



Modelación de la dinámica de la mortalidad de los asociados a un fondo mutual de solidaridad mediante el ajuste del modelo Lee-Carter

Daniela Meza Caro

Universidad del Valle
Facultad de Ingeniería, Escuela de Estadística
Santiago de Cali, Colombia
2025

Modelación de la dinámica de la mortalidad de los asociados a un fondo mutual de solidaridad mediante el ajuste del modelo Lee-Carter

Daniela Meza Caro

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Estadístico(a)

Director:

Ph.D. Jaime Mosquera Restrepo

Codirector:

Esp. Jesús Salvador Camacho Ardila

Universidad del Valle

Facultad de Ingeniería, Escuela de Estadística

Santiago de Cali, Colombia

2025

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a Dios, por haberme guiado en este camino y concederme la sabiduría y fortaleza necesarias para culminar mi carrera profesional. A mi familia —mi mamá, papá, hermana y ahora mi sobrina— gracias por ser mi mayor fuente de motivación y el motor que me impulsa a dar cada siguiente paso. Haber llegado hasta aquí es la prueba de que, como seres humanos, podemos alcanzar todo aquello que nos proponemos, incluso cuando el camino no coincide con nuestros planes iniciales. Con persistencia, dedicación y esfuerzo, cada meta trazada se puede alcanzar.

Agradezco profundamente a mis compañeros académicos, cuya solidaridad, apoyo y camaradería hicieron posible este logro. A cada persona que se cruzó en mi camino universitario: gracias por contribuir a una etapa tan grata y enriquecedora. En especial, gracias a Diana por su inagotable paciencia, por animarme en los momentos de incertidumbre y, por supuesto, por ser parte de mi equipo. A Andrés e Isaac, gracias por su amistad, compañía y apoyo incondicional. A David, Brandon, Víctor y Juan José, por estar siempre dispuestos a ayudar cuando más lo necesité. Gracias a cada persona que ocupa un lugar especial en mi vida, que fue testigo de este proceso y que, con sus palabras de aliento, me ayudaron a recordar de lo que soy capaz.

Finalmente, extiendo mi agradecimiento al profesor Jaime Mosquera, por compartir su amplio conocimiento, por su acompañamiento, orientación y paciencia a lo largo del proceso. Al profesor Salvador Camacho, por brindarme la oportunidad de ser parte de su equipo, por guiarme en un nuevo camino que me muestra la estadística y por compartir toda su experiencia; de él me llevo el ejemplo de lo que significa ser un verdadero líder.

Con amor, Daniela Meza Caro

Jeremías 29:11

Resumen

Este trabajo de grado propone un enfoque estadístico-actuarial para analizar y proyectar la dinámica de la mortalidad de los asociados a un fondo mutual de solidaridad en Colombia, mediante la aplicación del modelo Lee-Carter (1992). Dado que este tipo de fondos opera bajo principios solidarios, resulta crucial anticipar la evolución de la mortalidad para tomar decisiones informadas sobre reservas y tarifas, y así garantizar la sostenibilidad del sistema. A diferencia de las tablas nacionales basadas en experiencias generales, como las emitidas por la Superintendencia Financiera (1998-2003), este estudio parte de la necesidad de construir herramientas ajustadas a las características específicas de la población del fondo.

Para el desarrollo del estudio, se utilizó información real proporcionada por el área de actuaría de un fondo mutual de solidaridad, el cual fue tomado como caso de análisis. Los datos fueron depurados y segmentados por edad y sexo, permitiendo la construcción de tablas dinámicas de mortalidad abreviadas y el ajuste del modelo Lee-Carter, tanto a nivel general como de forma diferenciada por sexo. El documento se apoya en un marco teórico robusto que aborda conceptos fundamentales del mutualismo, la teoría actuarial, el cálculo de tasas de mortalidad y la formulación del modelo Lee-Carter. Posteriormente, se implementó una proyección a corto plazo mediante regresión local Loess, sobre el componente temporal k_t , evidenciando la utilidad del enfoque adoptado.

Los resultados obtenidos muestran un buen ajuste del modelo para la población analizada, lo cual se refleja en la ausencia de residuos estructurados y en la coherencia de las curvas estimadas de mortalidad. Estas curvas, extrapoladas a edades individuales a partir de la Tabla de Mortalidad de los Asegurados, constituyen un insumo clave para el cálculo técnico de tarifas y reservas en productos actuariales. Además, se identificó una disminución progresiva en la mortalidad a lo largo del tiempo, lo que sugiere un aumento sostenido en la longevidad de los asociados. Esta información resulta fundamental para que el fondo pueda anticipar escenarios futuros, ajustar su planificación financiera y garantizar los recursos necesarios para cumplir con su función solidaria de manera sostenible y responsable.

Palabras clave: *Tabla de mortalidad, Modelación estadística, Tasas de mortalidad, Modelo Lee-Carter, Proyección mortalidad*

Abstract

This thesis proposes a statistical-actuarial approach to analyze and project the mortality dynamics of members of a solidarity mutual fund in Colombia, by applying the Lee-Carter model (1992). Since this type of fund operates under solidarity principles, it is crucial to anticipate the evolution of mortality in order to make informed decisions on reserves and rates, and thus guarantee the sustainability of the system. Unlike national tables based on general experiences, such as those issued by the Financial Superintendency (1998-2003), this study is based on the need to build tools adjusted to the specific characteristics of the fund's population.

For the development of the study, real information provided by the actuarial area of a solidarity mutual fund was used, which was taken as a case of analysis. The data were cleaned and segmented by age and sex, allowing the construction of abbreviated mortality pivot tables and the adjustment of the Lee-Carter model, both at the general level and differentiated by sex. The paper is supported by a robust theoretical framework that addresses fundamental concepts of mutuality, actuarial theory, the calculation of mortality rates and the formulation of the Lee-Carter model. Subsequently, a short-term projection was implemented using local Loess regression on the time component k_t , demonstrating the usefulness of the approach adopted.

The results obtained show a good fit of the model for the population analyzed, which is reflected in the absence of structured residuals and in the consistency of the estimated mortality curves. These curves, extrapolated to individual ages from the Insured Mortality Table, constitute a key input for the technical calculation of rates and reserves in actuarial products. In addition, a progressive decrease in mortality was identified over time, suggesting a sustained increase in the longevity of members. This information is fundamental for the fund to anticipate future scenarios, adjust its financial planning and guarantee the necessary resources to fulfill its solidarity function in a sustainable and responsible manner.

Keywords: *Mortality table, Statistical modeling, Mortality rates, Lee-Carter model, Mortality projections*

Contenido

1. Introducción	2
1.1. Planteamiento del problema y justificación	3
1.2. Preguntas de investigación	5
1.3. Objetivos	5
1.3.1. Objetivo general	5
1.3.2. Objetivos específicos	5
2. Antecedentes	6
2.1. Contexto normativo	6
2.2. Tablas de mortalidad en estudios demográficos	7
2.3. Tablas de mortalidad en el sector financiero	8
2.4. Otros contextos: deserción académica	10
3. Marco teórico	11
3.1. Marco teórico contextual	11
3.1.1. Fondo mutual de solidaridad	11
3.1.2. Mutualista	12
3.1.3. Seguro de vida	13
3.1.4. Defunción/muerte	13
3.1.5. Mortalidad	13
3.2. Marco teórico estadístico	14
3.2.1. Tabla de mortalidad	14
3.2.2. Cohorte	15
3.2.3. Tabla de mortalidad dinámica abreviada	15
3.2.4. Modelo Lee-Carter (1992)	16
3.2.5. Análisis de residuos del modelo	17
3.2.6. Coeficiente de correlación de concordancia (CCC)	18
3.2.7. Modelos lineales generalizados (GLM)	18
3.2.8. Locally estimated scatterplot smoothing	20
4. Metodología	21
4.1. Caracterización de la población	22
4.1.1. Fuente de información y depuración de datos	22
4.1.2. Análisis de ceros	24

4.2. Agrupación por rangos de edad	25
4.3. Construcción de tablas de mortalidad dinámicas abreviadas para la población de estudio	26
4.3.1. Particularidades de las tablas dinámicas de mortalidad abreviadas . .	26
4.4. Análisis exploratorio de datos de las tablas de mortalidad	28
4.5. Ajuste del modelo Lee-Carter	28
4.5.1. Análisis de residuos: ajuste de los modelos	29
4.6. Tablas colombianas de mortalidad de los asegurados	30
4.6.1. Construcción de la tabla general con base en la información de la superintendencia financiera	30
4.6.2. Cálculo del gradiente para las curvas $q(x)$	33
4.7. Pronóstico a corto plazo (regresión Loess)	34
5. Resultados	36
5.1. Análisis exploratorio de datos	36
5.2. Tablas dinámicas de mortalidad abreviadas	40
5.3. Aplicación del modelo Lee-Carter	42
5.3.1. Contraste de los modelos ajustados hombres vs mujeres	50
5.4. Interpolación y extrapolación de las curvas $q(x)$ estimadas por el modelo Lee-Carter	52
5.4.1. Contraste de las curvas de mortalidad estimada del modelo Lee-Carter en su expresión suavizada	57
5.5. Proyección de un periodo del parámetro k_t	59
6. Conclusiones	61
6.1. Recomendaciones	62
Bibliografía	64
A. Anexo: Estructura de base de datos del área de actuaría de un fondo mutual de solidaridad	67
B. Anexo: Tabla Colombiana de Mortalidad de los Asegurados: experiencia 1998-2003	68
C. Anexo: Tabla de $q(x)$ estimado para las tablas de mortalidad del fondo mutual de solidaridad	70

Lista de Figuras

4-1. Diagrama de metodología	21
5-1. Tasas de mortalidad población general para los rangos de edad definidos . .	37
5-2. Tasas de mortalidad por sexo para los rangos de edad definidos	38
5-3. Tasas de mortalidad población general para el periodo 2013-2023	39
5-4. Tasas de mortalidad por sexo para el periodo 2013-2023	40
5-5. Resultados del modelo, población general	43
5-6. Boxplots de residuos por edad y tiempo	44
5-7. Valores ajustados vs observados población general	45
5-8. Resultados del modelo, sexo masculino	46
5-9. Valores ajustados vs observados sexo masculino	47
5-10. Resultados del modelo, sexo femenino	49
5-11. Valores ajustados vs observados sexo femenino	50
5-12. Comparación de parámetros del ajuste de los modelos	51
5-13. Curva suavizada $q(x)$ de la tabla de mortalidad de los asegurados, población general	53
5-14. Estimación de las curvas $q(x)$ población general	54
5-15. Estimación de las curvas $q(x)$ sexo masculino	55
5-16. Estimación de las curvas $q(x)$ sexo femenino	56
5-17. Proyección de kt para hombres y mujeres	59
A-1. Estructura de datos del área de actuaría: asociados siniestros gastos funerarios	67
B-1. TM Sexo Masculino, Superintendencia Financiera de Colombia	68
B-2. TM Sexo Femenino, Superintendencia Financiera de Colombia	69

Lista de Tablas

3-1. Estructura básica de la tabla de mortalidad (Debón et al., 2009)	14
3-2. Estructura tabla de mortalidad dinámica abreviada (Ortiz et al., 2012) . . .	15
4-1. Resumen de la información segmentada por sexo	23
4-2. Resumen del análisis de ceros en la base de datos	25
4-3. Agrupación por rangos de edad	26
4-4. Justificación cálculo ${}_na_x$	27
4-5. Tabla colombiana de mortalidad de los asegurados general (construida) . . .	31
5-1. Ejemplo de tabla de mortalidad dinámica abreviada (2013-2023) para la población general	41
5-2. CCC para el modelo Lee-Carter general	45
5-3. CCC para el modelo Lee-Carter sexo masculino	48
5-4. CCC para el modelo Lee-Carter sexo femenino	49
5-5. Contraste de los parámetros del modelo LC	50
C-1. $q(x)$ estimado para las tablas de mortalidad del fondo mutual de solidaridad	70

1. Introducción

En este trabajo, el tema a abordar es de gran importancia en el **sector financiero**, el cual incluye variedad de empresas y organizaciones que ofrecen servicios financieros como lo son bancos comerciales y de inversión, compañías de seguros, cooperativas, **fondos mutuales**, gestoras de fondos de inversión, entre otras; dentro del sector es fundamental el manejo adecuado de la gestión de riesgos, entendiendo el riesgo como la probabilidad de ocurrencia de un evento no deseado o la variabilidad en los posibles resultados, donde al menos uno de ellos implica una consecuencia económica adversa (Rejda, 2005). En el ámbito empresarial y actuarial, este concepto resulta fundamental para la toma de decisiones estratégicas, dado que permite anticipar pérdidas potenciales y diseñar mecanismos de protección financiera. Las empresas del sector buscan analizar, evaluar y tratar el riesgo de alguna actividad que pueda impactar de manera negativa a la compañía; los beneficios de hacerlo son: cumplir objetivos, reducir costos, evitar el fracaso, colapso o pérdidas monetarias y por último facilitar el cumplimiento de exigencias ante los entes reguladores.

De manera específica, los fondos mutuales son creados con el fin de mitigar los efectos de los acontecimientos que puedan darse y vulneren la integridad física (por ejemplo la muerte) del asociado o la de sus familiares; bajo este contexto, de acuerdo con la corte constitucional de Colombia (Sentencia C-940 de 2003) *“la mutualidad implica la formación de un fondo común constituido con los aportes de los sujetos expuestos al peligro, con el cual se cubren los riesgos en la medida en que se presenten”*, quedando entonces bajo este respaldo la figura de los fondos mutuales como indicativo de la **actividad aseguradora**. Esto implica una relación directa con la estadística ya que se busca cuantificar dichos riesgos a través del cálculo de probabilidades, en este caso, no es una empresa aseguradora quién asume dichos riesgos, serán los mismos asociados quienes los asuman de manera individual y en conjunto.

En el área demográfica, es importante el análisis de la dinámica de la mortalidad ya que este puede ser un indicador de desarrollo de la población objeto de estudio, un nivel bajo de mortalidad y una alta esperanza de vida son señales de un sistema de salud sólido (Organización Panamericana de la Salud, 2017), en ese mismo sentido, dentro del contexto específico del avance de este trabajo, en el área actuarial/financiera se hace indispensable el análisis de la dinámica de mortalidad, pues de esto depende el buen manejo de la gestión de riesgos y así mismo el cálculo de primas y reservas para un cubrimiento efectivo de los asociados (en este caso mutualistas); cabe mencionar que una empresa debe demostrar su competencia técnica y económica para prestar dichos servicios. La modelación de la

dinámica de mortalidad a través del modelo estadístico Lee-Carter permitirá evidenciar el comportamiento de las tasas de mortalidad de la población objeto de estudio a través del tiempo y con la aplicación de este, se hace posible pronosticar las tasas de mortalidad para los asociados a un fondo mutual de solidaridad, facilitando así determinar las reservas necesarias para cubrir los pagos futuros y mantener la solvencia financiera, también se podrá evaluar el impacto financiero que tenga la dinámica de mortalidad en distintos escenarios.

1.1. Planteamiento del problema y justificación

Con los avances en las normas, los entes reguladores nacionales siguen modelos internacionales y se rigen a acuerdos dentro de los cuales exigen a las empresas del sector financiero cumplir, por ejemplo Basilea I, II y III. Este trabajo va enfocado específicamente en los **fondos mutuales de solidaridad** que ofrecen planes básicos de protección y adicionales, los cuales están conformados por diferentes amparos y coberturas que acompañarán al asociado mutualista en el momento en que más lo necesite. Aunque se asemejan a productos que ofrecen las entidades aseguradoras, estos no subyacen de “un contrato consensual, bilateral oneroso, aleatorio y de ejecución sucesiva” (de acuerdo con el artículo 1036 del Código de Comercio de Colombia), si no que surgen del convenio de cooperación entre los interesados, los cuales según el reglamento de un fondo mutual de solidaridad, constituyen una práctica autogestionaria ausente de ánimo de lucro siendo la característica esencial de la protección solidaria y mutual el hecho de que **el riesgo se reparte entre todos los asociados protegidos**.

Dentro de los planes básicos de protección (mencionados anteriormente) que ofrecen los fondos mutuales de solidaridad está el amparo por muerte/fallecimiento del asociado. En dado caso, se hará entrega del valor de protección tomado en este amparo a los beneficiarios inscritos, de acuerdo con los porcentajes designados; en caso de que no existan personas que cumplan este papel, el valor de protección se entregará a los herederos de ley. Por ende en dicha situación, la entidad debe responder por el cumplimiento del amparo, este último siendo solo un ejemplo de muchos de los amparos mutuales que involucran el riesgo de muerte/accidentalidad o supervivencia individual del asociado mutualista. Lo anterior hace muy relevante el conocer como es la dinámica de la mortalidad de la población objeto de estudio (los asociados al fondo mutual), pues dichas entidades deben cumplir con la reglamentación establecida, de acuerdo con la Ley 79 de 1988, el artículo 72 expresa: “Los organismos de carácter cooperativo que presten servicios de seguros deberán ser especializados y cumplirán la actividad aseguradora principalmente en interés de sus propios asociados y de la comunidad vinculada a ellos”, así entonces, la construcción de tablas de mortalidad dinámicas y posteriormente el ajuste del modelo estadístico Lee and Carter (1992) permitirá a los fondos mutuales de solidaridad no solo demostrar ante los entes reguladores su capacidad de manejo técnico y financiero de este tipo de planes, también

les facilitará la determinación adecuada de la prima que se le cobrará a cada asociado mutualista por su cubrimiento (siguiendo las características de la población específica), identificar la capacidad de rendimiento de la empresa por medio de indicadores, analizar la capacidad financiera del fondo mutual de solidaridad para cumplir con sus obligaciones de pago de auxilios por fallecimiento (solvencia), entre muchos otros beneficios que se pueden obtener a través del uso de la estadística.

En Colombia, los fondos mutuales de solidaridad se rigen por la Tabla Colombiana de Mortalidad de los Asegurados, emitida por la Superintendencia Financiera. La tabla actualmente vigente fue adoptada mediante la Resolución 1112 de 2007 y se basa en la experiencia de mortalidad de los asegurados durante el período 1998–2003. Aunque en años posteriores se han propuesto nuevas tablas construidas a partir de datos más recientes, ninguna de ellas ha sido oficialmente adoptada por el ente regulador. En este contexto normativo, el fondo mutual de solidaridad objeto de este estudio utiliza dicha tabla como referencia técnica para la fijación de las tarifas de sus productos. Sin embargo, la entidad no ha desarrollado una evaluación propia sobre la dinámica de mortalidad de sus asociados, lo que representa una oportunidad para formular un modelo ajustado a su perfil poblacional, que permita comparar los resultados con las estimaciones derivadas de las tablas nacionales.

En respuesta a esta necesidad, el presente trabajo propone un enfoque actuarial basado en la aplicación del modelo Lee-Carter, con el propósito de ofrecer herramientas técnicas que respalden la toma de decisiones al interior del fondo. Este modelo permite describir y proyectar las tasas de mortalidad a lo largo del tiempo, capturando tanto los patrones por edad como las variaciones temporales en la experiencia de mortalidad de la población asegurada. En el contexto de este estudio, su uso resulta fundamental para anticipar tendencias en la longevidad y mejorar la estimación de compromisos futuros, lo cual fortalece la gestión del riesgo actuarial y la planeación financiera del fondo.

1.2. Preguntas de investigación

En línea con los elementos analizados en la sección anterior, se identifican diversos aspectos relevantes que requieren un abordaje detallado. Estos aspectos han permitido delimitar el enfoque de la presente investigación, motivando así la formulación de los siguientes interrogantes:

- ¿Cómo es el comportamiento de la mortalidad de los asociados en un fondo mutual de solidaridad?
- ¿Este patrón de mortalidad permanece estable o presenta alguna tendencia temporal?

1.3. Objetivos

Se establecen los siguientes objetivos, los cuales orientan el desarrollo del estudio y permiten abordar de manera estructurada la problemática planteada:

1.3.1. Objetivo general

Modelar la dinámica de la mortalidad de los asociados a un fondo mutual de solidaridad.

1.3.2. Objetivos específicos

- Depurar y generar la estructura de datos requerida para la construcción de las tablas de mortalidad por unidad de tiempo.
- Caracterizar el comportamiento de la mortalidad en los asociados a un fondo mutual de solidaridad a través de un análisis exploratorio de datos.
- Modelar la dinámica de la mortalidad, haciendo uso del modelo Lee-Carter.
- Pronosticar la dinámica de mortalidad para un horizonte de corto plazo.

2. Antecedentes

Dado que los fondos mutuales de solidaridad en Colombia adoptan tablas de mortalidad de los asegurados basadas en información agregada a nivel nacional, sin considerar las particularidades demográficas y actuariales de sus propias poblaciones, se hace pertinente realizar una revisión bibliográfica que explore la evolución de los modelos de mortalidad y las metodologías aplicadas en contextos comparables. Este capítulo presenta antecedentes relevantes que fundamentan el enfoque metodológico del presente trabajo, abordando temas clave en el marco del problema identificado.

2.1. Contexto normativo

De acuerdo con la Organización Panamericana de la Salud OPS (2017), “los primeros estudios de mortalidad se referían más frecuentemente a la distribución de las muertes por edad, sexo y causa, centrándose en un enfoque cuali-cuantitativo de las principales epidemias o enfermedades que causaban”, los antecedentes históricos y la literatura actual nos muestran que los avances (incluyendo los tecnológicos) y los cambios en el conocimiento de los procesos de salud/enfermedad han demandado nuevos enfoques para el análisis de mortalidad. El sistema de información sobre mortalidad de cada país es de vital importancia para la construcción de indicadores que facilitan a los gobiernos la correcta asignación de recursos; para el análisis del comportamiento de la mortalidad de una población existen herramientas como las tablas de mortalidad y las tablas de mortalidad dinámicas. En unos inicios, Graunt and Willcox (1939) publicaron en su libro “Natural and Political Observations Made Upon the Bills of Mortality” una de las primeras tablas de mortalidad, estas han ido evolucionando a través del tiempo teniendo mejoras que facilitan su aplicabilidad.

Siguiendo los documentos de matemáticas y estadísticas de la Universidad Externado de Colombia, para mediados del siglo XVIII se tenían desarrollos significativos en probabilidad y en las ciencias actuariales y en 1762 se formó la “Society for Equitable Assurance on Lives and Survivorship”, que fue la primer compañía en utilizar métodos técnicos para el cálculo de tarifas de sus pólizas de vida de largo plazo, y por lo cual es conocida como la primera compañía en operar con base en los principios modernos del seguro. Dentro del contexto específico de Colombia, el ingeniero Julio Garavito no construyó tablas de mortalidad propias, pero sí usó tablas de mortalidad americanas y europeas para el cálculo de primas y reservas Ortiz et al. (2012); por otro lado, el ingeniero Jorge Acosta desarrolló

en el año 1931 la primer tabla de mortalidad para Colombia, la cual tuvo posteriores mejoras incluyendo factores demográficos los cuales han servido para nutrir el desarrollo del campo de las tablas en el país.

2.2. Tablas de mortalidad en estudios demográficos

En la literatura contemporánea actuarial, se reconoce ampliamente que las tasas de mortalidad no deben ser tratadas como parámetros estáticos, sino como procesos dinámicos y estocásticos que evolucionan en el tiempo. En 2008, se publica un artículo Cairns et al. (2008) en el que hacen una revisión donde consideran una amplia gama de modelos estocásticos extrapolativos de mortalidad (incluso en tiempo discreto) que se han propuesto a lo largo de la historia. Algunos de ellos son: Modelos multifactoriales edad-periodo, el modelo de cohortes de Renshaw-Haberman, el modelo Lee-Carter, entre otros, donde encuentran que los modelos en tiempo continuo suelen ser más sencillos pero permiten examinar las posibilidades de cobertura dinámica del riesgo de mortalidad.

Una contribución fundamental al estudio de la dinámica de la mortalidad en América Latina es el artículo Belliard et al. (2013), los autores implementaron el modelo Lee-Carter para generar proyecciones estocásticas de la mortalidad en Argentina, abarcando el período 1980–2050. Esta investigación destaca tanto por la rigurosidad metodológica como por la pertinencia de su aplicación a un contexto latinoamericano, demostrando que es posible utilizar modelos avanzados incluso en países con limitaciones en la disponibilidad y calidad de datos; los autores argumentan que las proyecciones de mortalidad realizadas tradicionalmente en Argentina habían sido deterministas y carecían de un componente de incertidumbre fundamental para una planificación actuarial robusta. Es ahí donde deciden aplicar una estimación por máxima verosimilitud bajo un marco Poisson, ajustando tasas específicas por edad y año, y utilizando un modelo ARIMA (0,1,0) para proyectar el índice temporal k_t . Uno de los aportes clave del estudio es mostrar cómo el modelo capta adecuadamente las mejoras observadas en la mortalidad a lo largo del tiempo, replicando patrones empíricos como la disminución sostenida de las tasas en edades infantiles y avanzadas, y señalando comportamientos atípicos en adultos jóvenes, probablemente vinculados a causas externas como la violencia y los accidentes. Esto demuestra que el modelo Lee-Carter no solo permite una proyección general de la mortalidad, sino que también es sensible a los rasgos estructurales específicos de cada población. Los autores destacan que las proyecciones de tablas de vida generadas por este modelo tienen implicaciones directas en la industria aseguradora, los sistemas previsionales y la planificación de políticas públicas; en pensiones, mejora la estimación de los egresos futuros por jubilaciones y sobrevivencias. Por último, este trabajo valida la aplicabilidad del modelo Lee-Carter a países latinoamericanos con estructuras poblacionales y niveles de desarrollo distintos a los países centrales donde inicialmente fue formulado. Reafirma, además, su utilidad para

instituciones que requieren metodologías para proyectar tasas de mortalidad de manera confiable, como es el caso de los fondos mutuales de solidaridad, que operan sin el respaldo de modelos actuariales formales pero enfrentan los mismos desafíos.

En el ámbito demográfico, el modelo Lee-Carter ha adquirido una posición central por su capacidad para capturar y proyectar tendencias de mortalidad de forma parsimoniosa, mediante una estructura log-bilineal que separa efectos por edad y un factor común temporal. En el 2016, las autoras Díaz Rojo (2016) escribieron un artículo en el que se estudia el comportamiento de la mortalidad en Colombia para los años 1973-2005 utilizando tablas de mortalidad construidas a partir de los datos reportados por Latin American Human Mortality Database y modelizar lo propuesto por Lee-Carter, modelo Lee-Carter con dos términos y el modelo Edad-Período-Cohorte (APC); se concluye que los tres modelos ajustados permiten analizar el comportamiento de la mortalidad de la población objeto de estudio. En el artículo Uribe Gil (2017) aplica este modelo a las tablas de mortalidad de la ciudad de Santiago de Cali para el período 1985-2030, y constituye una de las pocas investigaciones en Colombia que implementan esta metodología a nivel subnacional. Sus resultados muestran cómo, a lo largo de tres décadas, las tasas de mortalidad han experimentado una reducción sustancial en casi todos los grupos etarios, especialmente en edades tempranas y avanzadas. No obstante, también identifica patrones atípicos en hombres jóvenes (15-25 años), cuya mortalidad no ha disminuido al ritmo esperado, reflejando factores estructurales como la violencia urbana. Desde el punto de vista metodológico, el estudio justifica el uso del modelo Lee-Carter por su capacidad de representar coherentemente la evolución de la mortalidad mediante un solo índice estocástico k_t . Este índice puede ser modelado como una caminata aleatoria y extrapolado para construir tablas de vida proyectadas útiles para fines actuariales y de política pública. El autor señala que la falta de modelos adecuados en el contexto nacional ha dejado a muchas instituciones sin insumos precisos para gestionar su riesgo demográfico, haciendo aún más relevante el desarrollo de estudios como este.

2.3. Tablas de mortalidad en el sector financiero

La evolución metodológica del modelo Lee-Carter ha sido impulsada por la necesidad de aumentar la precisión en la estimación de tasas de mortalidad y en la proyección de longevidad, especialmente en contextos donde pequeñas variaciones pueden tener grandes implicaciones financieras. En este sentido, D'Amato et al. (2011) proponen una variante del modelo Lee-Carter bajo una estructura log-bilineal con distribución Poisson, lo cual permite una estimación más adecuada en presencia de conteos discretos de muertes y heterocedasticidad en los errores. El enfoque Poisson mejora el ajuste del modelo, particularmente en edades avanzadas donde las exposiciones son menores y las tasas de mortalidad más volátiles. Además, los autores implementan un procedimiento bootstrap estratificado (Stratified Sampling Bootstrap - SSP) como herramienta para reducir la

varianza de las proyecciones y construir intervalos de predicción más confiables. Esto es especialmente relevante en el cálculo de pasivos actuariales, como en el caso de rentas vitalicias y opciones de anualidades garantizadas, productos altamente sensibles al riesgo de longevidad. Una de las principales innovaciones del artículo radica en el uso del modelo Poisson-Lee-Carter junto con simulaciones financieras integrando así riesgos demográficos y financieros en la valoración del portafolio. Los autores demuestran cómo la elección del método de proyección de supervivencia afecta directamente el índice de suficiencia financiera (funding ratio), una medida clave en la solvencia de entidades aseguradoras y fondos de pensiones. Además, introducen una métrica denominada Demographic Model Risk Measure (DMRM) para cuantificar el impacto del riesgo de modelo demográfico en los resultados financieros. Este estudio subraya la importancia de contar con modelos actuariales integrales, que no solo capten la evolución temporal de la mortalidad, sino que también incorporen mecanismos de evaluación del riesgo y de incertidumbre asociados al modelo utilizado. Su relevancia se extiende al ámbito mutual, donde estas herramientas pueden servir para reforzar la sostenibilidad de los fondos solidarios, habitualmente desprovistos de metodologías actuariales avanzadas pero expuestos igualmente al riesgo de longevidad.

Bajo esta línea, el trabajo de Montesinos Ruiz (2014) constituye un referente metodológico valioso al presentar la implementación detallada del modelo de Lee-Carter para la construcción de tablas dinámicas de mortalidad y su aplicación directa en el cálculo de rentas y seguros de vida. El autor destaca que las tablas estáticas tradicionales, que solo consideran el tiempo biológico (edad), tienden a subestimar la esperanza de vida cuando se usan en horizontes temporales largos. En cambio, las tablas dinámicas que incorporan el tiempo cronológico (calendario), permiten captar mejor la evolución de las tasas de mortalidad, siendo más adecuadas para realizar cálculos actuariales precisos en contextos donde la longevidad mejora de manera sostenida. La tesis profundiza en los fundamentos biométricos de las tablas de mortalidad (funciones de supervivencia, tasas centrales, esperanza de vida, etc.) y vincula estos conceptos con su aplicación en productos actuariales como rentas vitalicias, seguros temporales y mixtos, sustentando la relevancia de una adecuada modelación para evitar desequilibrios financieros en instituciones aseguradoras o mutuales. En este trabajo, el modelo Lee-Carter es presentado no solo desde su formulación estadística sino también desde su proceso de estimación práctica, usando técnicas como la descomposición en valores singulares (SVD) y su implementación en el lenguaje R mediante el paquete demography. Finalmente, se hace énfasis en el uso de estas proyecciones para la valoración de productos aseguradores, resaltando la utilidad del modelo como insumo técnico en la determinación de primas, reservas y flujos esperados; esta tesis reafirma que el enfoque Lee-Carter puede ser adoptado eficazmente por instituciones que operan bajo esquemas solidarios o mutuales, siempre que cuenten con una base mínima de datos históricos y voluntad técnica de fortalecer su gestión actuarial.

Más reciente en el 2022, Bergeron-Boucher and Kjærgaard (2022) realizan una previsión de la mortalidad a partir de los 65 años usando los datos de mortalidad del año 2020 de cuatro países: Italia, Canadá, Dinamarca y Suecia; posteriormente hicieron una evaluación del modelo Lee-Carter en función de la edad donde encontraron que períodos más largos de tiempo proporcionan pronósticos más sólidos y precisos, los resultados también muestran que el modelo Lee-Carter puede ser un modelo adecuado cuando las tasas de mejora de la mortalidad específica por edad son constantes en el tiempo.

2.4. Otros contextos: deserción académica

Para finalizar este capítulo, en la revisión bibliográfica se encuentran documentos donde hacen uso del modelo Lee-Carter como método de aplicación a otras problemáticas, como lo es la deserción académica. En la tesis Ochoa (2015), el autor toca dos aspectos clave i) Estima un modelo para la dinámica de mortalidad en Colombia para los años 1951-1999 y genera proyecciones hasta el año 2011, ii) Analiza la dinámica de la mortalidad académica modalidad pregrado en la Universidad Nacional de Colombia sede Medellín en los periodos semestrales entre el 1989-02 y 2006-01, de forma similar, realiza las proyecciones correspondientes para 10 periodos semestrales entre el 2006-02 y el 2011-01; en este trabajo el autor encuentra que el modelo Lee-Carter prueba ser una herramienta útil para concluir sobre los movimientos en el tiempo de la masa poblacional relacionados con diferentes tipos de mortalidad. Otro ejemplo bajo este mismo contexto es el trabajo de Castillo (2024), quien adaptó este modelo para monitorear la deserción académica universitaria, tratándola como un evento probabilístico que varía con el tiempo y permitiendo así identificar patrones y cambios mediante su integración con gráficos de control multivariantes. Este enfoque evidencia la flexibilidad metodológica del modelo, destacando su utilidad en contextos donde se requiere modelar tasas que cambian en función de la edad o del tiempo; esta versatilidad respalda su aplicación al análisis de la dinámica de la mortalidad dentro de un fondo mutual de solidaridad, donde las características poblacionales particulares hacen necesario un modelo ajustado que capture adecuadamente las variaciones del fenómeno. La aplicación del modelo Lee-Carter permitirá no solo describir el comportamiento histórico de la mortalidad, sino también proyectarlo, ofreciendo una base técnica más precisa que la tabla nacional actualmente en uso.

En la revisión de la literatura se identifican múltiples investigaciones que abordan la temática de la mortalidad desde diferentes enfoques teóricos y metodológicos. No obstante, los estudios aquí referenciados constituyen principalmente un marco de motivación y antecedente para el desarrollo de la presente investigación, en la medida en que, en el contexto colombiano, no se han encontrado trabajos que apliquen este tipo de modelación de manera específica a una población con las características propias del fondo mutual objeto de análisis.

3. Marco teórico

En esta sección se incluirán definiciones que son relevantes para el contexto del estudio, que permitan comprender la relación entre las variables y conceptos clave que se abordan, además, se presenta la teoría estadística que se usa en el desarrollo del trabajo.

3.1. Marco teórico contextual

3.1.1. Fondo mutual de solidaridad

Es un mecanismo colectivo que promueve la ayuda mutua entre los asociados de una organización, permitiéndoles respaldarse económica y solidariamente en momentos de dificultad o eventos imprevistos. Este fondo se basa en las contribuciones periódicas de los miembros, cuyo objetivo principal es garantizar servicios de previsión, asistencia y solidaridad. De esta manera, se busca fortalecer el bienestar y la tranquilidad de los asociados, asegurando que, ante situaciones adversas, todos tengan acceso al respaldo necesario para superar las dificultades.

El funcionamiento de estos fondos refleja el principio fundamental de la asociatividad, donde los miembros se unen para afrontar colectivamente los riesgos y necesidades comunes. El fondo, administrado de manera profesional, distribuye los recursos de forma equitativa entre los asociados y se estructura bajo objetivos claros que buscan asegurar el beneficio colectivo y la sostenibilidad de los recursos.

Además, los Fondos Mutuales de Solidaridad no solo operan como una herramienta de protección frente a imprevistos, sino que también fomentan la cooperación, la confianza y el sentido de comunidad entre sus miembros. Estos fondos, al ofrecer respaldo en momentos de crisis, contribuyen al progreso común, promoviendo la estabilidad y la cohesión dentro de la organización, siempre que los asociados mantengan su compromiso activo y su vinculación constante. MAPFRE (2024b)

En Colombia, las asociaciones mutuales de solidaridad son entidades de derecho privado, sin ánimo de lucro, que se constituyen libre y democráticamente por personas naturales con el fin de brindar ayuda mutua frente a riesgos eventuales y satisfacer las necesidades de sus miembros. Para la creación de una asociación mutua, se deben cumplir una serie de

requisitos establecidos por la normativa vigente. En primer lugar, es necesario contar con al menos veinticinco (25) personas interesadas en formar parte de la entidad. Posteriormente, se debe nombrar un comité organizador que se encargue de la estructuración inicial de la asociación, así como definir su nombre y los estatutos que regirán su funcionamiento. De manera adicional, se debe determinar el valor de la afiliación, el cual solo puede cobrarse una vez al momento de ingreso del asociado. Otro requisito fundamental es la realización de un curso básico en economía solidaria por parte de los miembros fundadores, con el objetivo de asegurar que los mismos comprendan los principios y la operación del modelo mutual. Ministerio de Justicia y del Derecho (2020)

Una vez cumplidos estos requisitos, la constitución formal de la asociación se realiza a través de una escritura pública o acta de asamblea de constitución. En esta asamblea se deben aprobar los estatutos, y nombrar los órganos de administración y vigilancia correspondientes. El Consejo de Administración, Junta Directiva u órgano equivalente, será el encargado de designar al representante legal de la entidad. El acta de constitución debe ser firmada por todos los asociados fundadores, con la inclusión de sus documentos de identificación y el valor de los aportes iniciales.

Finalmente, para que la asociación mutual obtenga personería jurídica, se debe registrar ante la Cámara de Comercio del domicilio principal. Para ello, es necesario presentar la escritura pública o documento privado que contenga la constitución de la entidad, así como una copia de los estatutos firmados por el presidente y el secretario de la asamblea, junto con todos los asociados fundadores. Además, se deben diligenciar los formularios correspondientes al Registro Único Empresarial y Social (RUES), y presentar una certificación que acredite que los asociados fundadores han recibido una educación básica en economía solidaria, con una intensidad mínima de diez (10) horas. Tras completar este proceso, los documentos deben ser enviados a la Superintendencia de Economía Solidaria para su control de legalidad, dentro de los diez (10) días hábiles posteriores al registro. Ministerio de Justicia y del Derecho (2020)

3.1.2. Mutualista

Sistema basado en la cooperación mutua, en el cual los individuos o miembros de una comunidad se asocian para ayudarse entre sí en diversas situaciones. En el contexto de la economía o la sociología, un mutualista es una persona que participa en una organización o sistema mutualista, caracterizado por la ayuda recíproca y la solidaridad entre sus miembros. Este tipo de organización puede estar orientado a la prevención de riesgos, como los fondos mutuales, o a la prestación de servicios sociales, como seguros, asistencia médica, o pensiones (Domínguez, 2011).

La ideología mutualista también se puede asociar con un modelo económico y social que defiende la autogestión y la cooperación voluntaria entre los miembros de una comunidad, en lugar de depender de instituciones externas, como el Estado o las empresas con fines de lucro (Otero, 2002).

3.1.3. Seguro de vida

Un seguro de vida es un contrato entre un asegurador y un asegurado que garantiza el pago de una suma de dinero a los beneficiarios designados en caso del fallecimiento del asegurado o de su invalidez permanente y absoluta. Este tipo de seguro busca proporcionar estabilidad económica a los dependientes del asegurado, preservando su nivel de vida. Existen modalidades como seguros de vida riesgo, que cubren exclusivamente casos de fallecimiento, y seguros de vida ahorro, que permiten al asegurado recibir una suma al llegar a cierta edad o tras un período determinado. Una modalidad combinada se denomina seguro de vida mixto, que abarca ambas contingencias MAPFRE (2024a).

3.1.4. Defunción/muerte

La defunción se define como la desaparición permanente de todo signo de vida en cualquier momento posterior al nacimiento, sin posibilidad de resucitación. Esto incluye la muerte fetal, que se produce antes de la expulsión o extracción completa del producto de la gestación de la madre (OMS, 1993). Desde la perspectiva de los seguros y los fondos mutuales, este hecho se entiende como un evento vital inevitable que genera impactos económicos, emocionales y sociales en el entorno del fallecido. La muerte constituye el siniestro asegurado o la contingencia que activa los beneficios previamente acordados, tales como indemnizaciones económicas para los beneficiarios, auxilios funerarios o servicios solidarios. Este enfoque busca mitigar los efectos adversos de la pérdida, proporcionando respaldo financiero y apoyo colectivo a las familias y comunidades afectadas, bajo el principio de mutualidad y previsión.

3.1.5. Mortalidad

La mortalidad en el ámbito de los fondos mutuales de solidaridad puede definirse como un fenómeno demográfico que refleja la frecuencia de fallecimientos dentro de una población específica en un periodo determinado. Este concepto es crucial para la sostenibilidad de dichos fondos, ya que constituye la base para diseñar y ajustar las estrategias actuariales que permitan garantizar la cobertura de beneficios a los asociados, tales como compensaciones por fallecimiento y otros apoyos solidarios.

En términos actuariales, la mortalidad se evalúa mediante tablas de vida o tasas específicas, que permiten estimar la probabilidad de fallecimiento de los miembros en

función de características como la edad, el género y las condiciones de salud. Estas métricas son esenciales para el cálculo de reservas técnicas y para la definición de políticas financieras en las organizaciones mutuales Bowers et al. (1997).

En un contexto de mutualidad y solidaridad, la mortalidad no solo tiene implicaciones financieras, sino también sociales, ya que impacta la percepción de equidad y sostenibilidad del sistema Hulme and Arun (2009). Esto refuerza la necesidad de un enfoque integral que combine análisis actuarial, estrategias de mitigación de riesgos y políticas de bienestar comunitario.

3.2. Marco teórico estadístico

3.2.1. Tabla de mortalidad

Es un instrumento o esquema teórico que permite medir las probabilidades de vida y de muerte de una población en función de la edad. Dicho esquema provee la más completa descripción estadística de la mortalidad, constituye la base del modelo de población estacionaria y su técnica es muy usada por los demógrafos, actuarios y otros investigadores en una gran variedad de problemas (Ortega, 1987). Este instrumento también llamado tabla de vida, representa un modelo de comportamiento de la evolución y constante decrecimiento de un colectivo, construida a partir de las observaciones de un colectivo real Debón et al. (2009). A continuación se muestra un ejemplo de una estructura base:

Tabla 3-1.: Estructura básica de la tabla de mortalidad (Debón et al., 2009)

TABLA DE MORTALIDAD				
x	$l(x)$	$d(x)$	$q(x)$	$p(x)$

Donde:

- x : Edad del individuo.
- $l(x)$: Indica el número de sobrevivientes a la edad x tomando un grupo inicial.
- $d(x)$: Indica el número de personas que fallecen a la edad x , sin alcanzar la edad $x + 1$.
- $q(x)$: Indica la probabilidad de fallecer a la edad x , sin alcanzar la edad $(x + 1)$.
- $p(x)$: Es la probabilidad que tiene un individuo de edad x de sobrevivir un año más, alcanzando la edad $(x+1)$.

De manera específica, la tabla de mortalidad puede dividirse en dos tipos de acuerdo con la forma en que se esté analizando la edad del individuo. Así pues, si dentro de la tabla la edad es analizada año a año, estamos hablando de una tabla de mortalidad completa, la cual

es muy usada para estudios a nivel demográfico, donde se presentan muertes en cada edad (grandes poblaciones). Si por el contrario la edad es analizada por intervalos (usualmente quinquenios), estamos hablando de una **tabla de mortalidad abreviada**, en este caso específico, la variable edad se presenta en forma de intervalos con amplitud de cinco años, lo que facilita la comprensión de la información sin perder un nivel adecuado de detalle. Esta agrupación permite analizar la dinámica poblacional de manera resumida, conservando la representatividad de cada cohorte etaria y es muy usada para casos donde la población objeto de estudio es relativamente pequeña.

3.2.2. Cohorte

Una cohorte da una especificación a un grupo en la población Ochoa (2015), y lo caracteriza de la siguiente manera:

1. El grupo consta de una población inicial de l_0 .
2. Cada miembro del grupo tiene una probabilidad q_x de muerte al iniciar la edad x .
3. Al grupo no ingresan otras personas fuera de los l_0 iniciales.
4. Los tiempos de supervivencia en cada grupo de análisis se asumen variables aleatorias independientes, lo que sugiere que no hay relación entre las causas de mortalidad entre las diferentes cohortes.

3.2.3. Tabla de mortalidad dinámica abreviada

El parámetro fundamental de la tabla de mortalidad es la edad, pero en el momento en que se entra a analizar de manera completa el fenómeno de mortalidad, se hace necesario tener en cuenta el tiempo físico (cronométrico) y el tiempo biométrico (edad), lo que da lugar a las tablas dinámicas de mortalidad Debón et al. (2009). En un contexto dinámico se asume que la mortalidad es función tanto de la edad como del año calendario Ortiz et al. (2012)

Tabla 3-2.: Estructura tabla de mortalidad dinámica abreviada (Ortiz et al., 2012)

Rango de edad	Año calendario				
x	t_0	t_1	t_2	t_3	...
0. $[0 - 5)$	m_{00}	m_{01}	m_{02}	m_{03}	...
1. $[5 - 10)$	m_{10}	m_{11}	m_{12}	m_{13}	...
2. $[10 - 15)$	m_{20}	m_{21}	m_{22}	m_{23}	...
...	...	...	...	...	...

Como ejemplo en los datos de este trabajo: i representa la cantidad de intervalos $i = 1, 2, 3, \dots 9$ y j representa la cantidad de periodos $j = 1, 2, 3, \dots 11$.

En el desarrollo de este trabajo se empleará la estructura presentada en la Tabla **3-2**, en cuanto a la formulación, y de acuerdo con Diaz Rojo (2016), se consideran las variables que se definen a continuación:

- x : Edad inferior de cada uno de los intervalos de edad.
- n : Amplitud del intervalo, incluye los años en cada intervalo de edad.
- P_x : Población expuesta correspondiente al intervalo de edad en el año (calendario) analizado.
- d_x : Incluye el número de sujetos muertos en ese intervalo de edad durante el año analizado.
- ${}_n a_x$: Tiempo promedio vivido en el intervalo con edad cumplida x , asumiendo que las muertes se distribuyen de manera uniforme dentro del rango de edad.

$$\frac{n}{2}$$

- ${}_n m_x$: Tasa central de mortalidad. Es el resultado de calcular el cociente entre las defunciones en el intervalo x y $x + n$ (es decir, d_x) y el número de personas en este rango de edad (P_x).

$${}_n m_x = \frac{d_x}{P_x}$$

- ${}_n q_x$: Probabilidad de muerte entre las edades x y $x + n$. Se calculan a partir de las tasas de mortalidad específicas para cada rango de edad. Debe interpretarse como la probabilidad de fallecer entre las edades del intervalo para el sujeto que ha sobrevivido hasta la edad x .

$${}_n q_x = \frac{n \cdot {}_n m_x}{1 + (n - {}_n a_x) \cdot {}_n m_x}$$

- l_x : Representa el número de individuos de la cohorte ficticia inicial (100,000 individuos) que llegan con vida a la edad x .
- ${}_n d_x$: Número de defunciones de la cohorte ficticia inicial que tienen lugar en individuos entre las edades x y $x + n$.

$${}_n d_x = {}_n l_x \cdot {}_n q_x$$

$$l_{x+n} = {}_n l_x - {}_n d_x$$

3.2.4. Modelo Lee-Carter (1992)

Dentro del contexto demográfico, el comportamiento de la mortalidad ha experimentado cambios significativos a lo largo del tiempo, impulsados por avances médicos, tecnológicos y sociales. Tradicionalmente, el análisis y las proyecciones de las tasas de mortalidad se realizaban mediante métodos deterministas, sin un marco estocástico formal que permitiera capturar la incertidumbre inherente a dichas estimaciones. También se empleaban

extrapolaciones simples, de tipo lineal o log-lineal, así como tablas de vida estáticas que asumían la invariabilidad de las tasas de mortalidad a lo largo del tiempo.

El modelo propuesto por Ronald D. Lee y Lawrence R. Carter en 1992 se consolidó como una de las metodologías más utilizadas para el análisis y proyección de la mortalidad, debido a su flexibilidad y parsimonia Booth et al. (2002). A través de su enfoque, es posible modelar y pronosticar la dinámica de la mortalidad poblacional, capturando tanto la evolución temporal general como las variaciones específicas por edad, mediante una combinación de técnicas de series de tiempo y un tratamiento sencillo pero efectivo de la estructura por edades.

El modelo asume que la tasa de central de mortalidad a la edad x en el año calendario t , $m_{x,t}$ está dada por:

$$m_{x,t} = e^{(a_x + b_x k_t + \epsilon_{x,t})} \quad \equiv \quad \ln(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \epsilon_{x,t}$$

Donde Diaz Rojo (2016) especifican los parámetros:

- $m_{x,t}$: Corresponde al valor central de la mortalidad para una determinada edad y un determinado año, conocida como la tasa de mortalidad específica o fuerza de mortalidad.
- a_x : Es el parámetro de forma que depende de la edad.
- b_x : Parámetro de sensibilidad que expresa como responde la tasa de mortalidad a cambios en k_t a lo largo de la edad.
- k_t : Es el índice que representa la tendencia de la mortalidad a lo largo del tiempo. Podrá ser negativo para así reflejar cambios en la dinámica de la tasa de mortalidad central.
- $\epsilon_{x,t}$: Representa el error aleatorio que no se explica por el modelo (con media 0 y varianza σ_ϵ^2).

Este modelo incluye dos restricciones establecidas por Lee and Carter (1992), las cuales son necesarias para garantizar la unicidad de la solución: $\sum_x b_x = 1$ y $\sum_t k_t = 0$. Estas condiciones eliminan la indeterminación asociada a la escala y traslación de los parámetros. En este trabajo, se implementará la segunda restricción fijando el parámetro $k_{t_0} = 0$ y garantizando que se cumpla también la primera restricción.

3.2.5. Análisis de residuos del modelo

El análisis de residuos por rango de edad y tiempo consiste en examinar las diferencias entre los valores observados y los estimados por un modelo de mortalidad, desglosadas por grupos de edad y periodos temporales. Este análisis permite identificar patrones sistemáticos de error que podrían indicar deficiencias del modelo, como supuestos no cumplidos, estructuras no capturadas o la necesidad de incorporar efectos adicionales

Según Booth et al. (2002), la evaluación gráfica de los residuos por edad y tiempo es una herramienta diagnóstica crucial para validar la adecuación del modelo Lee-Carter y otros modelos estocásticos de mortalidad, ya que ayuda a detectar sesgos sistemáticos en el ajuste.

3.2.6. Coeficiente de correlación de concordancia (CCC)

Es una medida introducida por (Lin, 1989) que cuantifica el grado de concordancia entre dos variables continuas, considerando tanto la precisión como la exactitud. A diferencia del coeficiente de Pearson, que evalúa únicamente la asociación lineal, el CCC incorpora la proximidad de las observaciones a la línea de identidad, proporcionando así una evaluación más completa del acuerdo entre métodos o modelos. Su valor oscila entre -1 y 1, donde 1 indica concordancia perfecta y 0 ausencia de concordancia.

Se expresa como:

$$CCC = \frac{2 \cdot Cov_{xy}}{S_x^2 + S_y^2 + (\bar{x} - \bar{y})^2}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{n=1}^n x_n \\ S_x^2 &= \frac{1}{n} \sum_{n=1}^n (x_n - \bar{x})^2 \\ Cov_{xy} &= \frac{1}{n} \sum_{n=1}^n (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})\end{aligned}$$

3.2.7. Modelos lineales generalizados (GLM)

La formulación original del modelo propuesto por Lee and Carter (1992) se basa en una representación log-lineal de las tasas de mortalidad específicas por edad y año, sin asumir explícitamente una distribución probabilística para los datos de conteo de muertes. En este enfoque, los parámetros se estiman mediante una descomposición en valores singulares (SVD) aplicada a una matriz de logaritmos de tasas de mortalidad. No obstante, esta metodología presenta limitaciones al no incorporar un marco estadístico que refleje adecuadamente la naturaleza discreta y aleatoria de los datos de mortalidad.

Para superar estas limitaciones y mejorar la consistencia estadística del modelo, diversos autores han propuesto una reformulación bajo el marco de los modelos lineales generalizados (GLM), utilizando el método de máxima verosimilitud para la estimación del conjunto de

parámetros $(a_x, b_x$ y $k_t)$. Este enfoque alternativo, basado en una distribución Poisson para los conteos de muertes, fue introducido inicialmente por Wilmoth (1993), formalizado por Brouhns et al. (2002), y posteriormente extendido por Renshaw and Haberman (2006). En esta versión, se asume que el número de muertes observadas para una edad x en el año t sigue una distribución Poisson con media $\lambda_{x,t} = P_{x,t} \cdot m_{x,t}$, donde $P_{x,t}$ representa la exposición al riesgo, y $m_{x,t}$ la tasa central de mortalidad.

$$d_{x,t} \sim \text{Poisson}(\lambda_{x,t}) = \text{Poisson}(P_{x,t} \cdot e^{(a_x + b_x k_t)})$$

De lo anterior, se deriva una forma equivalente del modelo:

$$\ln(d_{x,t}) = \ln(P_{x,t}) + a_x + b_x \cdot k_t + \epsilon_{x,t}$$

El término $\ln(P_{x,t})$, conocido como offset, se introduce en el modelo para ajustar por la exposición al riesgo, es decir, el tamaño de la población en riesgo de fallecer en una determinada edad x y año t . Su inclusión permite estimar directamente los efectos sobre la tasa de mortalidad, controlando por diferencias en la exposición entre edades o periodos, lo que garantiza que las estimaciones no se vean sesgadas por estas variaciones. Esta reformulación del modelo Lee-Carter ofrece ventajas importantes, especialmente cuando se trabaja con poblaciones pequeñas o con registros menos estables, ya que permite modelar directamente los conteos de muertes en lugar de las tasas. Además, al mantener la estructura log-bilineal original, facilita la interpretación de los efectos de edad y tiempo sobre la mortalidad, integrando de forma coherente la incertidumbre inherente al proceso de generación de los datos.

De acuerdo con lo descrito por Ochoa (2015) se busca encontrar los valores $\lambda = [\lambda_{x,t}]$ que maximizan la función de log-verosimilitud:

$$l(d, \lambda) = \sum_{x,t} d_{x,t} \ln(\lambda_{x,t} - d_{x,t}) - \ln(d_{x,t}!)$$

Lo cual es equivalente a maximizar la siguiente expresión con respecto a los parámetros a_x, b_x y k_t

$$l(a, b, k) = \sum_{x,t} d_{x,t} \ln(P_{x,t} \cdot e^{(a_x + b_x k_t)}) - P_{x,t} \cdot e^{(a_x + b_x k_t)}$$

En el marco del modelo lineal generalizado, la estimación de máxima verosimilitud se obtiene mediante la minimización de la función de devianza Ochoa (2015). Este procedimiento se lleva a cabo utilizando el método iterativo de Newton-Raphson. La función de devianza está definida como:

$$D(d_{x,t}, \hat{d}_{x,t}) = 2 \sum_{x,t} \omega_{x,t} \left(d_{x,t} \ln \left(\frac{d_{x,t}}{\hat{d}_{x,t}} \right) - (d_{x,t} - \hat{d}_{x,t}) \right)$$

Donde:

- $\hat{d}_{x,t} = P_{x,t} \cdot e^{(\hat{a}_x + \hat{b}_x \hat{k}_t)}$
- $\omega_{x,t} = 0$ si $d_{x,t} = 0$
- $\omega_{x,t} = 0$ si $d_{x,t} > 0$

Siguiendo con el documento, Ochoa (2015) indica que se aplica a cada parámetro $\theta = a_x, b_x, k_t$, el cual actualiza el valor de θ según la expresión:

$$\theta_{j+1} = \theta_j - \frac{\frac{\partial D}{\partial \theta}}{\frac{\partial^2 D}{\partial \theta^2}}$$

3.2.8. Locally estimated scatterplot smoothing

La regresión local, también conocida como LOESS (Locally Estimated Scatterplot Smoothing), es un método de suavizamiento no paramétrico que permite modelar relaciones no lineales entre variables sin requerir la especificación de una forma funcional global. Este enfoque se basa en el ajuste de regresiones lineales o cuadráticas a subconjuntos locales de los datos, asignando mayor peso a las observaciones más cercanas al punto de interés mediante funciones kernel. LOESS es especialmente útil cuando se busca capturar estructuras complejas de forma flexible y robusta frente al ruido presente en los datos. Esta metodología fue propuesta formalmente por Cleveland and Devlin (1988), quienes la describen como una estrategia eficaz para realizar ajustes locales en este tipo de contextos.

4. Metodología

En este capítulo se describe de manera detallada la metodología utilizada para el desarrollo de este trabajo, estableciendo las etapas necesarias para responder a la pregunta de investigación. La metodología se organiza en cuatro componentes fundamentales que integran desde la definición de la población objeto de estudio hasta la estimación del modelo estadístico seleccionado. Este diagrama metodológico permite visualizar la secuencia lógica y la relación entre las distintas fases, asegurando un enfoque sistemático y coherente en el proceso.

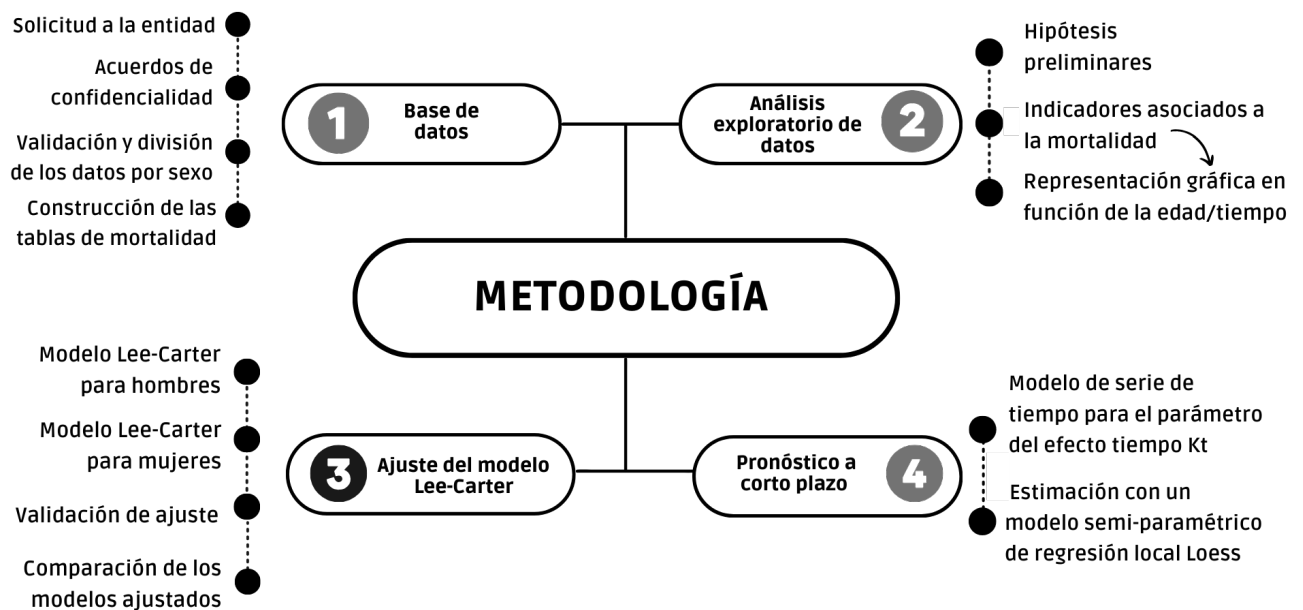


Figura 4-1.: Diagrama de metodología

4.1. Caracterización de la población

La población objeto de estudio está compuesta por los asociados a un fondo mutual de solidaridad que se ha tomado como ejemplo representativo, los cuales participan voluntariamente en un esquema de previsión social, cuyo propósito es brindar apoyo económico en eventos adversos como la enfermedad, la invalidez o la defunción. Este tipo de población se distingue por ser un grupo cerrado y definido, cuyas características demográficas y sociales difieren de las de la población general.

Los asociados suelen estar distribuidos en rangos de edad como jóvenes (entre 18 y 28 años), adultos (entre 29 y 59 años) y adultos mayores (60 años en adelante); la participación en este tipo de fondos suele estar vinculada a personas que se encuentran en etapas laborales activas o cerca a procesos de jubilación, estos asociados comparten condiciones laborales, sector económico y niveles socioeconómicos similares, y su permanencia en el fondo se encuentra condicionada al cumplimiento de requisitos como el pago regular de aportes. Particularmente, para este trabajo, la población se define por un rasgo distintivo: todos los asociados presentan niveles de formación académica correspondientes a estudiantes profesionales, técnicos, tecnólogos, profesionales titulados, o son familiares directos de los ya asociados. Esta característica permite establecer una población con rasgos homogéneos en términos educativos y laborales, lo que facilita el análisis y control de variables en las etapas posteriores del estudio.

La mortalidad dentro de este grupo puede presentar diferencias respecto a la población general, debido a factores como el acceso a servicios de salud, el nivel de conocimiento y auto cuidado, y el efecto de selección que implica que quienes se asocian tienden a ser más conscientes de su salud o más propensos a prever riesgos. Estos elementos deben ser considerados al momento de modelar la mortalidad, ya que impactan tanto la estructura por edades como la dinámica temporal de la mortalidad observada.

4.1.1. Fuente de información y depuración de datos

Con fines estrictamente académicos, el área de Actuaría del fondo mutual de solidaridad utilizado como caso de estudio proporcionó información detallada sobre la población expuesta y los eventos siniestrales ocurridos desde el mes de enero del año 2013 hasta la fecha de corte, 31 de diciembre de 2023. Este conjunto de datos abarca un total de 11 periodos anuales, los cuales constituyen la base para el análisis y modelación desarrollados en el presente estudio. Es importante resaltar que la información corresponde a experiencia real del fondo, lo que garantiza que los resultados reflejen las particularidades de su propia población. En aquellos rangos de edad o años en los que no se registraron defunciones, estos valores fueron considerados como ausencia de muertes y no como datos faltantes. Bajo este

criterio, la construcción de las tasas de mortalidad asume que la inexistencia de registros equivale a una tasa igual a cero para esa cohorte en el periodo analizado, evitando así sesgos en el ajuste posterior del modelo.

Previo a la construcción de las tablas de mortalidad, se llevó a cabo un proceso riguroso de depuración y organización de la base de datos inicial, con el propósito de garantizar una estructura adecuada y consistente para el análisis posterior. Este procedimiento incluyó, en primer lugar, la segmentación de la base por periodos mensuales, permitiendo que cada registro de muerte quedara asociado a un mes/año específico y facilitando un seguimiento detallado y preciso de los eventos de fallecimiento a lo largo del tiempo. Asimismo, se efectuó una clasificación por sexo (masculino y femenino), con el objetivo de distinguir el comportamiento de la mortalidad y capturar las posibles diferencias entre ambos grupos. Esta fase de procesamiento permitió obtener una hoja de datos sólida, confiable y bien estructurada para las siguientes etapas del análisis.

A continuación, se presenta un resumen de los datos suministrados, a partir de los cuales se extrajo la información relevante correspondiente a los fallecimientos de los asociados. Los registros de muertes se organizaron por periodos anuales y se distribuyeron mensualmente según la fecha de ocurrencia del evento, sin considerar la fecha de reclamación. Para mayor detalle, se remite al Anexo A.

Tabla 4-1.: Resumen de la información segmentada por sexo

	Sexo Masculino		Sexo Femenino		Población General	
Año	Expuestos	Fallecidos	Expuestos	Fallecidos	Expuestos	Fallecidos
2013	108.706	171	139.512	92	248.218	263
2014	109.979	196	143.187	115	253.166	311
2015	97.662	165	127.124	125	224.786	290
2016	99.811	134	130.845	112	230.656	246
2017	102.763	95	136.109	103	238.872	198
2018	106.543	97	143.325	70	249.868	167
2019	105.890	126	143.560	82	249.450	208
2020	106.915	173	144.370	119	251.285	292
2021	109.578	281	148.493	163	258.071	444
2022	109.892	107	148.896	108	258.788	215
2023	110.027	70	150.256	68	260.283	138
Total		1.615		1.157		2.772

En el proceso de depuración y estructuración de la base de datos, se identificó la presencia de un número considerable de ceros en los datos de defunciones para ciertas edades

puntuales, especialmente al considerar los registros por edades específicas. Esta situación era la esperada, dado que la población objeto de estudio, conformada por los asociados al fondo mutual de solidaridad, es relativamente pequeña y por ende el número de defunciones asociadas a una edad específica en muchas ocasiones es cero. La existencia de estos ceros refleja la baja frecuencia de eventos de muerte en determinados grupos etarios y periodos, lo cual introduce desafíos en la estimación de tasas de mortalidad estables y representativas.

Nota: La fecha de reclamación hace referencia al día calendario en el que el/los beneficiarios tramitan la solicitud de gestión para la reclamación, ya sea del pago que corresponde al valor pactado en caso de ocurrencia del evento no deseado o auxilio funerario del asociado fallecido.

4.1.2. Análisis de ceros

El análisis de ceros se centró en identificar y evaluar la presencia de valores nulos en las observaciones de mortalidad específicas por edad, es decir, aquellos casos en los que no se registraron defunciones en determinados grupos etarios durante algunos de los periodos considerados. Este fenómeno es común en estudios basados en poblaciones relativamente pequeñas, donde la baja frecuencia de muertes en ciertos intervalos genera distribuciones con alta dispersión y vacíos de información.

La exploración realizada permitió cuantificar la magnitud de estos ceros, identificar los rangos etarios más afectados y analizar su distribución. La presencia recurrente de ceros dificulta la construcción de tablas de mortalidad completas, ya que introduce inestabilidad en las estimaciones de las tasas de mortalidad y puede sesgar la interpretación de las tendencias. Por esta razón, se optó por la construcción de tablas de mortalidad abreviadas, que agrupan las edades en intervalos más amplios. Este procedimiento atenúa la variabilidad aleatoria, mitiga los efectos de los ceros y produce estimaciones más consistentes y estadísticamente estables, a la vez que preserva la representatividad de la información. En consecuencia, este enfoque no solo responde a una necesidad metodológica derivada de la naturaleza de los datos, sino que también asegura la validez de las proyecciones y el ajuste adecuado de modelos como el de Lee-Carter en el análisis posterior.

Tabla 4-2.: Resumen del análisis de ceros en la base de datos

Sexo	Variable	Obs. con cero	Porc. (%) de ceros
Femenino	Expuestos	87	8.79
	Fallecidos	607	61.31
Masculino	Expuestos	84	8.48
	Fallecidos	538	54.34
Total general	Expuestos	71	7.17
	Fallecidos	478	48.28

En ocasiones se presentan edades específicas sin presencia de asociados (cero exposición) o edades específicas que no registran fallecimiento (cero muertes). Al desglosar esta información por género, se observa que en el caso de la población femenina, un 8.79 % de los registros edad/periodo correspondientes a la exposición presentan valor cero, mientras que esta proporción asciende al 61.31 % en el caso de los registros de fallecimientos. Para el género masculino, los porcentajes de ceros son de 8.48 % en exposición y 54.34 % en fallecimientos. En términos generales, el total de registros con valor cero corresponde al 7.17 % para la exposición y 48.28 % para los fallecimientos. Esta elevada proporción de ceros en los fallecimientos puede atribuirse al tamaño relativamente pequeño de la población objeto de estudio lo que genera registros de mortalidad poco frecuentes en ciertas combinaciones de edad y periodo. Esta característica justifica la necesidad de implementar **tablas de mortalidad abreviadas**, con el fin de suavizar la variabilidad y proporcionar estimaciones más estables en presencia de registros nulos.

4.2. Agrupación por rangos de edad

Con el propósito de mantener la coherencia con la estructura del sistema tarifario del fondo mutual de solidaridad, los datos se agruparon en rangos de edad (Ver Tabla 4-3) estos reflejan los lineamientos institucionales utilizados para la segmentación y análisis actuarial. La aplicación de estos grupos de edad facilita la homogeneización de los datos, asegurando comparabilidad y consistencia en el análisis de mortalidad y siniestralidad dentro del contexto particular del fondo. Además, esta clasificación por rangos permite identificar de forma más precisa las tendencias de mortalidad y exposición en subpoblaciones con características etarias similares, lo cual es esencial para la construcción de las tablas de mortalidad abreviadas que se presentan posteriormente.

Tabla 4-3.: Agrupación por rangos de edad

Grupo	1	2	3	4	5	6
Rango de edad	18-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
Grupo	7	8	9	10	11	12
Rango de edad	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	75 >

4.3. Construcción de tablas de mortalidad dinámicas abreviadas para la población de estudio

Las tablas de mortalidad constituyen una herramienta fundamental para describir el comportamiento de la mortalidad en una población determinada. En esta sección se presenta la construcción de tablas de mortalidad dinámicas abreviadas, elaboradas a partir de la información recopilada para la población objeto de estudio, construida a partir de las edades y años calendario. La denominación “dinámicas” hace referencia a que las tablas se construyen para distintos periodos (años), permitiendo observar la evolución de la mortalidad a lo largo del tiempo. Por su parte, el carácter “abreviado” se debe a que los datos disponibles se encuentran agrupados en rangos de edad ya definidos, lo cual implica una adaptación en la metodología tradicional de elaboración de tablas completas.

El proceso metodológico desarrollado parte del cálculo de tasas de mortalidad específicas por rango de edad ${}_n m_x$ utilizando como base el número de defunciones y la exposición al riesgo para cada grupo. Posteriormente, estas tasas se organizan en tablas por los periodos establecidos.

4.3.1. Particularidades de las tablas dinámicas de mortalidad abreviadas

Para este análisis se tiene en cuenta variables fundamentales para describir el comportamiento de la mortalidad en la población objeto de estudio. La variable *periodo* indica el año calendario correspondiente a cada observación, lo que permite construir series temporales y estudiar la evolución de la mortalidad. El *rango_edad* representa los intervalos etarios definidos en la Tabla 4-3, lo cual caracteriza su naturaleza abreviada. La variable n denota la amplitud del intervalo de edad en años.

Las variables ${}_n P_x$ y ${}_n D_x$ corresponden respectivamente a la población expuesta al riesgo de morir y al número de defunciones ocurridas dentro de cada grupo etario y periodo. A partir de estas se calcula la tasa central de mortalidad del intervalo ${}_n m_x = \frac{{}_n D_x}{{}_n P_x}$. El valor de ${}_n a_x$ representa el número promedio de años vividos en el intervalo por quienes mueren

dentro de él, estimado con supuestos estándar cuando no se cuenta con datos individuales, como lo es en este caso, se toma el punto medio de cada intervalo asumiendo una distribución uniforme de las muertes dentro de cada grupo etario; para el último grupo abierto se analiza la cantidad de individuos después de los 90 años, obteniendo la información resumida aquí:

Tabla 4-4.: Justificación cálculo ${}_na_x$

Periodo	Expuestos			Fallecidos		
	Mayores de 90 años	Total	%	Mayores de 90 años	Total	%
2013	52	248.218	0,02 %	0	263	0,00 %
2014	60	253.166	0,02 %	0	311	0,00 %
2015	77	224.786	0,03 %	1	290	0,34 %
2016	86	230.656	0,04 %	2	246	0,81 %
2017	98	238.872	0,04 %	0	198	0,00 %
2018	128	249.868	0,05 %	0	167	0,00 %
2019	160	249.450	0,06 %	0	208	0,00 %
2020	229	251.285	0,09 %	0	292	0,00 %
2021	254	258.071	0,10 %	0	444	0,00 %
2022	308	258.788	0,12 %	0	215	0,00 %
2023	322	260.283	0,12 %	0	138	0,00 %

En la Tabla 4-4 se observa que, para las edades superiores a los 90 años, los datos no superan en ningún caso el 1 % de la población general total. Por esta razón, se define una amplitud de $n = 15$ años para el último intervalo de edad abierto, acotando este último rango a $(75-90]$ para un correcto cálculo de ${}_na_x$. A continuación, se calcula la probabilidad de morir dentro del intervalo, ${}_nq_x$, una variable clave en la construcción de tablas de mortalidad, a partir de las tasas centrales de mortalidad (${}_nm_x$) y los valores estimados de ${}_na_x$. Finalmente, se incorporan los elementos esenciales de la tabla de vida para una cohorte hipotética de 100,000 individuos: l_x , que representa el número de sobrevivientes al inicio de cada intervalo, y d_x , el número de muertes estimadas en dicho intervalo. Estas variables permiten construir una tabla de vida coherente por periodo, que constituye la base para el análisis del comportamiento y la proyección de la mortalidad.

Según lo indicado por el actuario responsable del fondo mutual de solidaridad, la población objeto de estudio presenta un proceso de maduración hasta los 64 años (Tabla 4-3, grupo del 1 al 9), considerando la naturaleza particular del negocio. En consecuencia, a partir de dicha edad, se requiere realizar una estimación complementaria de la mortalidad utilizando como referencia las tablas colombianas de mortalidad de asegurados vigentes, con el fin de proyectar adecuadamente los eventos en edades avanzadas.

4.4. Análisis exploratorio de datos de las tablas de mortalidad

Con el propósito de identificar tendencias significativas en la base de datos proveniente del Fondo Mutual, se lleva a cabo un análisis exploratorio de datos mediante representaciones gráficas de las tabla dinámicas de mortalidad construidas. En particular, se grafican las tasas de mortalidad específicas ${}_n m_x$ en su escala logarítmica, con el fin de facilitar la visualización de sus variaciones relativas y detectar posibles patrones o tendencias muy marcadas. Este enfoque permite examinar la evolución temporal de la mortalidad por grupos de edad, así como identificar irregularidades, quiebres estructurales o comportamientos atípicos en el fenómeno bajo estudio. El análisis gráfico, por tanto, constituye una herramienta preliminar fundamental para la comprensión de la dinámica de la mortalidad en la población de interés y orienta las decisiones metodológicas posteriores, además de reflejar la realidad del negocio a través de estas curvas de mortalidad.

4.5. Ajuste del modelo Lee-Carter

A partir de las tablas dinámicas de mortalidad abreviadas construidas previamente y considerando las recomendaciones metodológicas proporcionadas por el Fondo Mutual de Solidaridad, se procede al ajuste del modelo de Lee-Carter bajo el supuesto de distribución Poisson para el número de muertes por rango de edad (${}_n D_x$). Para ello, se emplea el software estadístico R, implementando el modelo mediante la función `gnm()`. Este modelo permite estimar los conteos de muertes observadas (${}_n D_x$) como variable respuesta con distribución Poisson, incorporando como *offset* el logaritmo del número de personas expuestas al riesgo ($\log({}_n P_x)$) y utilizando los sobrevivientes ficticios (l_x) como ponderadores. La especificación del modelo es la siguiente:

```
LC.Poiss <- gnm(nDx ~ -1 + rango_edad + Mult(rango_edad, periodo),
               offset = log(nPx),
               weights = lx,
               constrain = c(a + 1, a + b + 1),
               constrainTo = c(1, 0),
               family = poisson(link = "log"),
               data = base,
               start = c(aini, bini, kini))
```

En esta formulación, se considera una descomposición multiplicativa de los efectos de edad y periodo, donde *Mult* (*rango_edad*, *periodo*) representa la interacción principal del modelo Lee-Carter. Las restricciones se imponen sobre los parámetros para garantizar la unicidad de la solución, fijando la suma de los coeficientes de edad a uno y la media de los

coeficientes de tiempo a cero. El vector *start* contiene los valores iniciales utilizados para la estimación iterativa de los parámetros del modelo. Este mismo proceso se lleva a cabo para las tablas segregadas por sexo para los grupos de edad establecidos, desde los 18 hasta los 64 años.

Nota: La extensión del q_x estimado resultado del modelo Lee-Carter se realiza desde los 65 hasta los 100 años, multiplicando sucesivamente las tasas proyectadas por el factor de crecimiento promedio observado en las tablas de la Superintendencia Financiera de Colombia (gradiente). Esta técnica asegura una transición suave entre el modelo estadístico ajustado hasta los 64 años y las tasas extrapoladas, manteniendo la estabilidad y realismo actuarial en los tramos de edad superiores. Todo esto se muestra en la siguiente sección 4.6.

4.5.1. Análisis de residuos: ajuste de los modelos

En la evaluación del ajuste de los modelos mediante un análisis de residuos se puede identificar posibles patrones sistemáticos no capturados por el modelo, así como validar los supuestos de homocedasticidad y aleatoriedad. Los residuos se calculan como la diferencia entre el logaritmo de las tasas de mortalidad observadas ($\ln m_{x,t}$) y las tasas estimadas por el modelo ($\hat{m}_{x,t}$), de acuerdo con la siguiente expresión:

$$e_{x,t} = \ln(m_{x,t}) - (a_x + b_x \cdot k_t)$$

donde x representa el grupo de edad y t el año calendario.

El análisis de residuos se realiza de forma desagregada por grupos etarios y por periodo, con el propósito de evaluar los siguientes aspectos:

- La presencia de patrones sistemáticos o tendencias no explicadas, lo cual indicaría una especificación inadecuada del modelo.
- Evidencia de heterocedasticidad, es decir, variaciones no constantes en la varianza de los residuos a través del tiempo o entre grupos de edad.
- La posible necesidad de incorporar términos adicionales al modelo, como efectos de cohorte o componentes no lineales.

Un patrón de residuos aleatorio, sin tendencia aparente y centrado en cero, sugiere un buen ajuste del modelo a los datos observados. Este análisis constituye una etapa crucial en la validación del modelo, ya que permite garantizar la robustez de las proyecciones futuras de mortalidad y detectar posibles limitaciones estructurales en la formulación del modelo.

Adicionalmente, se usa el gráfico de dispersión entre los valores observados y los valores ajustados de las tasas de mortalidad, con el fin de visualizar la calidad del ajuste

proporcionado por el modelo. Un buen ajuste se refleja en una alineación cercana de los puntos respecto a la línea de identidad ($y = x$), lo que indica que las predicciones del modelo son consistentes con los datos reales. Para cuantificar esta concordancia de manera estadística, se calcula el coeficiente de correlación de concordancia (CCC, por sus siglas en inglés), el cual combina medidas de precisión y exactitud. Esta métrica proporciona una validación adicional del modelo, especialmente útil cuando se desea evaluar su desempeño de manera agregada en distintos grupos etarios y periodos de tiempo.

4.6. Tablas colombianas de mortalidad de los asegurados

Las tablas de mortalidad de asegurados en Colombia constituyen herramientas esenciales para las aseguradoras y entidades del sector solidario, ya que permiten evaluar los riesgos asociados a los contratos de seguros de vida y fondos mutuales. Estas tablas se elaboran a partir de datos empíricos recolectados de la experiencia real de mortalidad de asegurados, reflejando las particularidades de cada sexo mediante la construcción de curvas $q(x)$ diferenciadas (curva masculina y curva femenina). En este estudio se emplea la tabla colombiana de mortalidad para asegurados por sexo, que abarca la experiencia observada entre el 1 de enero de 1998 y el 31 de diciembre de 2003. Para ver las tablas, se remite al Anexo B.

La adopción de estas tablas se justifica por su capacidad de ofrecer una base técnica y actuarial robusta, que refleja las características del mercado asegurador colombiano. Esto permite estimar de manera más precisa las tasas de mortalidad en los segmentos de población que, por su tamaño y especificidad, no presentan un comportamiento suficientemente madurado del fenómeno (especialmente en las edades a partir de los 65 años), y cuyas características pueden diferir de las observadas en la base de datos interna utilizada en este estudio.

4.6.1. Construcción de la tabla general con base en la información de la superintendencia financiera

A partir de las tablas de mortalidad publicadas por la Superintendencia Financiera de Colombia, se construye una tabla combinada general, que resume el comportamiento de la población asegurada de manera global. Estas tablas oficiales comienzan en la edad de 20 años; por tanto, para cubrir el rango etario completo de interés, se ha optado por extenderlas hacia las edades de 18 y 19 años, asignando a estas edades individuales la misma probabilidad de fallecimiento $q(x)$ que se registra en la edad de inicio (20 años), de acuerdo con lo estipulado en la Resolución 1112 de 2007.

Tabla 4-5.: Tabla colombiana de mortalidad de los asegurados general (construida)

MASCULINO				FEMENINO				GENERAL			
x	$l(x)$	$d(x)$	$q(x)$	x	$l(x)$	$d(x)$	$q(x)$	x	$l(x)$	$d(x)$	$q(x)$
18	100.000	356	0,00356	18	100.000	130	0,00130	18	200.000	486	0,00243
19	99.644	355	0,00356	19	99.870	130	0,00130	19	199.514	485	0,00243
20	99.289	353	0,00356	20	99.740	130	0,00130	20	199.029	483	0,00243
21	98.936	355	0,00359	21	99.611	134	0,00134	21	198.546	489	0,00246
22	98.580	358	0,00364	22	99.477	138	0,00138	22	198.057	496	0,00250
23	98.222	361	0,00368	23	99.339	141	0,00142	23	197.561	502	0,00254
24	97.860	363	0,00371	24	99.199	145	0,00146	24	197.059	508	0,00258
25	97.497	363	0,00373	25	99.054	148	0,00149	25	196.551	511	0,00260
26	97.134	364	0,00375	26	98.906	152	0,00153	26	196.040	516	0,00263
27	96.769	364	0,00377	27	98.755	155	0,00157	27	195.524	519	0,00265
28	96.405	364	0,00378	28	98.600	159	0,00161	28	195.005	523	0,00268
29	96.041	364	0,00379	29	98.442	162	0,00164	29	194.482	526	0,00270
30	95.676	363	0,00380	30	98.280	166	0,00168	30	193.956	529	0,00273
31	95.313	363	0,00381	31	98.114	170	0,00173	31	193.427	533	0,00276
32	94.949	363	0,00383	32	97.945	174	0,00177	32	192.894	537	0,00278
33	94.586	362	0,00383	33	97.771	179	0,00183	33	192.357	541	0,00281
34	94.224	363	0,00386	34	97.593	184	0,00188	34	191.816	547	0,00285
35	93.860	363	0,00387	35	97.409	189	0,00194	35	191.269	552	0,00289
36	93.497	362	0,00388	36	97.221	193	0,00199	36	190.717	556	0,00291
37	93.134	362	0,00389	37	97.027	198	0,00205	37	190.162	561	0,00295
38	92.772	362	0,00391	38	96.829	203	0,00210	38	189.601	566	0,00298
39	92.410	362	0,00392	39	96.625	209	0,00217	39	189.035	572	0,00303
40	92.047	363	0,00395	40	96.416	216	0,00224	40	188.463	580	0,00308
41	91.684	364	0,00397	41	96.199	222	0,00231	41	187.883	587	0,00312
42	91.319	365	0,00400	42	95.977	229	0,00239	42	187.296	595	0,00318
43	90.954	366	0,00403	43	95.748	235	0,00246	43	186.702	602	0,00322
44	90.588	368	0,00407	44	95.512	242	0,00254	44	186.100	611	0,00328
45	90.219	369	0,00409	45	95.270	249	0,00262	45	185.489	619	0,00334
46	89.850	371	0,00413	46	95.020	256	0,00270	46	184.870	628	0,00340
47	89.478	373	0,00417	47	94.764	263	0,00278	47	184.243	637	0,00346
48	89.105	376	0,00422	48	94.501	271	0,00287	48	183.606	648	0,00353
49	88.729	381	0,00430	49	94.230	281	0,00298	49	182.958	663	0,00362
50	88.348	389	0,00441	50	93.948	293	0,00312	50	182.296	682	0,00374
51	87.958	401	0,00456	51	93.655	308	0,00329	51	181.613	709	0,00391
52	87.557	419	0,00479	52	93.347	328	0,00352	52	180.904	747	0,00413

Tabla 4-5 continuación de la tabla

MASCULINO				FEMENINO				GENERAL			
53	87.138	442	0,00507	53	93.019	352	0,00379	53	180.157	794	0,00441
54	86.696	473	0,00545	54	92.667	383	0,00413	54	179.363	856	0,00477
55	86.224	509	0,00591	55	92.284	420	0,00455	55	178.507	929	0,00521
56	85.714	556	0,00649	56	91.864	466	0,00507	56	177.578	1.022	0,00575
57	85.158	611	0,00717	57	91.398	520	0,00569	57	176.556	1.130	0,00640
58	84.548	674	0,00797	58	90.878	582	0,00641	58	175.426	1.257	0,00716
59	83.874	745	0,00888	59	90.296	653	0,00724	59	174.169	1.398	0,00803
60	83.129	820	0,00987	60	89.642	729	0,00813	60	172.771	1.549	0,00897
61	82.309	897	0,01089	61	88.913	809	0,00910	61	171.222	1.705	0,00996
62	81.412	972	0,01194	62	88.104	889	0,01009	62	169.517	1.861	0,01098
63	80.440	1.047	0,01301	63	87.216	969	0,01112	63	167.656	2.016	0,01202
64	79.394	1.111	0,01399	64	86.246	1.042	0,01208	64	165.640	2.153	0,01300
65	78.283	1.171	0,01495	65	85.204	1.113	0,01306	65	163.487	2.284	0,01397
66	77.112	1.223	0,01586	66	84.091	1.177	0,01400	66	161.203	2.400	0,01489
67	75.889	1.272	0,01676	67	82.914	1.239	0,01494	67	158.803	2.511	0,01581
68	74.617	1.347	0,01806	68	81.675	1.329	0,01627	68	156.292	2.676	0,01712
69	73.270	1.403	0,01915	69	80.347	1.399	0,01742	69	153.616	2.802	0,01824
70	71.867	1.467	0,02041	70	78.947	1.479	0,01874	70	150.814	2.946	0,01953
71	70.400	1.547	0,02197	71	77.468	1.578	0,02037	71	147.868	3.125	0,02113
72	68.853	1.644	0,02388	72	75.890	1.695	0,02233	72	144.743	3.339	0,02307
73	67.209	1.777	0,02644	73	74.196	1.850	0,02494	73	141.405	3.627	0,02565
74	65.432	1.943	0,02970	74	72.346	2.045	0,02826	74	137.777	3.988	0,02894
75	63.489	2.145	0,03378	75	70.301	2.279	0,03242	75	133.789	4.424	0,03306
76	61.344	2.380	0,03880	76	68.022	2.554	0,03755	76	129.366	4.934	0,03814
77	58.964	2.647	0,04489	77	65.467	2.868	0,04380	77	124.431	5.515	0,04432
78	56.317	2.950	0,05238	78	62.600	3.227	0,05154	78	118.917	6.176	0,05194
79	53.367	3.335	0,06249	79	59.373	3.681	0,06200	79	112.740	7.017	0,06224
80	50.032	3.791	0,07577	80	55.692	4.219	0,07576	80	105.724	8.010	0,07576
81	46.241	4.211	0,09106	81	51.473	4.688	0,09107	81	97.714	8.899	0,09107
82	42.030	4.381	0,10423	82	46.785	4.876	0,10423	82	88.815	9.257	0,10423
83	37.649	4.513	0,11986	83	41.909	5.023	0,11985	83	79.558	9.536	0,11986
84	33.137	4.535	0,13684	84	36.886	5.048	0,13685	84	70.023	9.582	0,13685
85	28.602	4.434	0,15503	85	31.838	4.936	0,15504	85	60.440	9.370	0,15504
86	24.168	4.274	0,17686	86	26.902	4.758	0,17685	86	51.070	9.032	0,17686
87	19.894	4.033	0,20274	87	22.144	4.489	0,20273	87	42.038	8.522	0,20273
88	15.860	3.680	0,23200	88	17.655	4.095	0,23196	88	33.515	7.775	0,23198
89	12.181	3.234	0,26549	89	13.560	3.600	0,26547	89	25.740	6.833	0,26548

Tabla 4-5 continuación de la tabla

MASCULINO				FEMENINO				GENERAL			
90	8.947	2.706	0,30241	90	9.960	3.011	0,30232	90	18.907	5.717	0,30236
91	6.241	2.123	0,34012	91	6.949	2.363	0,34003	91	13.190	4.486	0,34007
92	4.119	1.573	0,38187	92	4.586	1.751	0,38191	92	8.705	3.324	0,38189
93	2.546	1.089	0,42785	93	2.835	1.213	0,42787	93	5.380	2.302	0,42786
94	1.457	697	0,47853	94	1.622	776	0,47847	94	3.078	1.473	0,47850
95	760	405	0,53333	95	846	451	0,53302	95	1.605	856	0,53317
96	354	210	0,59384	96	395	234	0,59343	96	749	445	0,59363
97	144	95	0,66207	97	161	106	0,65839	97	305	201	0,66013
98	49	36	0,73469	98	55	40	0,72727	98	104	76	0,73076
99	13	11	0,84615	99	15	12	0,80000	99	28	23	0,82138
100	2	2	1,00000	100	3	3	1,00000	100	5	5	1,00000

La nueva Tabla **4-5**, que servirá como base para la estimación de tasas de mortalidad en la población general a partir de los 65 años, se obtiene mediante un ajuste ponderado de los valores de la variable $d(x)$ (que representa el número de fallecidos en cada edad). Este ajuste se realiza de manera que se preserven las proporciones relativas entre hombres y mujeres en la población asegurada de acuerdo con la probabilidad de fallecimiento ya definido. De este modo, se logra construir un perfil de mortalidad más representativo del mercado asegurador, adecuado para la estimación de tasas para edades en las cuales no se tenga un comportamiento madurado del fenómeno.

4.6.2. Cálculo del gradiente para las curvas $q(x)$

Para realizar la extensión de las tasas de mortalidad estimadas con el modelo Lee-Carter a edades superiores a los 65 años, se recurre al análisis del comportamiento de las probabilidades de fallecimiento calculadas a partir de la Tabla **4-5**. Específicamente, se analiza el gradiente de $q(x)$, entendido como el cambio relativo entre una edad y la siguiente, definido por:

$$\Delta q(x_i) = \frac{q(x_i + 1)}{q(x_i)}$$

Este gradiente representa el crecimiento relativo de la probabilidad de fallecimiento entre edades consecutivas, lo cual permite identificar la pendiente o tendencia con que aumenta la mortalidad; a partir del análisis del gradiente en los tramos de edad entre los 65 y los 100 años en las tablas oficiales, se extrae un patrón promedio de crecimiento que sirve como base para estimar las tasas de mortalidad en la población objeto de estudio, conservando la coherencia con la experiencia nacional aseguradora.

4.7. Pronóstico a corto plazo (regresión Loess)

El modelo de Lee-Carter incluye en su utilidad la proyección de la tasa central de mortalidad $m_{x,t}$ la cual se logra mediante la extrapolación del componente temporal del modelo, representado por el parámetro k_t . Para realizar dicha proyección, se modela la evolución de este parámetro como una serie de tiempo, permitiendo así estimar el comportamiento futuro de la mortalidad a partir de las tendencias observadas. En este trabajo, se adopta un enfoque semiparamétrico para la estimación de la trayectoria de k_t , utilizando un suavizamiento local mediante el método *Loess* (Local Polynomial Regression). Este método permite ajustar una curva flexible a los valores históricos de k_t , asignando mayor peso a las observaciones cercanas en el tiempo y disminuyendo la influencia de aquellas más alejadas.

Este procedimiento resulta especialmente adecuado para fenómenos con comportamiento temporal no lineal, como es el caso de la mortalidad, ya que evita imponer una estructura paramétrica rígida sobre la dinámica de k_t . Una vez estimada la serie suavizada, se utilizan los parámetros resultantes en la fórmula original del modelo para obtener las proyecciones de mortalidad para años futuros.

Aplicación del método

Se construye una serie de tiempo a partir de los valores históricos de k_t , con frecuencia anual a partir del año 2013. Posteriormente, se ajusta el modelo LOESS utilizando un grado de suavizamiento aplicado a la serie, y el parámetro "surface = direct" para utilizar una interpolación directa. El código utilizado en el software R, es el siguiente:

```
ktproyG <- ktlc.G
kt.G <- ts(ktproyG, frequency = 1, start = 2013)
tG <- seq(2013, by = 1, length.out = length(ktproyG))
gnm.G <- loess(kt.G ~ tG, span = 0.65,
               control = loess.control(surface = "direct"))

ttG <- 2024
pr.gnm.G <- predict(gnm.G, newdata = data.frame(tG = ttG))
mx_projG <- matrix(NA, nrow = length(axlc.G), ncol = length(ttG),
                  dimnames = list(unique(base$range_edad), ttG))

for (i in 1:length(ttG)) {
  mx_projG[, i] <- exp(axlc.G + bxlc.G * pr.gnm.G[i])
}
```

```
kt_combined_G <- c(ktlc.G, pr.gnm.G)    #valores estimados + proyectados  
t_combined_G <- c(tG, ttG)
```

Utilidad del enfoque

El suavizamiento LOESS permite capturar de forma flexible y robusta la tendencia subyacente en la evolución temporal de k_t , sin imponer una estructura paramétrica rígida como la linealidad o la estacionaridad. Esta propiedad resulta especialmente útil para modelar fenómenos con comportamiento no lineal, como la mortalidad, ya que permite preservar la variabilidad local y evitar sesgos inducidos por sobreajuste o subajuste. En resumen, este enfoque ofrece una herramienta eficiente para generar proyecciones de mortalidad basadas en patrones históricos, respetando la complejidad dinámica del fenómeno y facilitando su implementación computacional.

Se utiliza la misma metodología para el modelo segregado por sexo (masculino y femenino).

5. Resultados

En este capítulo se presentan los principales hallazgos obtenidos tras la aplicación del modelo de Lee-Carter con distribución Poisson a la población de un fondo mutual de solidaridad, diferenciando entre población general, hombres y mujeres. La estimación se realiza con base en las tablas dinámicas de mortalidad construidas previamente a partir de los datos, y permite modelar la evolución temporal de la mortalidad para cada grupo. Adicionalmente, con el propósito de completar la estimación de las tasas de mortalidad para edades superiores a los 64 años, se implementa una metodología de extensión basada en el acople de los gradientes de incremento de la mortalidad derivados de las tablas de mortalidad de los asegurados, publicada por la Superintendencia Financiera de Colombia. Estas curvas suavizadas y extendidas permiten aproximar una visualización completa del comportamiento de la mortalidad hasta los 100 años para cada periodo observado, lo cual es requerido por la institución para el establecimiento de tarifas de los productos actuariales.

Los resultados se organizan en secciones específicas para cada grupo poblacional, presentando tanto los parámetros estimados del modelo como las curvas de mortalidad suavizadas y extendidas, lo cual constituye la base para las proyecciones y el análisis comparativo posterior.

5.1. Análisis exploratorio de datos

Previo al ajuste del modelo, se realizó un análisis exploratorio del logaritmo de las tasas centrales de mortalidad ${}_n m_x$, variable que se encuentra en las tablas dinámicas abreviadas para cada año. Este análisis se llevó a cabo mediante representaciones gráficas con el fin de identificar posibles patrones temporales y comportamientos diferenciales según los distintos rangos de edad. Las gráficas permiten visualizar la evolución de la mortalidad a lo largo del tiempo, así como detectar posibles irregularidades, puntos atípicos o tendencias específicas que pueden influir en la modelación posterior. La representación gráfica de las tasas facilita además una comprensión más profunda de la estructura de los datos y sirve como base diagnóstica para validar la pertinencia de aplicar un modelo dinámico como el propuesto por Lee-Carter.

Tasas de mortalidad por edades (población general): 2013-2023

La utilización de la escala logarítmica permite resaltar las diferencias relativas entre años y edades, facilitando la detección de posibles anomalías, rupturas o cambios en la tendencia de la mortalidad en determinados subgrupos etarios o temporales. Este análisis preliminar resulta fundamental para evaluar la calidad y estabilidad de los datos, así como para sustentar la posterior aplicación del modelo.

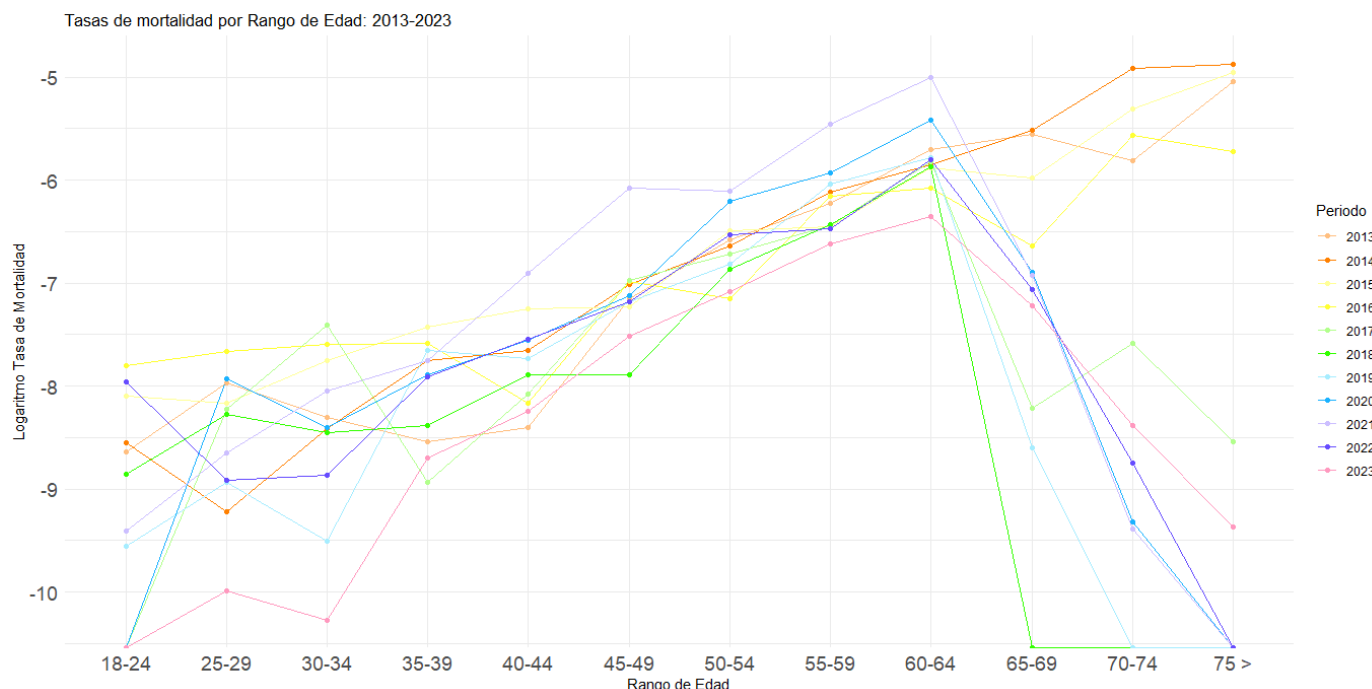


Figura 5-1.: Tasas de mortalidad población general para los rangos de edad definidos

La Figura 5-1 muestra la evolución de las tasas centrales de mortalidad, expresadas en escala logarítmica, para cada año del periodo 2013–2023, desagregadas por rangos de edad. Esta representación permite identificar visualmente las tendencias generales del comportamiento de la mortalidad en la población analizada. Se observa una clara tendencia ascendente de la mortalidad conforme aumenta la edad, lo cual es coherente con el comportamiento esperado de esta variable. Sin embargo, a partir de los 65 años se presentan ciertas fluctuaciones, posiblemente asociadas a la escasez de datos en estos rangos etarios. Esta situación se relaciona con uno de los productos ofrecidos por el fondo —Perseverancia 60, 62, 65 o 70 años— que se activa al alcanzar la edad estipulada. Una vez otorgado este beneficio, muchos asociados finalizan su permanencia en el fondo, lo cual reduce significativamente el número de expuestos en estos grupos de edad avanzada. Esta dinámica confirma, de forma preliminar, la hipótesis planteada por el actuario del fondo mutual de solidaridad, quien advirtió que, a partir de este umbral etario, las tasas de mortalidad deben proyectarse mediante metodologías complementarias al modelo de Lee-Carter, con el fin de reducir la variabilidad y el ruido estadístico en las estimaciones.

Por otro lado, en los grupos etarios más jóvenes (18-34 años), también se evidencia una alta variabilidad, posiblemente atribuida al bajo número de defunciones registradas, lo cual responde a la naturaleza y características de los datos disponibles.

Tasas de mortalidad por edades (sexo femenino y masculino): 2013-2023

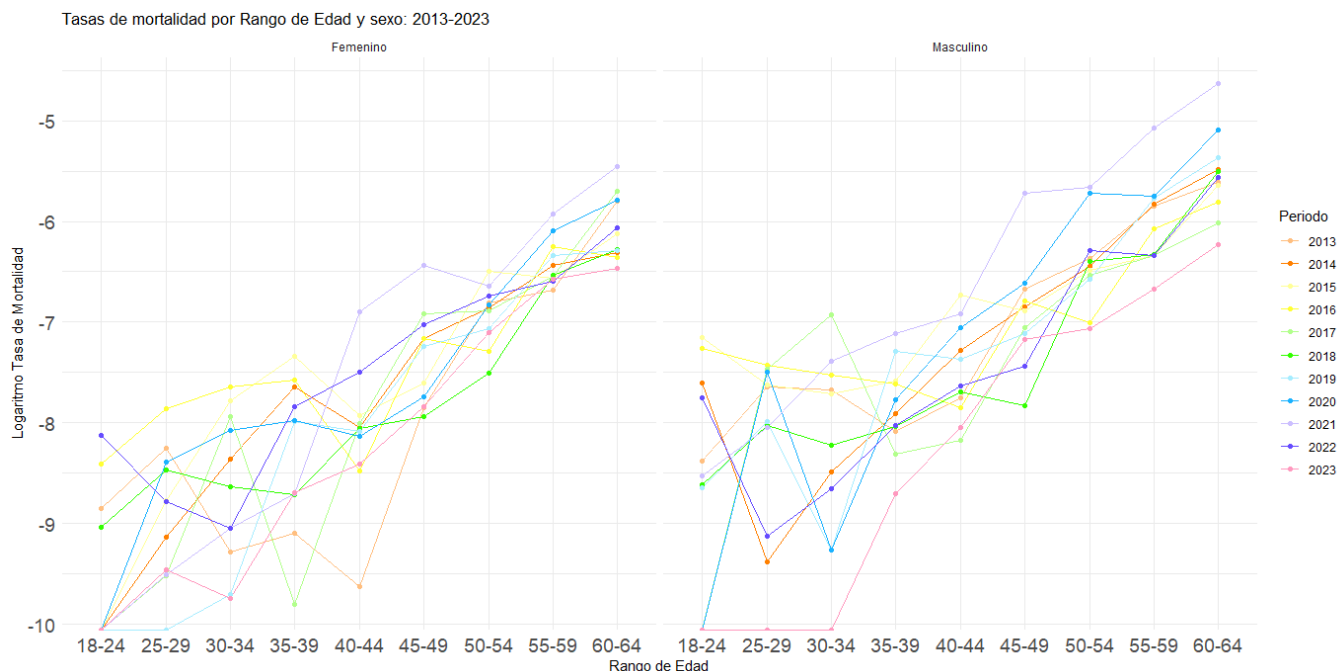


Figura 5-2.: Tasas de mortalidad por sexo para los rangos de edad definidos

Al analizar las gráficas segregadas por sexo en la Figura 5-2, se observa que las tasas de mortalidad en hombres presentan mayor fluctuación y picos más pronunciados en comparación con las mujeres. En el caso de las mujeres, las tasas muestran una variabilidad más marcada año a año, aunque con valores generalmente más bajos que los de los hombres. Este comportamiento es consistente con el observado en la tabla de mortalidad dinámica abreviada general para ambos sexos. Estas diferencias podrían atribuirse a factores como la exposición a riesgos específicos por sexo o patrones demográficos, lo que sugiere la necesidad de un análisis más detallado para identificar las causas subyacentes de estas variaciones.

Tasas de mortalidad en el tiempo (población general):

Para ver la evolución temporal del fenómeno, se grafican las tasas de mortalidad por año, abarcando cada período del estudio. Este enfoque permite identificar patrones inusuales, como incrementos o disminuciones irregulares, que podrían estar asociados a eventos específicos, como cambios demográficos, epidemias o mejoras en las condiciones de salud. Los resultados de estas gráficas proporcionan una base para evaluar la estabilidad de

las tasas de mortalidad a lo largo del tiempo y detectar posibles puntos de inflexión que requieran un análisis más detallado.

El análisis de estas tendencias resulta clave para comprender la estabilidad o variabilidad de la mortalidad a lo largo del tiempo, información que es fundamental para la posterior modelación y proyección del comportamiento futuro de las tasas.

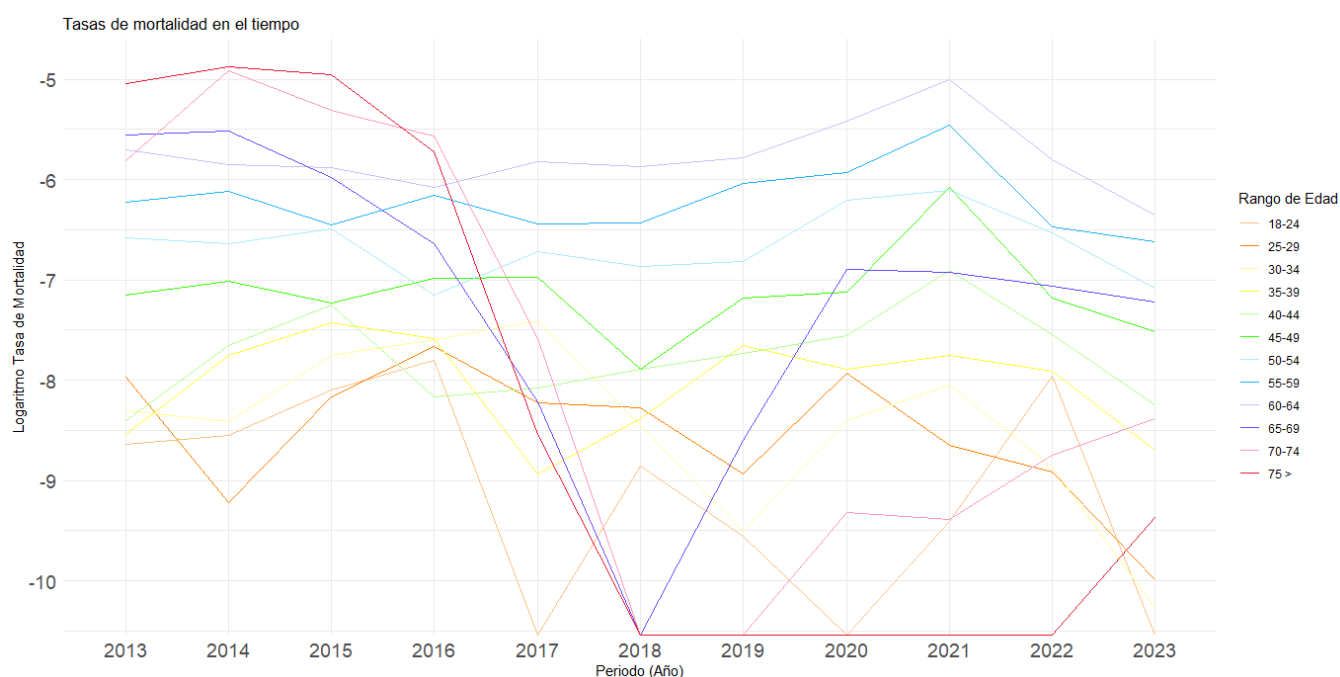


Figura 5-3.: Tasas de mortalidad población general para el periodo 2013-2023

En la Figura 5-3 se evidencia que las tasas tienden a ser más elevadas en los grupos de mayor edad, tal como se espera desde el punto de vista demográfico. No obstante, se observan fluctuaciones significativas a lo largo del tiempo en casi todos los rangos etarios, siendo especialmente notorias en los años más recientes (2020–2023), posiblemente asociadas al impacto de eventos externos como la pandemia por COVID-19. Asimismo, se identifican algunas caídas abruptas en las tasas durante ciertos años (por ejemplo, 2018 y 2023).

Tasas de mortalidad en el tiempo (sexo femenino y masculino):

De manera general, el sexo masculino siempre ha mostrado una tendencia de mayores tasas de mortalidad con respecto a las mujeres en casi todos los rangos de edad, especialmente en los grupos etarios más avanzados, lo encontrado en las gráficas es consistente con la literatura demográfica. Sin embargo, en los datos del fondo mutual de solidaridad también se destacan ciertas fluctuaciones que afectan a ambos géneros, con disminuciones abruptas, probablemente atribuibles a problemas en la recolección o reporte de los datos por parte del

fondo mutual. Estas caídas generan trayectorias irregulares en varios grupos de edad, lo que sugiere la necesidad de aplicar suavización posterior para el ajuste adecuado del modelo.

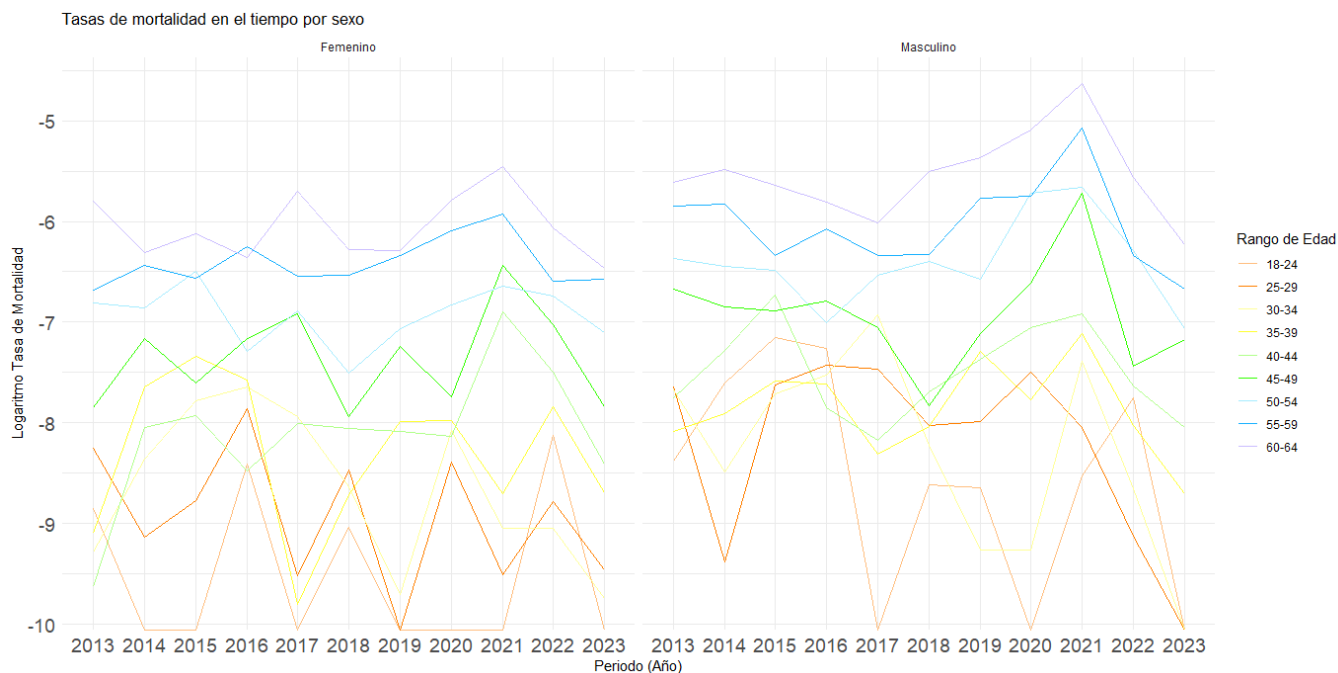


Figura 5-4.: Tasas de mortalidad por sexo para el periodo 2013-2023

La Figura 5-4 presenta la evolución de las tasas de mortalidad con el pasar de los años en escala logarítmica, diferenciadas por sexo (femenino y masculino), durante el periodo 2013-2023. Cada panel muestra la variación temporal de la mortalidad para cada grupo etario, permitiendo una comparación visual directa entre ambos sexos, conservando la misma escala.

De forma general, el patrón de mayor mortalidad masculina se mantiene estable a lo largo del tiempo, aunque en los años posteriores a 2020 se puede percibir una reducción en la brecha entre géneros en algunos rangos de edad. Este análisis preliminar refuerza la importancia de incluir la dimensión de género en la modelación de la mortalidad, dado su impacto estructural en la forma y magnitud de las tasas.

5.2. Tablas dinámicas de mortalidad abreviadas

Una vez finalizado el análisis exploratorio de los datos, se da paso a la construcción de las tablas dinámicas de mortalidad, tanto para la población general como de forma desagregada por sexo (masculino y femenino). Estas tablas se elaboran siguiendo los principios y conceptos establecidos en el marco teórico, incorporando los elementos esenciales como los intervalos

de edad, tasas de mortalidad específicas y probabilidad de fallecimiento. Además, el enfoque dinámico de las tablas permite observar la evolución temporal de las tasas de mortalidad durante el periodo de estudio, lo cual es clave para posteriores aplicaciones del modelo Lee-Carter.

Tabla 5-1.: Ejemplo de tabla de mortalidad dinámica abreviada (2013-2023) para la población general

periodo	rango_edad	n	nPx	nDx	nm _x	nax	nq _x	lx	dx
2013	18-24	7	11.320	2	0,00017668	3,5	0,00123598	100.000	124
2013	25-29	5	31.649	11	0,00034756	2,5	0,0017363	99.876	173
2013	30-34	5	36.417	9	0,00024714	2,5	0,00123492	99.703	123
2013	35-39	5	30.736	6	0,00019521	2,5	0,00097558	99.580	97
2013	40-44	5	26.786	6	0,000224	2,5	0,00111936	99.483	111
2013	45-49	5	28.103	22	0,00078283	2,5	0,00390653	99.371	388
2013	50-54	5	27.297	38	0,00139209	2,5	0,00693633	98.983	687
2013	55-59	5	21.695	43	0,00198202	2,5	0,00986125	98.297	969
2013	60-64	5	17.166	57	0,00332052	2,5	0,0164659	97.327	1.603
2013	65-69	5	10.057	39	0,0038779	2,5	0,01920331	95.725	1.838
2013	70-74	5	4.349	13	0,00298919	2,5	0,0148351	93.886	1.393
2013	75 >	15	2.643	17	0,00643208	7,5	0,09204115	92.494	8.513
2014	18-24	7	10.371	2	0,00019285	3,5	0,00134901	100.000	135
2014	25-29	5	30.422	3	9,8613E-05	2,5	0,00049294	99.865	49
2014	30-34	5	35.976	8	0,00022237	2,5	0,00111123	99.816	111
2014	35-39	5	32.451	14	0,00043142	2,5	0,00215477	99.705	215
2014	40-44	5	27.295	13	0,00047628	2,5	0,00237856	99.490	237
2014	45-49	5	27.793	25	0,00089951	2,5	0,00448744	99.253	445
2014	50-54	5	28.423	37	0,00130176	2,5	0,0064877	98.808	641
2014	55-59	5	22.703	50	0,00220235	2,5	0,01095146	98.167	1.075
2014	60-64	5	18.129	52	0,00286833	2,5	0,01423955	97.092	1.383
...		...		...		...		...	

La construcción de esta Tabla **5-1** de manera general y posteriormente de manera segregada por sexo (masculino y femenino) permite identificar patrones, realizar comparaciones temporales y generar insumos para modelos de proyección de mortalidad como lo es el propuesto por Lee-Carter. Estas tablas no solo permiten caracterizar el comportamiento de la mortalidad en el periodo de observación, sino que además constituyen un insumo clave para los modelos estadísticos como el que se presenta en la siguiente sección, el cual busca estimar y proyectar indicadores relevantes para la gestión del riesgo en contextos actuariales, financieros y de protección social.

5.3. Aplicación del modelo Lee-Carter

Ajustando el modelo propuesto por Lee-Carter en 1992 en su enfoque alternativo basado en la distribución Poisson, obtenemos el vector de parámetros a partir de los datos del fondo mutual para el periodo 2013–2023: a_x , b_x y k_t , los cuales permiten descomponer la estructura de mortalidad en términos de edad, tiempo e interacción.

- **Gráfico I – Componente a_x :** Este parámetro captura la estructura etaria implícita en las tasas. Representa el nivel base de mortalidad logarítmica para cada grupo de edad, es decir, corresponde al promedio del logaritmo de la tasa de mortalidad en el rango de edad a lo largo del tiempo.
- **Gráfico II – Componente k_t :** Este parámetro captura la evolución temporal de la mortalidad general. Representa el índice temporal que describe la tendencia general de la mortalidad a lo largo del tiempo. Una disminución en k_t indica una reducción general de la mortalidad en todos los grupos de edad, modulada por los valores del parámetro b_x .
- **Gráfico III – Componente b_x :** Este parámetro indica la sensibilidad del cambio en la mortalidad para un grupo de edad en respuesta a las variaciones en el tiempo. Representa qué tanto cambia la mortalidad en una edad determinada cuando se produce un cambio general en la mortalidad (reflejado en k_t).

En conjunto, estos tres parámetros permiten modelar la evolución de la mortalidad de manera parsimoniosa y explicativa, destacando tanto el efecto de la edad como del tiempo y su interacción.

Ajuste del modelo Lee-Carter población general

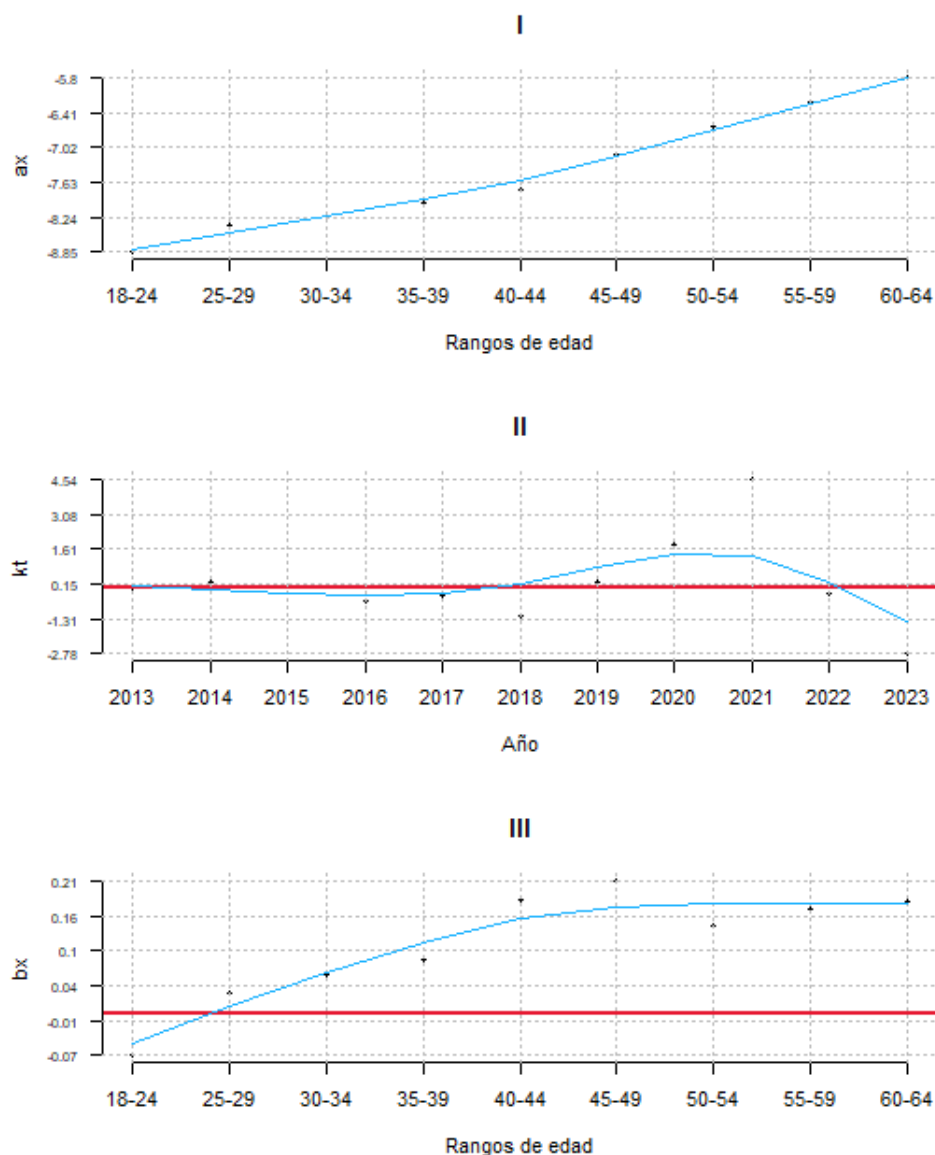


Figura 5-5.: Resultados del modelo, población general

En la Figura 5-5 se observa que el comportamiento de la mortalidad es notablemente más bajo en los grupos de 18 a 39 años y aumenta progresivamente, acelerando este incremento a partir de los 40 años, alcanzando su punto máximo en el grupo de 60-64 años. Se observa una tendencia a la reducción entre 2013 y 2017, seguida de un repunte hacia el 2020–2021, lo cual puede estar relacionado con el efecto de la pandemia por COVID-19 en el comportamiento de las tasas. No obstante, el descenso abrupto en 2023 podría estar asociado con valores que hasta el momento de corte aún no habían sido reportados al fondo

mutual de solidaridad, tal como se evidenció en los gráficos exploratorios. La línea azul representa la tendencia ajustada, mientras que los puntos indican los valores observados. Se evidencia un incremento de la mortalidad (en periodo de pandemia) en los grupos de edad intermedia y avanzada (40-49 años en adelante), mientras que en los grupos más jóvenes la variación es mínima e incluso negativa, lo que sugiere que las fluctuaciones en la mortalidad general tuvieron poco o ningún impacto sobre ellos.

Análisis de ajuste del modelo general

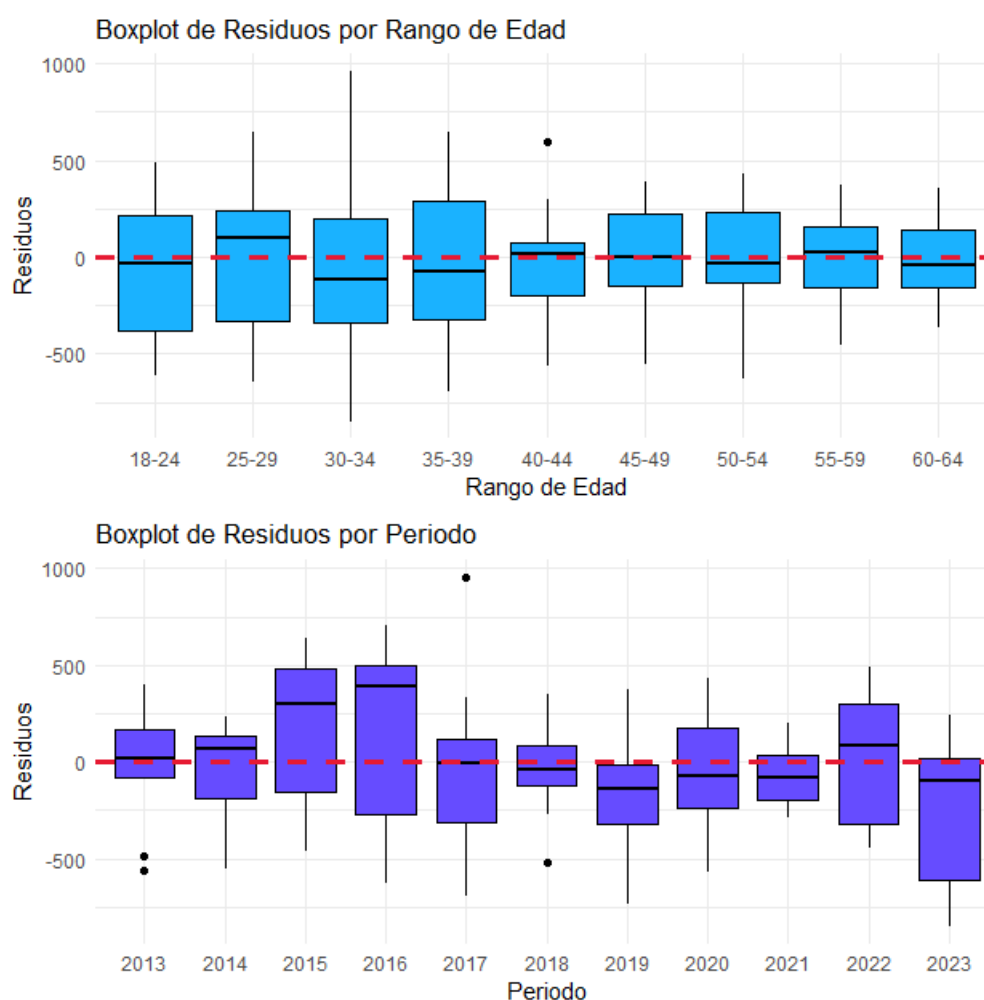


Figura 5-6.: Boxplots de residuos por edad y tiempo

El análisis de residuos por rango de edad de la Figura 5-6 muestra que el modelo Lee-Carter no presenta sesgos sistemáticos importantes. La mediana de los residuos se mantiene cercana a cero en todos los grupos etarios, lo que indica que el modelo logra ajustar adecuadamente la mortalidad observada. Sin embargo, se identifica una ligera mayor variabilidad en los rangos

de edad entre 25 y 39 años, lo cual puede deberse a fluctuaciones propias del comportamiento de la mortalidad en esos grupos. La presencia de algunos valores atípicos no sigue un patrón estructurado. Por otro lado, el análisis por periodo revela que los años 2014 a 2016 presentan mayor dispersión en los residuos, indicando una menor precisión del modelo en esos años. A partir de 2017, los residuos tienden a estabilizarse y concentrarse en torno a cero, lo cual sugiere una mejora en la capacidad predictiva del modelo con el tiempo.

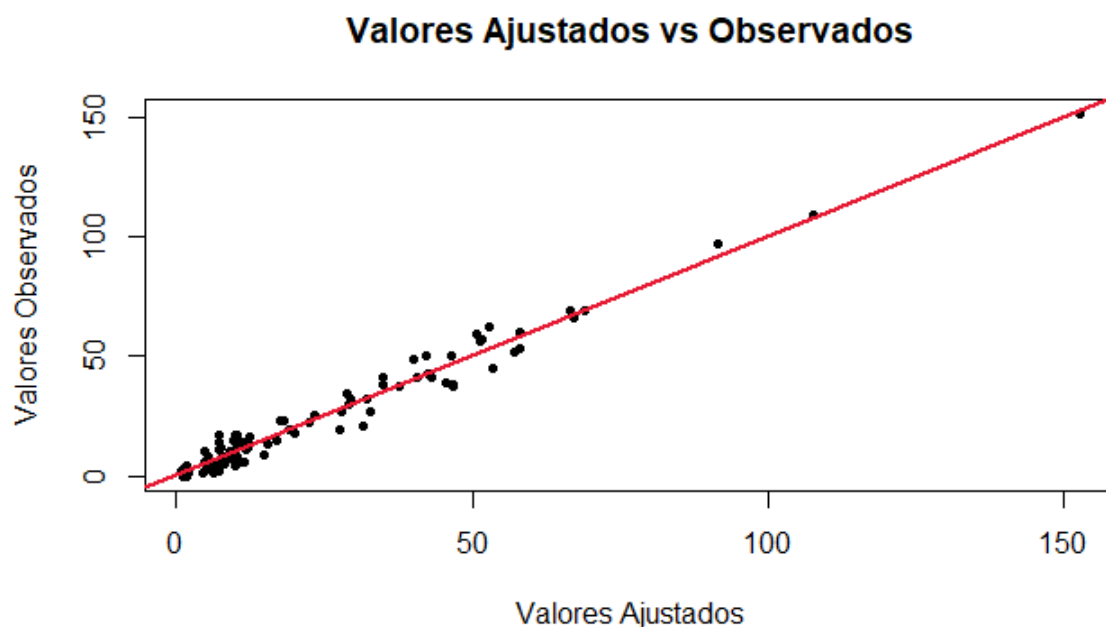


Figura 5-7.: Valores ajustados vs observados población general

En conjunto, ambos análisis respaldan la validez general del modelo ajustado, sin evidencia de patrones sistemáticos que comprometan la calidad del ajuste. Este mismo procedimiento se replicó para los modelos ajustados por sexo (masculino y femenino), encontrando resultados consistentes con los del modelo general. En ambos casos, los residuos se distribuyen de manera simétrica en torno a cero, sin indicar sesgos sistemáticos por edad o periodo, y manteniendo una variabilidad controlada. Dado que los patrones observados no difieren sustancialmente del comportamiento global previamente expuesto, se omite su representación gráfica individual, priorizando la concisión y evitando redundancias en la presentación de resultados.

Tabla 5-2.: CCC para el modelo Lee-Carter general

Modelo	CCC	Intervalo de confianza
Población general	0.9858	[0.9789 , 0.9904]

El coeficiente de correlación de concordancia (CCC) obtenido para el modelo general es de 0.9844, lo que indica un alto grado de concordancia entre las tasas de muertes observadas y las estimadas por el modelo Lee-Carter con distribución Poisson, como muestra la Tabla 5-2. El intervalo de confianza del 95 % respalda la precisión del modelo, confirmando su idoneidad para describir el comportamiento de la mortalidad en la población general del fondo mutual.

Ajuste del modelo Lee-Carter hombres

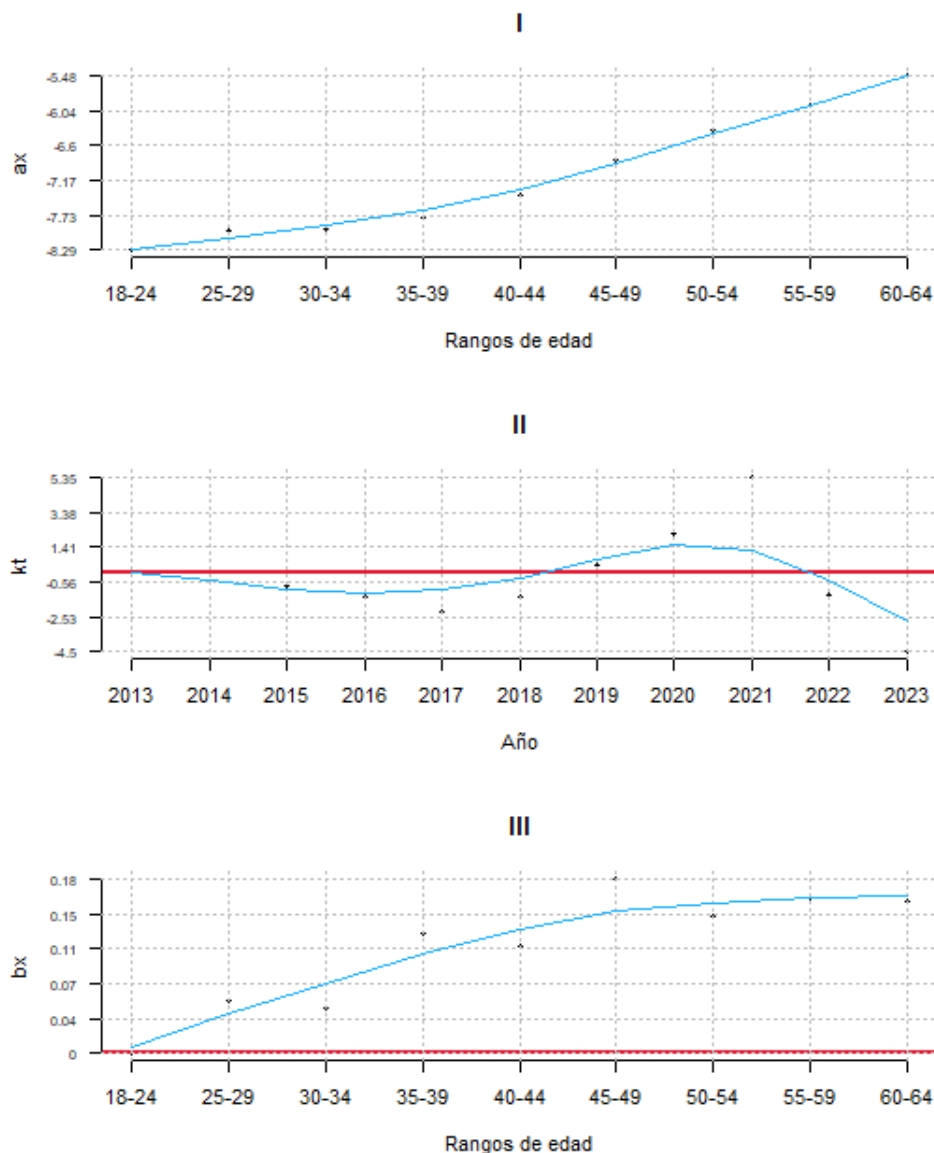


Figura 5-8.: Resultados del modelo, sexo masculino

Para este caso, tenemos la estimación de los parámetros del modelo Lee-Carter aplicados exclusivamente a la población masculina, lo que permite comprender de manera diferenciada la dinámica de la mortalidad en este grupo poblacional. Los componentes a_x , b_x y k_t capturan respectivamente el nivel promedio de mortalidad por edad, la sensibilidad a los cambios temporales y la tendencia general de la mortalidad en el tiempo.

Se evidencia en la Figura 5-8 una tendencia creciente en el parámetro a_x , que representa la tasa de mortalidad promedio por edad (en escala logarítmica). Esto refleja, como es de esperarse, que la mortalidad se incrementa conforme avanza la edad. La tasa es más baja en los jóvenes de 18 a 34 años y aumenta progresivamente hasta los 60–64 años. Las tasas para los hombres en los grupos etarios avanzados son levemente más elevadas que en el modelo general, lo que indica una mayor exposición a riesgos en edades mayores para el sexo masculino. El índice temporal muestra una caída sostenida entre 2013 y 2017, seguida de un repunte que alcanza su punto máximo en 2021, con una caída nuevamente hacia 2023. Este comportamiento sugiere una mejora general en las tasas de mortalidad masculina en los primeros años, posiblemente interrumpida por el impacto de la pandemia de COVID-19. Posteriormente, se presenta una disminución abrupta del indicador en los años más recientes, similar a lo observado en el modelo general, lo cual podría estar asociado a la falta de registros en 2023.

Análisis de ajuste del modelo

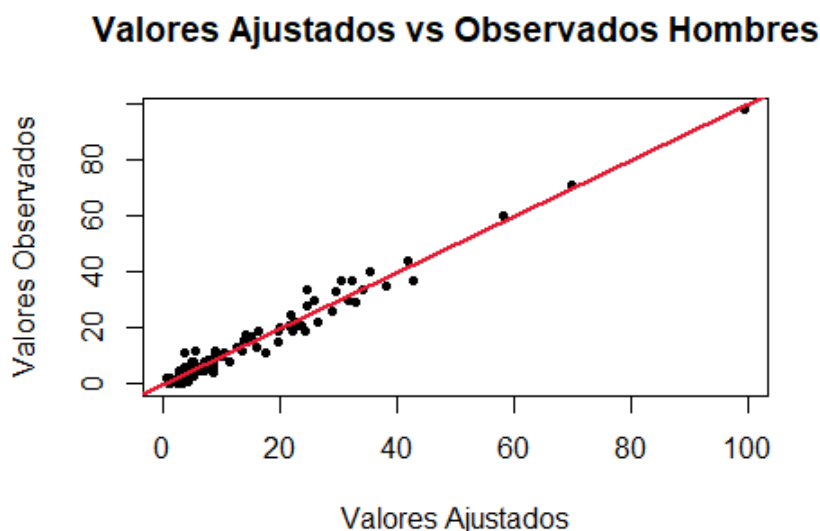


Figura 5-9.: Valores ajustados vs observados sexo masculino

Tabla 5-3.: CCC para el modelo Lee-Carter sexo masculino

Modelo	CCC	Intervalo de confianza
Población masculina	0.9844	[0.9768 , 0.9895]

El valor del Coeficiente de Correlación de Concordancia (CCC) estimado para el modelo Lee-Carter ajustado al grupo masculino es de 0.9844, tal como se evidencia en la Tabla **5-3**, este resultado indica un alto grado de concordancia entre las tasas de mortalidad observadas y las tasas estimadas por el modelo, lo cual sugiere que el ajuste realizado es preciso y confiable para representar el comportamiento de la mortalidad masculina en la población objeto de estudio. Además, el estrecho intervalo de confianza respalda la estabilidad y robustez del ajuste del modelo para este grupo.

Ajuste del modelo Lee-Carter mujeres

El análisis confirma que las mujeres presentan una estructura de mortalidad distinta a la de los hombres, caracterizada por menores tasas en todos los rangos de edad, menor variabilidad temporal y una mayor sensibilidad a los cambios en edades tempranas; estas diferencias refuerzan la importancia de aplicar el modelo de manera segmentada por sexo para obtener estimaciones más ajustadas a la realidad observada.

La Figura **5-10** presenta las estimaciones de los parámetros del modelo Lee-Carter para la población femenina. Esta desagregación permite comprender con mayor precisión la dinámica de mortalidad en mujeres, identificando patrones diferenciados respecto a la población general y al sexo masculino. Se observa un patrón creciente con la edad, lo que concuerda con el comportamiento natural de la mortalidad. Sin embargo, en comparación con la población masculina, los valores de a_x son más bajos, especialmente en los rangos de edad avanzada, lo cual refleja una menor mortalidad general en mujeres. El índice temporal presenta una tendencia decreciente entre 2013 y 2021, alcanzando su punto más bajo ese año, lo cual puede estar asociado a impactos diferenciales por la pandemia. Posteriormente se evidencia un leve repunte en los últimos años. A diferencia de la tendencia observada en hombres, aquí la trayectoria de k_t es más estable y de menor magnitud, lo cual sugiere una menor variabilidad temporal en la mortalidad femenina durante el período analizado. El parámetro de sensibilidad muestra un comportamiento decreciente con la edad. Los grupos jóvenes (18-34 años) presentan valores más altos de b_x , lo que indica que las tasas de mortalidad en estas edades son más sensibles a los cambios en el tiempo. En contraste, los grupos de edad avanzada muestran valores negativos o cercanos a cero, lo que implica una baja sensibilidad temporal. Este patrón difiere del observado en hombres, donde los adultos mayores eran más sensibles a las variaciones en k_t . En mujeres, las mejoras o deterioros en mortalidad se concentran con mayor intensidad en edades tempranas.

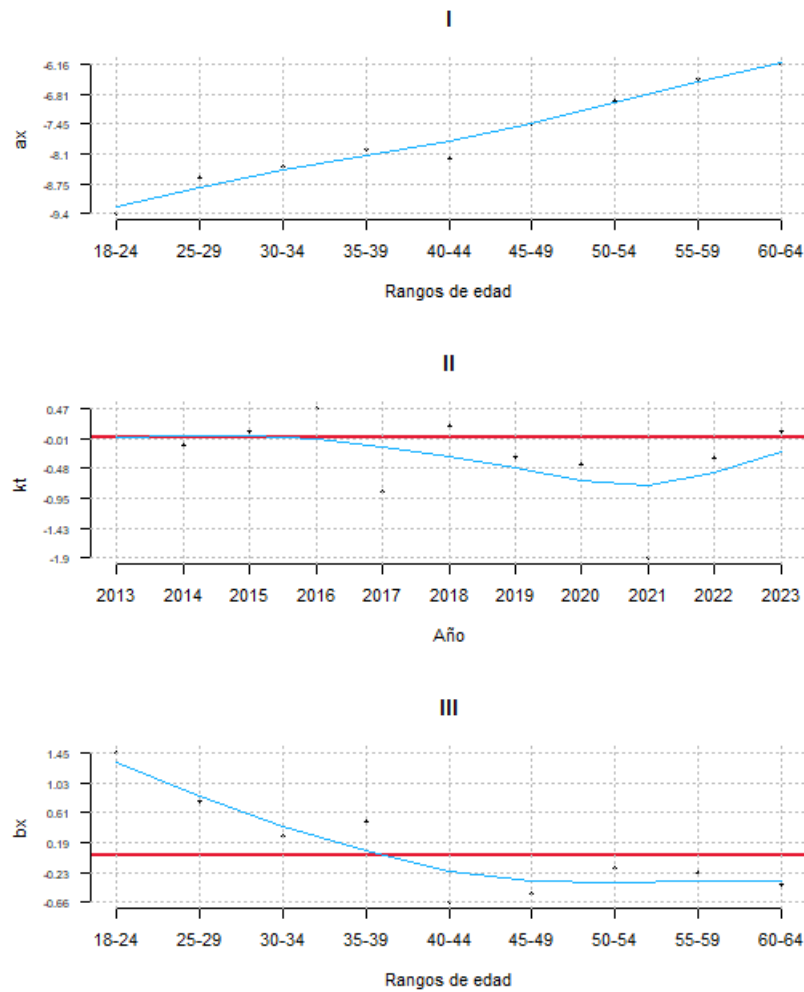


Figura 5-10.: Resultados del modelo, sexo femenino

Análisis de ajuste del modelo

Tabla 5-4.: CCC para el modelo Lee-Carter sexo femenino

Modelo	CCC	Intervalo de confianza
Población femenina	0.9584	[0.9390 , 0.9718]

Para el modelo ajustado al grupo femenino, de acuerdo con la Tabla 5-4, el Coeficiente de Correlación de Concordancia (CCC) es de 0.9584, este resultado indica un alto nivel de concordancia entre las tasas de mortalidad observadas y las estimadas por el modelo Lee-Carter con distribución Poisson, lo que sugiere que el modelo describe de forma adecuada la dinámica de mortalidad de este grupo poblacional. Aunque el valor del CCC es ligeramente inferior al obtenido en el modelo general y masculino, sigue estando dentro de un rango

considerado muy bueno en términos de ajuste y precisión. Esto podría deberse a una mayor variabilidad en los datos del grupo femenino, posiblemente asociada a la cantidad de ceros presentes en los registros de fallecimientos o a la menor exposición en ciertos rangos de edad dentro de este sexo.

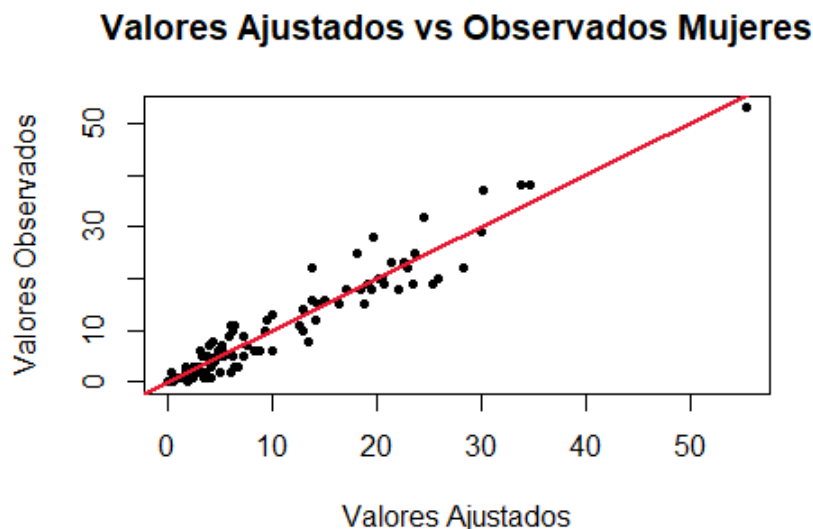


Figura 5-11.: Valores ajustados vs observados sexo femenino

5.3.1. Contraste de los modelos ajustados hombres vs mujeres

En esta sección se presenta un contraste de los parámetros estimados mediante el modelo Lee-Carter para los subconjuntos poblacionales de hombres y mujeres. La comparación se centra en los tres parámetros del modelo (a_x , b_x y k_t); a partir de la observación de estos parámetros, se identifican diferencias estructurales relevantes entre los sexos, lo que permite comprender con mayor profundidad la dinámica diferencial de la mortalidad en la población de estudio. La Tabla 5-5 resume las principales características y contrastes observados.

Tabla 5-5.: Contraste de los parámetros del modelo LC

Parámetro	Hombres	Mujeres	Contraste
a_x	Aumento marcado con la edad	Aumento moderado y estable	Mayor dispersión en mortalidad masculina
k_t	Comportamiento oscilante, pico en 2021	Estabilidad general	Mayor impacto temporal en hombres
b_x	Sensibilidad creciente con la edad	Sensibilidad decreciente con la edad	Efectos temporales afectan a distintos grupos etarios según el sexo

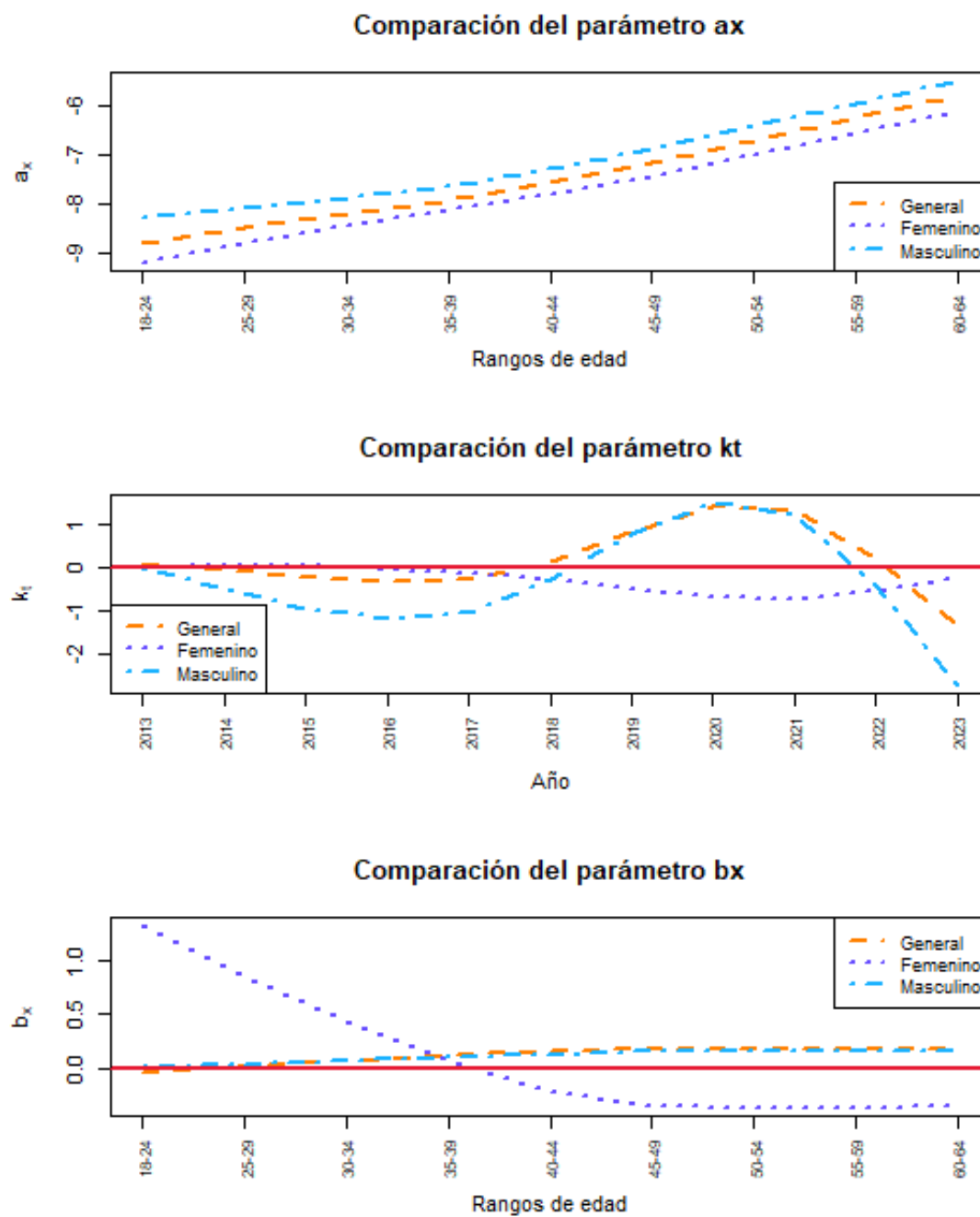


Figura 5-12.: Comparación de parámetros del ajuste de los modelos

La comparación gráfica de los parámetros del modelo Lee-Carter evidencia diferencias relevantes entre los perfiles de mortalidad por sexo. En cuanto al parámetro a_x , se observa un incremento con la edad en los tres modelos, reflejando una dinámica de mortalidad más alta en edades avanzadas. No obstante, el ascenso es más marcado en los hombres, lo que sugiere una mayor dispersión de la mortalidad entre los grupos de edad, mientras que en las mujeres la progresión de a_x es más uniforme, indicando una base de mortalidad más estable. Este patrón también se replica en el modelo general, que representa un comportamiento intermedio entre ambos sexos.

El parámetro k_t , que captura la dinámica temporal de la mortalidad, presenta una trayectoria más oscilante en el modelo masculino, con un pico pronunciado en 2021 seguido de una fuerte caída, probablemente influenciado por la pandemia de COVID-19 como ya se menciona en secciones previas. En cambio, la curva femenina muestra una evolución más estable, con variaciones moderadas a lo largo del tiempo. El parámetro b_x , asociado a la sensibilidad por edad frente a los cambios temporales, revela un comportamiento contrastante: mientras que en los hombres la sensibilidad se incrementa con la edad, en las mujeres disminuye, siendo las más jóvenes las que presentan mayor respuesta ante cambios como los observados durante eventos extraordinarios. Estas diferencias reflejan cómo los efectos del tiempo y eventos contextuales inciden de forma diferencial según sexo y edad.

5.4. Interpolación y extrapolación de las curvas $q(x)$ estimadas por el modelo Lee-Carter

Una vez realizado el análisis exploratorio y ajustado el modelo Lee-Carter con enfoque Poisson, se procede a suavizar las curvas de mortalidad obtenidas para cada año y grupo etario, con el objetivo de mejorar la representación gráfica y analítica de las tasas específicas de mortalidad q_x . Este proceso se aplicó a la población general, sexo femenino y sexo masculino, permitiendo observar de manera más clara las tendencias por edad y periodo. Sin embargo, dada la estructura de los datos disponibles, que contaban con una maduración del fenómeno hasta la edad de los 64 años, se identificó la necesidad de extender las estimaciones de q_x para edades avanzadas.

Para ello, se utilizó la pendiente observada en las Tablas de Mortalidad de la Superintendencia Financiera de Colombia observada en la Figura 5-13 como gradiente de crecimiento, permitiendo proyectar de forma coherente los valores de q_x hasta los 100 años satisfaciendo las necesidades del negocio. Esta extensión resulta fundamental para garantizar una visión integral del comportamiento de la mortalidad, especialmente en aplicaciones actuariales donde la longevidad juega un papel relevante.

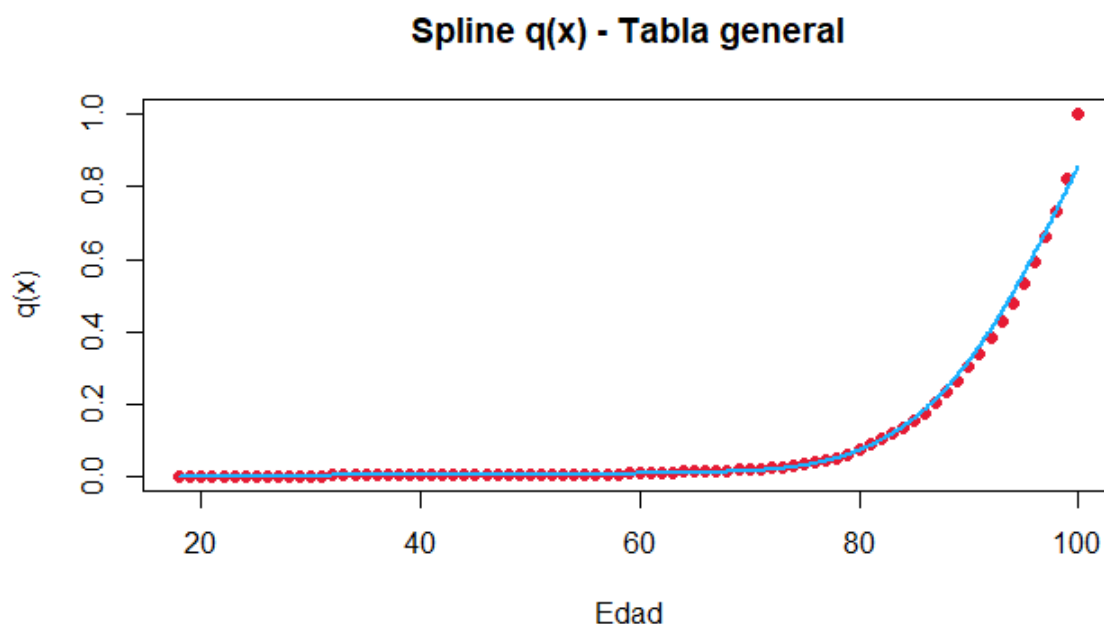


Figura 5-13.: Curva suavizada $q(x)$ de la tabla de mortalidad de los asegurados, población general

Suavización de las curvas de mortalidad (modelo general)

En la Figura 5-14 se muestran las curvas de suavización y extrapolación de q_x , la probabilidad de muerte por edad, estimadas anualmente entre 2013 y 2023 a partir del modelo Lee-Carter aplicado a la población general. Estas curvas fueron extrapoladas para edades superiores a 65 años utilizando el gradiente de las tablas de mortalidad de la Superintendencia Financiera, con el fin de garantizar una adecuada continuidad y comportamiento plausible de la mortalidad en edades avanzadas.

Se observa una tendencia consistente a la disminución de las probabilidades de muerte en los años más tempranos, especialmente en edades intermedias (entre los 40 y 65 años), lo cual es coherente con el descenso general en los niveles de mortalidad. No obstante, a partir de los 70 años, las diferencias entre años tienden a estrecharse y las probabilidades aumentan de forma exponencial, siguiendo la lógica de los modelos de mortalidad clásicos.

La curva negra representa la experiencia empírica observada en la población de asegurados, mientras que las líneas punteadas indican la extensión con base en las tablas oficiales. Se destaca que la prolongación del modelo conserva una tendencia coherente con los patrones históricos y evita sobreestimaciones o comportamientos erráticos en edades donde no se dispone de datos. Este enfoque permite construir una tabla completa de mortalidad suavizada y lista para proyectar a corto plazo, útil tanto para fines actuariales como demográficos,

manteniendo la consistencia con las estructuras regulatorias vigentes.

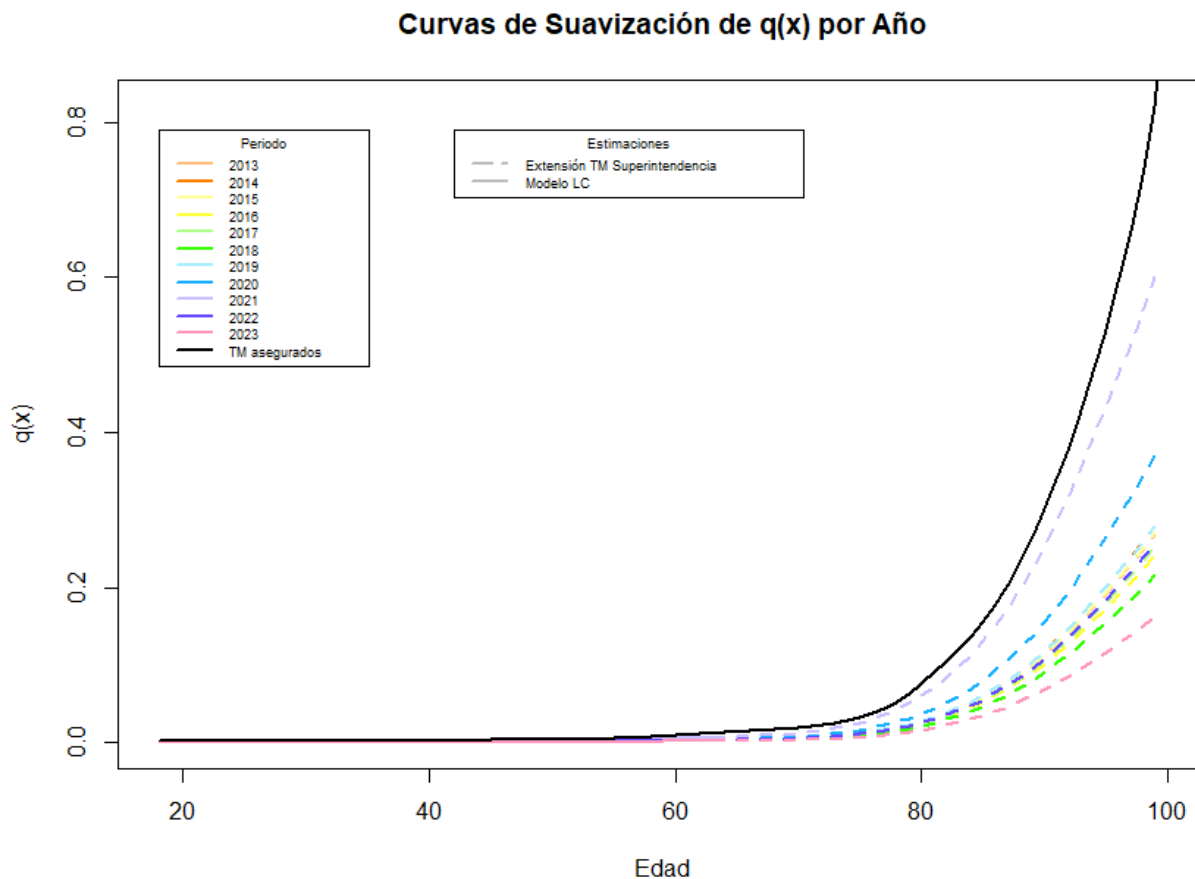


Figura 5-14.: Estimación de las curvas $q(x)$ población general

Suavización de las curvas de mortalidad (modelo hombres):

En la Figura 5-15 se observan las curvas suavizadas de q_x para el sexo masculino, generadas a partir del modelo Lee-Carter para el periodo 2013–2023. La extensión para edades mayores a 65 años se realizó nuevamente a través del gradiente de las Tablas de Mortalidad de la Superintendencia Financiera.

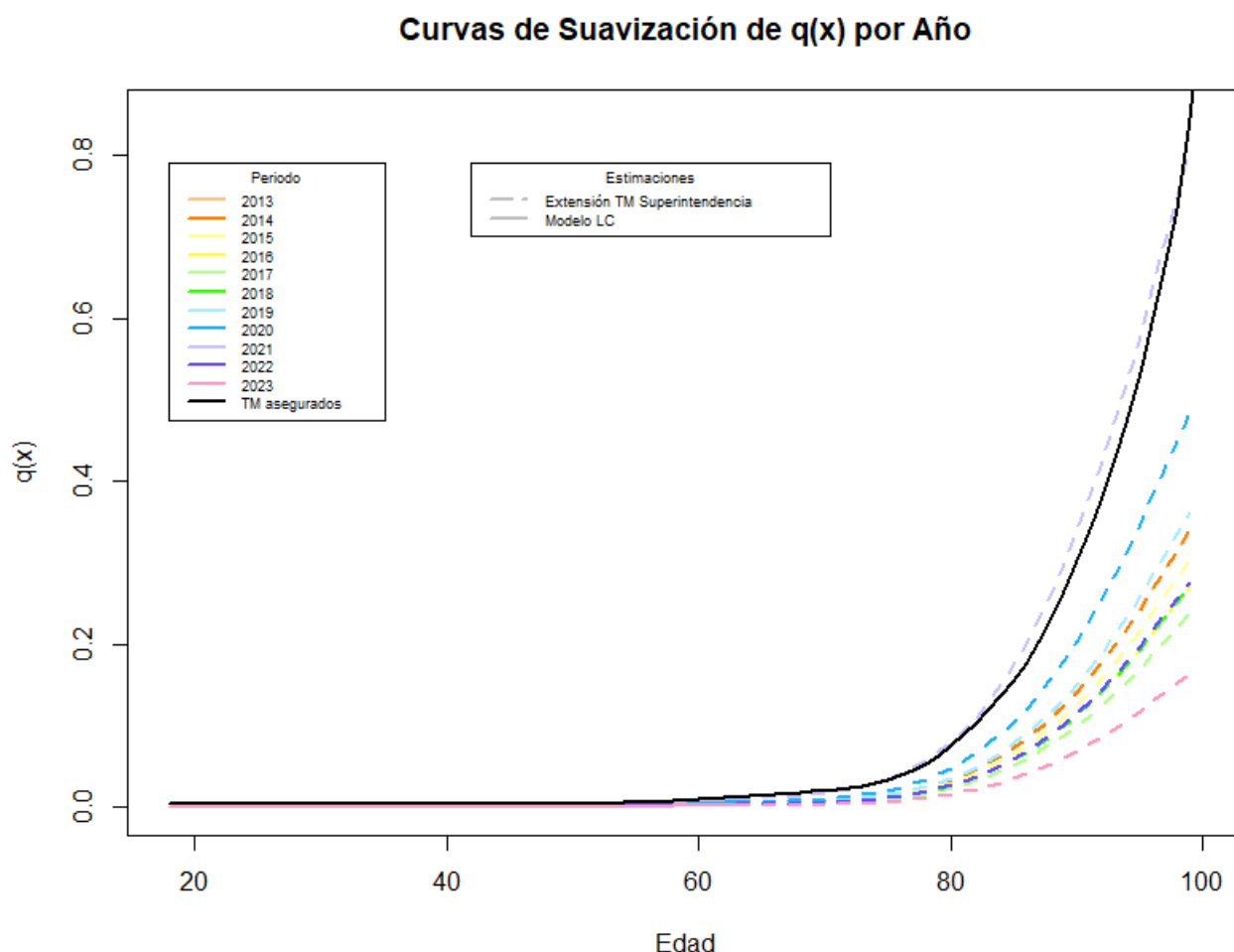


Figura 5-15.: Estimación de las curvas $q(x)$ sexo masculino

Las curvas masculinas presentan niveles más altos de mortalidad en prácticamente todos los grupos de edad, con especial énfasis a partir de los 60 años. Esta diferencia estructural es consistente con la literatura demográfica, donde se ha documentado que los hombres tienden a presentar mayores tasas de mortalidad que las mujeres en la mayoría de los contextos. La evolución temporal de las curvas muestra una mejora moderada en los niveles de mortalidad masculina, aunque esta mejora no es tan pronunciada como en el caso femenino. De hecho, en los últimos años (2020–2023) se observan curvas ligeramente por encima de las de años anteriores, lo que podría estar relacionado con efectos coyunturales como la pandemia de COVID-19 o variaciones específicas en la población asegurada.

La curva negra representa la mortalidad empírica observada en la experiencia de los asegurados en Colombia, y se utiliza como línea base para evaluar la validez del modelo propuesto. En términos generales, las estimaciones generadas por el modelo Lee-Carter

presentan una adecuada adherencia al perfil empírico, reflejando una evolución coherente con el comportamiento observado. La extensión hacia edades avanzadas conserva una progresión natural y consistente, respaldada por el gradiente de las tablas oficiales. No obstante, se evidencia una excepción en el año 2021, en el cual la curva estimada de mortalidad supera a la observada en las Tablas de Mortalidad de la Superintendencia Financiera de Colombia. Este comportamiento puede atribuirse a factores extraordinarios, como las secuelas de la pandemia por COVID-19 y los eventos de estallido social ocurridos en ese periodo a nivel nacional, los cuales afectaron significativamente los niveles de mortalidad.

Suavización de las curvas de mortalidad (modelo mujeres):

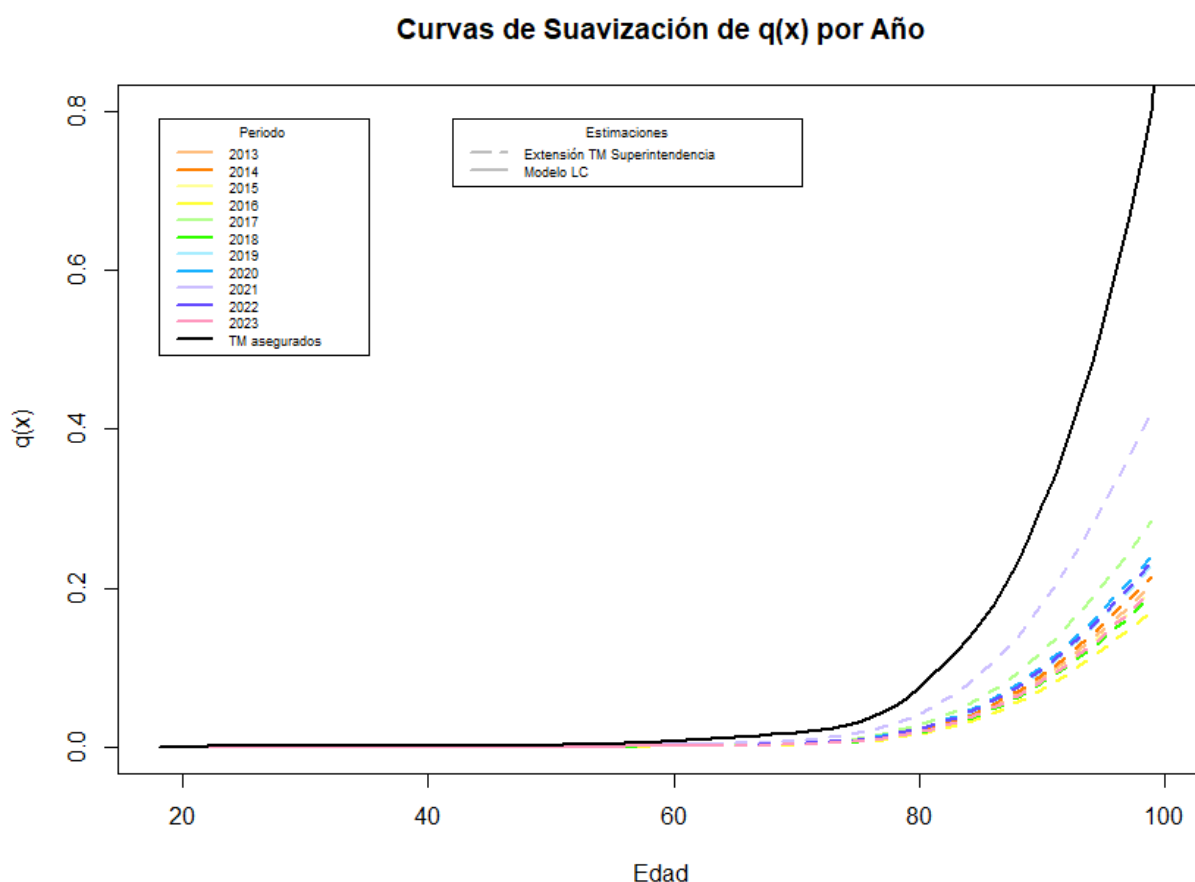


Figura 5-16.: Estimación de las curvas $q(x)$ sexo femenino

La Figura 5-16 presenta las curvas suavizadas de q_x para el sexo femenino, estimadas con el modelo Lee-Carter en el periodo 2013–2023. Al igual que en el modelo general y modelo sexo masculino, las probabilidades fueron extendidas a edades superiores a 65 años mediante el gradiente de las Tablas de Mortalidad de la Superintendencia Financiera, con

el fin de obtener una estimación completa y coherente del perfil de mortalidad.

Las curvas de los años más recientes tienden a posicionarse por debajo de las más antiguas, lo cual evidencia una mejora sostenida en los niveles de mortalidad femenina, especialmente entre los 60 y 80 años. Esto es coherente con la literatura, donde tradicionalmente se observa mayor longevidad en las mujeres respecto a los hombres.

La curva negra representa la experiencia empírica observada en la población de aseguradas, y sirve como punto de referencia para evaluar el ajuste de las estimaciones. Las curvas suavizadas mediante el modelo LC se comportan de forma regular, sin saltos abruptos, lo cual indica una adecuada calibración; la extensión mediante las tasas de crecimiento de las tablas oficiales también mantiene una continuidad natural en la trayectoria de la mortalidad para edades avanzadas. Este enfoque permite no solo capturar las mejoras históricas en la mortalidad femenina, sino también proyectar a corto plazo de manera realista la evolución de q_x en edades donde no se cuenta con información confiable, cumpliendo con criterios actuariales y regulatorios.

5.4.1. Contraste de las curvas de mortalidad estimada del modelo Lee-Carter en su expresión suavizada

Con el objetivo de evaluar las diferencias estructurales en la dinámica de la mortalidad por sexo, se comparan las curvas suavizadas de q_x estimadas a partir del modelo Lee-Carter para tres enfoques distintos: modelo general (sin distinción de sexo), modelo para el sexo femenino y modelo para el sexo masculino. En todos los casos, las estimaciones fueron extendidas hacia edades avanzadas mediante el gradiente de las Tablas de Mortalidad de la Superintendencia Financiera, permitiendo observar el comportamiento hasta los 100 años.

Nivel de mortalidad: La diferencia más notoria entre los tres modelos radica en el nivel de mortalidad estimado. Las curvas correspondientes al modelo masculino presentan consistentemente mayores valores de q_x en comparación con las curvas femeninas, especialmente a partir de los 60 años, donde se evidencia una divergencia significativa. El modelo general, al promediar ambas poblaciones, se ubica intermedio entre ambos sexos, aunque tiende a acercarse más al patrón masculino, posiblemente debido a un mayor peso poblacional de hombres en la base analizada o a un comportamiento más extremo en la mortalidad masculina.

Forma de las curvas: Mientras que las curvas femeninas muestran una progresión más atenuada y estable a lo largo del tiempo, las masculinas presentan un crecimiento más abrupto en edades avanzadas, reflejando un mayor deterioro en la sobrevivencia de los hombres. Esta diferencia de forma también se refleja en el modelo general, que mantiene una pendiente de crecimiento suavizada pero aún perceptible.

Evolución temporal: En los tres modelos se observa una mejora general de la mortalidad entre 2013 y 2019, seguida de una ligera reversión en los años 2020 a 2023, lo cual es atribuible en gran medida al impacto de la pandemia de COVID-19. Este patrón es más evidente en las curvas masculinas, donde el repunte en los niveles de q_x es más marcado, especialmente en edades medias y avanzadas.

Coherencia de la extensión. Las extensiones aplicadas con base en el gradiente de las tablas de la Superintendencia muestran coherencia en todos los modelos, permitiendo una extrapolación suave y creíble de la mortalidad en edades no cubiertas directamente por la experiencia. En particular, las curvas no presentan rupturas abruptas ni comportamientos extraños, lo cual valida el procedimiento adoptado para estimar la mortalidad más allá de los 65 años. En el Anexo C se muestra la tabla con las estimaciones de $q(x)$ para la población general y por sexos (masculino y femenino).

En conjunto, los resultados destacan la importancia de diferenciar por sexo en la modelación de la mortalidad, dado que las diferencias entre hombres y mujeres no son sólo de nivel, sino también de forma y evolución temporal. A su vez, el modelo general puede ser útil como referencia, pero puede ocultar matices relevantes que sólo se evidencian al desagregar la información.

5.5. Proyección de un periodo del parámetro k_t

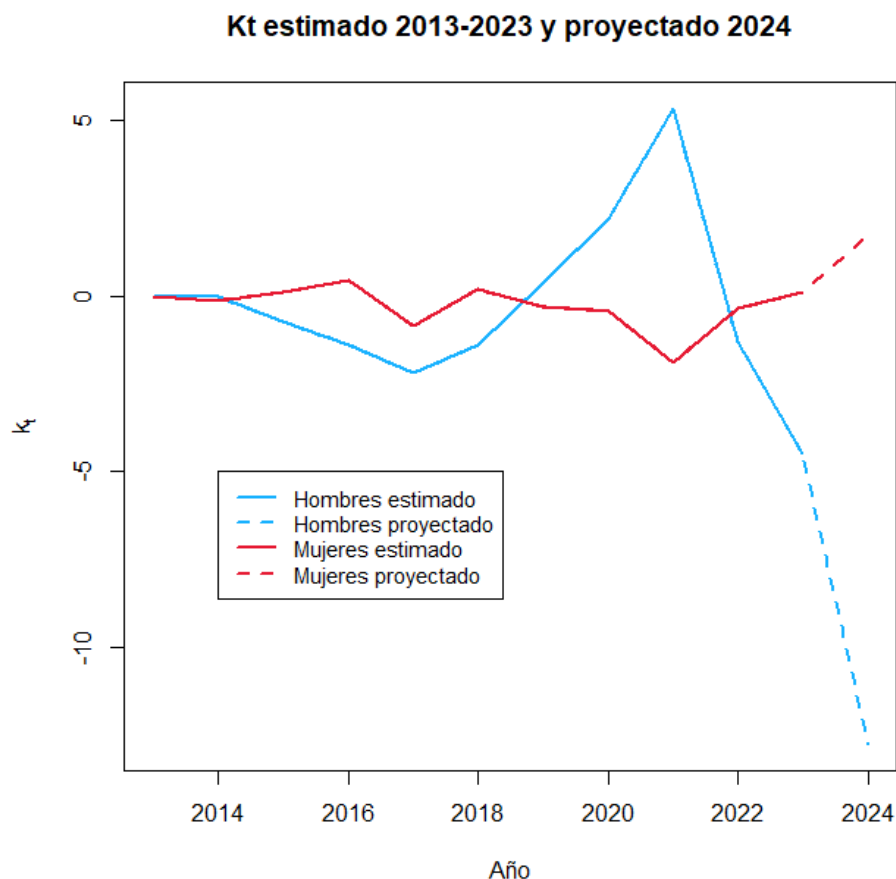


Figura 5-17.: Proyección de k_t para hombres y mujeres

La Figura 5-17 muestra la evolución histórica del parámetro temporal k_t del modelo Lee-Carter ajustado para el periodo 2013-2023, así como su proyección para el año 2024, diferenciada por sexo. Las líneas continuas representan los valores estimados a partir de los datos observados del fondo mutual, mientras que las líneas punteadas corresponden a la proyección obtenida mediante suavizamiento local Loess. Se observa que, en el caso de los hombres, la trayectoria de k_t presenta una variabilidad más marcada a partir del año 2019, alcanzando un pico en 2021 y descendiendo abruptamente hacia 2023. Esta inestabilidad puede reflejar el impacto de eventos extraordinarios, como la pandemia de COVID-19, sobre la mortalidad masculina. Por el contrario, en las mujeres la serie muestra una evolución más estable y contenida.

Para el año 2024, la proyección indica una continuación del descenso del parámetro k_t en hombres, lo cual sugiere una reducción proyectada en las tasas de mortalidad, mientras que para las mujeres se proyecta un leve incremento, manteniéndose en valores cercanos a los de los años previos.

Cabe destacar que la proyección se hace en aras de mostrar la utilidad de la metodología y se limita únicamente al año 2024, dado que se dispone de una serie histórica corta, con tan solo once periodos anuales (2013-2023). Esta restricción metodológica responde al hecho de que el modelo de suavizamiento local, aunque es efectivo para capturar tendencias locales, no está diseñado para extrapolaciones extendidas fuera del rango observado. Proyectar a más largo plazo en este contexto implicaría asumir una continuidad de tendencias sin base empírica suficiente, lo cual podría comprometer la robustez de los resultados. Por tanto, se opta por un horizonte de proyección a corto plazo, que resulta más apropiado desde el punto de vista técnico y actuarial.

6. Conclusiones

Los resultados obtenidos a lo largo de este estudio permiten concluir que el modelo de Lee-Carter es una herramienta técnicamente sólida y eficaz para analizar y proyectar la dinámica de la mortalidad de los asociados a un fondo mutual de solidaridad. Su aplicación al conjunto de datos tomado como ejemplo en este trabajo, tanto a nivel general como desagregado por sexo, permitió capturar adecuadamente las tendencias históricas observadas en las tasas de mortalidad, mostrando un alto grado de ajuste. Esto se evidenció en los análisis de residuos, los cuales no presentaron patrones estructurados, y en los valores del coeficiente de correlación de concordancia (CCC), que superó el 0,90 en los tres modelos, lo cual indica un excelente grado de concordancia entre los valores observados y los estimados.

Desde una perspectiva actuarial, la diferenciación por sexo se reveló como un elemento clave en la modelación, dado que permitió reflejar de manera más precisa el comportamiento en los patrones de mortalidad. Las diferencias observadas en los niveles, formas y ritmos de cambio de las tasas entre hombres y mujeres justifican plenamente la implementación de modelos específicos por sexo, particularmente en contextos como los fondos mutuales, donde los perfiles demográficos pueden influir significativamente en los compromisos financieros futuros. Para el caso de la interpolación y extrapolación de las curvas, se evidencia que la metodología utilizada es coherente con el comportamiento del fenómeno y permitió obtener las probabilidades de muerte por edad de manera individual, insumo clave para determinar tarifas de los productos actuariales.

El análisis temporal reflejó una reducción generalizada en la mortalidad entre 2013 y 2019, consistente con las mejoras observadas en la longevidad a nivel nacional y global. Sin embargo, los años 2020 y 2021 mostraron un repunte en las tasas, principalmente en la población masculina, atribuible al impacto de la pandemia de COVID-19. Esta variación súbita y extraordinaria destaca la importancia de incorporar estrategias de vigilancia y actualización periódica de las hipótesis biométricas en los modelos actuariales. En 2023 se evidenció una disminución en las tasas, aunque es probable que esta se deba a registros aún no completamente actualizados en el momento del corte.

Para el fondo mutual de solidaridad, la construcción de tablas de mortalidad propias resulta de vital importancia, ya que permite evaluar la pertinencia y coherencia de las tasas utilizadas en su sistema de tarificación frente a las establecidas por la Superintendencia

Financiera de Colombia. Los resultados obtenidos muestran que, en general, las estimaciones de $q(x)$ se encuentran por debajo de las tasas contenidas en la tabla de mortalidad de asegurados, lo que indica una menor mortalidad observada en la población del fondo mutual. La única excepción se presenta en el año 2021 para el sexo masculino, donde las tasas propias superaron ligeramente las oficiales. Este hallazgo representa una oportunidad significativa de ajuste en las tarifas actuales, que podrían optimizarse y volverse más competitivas frente a otros actores del mercado. Además, un rediseño tarifario basado en estos resultados, articulado con una estrategia de mercadeo sólida, podría fortalecer la sostenibilidad del fondo y atraer nuevos asociados.

En conjunto, los hallazgos de este trabajo aportan evidencia empírica que respalda la utilidad práctica del modelo Lee-Carter en contextos actuariales. Su correcta implementación permite contar con una base técnica para estimar de manera más precisa las tasas de mortalidad y proyectar las futuras, lo cual resulta esencial para una adecuada gestión de los riesgos biométricos y financieros inherentes a estos esquemas de protección colectiva. Este tipo de modelación fortalece la toma de decisiones estratégicas, mejora la evaluación de solvencia y contribuye a garantizar la estabilidad y sostenibilidad financiera de los fondos mutuales de solidaridad en el mediano y largo plazo.

6.1. Recomendaciones

A partir de los hallazgos derivados del análisis y proyección de la mortalidad en la población del fondo mutual de solidaridad, se plantea un conjunto de recomendaciones orientadas a fortalecer la gestión técnica de estas entidades. Estas sugerencias buscan mejorar la sostenibilidad financiera de los productos ofrecidos, optimizar los procesos de planificación actuarial y anticiparse de manera oportuna a los desafíos asociados al riesgo de fallecimiento, garantizando así una administración más robusta y alineada con los principios de solvencia y actividad mutualista.

- **Incorporar efectos de cohorte en el modelo de mortalidad:** Aunque el modelo Lee-Carter captura bien la evolución por edad y periodo, no considera explícitamente efectos de cohorte (es decir, diferencias por año de nacimiento). Futuros trabajos podrían explorar modelos extendidos como Lee-Carter con efecto de cohorte, que permiten una mejor comprensión de los patrones intergeneracionales y mejorar la precisión de las proyecciones.
- **Ajustar modelos estocásticos para el componente k_t :** En lugar de aplicar técnicas semiparamétricas de suavizamiento, como Loess, al componente temporal k_t , se recomienda explorar su modelación mediante procesos estocásticos, tales como una caminata aleatoria o modelos autorregresivos integrados como ARIMA. Esta

alternativa permitiría no solo proyectar trayectorias futuras, sino también estimar intervalos de predicción que cuantifiquen explícitamente la incertidumbre asociada al riesgo de muerte, aspecto fundamental en la valoración actuarial y en la gestión del capital. La implementación de esta estrategia sería particularmente viable en escenarios donde se disponga de una mayor cantidad de observaciones históricas, lo cual incrementaría la estabilidad y fiabilidad del ajuste estocástico.

- **Implementar simulaciones de Monte Carlo:** La incorporación de simulaciones estocásticas permitiría generar múltiples trayectorias de mortalidad futura, lo que ayudaría a cuantificar el impacto financiero bajo distintos escenarios. Esto es especialmente útil para evaluar reservas y requerimientos de capital en contextos de gestión de riesgo.
- **Comparar proyección con datos reales:** Una vez terminado el año calendario, sería interesante comparar la proyección con los datos reales del último año estimado para comprobar la efectividad del método utilizado.
- **Actualizar continuamente el modelo con nueva información:** Se recomienda establecer un sistema de monitoreo continuo de la experiencia de mortalidad dentro de la entidad, con el fin de garantizar la actualización periódica del modelo y preservar su capacidad predictiva. Para ello, resulta conveniente implementar procesos automatizados de actualización anual de los parámetros, acompañados de ejercicios de validación sistemática del ajuste. Esta práctica no solo permite detectar desviaciones tempranas respecto al comportamiento esperado, sino que también fortalece la toma de decisiones actuariales con base en información reciente y representativa de la realidad demográfica de los asociados.

Bibliografía

- Belliard, M., Williams, I., et al. (2013). Proyección estocástica de la mortalidad. una aplicación de lee-carter en la argentina. *Revista Latinoamericana de Población*, 7(13):129–148.
- Bergeron-Boucher, M.-P. and Kjærgaard, S. (2022). Mortality forecasting at age 65 and above: an age-specific evaluation of the lee-carter model. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2022(1):64–79.
- Booth, H., Maindonald, J., and Smith, L. (2002). Applying lee-carter under conditions of variable mortality decline. *Population studies*, 56(3):325–336.
- Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., and Nesbitt, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics*. Society of Actuaries, Schaumburg, IL, 2nd edition.
- Brouhns, N., Denuit, M., and Vermunt, J. K. (2002). A poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance: Mathematics and economics*, 31(3):373–393.
- Cairns, A. J., Blake, D., and Dowd, K. (2008). Modelling and management of mortality risk: a review. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2008(2-3):79–113.
- Castillo, G. (2024). Monitoreo de la deserción académica universitaria a través de la integración del modelo de lee -carter y gráficos de control multivariantes. Master's thesis, Universidad del Valle.
- Cleveland, W. S. and Devlin, S. J. (1988). Locally weighted regression: An approach to regression analysis by local fitting. *Journal of the American Statistical Association*, 83(403):596–610.
- Debón, A., Montes, F., and Sala, R. (2009). Tablas de mortalidad dinámicas. una aplicación a la hipoteca inversa en espana. fundación ico. *Publicaciones de la Universitat de Valencia, valencia*.
- Diaz Rojo, Gisou y Debón Aucejo, A. M. (2016). Tendencias y comportamiento de la mortalidad en colombia entre 1973 y 2005. *Estadística española*, 58(191):277–300.

- Domínguez, M. (2011). La cooperación y el mutualismo en el contexto social y económico. *Revista de Economía Social*, 42(3):214–229.
- D’Amato, V., Di Lorenzo, E., Haberman, S., Russolillo, M., and Sibillo, M. (2011). The poisson log-bilinear lee-carter model: Applications of efficient bootstrap methods to annuity analyses. *North American Actuarial Journal*, 15(2):315–333.
- Graunt, J. and Willcox, W. F. (1939). Natural and political observations made upon the bills of mortality. (*No Title*).
- Hulme, D. and Arun, T. (2009). *Microfinance: A Reader*. Routledge, London.
- Lee, R. and Carter, L. (1992). Modelling and forecasting us mortality (with discussion). *Journal of the American Statistical Association*, 87(419):659–675.
- Lin, L. I.-K. (1989). A concordance correlation coefficient to evaluate reproducibility. *Biometrics*, 45(1):255–268.
- MAPFRE, F. (2024a). Diccionario mapfre de seguros - seguro de vida. <https://www.fundacionmapfre.org/publicaciones/diccionario-mapfre-seguros/seguero-vida/>. Accedido el 6 de diciembre de 2024.
- MAPFRE, F. (2024b). Fondo mutual. Accedido el 6 de diciembre de 2024.
- Ministerio de Justicia y del Derecho (2020). ¿qué son las asociaciones mutuales y cómo se constituyen? Accedido: 23 de agosto de 2020.
- Montesinos Ruiz, L. F. (2014). *Construcción de tablas dinámicas de mortalidad mediante el método de Lee-Carter y una aplicación en el análisis actuarial*. PhD thesis, UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS.
- Ochoa, C. (2015). El modelo lee-carter para estimar y pronosticar mortalidad: una aplicación para colombia. *Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín*.
- OMS (1993). *Clasificación Internacional de Enfermedades, 10^a revisión (CIE-10)*. OMS, Ginebra. Disponible en línea en el sitio web oficial de la OMS.
- OPS (2017). Lineamientos básicos para el análisis de la mortalidad. *Organización Mundial de la Salud, Oficina regional para las Américas*.
- Organización Panamericana de la Salud (2017). *Lineamientos básicos para el análisis de la mortalidad*. OPS, Washington, D.C.
- Ortega, A. (1987). Tablas de mortalidad.

- Ortiz, F., Villegas, M., and Zarruk, A. (2012). Tablas de mortalidad (mortality tables). *Documentos de Matemáticas y Estadística*, (5).
- Otero, M. (2002). *El Mutualismo como modelo organizativo*. Editorial Universitaria.
- Rejda, G. E. (2005). Risk management and insurance. *Person Education Inc*, 13:44–55.
- Renshaw, A. and Haberman, S. (2006). A cohort-based extension to the lee-carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38(3):556–570.
- Uribe Gil, J. M. (2017). Tablas de vida de santiago de cali: Tendencias recientes y proyecciones: 1985-2030. *Sociedad y Economía*, (32):171–194.
- Wilmoth, J. R. (1993). Computational methods for fitting and extrapolating the lee-carter model of mortality change. Technical report, Department of Demography, University of California, Berkeley.

A. Anexo: Estructura de base de datos del área de actuaría de un fondo mutual de solidaridad

Periodo	Regional	Ciudad	Fecha Nacimiento	Sexo Asociado	Estado Civil	Nivel Educativo	Profesion	Fecha del Evento	Fecha de Aprobación
201301	Bogota	Santafe de	19540113	Femenino	Casado	Nivel Academico	ODONTOLOG	20130105	20130116
201301	Bogota	Santafe de	19490330	Masculino	Separado	Técnico	TEC MINERIA	20130113	20130130
201301	Bogota	Villavicenc	19620519	Masculino	Casado	Profesional	ADMN. FINA	20130125	20130129
201301	Medellin	Barrancab	19640109	Masculino	Union Libre	Técnico	TEC METALME	20130127	20130131
201301	Cali	Cali	19720704	Femenino	Union Libre	Profesional		20130103	20130125
201301	Medellin	Medellin	19520228	Femenino	Casado	Profesional	ENFERMERA L	20130117	20130125
201301	Medellin	Medellin	19680229	Femenino	Soltero	Tecnólogo	TECN EN ADM	20130114	20130131
201301	Medellin	Cucuta	19620401	Femenino	Casado	Profesional	CONTADORA	20130103	20130116
201301	Caribe	Barranquil	19470605	Femenino	Casado	Profesional	LIC. EN CIENC	20130115	20130131
201301	Medellin	Medellin	19640317	Femenino	Soltero	Especializacion	ESP EN REALC	20130106	20130109
201301	Bogota	Santafe de	19811211	Femenino	Soltero	Profesional	CIENCIAS DE L	20130107	20130128
201301	Cali	Cali	19490711	Masculino	No Definido	Nivel Academico	TECN. INDUS	20130106	20130123
201301	Cali	Cali	19530125	Masculino	No Definido	Nivel Academico	ADMN. DE E	20130103	20130115
201301	Caribe	Cartagena	19760324	Femenino	Soltero	Profesional	FISIOTERAPEU	20130103	20130117
201301	Cali	Neiva	19910720	Femenino	Soltero	Profesional	DERECHO	20130115	20130128
201301	Eje Cafetero	Cartago	19731228	Masculino	Casado	Profesional	ADMN EMPI	20130102	20130116
201301	Medellin	Itagui	19650206	Masculino	Union Libre	Tecnólogo	TEC EN ELECTI	20130108	20130128
201301	Medellin	Medellin	19661210	Masculino	Union Libre	Profesional	CONTADURIA	20130112	20130124
201301	Eje Cafetero	Armenia	19530630	Femenino	Separado	Especializacion	CONTADOR	20130111	20130129
201301	Medellin	Bucarama	19530911	Masculino	Casado	Especializacion	ADM DE EMPI	20130116	20130131
201301	Medellin	Bucarama	19650523	Masculino	Casado	Profesional	TEC. EN DISE#	20130103	20130121
201301	Medellin	Medellin	19510831	Femenino	Casado	Bachiller		20130107	20130125
201301	Caribe	Barranquil	19460129	Femenino	Casado	Profesional	CONTADORA	20130110	20130131
201301	Medellin	Medellin	19691122	Femenino	Union Libre	Otros		20130110	20130123
201301	Palmira	Palmira	19601108	Femenino	Soltero	Profesional	ABOGADA	20130107	20130118
201301	Cali	Cali	19521221	Femenino	Casado	Profesional	NUTRICIONIS	20130107	20130111
201301	Caribe	Valledupa	19830304	Masculino	Soltero	Profesional	ABOGADO	20130112	20130131
201301	Caribe	Valledupa	19830304	Masculino	Soltero	Profesional	ABOGADO	20130112	20130131

Figura A-1.: Estructura de datos del área de actuaría: asociados siniestros gastos funerarios

B. Anexo: Tabla Colombiana de Mortalidad de los Asegurados: experiencia 1998-2003

TABLA DE MORTALIDAD ASEGURADOS HOMBRES Experiencia 1998-2003					TABLA DE MORTALIDAD ASEGURADOS HOMBRES Experiencia 1998-2003				
x	l(x)	d(x)	q(x)	e ^t (x)	x	l(x)	d(x)	q(x)	e ^t (x)
20	100,000	358	0.003580	54.31	61	82,898	903	0.010893	19.84
21	99,644	358	0.003593	53.50	62	81,995	979	0.011940	19.06
22	99,286	361	0.003636	52.69	63	81,016	1,054	0.013010	18.28
23	98,925	364	0.003680	51.88	64	79,962	1,119	0.013994	17.51
24	98,561	366	0.003713	51.07	65	78,843	1,179	0.014954	16.76
25	98,195	366	0.003727	50.26	66	77,664	1,232	0.015863	16.00
26	97,829	367	0.003751	49.45	67	76,432	1,281	0.016760	15.25
27	97,462	367	0.003766	48.63	68	75,151	1,357	0.018057	14.50
28	97,095	367	0.003780	47.81	69	73,794	1,413	0.019148	13.76
29	96,728	367	0.003794	46.99	70	72,381	1,477	0.020406	13.02
30	96,361	366	0.003798	46.17	71	70,904	1,558	0.021973	12.28
31	95,995	366	0.003813	45.34	72	69,346	1,656	0.023880	11.55
32	95,629	366	0.003827	44.51	73	67,690	1,790	0.026444	10.82
33	95,263	365	0.003831	43.68	74	65,900	1,957	0.029697	10.10
34	94,898	366	0.003857	42.85	75	63,943	2,160	0.033780	9.39
35	94,532	366	0.003872	42.01	76	61,783	2,397	0.038797	8.70
36	94,166	365	0.003878	41.18	77	59,366	2,666	0.044893	8.03
37	93,801	365	0.003891	40.33	78	56,720	2,971	0.052380	7.39
38	93,436	365	0.003908	39.49	79	53,749	3,359	0.062494	6.77
39	93,071	365	0.003922	38.64	80	50,390	3,818	0.075769	6.18
40	92,706	366	0.003948	37.79	81	46,572	4,241	0.091063	5.65
41	92,340	367	0.003974	36.94	82	42,331	4,412	0.104226	5.17
42	91,973	368	0.004001	36.09	83	37,919	4,545	0.119861	4.71
43	91,605	369	0.004028	35.23	84	33,374	4,567	0.136843	4.28
44	91,238	371	0.004066	34.37	85	28,807	4,468	0.155032	3.88
45	90,865	372	0.004094	33.51	86	24,341	4,305	0.176862	3.50
46	90,493	374	0.004133	32.64	87	20,036	4,062	0.202735	3.15
47	90,119	376	0.004172	31.78	88	15,974	3,706	0.232002	2.82
48	89,743	379	0.004223	30.91	89	12,268	3,257	0.265487	2.52
49	89,364	384	0.004297	30.04	90	9,011	2,725	0.302408	2.25
50	88,980	392	0.004405	29.16	91	6,286	2,138	0.340121	2.01
51	88,588	404	0.004560	28.29	92	4,148	1,584	0.381871	1.79
52	88,184	422	0.004785	27.42	93	2,564	1,097	0.427847	1.59
53	87,762	445	0.005071	26.55	94	1,467	702	0.478528	1.41
54	87,317	478	0.005451	25.68	95	765	408	0.533333	1.24
55	86,841	513	0.005907	24.82	96	357	212	0.593838	1.09
56	86,328	560	0.006467	23.96	97	145	96	0.662069	0.94
57	85,768	615	0.007171	23.12	98	49	36	0.734694	0.81
58	85,153	679	0.007974	22.28	99	13	11	0.846154	0.65
59	84,474	750	0.008878	21.45	100	2	2	1.000000	0.50
60	83,724	826	0.009866	20.64					

Figura B-1.: TM Sexo Masculino, Superintendencia Financiera de Colombia

TABLA DE MORTALIDAD A SEGUROS MUJERES Experiencia 1998-2003					TABLA DE MORTALIDAD A SEGUROS MUJERES Experiencia 1998-2003				
x	l(x)	d(x)	q(x)	s ^e (x)	x	l(x)	d(x)	q(x)	s ^e (x)
20	100,000	130	0.001300	57.39	71	77,670	1,582	0.020368	12.38
21	99,870	134	0.001342	56.47	72	76,088	1,699	0.022329	11.63
22	99,736	138	0.001384	55.54	73	74,389	1,855	0.024986	10.88
23	99,598	141	0.001416	54.62	74	72,534	2,050	0.028263	10.15
24	99,457	145	0.001458	53.69	75	70,484	2,285	0.032419	9.43
25	99,312	148	0.001490	52.77	76	68,199	2,561	0.037552	8.73
26	99,164	152	0.001533	51.85	77	65,638	2,875	0.043801	8.05
27	99,012	155	0.001565	50.93	78	62,763	3,235	0.051543	7.40
28	98,857	159	0.001608	50.01	79	59,528	3,691	0.062004	6.77
29	98,698	162	0.001641	49.09	80	55,837	4,230	0.075756	6.18
30	98,536	166	0.001685	48.17	81	51,607	4,700	0.091073	5.65
31	98,370	170	0.001728	47.25	82	46,907	4,889	0.104228	5.17
32	98,200	174	0.001772	46.33	83	42,018	5,036	0.119853	4.71
33	98,026	179	0.001826	45.41	84	36,982	5,061	0.136850	4.28
34	97,847	184	0.001880	44.49	85	31,921	4,949	0.155039	3.88
35	97,663	189	0.001935	43.58	86	26,972	4,770	0.176850	3.50
36	97,474	194	0.001990	42.66	87	22,202	4,501	0.202729	3.15
37	97,280	199	0.002046	41.74	88	17,701	4,106	0.231964	2.82
38	97,081	204	0.002101	40.83	89	13,595	3,609	0.265465	2.52
39	96,877	210	0.002168	39.91	90	9,986	3,019	0.302323	2.25
40	96,667	217	0.002245	39.00	91	6,967	2,369	0.340032	2.01
41	96,450	223	0.002312	38.08	92	4,598	1,756	0.381905	1.79
42	96,227	230	0.002390	37.17	93	2,842	1,216	0.427868	1.59
43	95,997	236	0.002458	36.26	94	1,626	778	0.478475	1.41
44	95,761	243	0.002538	35.35	95	848	452	0.533019	1.24
45	95,518	250	0.002617	34.44	96	396	235	0.593434	1.09
46	95,268	257	0.002698	33.53	97	161	106	0.658385	0.95
47	95,011	264	0.002779	32.61	98	55	40	0.727273	0.83
48	94,747	272	0.002871	31.70	99	15	12	0.800000	0.70
49	94,475	282	0.002985	30.79	100	3	3	1.000000	0.50
50	94,193	294	0.003121	29.88					
51	93,899	309	0.003291	28.98					
52	93,590	329	0.003515	28.07					
53	93,261	353	0.003785	27.17					
54	92,908	384	0.004133	26.27					
55	92,524	421	0.004550	25.38					
56	92,103	467	0.005070	24.49					
57	91,636	521	0.005686	23.61					
58	91,115	584	0.006409	22.74					
59	90,531	655	0.007235	21.89					
60	89,876	731	0.008133	21.04					
61	89,145	811	0.009098	20.21					
62	88,334	891	0.010087	19.39					
63	87,443	972	0.011116	18.59					
64	86,471	1,045	0.012085	17.79					
65	85,426	1,116	0.013064	17.00					
66	84,310	1,180	0.013996	16.22					
67	83,130	1,242	0.014840	15.44					
68	81,888	1,332	0.016266	14.67					
69	80,556	1,403	0.017416	13.90					
70	79,153	1,483	0.018736	13.14					

Figura B-2.: TM Sexo Femenino, Superintendencia Financiera de Colombia

C. Anexo: Tabla de $q(x)$ estimado para las tablas de mortalidad del fondo mutual de solidaridad

Tabla C-1.: $q(x)$ estimado para las tablas de mortalidad del fondo mutual de solidaridad

edad	qx_general	qx_femenino	qx_masculino
18	0,000164	0,000065	0,000252
19	0,000168	0,000079	0,000253
20	0,000173	0,000092	0,000254
21	0,000177	0,000106	0,000255
22	0,000181	0,000120	0,000256
23	0,000186	0,000133	0,000257
24	0,000190	0,000146	0,000258
25	0,000194	0,000159	0,000259
26	0,000197	0,000171	0,000259
27	0,000200	0,000183	0,000259
28	0,000203	0,000194	0,000258
29	0,000206	0,000205	0,000258
30	0,000209	0,000214	0,000257
31	0,000211	0,000224	0,000256
32	0,000213	0,000233	0,000255
33	0,000216	0,000241	0,000254
34	0,000219	0,000249	0,000254
35	0,000223	0,000257	0,000255
36	0,000227	0,000265	0,000258
37	0,000233	0,000274	0,000263
38	0,000240	0,000282	0,000272
39	0,000249	0,000293	0,000284
40	0,000262	0,000306	0,000300
41	0,000278	0,000324	0,000319
42	0,000299	0,000348	0,000342

Tabla C-1 continuación de la tabla

edad	qx_general	qx_femenino	qx_masculino
43	0,000326	0,000379	0,000370
44	0,000358	0,000417	0,000402
45	0,000396	0,000462	0,000439
46	0,000440	0,000514	0,000481
47	0,000490	0,000574	0,000530
48	0,000547	0,000640	0,000585
49	0,000610	0,000714	0,000646
50	0,000678	0,000793	0,000713
51	0,000751	0,000878	0,000786
52	0,000828	0,000969	0,000863
53	0,000910	0,001064	0,000946
54	0,000995	0,001164	0,001034
55	0,001083	0,001266	0,001127
56	0,001175	0,001371	0,001227
57	0,001271	0,001477	0,001333
58	0,001370	0,001584	0,001446
59	0,001472	0,001691	0,001564
60	0,001576	0,001799	0,001686
61	0,001681	0,001907	0,001812
62	0,001788	0,002015	0,001938
63	0,001894	0,002123	0,002065
64	0,002000	0,002231	0,002192
65	0,002121	0,002380	0,002313
66	0,002263	0,002555	0,002453
67	0,002436	0,002770	0,002624
68	0,002652	0,003039	0,002835
69	0,002926	0,003380	0,003103
70	0,003276	0,003815	0,003446
71	0,003721	0,004368	0,003882
72	0,004283	0,005067	0,004435
73	0,004988	0,005940	0,005129
74	0,005862	0,007020	0,005991
75	0,006932	0,008341	0,007050
76	0,008228	0,009938	0,008334
77	0,009781	0,011848	0,009874
78	0,011620	0,014106	0,011704
79	0,013778	0,016751	0,013853

Tabla C-1 continuación de la tabla

edad	qx_general	qx_femenino	qx_masculino
80	0,016286	0,019821	0,016356
81	0,019179	0,023356	0,019248
82	0,022492	0,027399	0,022566
83	0,026265	0,031998	0,026349
84	0,030537	0,037197	0,030640
85	0,035347	0,043045	0,035477
86	0,040728	0,049578	0,040896
87	0,046711	0,056834	0,046930
88	0,053316	0,064836	0,053601
89	0,060560	0,073599	0,060926
90	0,068442	0,083124	0,068907
91	0,076958	0,093403	0,077543
92	0,086091	0,104412	0,086815
93	0,095802	0,116106	0,096688
94	0,106046	0,128429	0,107115
95	0,116758	0,141303	0,118029
96	0,127854	0,154631	0,129344
97	0,139245	0,168307	0,140963
98	0,150826	0,182213	0,152776
99	0,162500	0,196232	0,164681