OTRO MODELO PARA EL CORTE DE VARILLAS

Héctor J. Martínez
Profesor Titular
Departamento de Matemáticas
Universidad del Valle
Cali–Colombia

RESUMEN

En este artículo se considera otro modelo para resolver el problema de minimizar el desperdicio en el corte de materia prima longitudinal en subpiezas requeridas. Se demuestra por primera vez la equivalencia de este modelo con el planteado por Duque (1988) al tiempo que se presentan las ventajas del modelo propuesto sobre otros existentes. A su vez, dichas ventajas y la mencionada equivalencia contestan las preguntas planteadas por Vidal (1988).

1. ANTECEDENTES

En el volumen 2 No. 1, de Heurística, C.J. Vidal sugiere un modelo matemático para minimizar el desperdicio ocasionado al cortar piezas longitudinales, tales como varillas de acero, en subpiezas de longitudes y cantidades requeridas, "considerando como desperdicio cortes remanentes que no se pueden utilizar debido a sus dimensiones". Dicho modelo es un caso particular de Programación Lineal Entera, lo cual se expresa muy claramente en la introducción del mencionado artículo.

En este artículo, se plantea que para mostrar cómo la solución del modelo matemático sugerido sí corresponde a la solución del problema propuesto, se necesita conocer de antemano todas y cada una de las formas (patrones de corte) en que es posible cortar las piezas iniciales. Es más, este hecho no sólo aparece subrayado, sino que también se plantea como el problema inicial y central en la solución del problema propuesto (minimizar el desperdicio en el proceso de corte).

Motivado por este documento, en el Volumen 2, No.2 de la misma revista, R. Duque da un algoritmo para "generar todas las diferentes formas en las cuales se puede dividir la pieza longitudinal". Duque (1988) también da una respuesta a otra pregunta planteada en Vidal (1988). La pregunta es sobre la no-unicidad de soluciones óptimas que tienen efectos prácticos o económicos diferentes.

2. MULTIPLES SOLUCIONES OPTIMAS "DIFERENTES"

Que un problema de optimización tenga más de una solución óptima es ventajoso desde el punto de vista de la situación que se esté modelando siempre y cuando dichas soluciones tengan implicaciones similares en términos de la situación. Cuando éste no es el caso, es decir, cuando dos soluciones óptimas del problema tienen implicaciones prácticas diferentes, lo que muestra es una mala representación de la situación por parte del modelo.

Empezaré por lo que bien pudo haber sido un error de imprenta en la formulación de un segundo modelo para evitar la multiplicidad de soluciones dado por Duque (1988).

En la página 44, Duque (1988) propone involucrar los "tramos en exceso", s_i, $i = 1, \ldots, 4$, en la función objetivo del modelo propuesto por Vidal (1988). Es claro que s_i es la variable de holgura correspondiente a la restricción i y por

lo tanto, al ser incluída en la función objetivo, debe aparecer explícitamente en la restricción i, la cual pasa a ser una igualdad. (Estas variables no aparecen en Duque (1988)). Resumiendo, el modelo correcto sugerido por Duque quedaría planteado así:

Minimizar

$$D = x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + 3s_1 + 5s_2 + 7s_3 + 8s_4$$

Sujeto a

$$\begin{array}{rrrrrrrrr} 4x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & -s_1 & & & =100 \\ & x_2 & & & +2x_5 & +x_6 & -s_2 & & =150 \\ & & x_3 & & & +x_6 & & -s_3 & =200 \\ & & & x_4 & & & & -s_4 & =85 \end{array} \qquad (M2)$$

x_i, s_j no negativas , $i = 1, \ldots, 6,\ j = 1, \ldots, 4.$

En efecto, este modelo evita que haya dos o más soluciones óptimas que tengan implicaciones económicas diferentes. Es de anotar, que el problema modelado por el problema (M2) difiere del inicialmente propuesto en el concepto de desperdicio, lo cual no se hace explícito en Duque (1988). Aquí las subpiezas cortadas en exceso son consideradas como desperdicio, lo cual es realmente el caso en muchas situaciones de la vida real. En algunos otros casos, el concepto de desperdicio utilizado por Vidal (1988) puede ser más conveniente, aunque habría que incluir los costos de inventario o algo similar en el modelo.

Otra forma de modelar el problema implícitamente planteado por Duque, sin involucrar las variables de holgura en la función objetivo y mantener las restricciones de desigualdad (lo cual facilita la solución del problema de programación lineal que resulta), es minimizando el número de piezas a cortar en lugar de minimizar directamente el desperdicio. (Ver modelo general en la sección 4).

Para el ejemplo en cuestión (ver Vidal (1988) o Duque (1988)), el nuevo modelo quedaría:

Minimizar número de piezas cortadas.

$$P = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

Sujeto a

$$\begin{array}{rrrrrrr} 4x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & & \geq 100 \\ & x_2 & & & +2x_5 & +x_6 & \geq 150 \\ & & x_3 & & & +x_6 & \geq 200 \\ & & & x_4 & & & \geq 85 \end{array} \qquad (M3)$$

x_i no negativa , $i = 1, \ldots, 6.$

3. PATRONES DE CORTE

Tanto Vidal (1988) como Duque (1988) utilizan el hecho de conocer todos y cada uno de los patrones de corte, no sólo para plantear los modelos matemáticos del problema que nos ocupa, sino que también lo utilizan para hallar la solución o soluciones del problema. En la sección anterior, también utilizamos los patrones de corte para plantear un tercer modelo. Cabe entonces preguntar: será necesario conocer todos los patrones de corte para minimizar el desperdicio en el problema planteado? Afortunadamente, la respuesta a esta pregunta es NO ! contrario a lo que puede deducirse de Vidal (1988) y Duque (1988). Basta tratar de responder la primera pregunta en la página 46 de Vidal (1988) para darnos cuenta que, si así fuera, el problema sería imposible de resolver en un tiempo razonable para situaciones más complejas que la del ejemplo. En realidad, el número de patrones de corte crece muy rápidamente con el número de longitudes requeridas y con la longitud de las piezas iniciales (cortar piezas de 200 cm. en 40 longitudes diferentes tiene alrededor de 100 millones de patrones de corte), lo cual es supremamente costoso tanto de almacenar como de manipular, sin contar el costo y la dificultad de generarlos.

4. OTRO MODELO MATEMATICO

Problema :

Cortar piezas de longitud L en por lo menos b_i subpiezas de longitud l_i, $i = 1, \ldots, m$ de tal forma que haya el menor desperdicio posible, considerando desperdicio toda subpieza cortada en exceso de los requerimientos.

Definición de Variables :

x_j : Número de piezas a cortarse bajo el patrón de corte j, $j = 1, 2, \ldots, n$

Restricciones :

Requerimiento de subpiezas:

Total de subpiezas de longitud l_i obtenidas con los n patrones de corte es mayor o igual que b_i , el mínimo número de subpiezas requerido de esta longitud, es decir,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$$

donde a_{ij} es el número de subpiezas de longitud l_i obtenidas con el patrón de corte j .

Función Objetivo :

Minimizar el número de piezas a cortar

$$P = \sum_{i=1}^{n} x_i = e^T x$$

donde $e = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathrm{R}^n$.

Modelo Matemático :

$$\begin{array}{lll} \text{Minimizar } e^T x & & (4.1) \\ \text{Sujeto a} & Ax \geq b & (4.2) \\ & x \geq 0 & (4.3) \\ & x \text{ entero} & \end{array}$$

donde $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Z}^{m \times n}$ y $b = (b_i) \in \mathrm{Z}^m$

5. EQUIVALENCIA DE MODELOS

El modelo propuesto en la sección anterior es equivalente al modelo propuesto por Duque (1988) como lo muestra el siguiente teorema.

TEOREMA

El modelo planteado en la Sección 4 tiene la misma solución óptima, aunque con valor óptimo diferente, que el modelo propuesto en Duque (1988), es decir, son equivalentes.

Demostración:

En términos generales, el modelo propuesto por Duque (1988), se puede escribir así:

$$\begin{array}{lll} \text{Minimizar} & \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{i=1}^{m} l_i s_i & (5.1) \\ \text{Sujeto a} & Ax - s = b & (5.2) \\ & x, s \geq 0 & (5.3) \\ & x, s \text{ enteros} & \end{array}$$

donde d_j es el desperdicio en el patrón de corte j, $j = 1, \ldots, n$, s_i es el número de subpiezas de longitud l_i cortadas en exceso, $i = 1, \ldots, m$ y el resto de variables tienen el mismo significado que en el modelo planteado en la Sección 4.

Es fácil ver que las restricciones (4.2) y (5.2) son equivalentes. (En programación lineal s es conocida como el vector de variables de holgura correspondiente a la restricción (4.2)). Por lo tanto, para obtener el resultado del teorema basta demostrar que las funciones objetivos (4.1) y (5.1) son equivalentes desde el punto de vista de optimización, es decir, que alcancen su valor mínimo en puntos equivalentes de su dominio bajo las restricciones correspondientes, lo cual es cierto ya que (5.1) es un múltiplo de (4.1) mas una constante. Veámoslo.

La restricción i de (5.2) se puede escribir como

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - s_i = b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

ó equivalentemente

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \qquad i = 1, \ldots, m\ .$$

Reemplazando s_i en (5.1), tenemos que (5.1) se puede escribir como

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{i=1}^{m} l_i s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{i=1}^{m} l_i \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \right]$$

Factorizando x_j, el lado derecho de la anterior ecuación queda

$$\sum_{j=1}^{n} \left[d_j + \sum_{i=1}^{m} l_i a_{ij} \right] x_j - \sum_{i=1}^{m} l_i b_i .$$

Como, por la definición de d_j, l_i y a_{ij}, $d_j + \sum_{i=1}^{m} l_i a_{ij} = L$, tenemos lo que deseamos probar:

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{i=1}^{m} l_i s_i = L \sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{i=1}^{m} l_i b_i\ .$$

$$[(5.1) = L \times (4.1) + Constante].$$ □

6. VENTAJAS DEL NUEVO MODELO MATEMATICO

1. No necesita el cálculo del desperdicio para cada patrón de corte.
2. Los coeficientes de las variables en la función objetivo son iguales a 1.
3. Evita la multiplicidad de soluciones óptimas "diferentes" al igual que el modelo presentado por Duque (1988), pero sin aumentar el número de variables. Esto es consecuencia obvia del teorema de la sección anterior.
4. No necesita tener previamente todos los patrones de corte ya que sólo es necesario conocer m patrones de corte para iniciar el cálculo de la solución mediante el algoritmo del SIMPLEX REVISADO. Estos m patrones pueden ser los definidos por:

$$a_{ij} = \begin{cases} [L/l_i] & ,i = j \\ 0 & ,i \neq j \end{cases}$$

aunque existen "mejores" formas de calcular estos patrones iniciales (mejores en el sentido que generalmente están más próximos al conjunto de los patrones de corte óptimos). Posteriormente, se necesitará sólo un nuevo patrón de corte por cada iteración del SIMPLEX REVISADO, y éste se puede calcular mediante algoritmos generales de "generación de columnas" o usando el principio de descomposición dado por Dantzing y Wolfe (1960) los cuales requieren de la solución de un problema de "Knapsack" en cada iteración. (Normalmente, el número de iteraciones del Simplex Revisado es mucho menor que el número de posibles patrones de corte).

Para terminar, debo decir que el análisis de otras relaciones entre los modelos aquí mencionados y el estudio detallado de los métodos de solución existentes para dichos modelos ameritan más investigación y podrían ser el tema de otros artículos y/o trabajos de tesis. Además, debe ser claro que las ventajas entre modelos aquí planteadas son tanto más significativas cuanto más complejo sea el problema en cuestión.

REFERENCIAS

Bazaraa, M.S. and Jarvis, J. , *Programación Lineal y Flujo en Redes.* Ed. Limusa, (1984).

Chvátal, V. , *Hard Knapsack Problems. Operations Research*, Vol.28, No.6, 1402–1411, (1980).

Dantzing, G. and Wolfe, P. *Decomposition Principle for Linear Programs*, Operations Research, Vol.11, 102–111, (1960).

Duque, R. , *Algo más sobre el modelo para el corte de Varillas*, Heurística, Vol.2, No.2, 43–49, (1988).

Nemhauser, G.L. et al. , *Handbooks in OR and MS*, Vol.1, Ed. Elsevier Sciences Publishers, (1989).

Vidal, C.J. , *Un Modelo Matemático para el corte de Varillas*, Heurística, Vol.2, No.1, 41–47, (1988).