desarrollados por Conway y Sloane en [9], y siguiendo el mismo proceso, la comprobación no fue viable. Para dimensión 5, considerar los árboles de búsqueda binarios permitió otra representación de un símplex, como también para su momento de inercia, volumen y segundo momento, esto hizo que los algoritmos sean útiles para comprobar la fórmula 3.33 hasta dimensión 5.

Un trabajo a futuro es validar la fórmula de $G_n(\Lambda)$ dada en 3.33 para al menos los lattices 6-dimensional de primer tipo, lo cual conlleva al mejoramiento del algoritmo Pruebaconjetura.ipynb en [11], implementado en SageMath, para comprobar que dicha fórmula es válida.

Ahora, otra manera para comprobar la veracidad de la fórmula 3.33 para una dimensión superior a 5, sería en la implementación de un mejor método para calcular la constante de cuantización de un lattice de Tipo I, el cual recae en la partición en símplex de la celda de Voronoi $V(\mathbf{0})$ o tal vez en brindar otra presentación del momento de inercia y el segundo momento de un símplex. Sin embargo, es importante mencionar que sin las expresiones dadas de dichos conceptos habría sido imposible verificar la fórmula para dimensión 5.

Por otro lado, se pudo observar que hallar mínimos locales de la fórmula dada para el error cuadrático medio $G_n(\Lambda)$, siendo Λ un lattice n -dimensional de Tipo I es una tarea difícil, dado que el sistema a solucionar, a medida que va aumentando la dimensión, es muy grande.

En este trabajo de investigación sólo se pudo mostrar la existencia de un punto crítico para

$G_n(\Lambda)$, el cual ocurre cuando los parámetros de Selling asociados al lattice son todos iguales, además se comprobó que dicho punto crítico es un mínimo local entre los lattices de Tipo I. En esta prueba se utilizó el método de Multiplicadores de Lagrange.

Bibliografía

- [1] John Horton Conway and Neil James Alexander Sloane. *Sphere packings, lattices and groups*, volume 290. Springer Science & Business Media, 1999.
- [2] Bruce Allen and Erik Agrell. The optimal lattice quantizer in nine dimensions. *Annalen der Physik*, 533(12):2100259, 2021.
- [3] Paul Zador. Asymptotic quantization error of continuous signals and the quantization dimension. *IEEE Transactions on Information Theory*, 28(2):139–149, 1982.
- [4] Sueli IR Costa, Frédérique Oggier, Antonio Campello, Jean-Claude Belfiore, and Emanuele Viterbo. *Lattices applied to coding for reliable and secure communications*. Springer, 2017.
- [5] John Horton Conway and Neil JA Sloane. Low-dimensional lattices. vi. voronoi reduction of three-dimensional lattices. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 436(1896):55–68, 1992.
- [6] Jacobus Hendricus Van Lint and Richard Michael Wilson. *A course in combinatorics*. Cambridge university press, 2001.
- [7] Juan Miguel Velásquez Soto. *Retículos en $\mathbb{R}^4$ y el problema del cuantizador óptimo*. Tesis doctoral, Universidad Nacional de Córdoba, 2012.
- [8] Daniel Stiven Tovar. *Constante de cuantización para retículos euclidianos de Tipo I en dimensión 5*. Universidad del Valle, 2024.
- [9] E. S Barnes and N. J. A Sloane. The optimal lattice quantizer in three dimensions. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 4(1):30–41, 1983.
- [10] Mikhail M Kapranov. The permutoassociahedron, mac lane’s coherence theorem and asymptotic zones for the kz equation. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 85(2):119–142, 1993.
- [11] Norida Iquinás. Algoritmos. <https://github.com/NoridaM/AlgoritmosTesis.git>, 2025.