



Conocimiento didáctico para la enseñanza del número natural en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida a través de la construcción de sentido numérico en la formación del docente de primer ciclo de educación básica primaria

Jose Luis Vásquez Tigreros

(201402412)

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Maestría en Educación, Énfasis Educación Matemática

Modalidad Investigación

Santiago de Cali, febrero de 2020



Conocimiento didáctico para la enseñanza del número natural en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida a través de la construcción de sentido numérico en la formación del docente de primer ciclo de educación básica primaria

Jose Luis Vásquez Tigreros

(201402412)

Informe final de investigación presentado como requisito para optar al título de Magíster en Educación, Énfasis Educación Matemática, Modalidad Investigación

Tutor:

Evelio Bedoya Moreno, PhD.

Profesor del Instituto de Educación y Pedagogía

Universidad del Valle

Instituto de Educación y Pedagogía

Área de Educación Matemática

Maestría en Educación, Énfasis Educación Matemática

Modalidad Investigación

Santiago de Cali, febrero de 2020



INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
Subdirección de Investigaciones y Posgrados

ACTA DE SUSTENTACIÓN

Programa Académico: Maestría en Educación - Énfasis Educación Matemática

Código del programa: 7412

Resolución del programa: 017

Día	Mes	Año
20	2	2020

Título del Trabajo o Proyecto de Grado			
"CONOCIMIENTO DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA DEL NÚMERO NATURAL EN SITUACIONES DE ORDINALIDAD, CARDINALIDAD Y MEDIDA A TRAVÉS DE LA CONSTRUCCIÓN DE SENTIDO NUMÉRICO EN LA FORMACIÓN DEL DOCENTE DE PRIMER CICLO DE EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA"			
Se trata de:			
Trabajo de grado de Maestría ☒			
Director			
EVELIO BEDOYA MORENO			
Evaluadores			
Nombres y Apellidos		Filiación Universitaria	
YADIRA MARCELA MESA		UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA	
WILDEBRANDO MIRANDA VARGAS		UNIVERSIDAD DEL VALLE	
Estudiantes			
Nombres y Apellidos	Código	E-mail	Télefonos de contacto
JOSÉ LUIS VÁSQUEZ TIGREROS	1402412	jose.tigre@gmail.com	300-5208718
Evaluación			
Aprobado	☒	Meritorio	☐
Aprobado con recomendaciones	☐	No Aprobado	☐
Laureado	☐	Incompleto	☐

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo máximo de (máximo un mes) ante:

Director del Trabajo o Proyecto de Grado ☒ Primer Evaluador ☐ Segundo Evaluador ☐

En el caso de que el Informe Final se considere **Incompleto** (diligenciar la página siguiente), se da un plazo máximo de semestre (s) para realizar una nueva reunión de Evaluación el: ____/____/____

En el caso de ser **Aprobado con distinción meritorio o laureado**, diligenciar en la página siguiente los conceptos de evaluación.

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

Firma		
Prof. EVELIO BEDOYA MORENO	Prof. YADIRA MARCELA MESA	Prof. WILDEBRANDO MIRANDA VARGAS
Director del Trabajo o Proyecto de Grado	Jurado Evaluador	Jurado Evaluador
Prof. HENRY GIOVANY CABRERA C.	DAVID BENITEZ MOJICA	
Subdirector de Investigaciones y Posgrados	(En reemplazo del Subdirector de Investigaciones y Posgrados)	

Agradecimientos

Primero agradezco a Dios por haberme permitido realizar este estudio con el propósito de generar conocimientos que fortalecen mi práctica profesional y personal en cualquier rol que desempeñe en el campo de la formación en la sociedad.

Segundo agradezco enormemente a mi esposa Andrea con quien reflexioné y ajusté muchas de las conceptualizaciones y consideraciones plasmadas en este trabajo y a mi hija María José que con su presencia me iluminó la vida, convirtiéndose en un motivo para culminar mi proceso de formación y ser un ejemplo de superación y progreso personal para ella.

Agradezco a mi familia, porque han estado pendientes de mi proceso de formación durante este proceso de cualificación y mejoramiento profesional y han sido pacientes con el tiempo que hemos dejado de compartir y disfrutar.

De igual manera agradezco sinceramente a los profesores Evelio Bedoya Moreno, quien orientó las acciones y reflexiones que requirió este estudio, y Ligia Amparo Torres Rengifo, porque con sus observaciones, reflexiones y sugerencias me ayudó a fortalecer mis capacidades profesionales y personales en relación a mis necesidades formativas.

A mis amigos y compañeros de trabajo y de la Universidad quienes me brindaron sus observaciones y consideraciones para mejorar este trabajo investigativo.

Mis más sinceros agradecimientos a las profesoras Bibiana Chávez, Cristina Guzmán y Carmen Sara Castillo quienes participaron de esta investigación con su colaboración en las reflexiones y su tiempo.

Lógicamente, a la profesora Yadira Marcela Meza y el profesor Wildebrando Miranda Vargas, quienes accedieron a evaluar este trabajo y porque con algunas de sus observaciones, comentarios y sugerencias permitieron ajustar este estudio y ampliaron mi formación profesional.

Tabla de contenido

Tabla de contenido	i
Índice de tablas	iv
Índice de figuras	v
Índice de ilustración	vi
Resumen	vii
Introducción general	viii
Capítulo 1: Presentación del problema	1
1.1 Planteamiento y formulación del problema	1
1.2 Objetivos de estudio	8
1.2.1. Objetivo general.	8
1.2.2. Objetivos específicos.	9
1.3 Hipótesis de trabajo	9
1.4 Justificación	10
1.5 Antecedentes	14
1.5.1. Investigaciones sobre la formación del profesor de matemáticas.	14
1.5.2. Algunas investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del Número Natural.	24
1.5.3. Investigaciones sobre el sentido numérico.	26
Capítulo 2: Marco conceptual	30
2.1 La formación de profesores en la Educación Matemática y la Didáctica de las Matemáticas	31
2.2 Modelo curricular y didáctico	33
2.2.1 El currículo funcional en la Educación Matemática	36
2.2.2 Perspectiva sociocultural en la formación de profesores de matemáticas.	38
2.3 Contextualización curricular sobre sentido numérico y el Número Natural	43

2.3.1 El Número Natural y el sentido numérico en el currículo nacional.	44
2.3.2 Currículo institucional.	47
2.3.3 Currículo propuesto en el aula.	48
2.4 Modelo local de Análisis Didáctico y Organizadores del Currículo	49
2.4.1 Análisis de contenido sobre los números naturales.	52
2.4.2 Análisis didáctico cognitivo sobre sentido numérico.	65
Capítulo 3: Marco y diseño metodológico	77
3.1 Marco metodológico.....	77
3.1.1. Investigación-Acción.....	78
3.1.2. Estudio de caso.	79
3.1.2.3 Metodología del Análisis Didáctico.	80
3.2 Diseño metodológico.....	81
3.2.1 Contextualización y participantes.....	82
3.2.2 Fases de la investigación.	83
3.2.3 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información.	87
Capítulo 4: Reflexiones y análisis sobre el conocimiento didáctico para la enseñanza del Número Natural	94
4.1 Análisis de las reflexiones de los profesores sobre la enseñanza del Número Natural para la construcción de sentido numérico	94
4.1.1 Formación de los profesores en el estudio de caso.....	95
4.1.2 Modelo curricular y didáctico.....	96
4.1.3 Modelo local de Análisis Didáctico.....	101
Capítulo 5: Consideraciones finales a modo de conclusión	125
5.1 Conclusiones	125
5.1.1 Educación Matemática y Didáctica de las Matemáticas en la formación de profesores.	131
5.1.2 Modelo curricular y didáctico para la enseñanza del Número Natural.	132

5.1.3 Contextualización del sentido numérico y el Número Natural.....	133
5.1.4 Modelo Local de Análisis Didáctico.	135
5.2. Recomendaciones generales	136
Referencias bibliográficas	139
Apéndices	146
Apéndice A Unidades y preguntas de análisis	146
Apéndice B - Situaciones de reflexión para las docentes	147
Apéndice C Unidades y preguntas complementarias de análisis	152
Apéndice D Tareas de reflexión complementaria para las docentes	153
Apéndice E imágenes de las propuestas escolares	159

Índice de tablas

<i>Tabla 1. Atributos que caracterizan los enfoques de las matemáticas escolares. (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 180)</i>	<i>38</i>
<i>Tabla 2. MLAD para caracterizar los Conocimientos Didácticos del profesor para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Número Natural.....</i>	<i>52</i>
<i>Tabla 3. Modelo fenomenológico que se explora en esta investigación.....</i>	<i>61</i>
<i>Tabla 4. Adaptación de los focos conceptuales del sistema de los números naturales (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008, p. 12).....</i>	<i>64</i>
<i>Tabla 5. Estándares básicos de competencias (MEN, 2006), Derechos básicos de aprendizaje Versión 2 (MEN, 2016).....</i>	<i>68</i>
<i>Tabla 6. Relación entre objetivos para la enseñanza y competencias de los números naturales en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida.....</i>	<i>69</i>
<i>Tabla 7. Destrezas y habilidades propuestas para la construcción de sentido numérico en la enseñanza de los números naturales.....</i>	<i>71</i>
<i>Tabla 8. Limitaciones y dificultades para la enseñanza y aprendizaje del Número Natural en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida.....</i>	<i>72</i>
<i>Tabla 9. Representaciones de materiales didácticos y situaciones numéricas para su uso.....</i>	<i>75</i>
<i>Tabla 10. Contextualización y participantes de la investigación.</i>	<i>83</i>
<i>Tabla 11. Unidades de análisis del Modelo Local de Análisis Didáctico.</i>	<i>85</i>
<i>Tabla 12. Articulación sistémica y estructural del AD.....</i>	<i>87</i>
<i>Tabla 13. Guion de la entrevista realizada en el primer encuentro.</i>	<i>89</i>
<i>Tabla 14. Relación de objetivos de enseñanza y las situaciones y tareas propuestas en la Unidad Didáctica Guía.....</i>	<i>90</i>
<i>Tabla 15. Unidades de análisis y temas de centrales de investigación de la entrevista inicial.</i>	<i>147</i>
<i>Tabla 16. Unidades de análisis y temas de centrales de investigación complementarios.</i>	<i>153</i>

Índice de figuras

<i>Figura 1. Configuraciones sistémicas y culturales, y los límites dentro de los cuales se encuentra la FPM (Jaworski, 2008)</i>	<i>17</i>
<i>Figura 2. Categorías conceptuales en las que se basa esta investigación.</i>	<i>31</i>
<i>Figura 3. Modelo de enseñanza y aprendizaje en la Teoría de la Objetivación (Figura adaptada de Radford, 2014, p. 139)</i>	<i>43</i>
<i>Figura 4. Estructura curricular del área de matemáticas. (MEN, 1998, p. 36).....</i>	<i>45</i>
<i>Figura 5. Modelo local de Análisis de Contenido.</i>	<i>53</i>
<i>Figura 6. Axiomas de Peano (Peano, 1889, p.1 como se mencionó en Vásquez, 2010, p. 61). ...</i>	<i>56</i>
<i>Figura 7. Sistemas de representación de los números naturales. (Rico et al., 2008, p. 16)</i>	<i>62</i>
<i>Figura 8. Adaptación del mapa conceptual del Sistema de los números naturales (Rico, et al., 2008, p.14)</i>	<i>65</i>
<i>Figura 9. Modelo local de Análisis Cognitivo.....</i>	<i>66</i>
<i>Figura 10. Diseño metodológico de la investigación.</i>	<i>84</i>

Índice de ilustración

<i>Ilustración 1. Imagen de una propuesta de enseñanza del Número Natural.....</i>	<i>127</i>
<i>Ilustración 2. Propuesta para relacionar ordinales y cardinales en la enseñanza del Número Natural.</i>	<i>134</i>

Resumen

Este estudio presenta algunos elementos básicos del conocimiento didáctico y curricular en la formación de un profesor en ejercicio de primer ciclo de educación básica primaria, para la construcción de sentido numérico a través de propuestas para la enseñanza del Número Natural en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida. Dichos elementos básicos del conocimiento didáctico y curricular se identifican y caracterizan mediante la articulación de organizadores del currículo que estructuran un Modelo Local de Análisis Didáctico que soporta teóricamente los conocimientos didácticos asociados a la construcción de sentido numérico. Esta fundamentación teórica posibilita reconocer y describir algunos conocimientos curriculares y didácticos que las docentes en ejercicio, participantes del estudio, han desarrollado a lo largo de su experiencia práctica y formativa y que emplean cuando analizan, reflexionan y proponen la construcción de sentido numérico en situaciones de enseñanza del Número Natural. Los resultados de este estudio permiten establecer unos aspectos básicos del conocimiento didáctico que los profesores en formación y en ejercicio requieren desarrollar en relación a categorías del Análisis Didáctico de Contenido y del Análisis Didáctico Cognitivo que se presentan como una alternativa para tomar decisiones, planear, orientar y evaluar propuestas sobre la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Número Natural en los programas de formación a profesores de matemáticas en la educación básica primaria. Asimismo, dichos elementos básicos al vincularse con propuestas de enseñanza originadas a partir del contexto sociocultural enriquecen el modelo curricular y didáctico que el profesor pone en práctica.

Palabras clave: *formación de profesores de matemáticas, modelo curricular y didáctico, Conocimiento Didáctico, Modelo Local de Análisis Didáctico, Número Natural, sentido numérico.*

Introducción general

La práctica profesional de los profesores que enseñan matemáticas está relacionada con actividades de planeación, diseño, implementación y evaluación de los tópicos escolares según el currículo del grado a cargo, lo que supone que los maestros requieran tener un *conocimiento didáctico* y profesional especializado que permita que estos y sus los estudiantes desarrollen sentidos y significados de los objetos matemáticos de conocimiento. De acuerdo con (Rico 1997a, 1997b; Bedoya, 2002) los profesores de matemáticas necesitan una formación que les permita desarrollar conocimientos profesionales para controlar y gestionar las diferentes relaciones que se manifiestan en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Es por ello que con este estudio se pretende establecer algunos elementos centrales del *conocimiento didáctico* en la formación de un profesor del primer ciclo de educación básica primaria, para la *construcción de sentido numérico* (SN) a través de propuestas para la *enseñanza del Número Natural* (NN) en situaciones de *ordinalidad, cardinalidad y medida*.

A partir de este propósito investigativo, se aborda el problema sobre el *conocimiento didáctico* para la construcción de SN en la enseñanza del NN en relación con los conocimientos desarrollados en sus relaciones profesionales, sociales e históricas que influyen en el *modelo curricular y didáctico* que los profesores consideran para enseñar este contenido del currículo escolar. A continuación, se describen los capítulos, que estructuran este trabajo de investigación:

En el Capítulo I titulado Presentación del Problema se exhiben algunos elementos generales relacionados con la *formación del profesor de matemáticas* y el *conocimiento didáctico*, en relación con la construcción de SN en el marco de la enseñanza del NN, que permiten delimitar la problemática de investigación descrita en el planteamiento y la formulación del problema, los objetivos de estudio, la hipótesis de trabajo, la justificación y los antecedentes en relación con los elementos generales en el profesor del primer ciclo de la educación básica primaria.

En el Capítulo II denominado Marco Conceptual, se describen los principales referentes conceptuales, curriculares y didácticos que el profesor requiere para la construcción de SN mediante las situaciones de enseñanza del NN. Este conocimiento se identifica a través de un *modelo curricular y didáctico* propuesto en este estudio que se configura en el marco del *Modelo Local de Análisis Didáctico* (MLAD) presentado para caracterizar los conocimientos didácticos

sobre la construcción de SN en situaciones de enseñanza relacionadas con la ordinalidad, la cardinalidad y la medida.

En el Capítulo III, Marco y Diseño Metodológico, se presentan los aspectos que fundamentan el marco de la investigación situado en el paradigma cualitativo y un diseño de triangulación metodológica, conformado por métodos Investigación-Acción, Estudio de caso y la metodología del Análisis Didáctico que se complementan en este estudio a través de instrumentos que permiten reconocer los *conocimientos didácticos y curriculares* que los profesores han desarrollado en su contexto local para la construcción del SN. Además, en este apartado se presentan la contextualización local y los participantes, las fases de la investigación y los instrumentos que permiten analizar e interpretar la información relativa al *conocimiento didáctico* para la enseñanza.

En el Capítulo IV de Reflexiones y Análisis sobre el *Conocimiento Didáctico* para la enseñanza del NN se describen e interpretan las reflexiones, de las profesoras participantes del estudio, en relación a la planeación, el desarrollo y la evaluación de propuestas educativas para la construcción de SN en situaciones de la enseñanza del NN. Esta descripción e interpretación de los *conocimientos didácticos* se concreta a través de categorías de análisis como: la formación profesional de las profesoras, el *modelo curricular y didáctico* considerado en las prácticas de enseñanza del contenido de referencia para este estudio, y el *Modelo Local de Análisis Didáctico* como un constructo que plantea algunos elementos básicos del *conocimiento didáctico* para la *construcción de sentido numérico* en los primeros grados escolares.

Finalmente, en el Capítulo V de las consideraciones finales a modo de conclusión, se detallan las reflexiones finales del estudio, relacionadas con la caracterización del conocimiento didáctico del profesor de primer ciclo de educación básica primaria para el desarrollo de SN en la enseñanza del NN en la Institución Educativa Ateneo del municipio de Pradera, Valle del Cauca. En este apartado se describen los avances y limitaciones referidas a la formación didáctica de los profesores en el campo de la Educación Matemática, la caracterización de los conocimientos didácticos para la construcción de SN en propuestas de enseñanza del NN mediante el MLAD y el modelo curricular y didáctico

que el profesor considera al momento de enseñar los NN en el primer ciclo de la educación
básica primaria.

Capítulo 1: Presentación del problema

En este capítulo se presentan algunos aspectos generales sobre la formación del profesor de matemáticas y el conocimiento didáctico en relación con la construcción de sentido numérico, en el marco de la enseñanza del Número Natural en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida en el primer ciclo de la educación básica primaria. La problemática en esta investigación centra su atención en el Conocimiento Didáctico, entendido como un sistema de información mediado por las prácticas y los conocimientos que son objeto de estudio en los campos de la Didáctica de las Matemáticas y la Formación de Profesores de Matemáticas (Bedoya, 2002). En este sentido, el conocimiento didáctico se asume en este estudio como un componente fundamental en la práctica del profesor, porque le permite orientar y tomar decisiones sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares.

De acuerdo a los aspectos mencionados anteriormente, se delimita la problemática de investigación descrita a través del planteamiento y la formulación del problema, los objetivos de estudio, la hipótesis de trabajo, la justificación y los antecedentes en relación con la formación de profesores de matemáticas y el conocimiento didáctico para la construcción de sentido numérico en situaciones de enseñanza del Número Natural en el primer ciclo de la educación básica primaria. El análisis de las categorías conceptuales definidas en la problemática y las prácticas en procesos de formación docente por parte del autor, permiten fundamentar el problema y la formulación de la pregunta que orienta este trabajo de investigación.

1.1 Planteamiento y formulación del problema

El tema y el propósito de la competencia matemática en los estudiantes que serán los futuros ciudadanos del siglo XXI, ha motivado el desarrollo de programas de cualificación docente y a potenciar innovaciones educativas en la enseñanza de las matemáticas mediante el uso de distintos recursos didácticos que deben ser comprendidos, apropiados y gestionados por los profesores. Al respecto Llinares (2014) afirma que los profesores de matemáticas son agentes clave para la transformación de la educación, porque su conocimiento en la práctica de enseñanza apoya el desarrollo de la competencia matemática en sus estudiantes. Por ello, la comunidad académica coincide que la formación del profesor de matemáticas influye en

el desarrollo profesional y en la manera como los maestros orientan la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos escolares.

El análisis de los resultados en las pruebas de matemáticas ha abierto la discusión sobre cómo se abordan determinados conocimientos matemáticos escolares para que los estudiantes desarrollen los aprendizajes y competencias necesarias para fortalecer su pensamiento matemático. Estas discusiones, han motivado la reflexión y revisión de los contenidos curriculares en los programas de formación (inicial, continua y continuada)¹ por parte de comunidades académicas de formación docente, la sociedad colombiana de Educación Matemática y los expertos en formación docente del Ministerio de Educación Nacional (MEN). Sin embargo, en estas discusiones no se ha logrado concretar una estructura funcional de dichos programas para la formación de profesores de matemáticas en los distintos niveles escolares (Guacaneme, Obando, Garzón y Villa, 2013).

Uno de los factores que puede influir en la formación inicial y continuada de los profesores que enseñan matemáticas en el nivel de educación básica primaria es la política para la vinculación de estos en la carrera docente en Colombia que se encuentra reglamentada a través de dos Decretos: el 2277 de 1979 y el 1278 de 2002. El primero reglamenta a aquellos profesores nombrados antes del 2002 y en su artículo 5. ° considera como educadores en el nivel de básica primaria a todas aquellas personas que se desempeñan como bachilleres pedagógicos, peritos o expertos, técnicos o tecnólogos en educación, licenciados en ciencias de la educación o postgrado en este nivel, o personal escalafonado; El segundo reglamenta en la actualidad la vinculación de los profesores al sector oficial mediante concurso de méritos, en su artículo 3. ° expresa que los profesionales de la educación son: quienes poseen título profesional de licenciado en educación expedido por una institución de educación superior; los profesionales con título diferente, legalmente habilitados para ejercer la función docente de acuerdo con lo dispuesto en este decreto; y los normalistas superiores. En este último decreto, para el ingreso a la carrera docente en el sector público se deja abierta la posibilidad a que diferentes profesionales puedan impartir la enseñanza de las matemáticas y de otras áreas.

¹ Se emplea el término formación inicial para referirse a aquellos programas de pregrado, formación continua para aquellos programas que no conllevan a la obtención de un título específico sino que se cursan para cualificarse profesionalmente y formación continuada para programas de posgrado.

Estas políticas para el ingreso y desempeño en la profesión docente influyen en los conocimientos didácticos del profesor que enseña matemáticas en la educación básica primaria, debido a que en su formación profesional no necesariamente está relacionada con la enseñanza de las matemáticas y luego de su ingreso a la carrera docente no hay una política educativa que demande o fomente la formación continua de estos profesionales en otras áreas de enseñanza sobre las que no tienen conocimientos didácticos, particularmente para la enseñanza de las matemáticas escolares.

Los resultados obtenidos en las pruebas matemáticas nacionales e internacionales han permitido identificar que los aprendizajes de los estudiantes en Colombia no son los deseables a nivel mundial y regional. Los informes relacionados con los resultados de las pruebas a los estudiantes de los grados 3.º, 5.º, 9.º Y 11.º han motivado a desarrollar desde una perspectiva holística, la ejecución del Programa Todos a Aprender como un Programa que se ocupe a largo plazo de las diferentes dificultades asociadas al sistema educativo nacional (MEN, 2013). Desde el año 2012 el Ministerio de Educación Nacional comenzó a desarrollar el Programa para la transformación de la calidad educativa denominado Programa Todos a Aprender (PTA) para atender las dificultades referidas al aprendizaje de los estudiantes y cualificar a los profesores de primaria en las áreas de Matemáticas y Lenguaje, el Programa propone líneas de acción relacionadas con el acompañamiento situado, el estudio de los referentes curriculares, la reflexión sobre la práctica, el uso de los materiales didácticos y el desarrollo de estrategias de evaluación formativa que posibilitan el mejoramiento de las prácticas educativas. De este modo, se busca desde el Ministerio de Educación Nacional abordar la problemática de formación curricular y didáctica de algunos docentes de educación básica primaria que tienen a cargo la enseñanza de las Matemáticas y el Lenguaje como áreas de conocimiento clave para el desarrollo de conocimientos en otros campos del saber.

Autores como (Rico, 1997a; Hurtado, 2014) plantean que algunos profesores realizan sus prácticas de enseñanza de las matemáticas a partir de: experiencias basadas en la percepción, los contenidos programáticos de los libros escolares y las ideas basadas en sus experiencias formativas. De acuerdo con Rico (1997b) la práctica del profesor que enseña matemáticas requiere articular los conocimientos que resultan de sus experiencias socioculturales con los aquellos conocimientos desarrollados en el campo de la Didáctica de

las Matemáticas. Por tanto, los supuestos adquiridos por los profesores de manera intuitiva para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, deben ser contrastados con los desarrollos de la comunidad especializada en la enseñanza de las matemáticas y el desarrollo del conocimiento curricular, de manera que estos aspectos permitan modificar las prácticas de enseñanza de las matemáticas, hacia una práctica profesional con sentido, que genere una mejora en los conocimientos y destrezas matemáticas en los profesores y en los estudiantes.

La práctica profesional de los profesores en cualquier nivel escolar se vincula con actividades de planeación, diseño, implementación y evaluación de los contenidos dispuestos en el currículo escolar, lo que implica que los profesores requieran tener un conocimiento didáctico profesional de las distintas áreas de conocimiento escolar. Rico (1997b) refiere que el profesor requiere unos conocimientos y una formación apropiada para controlar y gestionar la variedad de relaciones que se manifiestan en los procesos de enseñanza y aprendizaje. El conocimiento didáctico devela las competencias propias del profesional en educación en aspectos relacionados con las actividades de comprensión y reflexión sobre los aprendizajes escolares como parte de la responsabilidad profesional de estos.

Llinares (como se citó en Llinares, 2012) afirma que el proceso de aprendizaje de los profesores en formación inicial y de los profesores en ejercicio empieza a ser concebido como un proceso de enculturación que vincula los saberes de referencia, la naturaleza del conocimiento profesional y las características del uso del conocimiento en el desarrollo de una determinada práctica (que en este caso es la actividad de enseñar matemáticas). En este estudio se asume la práctica del profesor entendida como un espacio en el que los maestros perfeccionan e innovan sus propuestas educativas, lo que posibilita que los estudiantes

perspectiva sociocultural, el aprendizaje y desarrollo profesional del profesor puede ser entendido como cambios en cómo participar en las prácticas matemáticas que se generan en

El conocimiento del contenido matemático que se espera que el profesor desarrolle para la enseñanza es un conocimiento profundo de la fundamentación matemática relacionada

con las habilidades y destrezas para la resolución de problemas matemáticos a partir del conocimiento de los objetos, las normas y operaciones matemáticas. Sin embargo, este conocimiento no es suficiente para ser un profesor de matemáticas cualificado. A los profesores no les basta con dominar los contenidos técnicos de su materia. El campo de actuación en el que un profesor de matemáticas tiene que desempeñar su tarea como educador necesita del conocimiento didáctico del contenido que tiene otras bases disciplinares (Rico, 1997a p.19).

El conocimiento de los contenidos matemáticos, por parte de los profesores, desempeña un papel importante para la gestión de tareas y la resolución de situaciones matemáticas relevantes que permitan valorar el desarrollo de la competencia matemática en los estudiantes. Este conocimiento del contenido matemático debe relacionarse con el conocimiento del contenido didáctico de las matemáticas que aporta información relativa a las expectativas formativas, estrategias de enseñanza, limitaciones, relaciones dentro de la estructura conceptual, el conocimiento y uso de diferentes representaciones de un mismo objeto de aprendizaje, los métodos y soluciones en situaciones problema, el estudio de los fenómenos que dan sentido a los contenidos matemáticos, la epistemología de los contenidos matemáticos para la enseñanza, entre otros. Esta relación, entre conocimiento del contenido matemático y el conocimiento didáctico para la enseñanza, posibilita el desarrollo de una reflexión crítica y una apropiación de los saberes didácticos para la enseñanza de las matemáticas desde una reflexión epistémica de estos saberes.

Algunos profesores que orientan la enseñanza de las matemáticas no son conscientes del desarrollo y construcción de sentido numérico, porque no es un contenido específico del currículo escolar

arrollo

Por

ello, las prácticas de enseñanza del Número Natural que estos profesores realizan en la educación primaria no centran su atención en la construcción y el desarrollo de sentido numérico a partir de la comprensión, el uso y los significados del Número Natural (en fenómenos de: secuencia numérica, ordinalidad, cardinalidad, medida, entre otros), la comprensión del sentido y significado de las operaciones y el desarrollo de diferentes técnicas de estimación y cálculo.

Un aprendizaje significativo de la estructura conceptual de los números naturales requiere la comprensión del sistema de numeración que los organiza (Castro y Molina, 2011, p.49). Los profesores del primer ciclo de educación básica primaria como profesionales de la educación matemática, requieren una formación inicial y/o continua que propicie conocimientos que favorezcan los desarrollos propios de la Didáctica de las Matemáticas sobre la construcción de sentido numérico en sus estudiantes, de manera que en el reconocimiento de la estructura conceptual identifiquen situaciones, relaciones, operaciones y estrategias numéricas basadas el conocimiento del Sistema de los números naturales y el Sistema de numeración decimal que permitan construir y desarrollar sentido numérico como un propósito central de los aprendizajes y producciones numéricas de los estudiantes.

De acuerdo con Van Luit y Van de Rijt (como se citó en Hernández, López, Quintero y Velázquez, 2015), la literatura reconoce diferentes aspectos importantes para el desarrollo del concepto de número entre los que se destacan: la comparación, la clasificación, la correspondencia, la seriación, el conteo estructurado y el conteo resultante, entre otros. De acuerdo a ello, el (MEN, 2006) ha establecido que las expectativas de aprendizaje sobre el Número Natural en el currículo de matemáticas para la población colombiana en el primer ciclo de educación básica primaria, comienzan con el desarrollo del conteo, la comunicación de cantidades con notaciones escritas y la numeración verbal, los significados y las habilidades para describir, comparar y cuantificar a través de los números en diferentes contextos, emplear diferentes representaciones para comprender el valor de posición y la equivalencia de los números, reconocer propiedades, regularidades y relaciones de los números, resolver problemas empleando estrategias aditivas o multiplicativas, utilizar diferentes estrategias de cálculo y de estimación, y validar los datos numéricos de una situación problema.

El sentido numérico se ha considerado en múltiples estudios (Sowder, 1992a, 1992b; Llinares, 2014; NTCM, 2000; Hernández, López, Quintero y Velásquez, 2015) los cuales reconocen esta cualidad como una expectativa de aprendizaje indispensable en la formación matemática de la ciudadanía, debido a que muchas actividades cotidianas se requieren hacer cálculos, analizar información estadística o tomar decisiones financieras a partir de la información que le suministren a cada persona. Esta necesidad requiere que en los

programas de formación a profesores de matemáticas de los distintos niveles escolares se desarrolle la idea de sentido numérico como un componente transversal a los contenidos curriculares, de manera que los profesores sean conscientes de los fenómenos socioculturales que permiten el desarrollo de habilidades para razonar, relacionar, estimar, calcular y desarrollar estrategias derivadas de los distintos significados y aplicaciones de los números y la numeración a partir de la enseñanza de las matemáticas como un proceso de enculturación de las comunidades.

En este estudio se entiende el sentido numérico como una red de conocimientos organizados que permiten pensar y usar los números mediante un razonamiento conceptual y procedimental que relaciona los números, las operaciones, sus propiedades y la resolución de problemas a partir de una orquestación intuitiva, innovadora, ampliamente, el sentido numérico se relaciona con una red conceptual bien organizada que permite relacionar los números y las operaciones, sus propiedades y resolver los problemas

investigación es importante en este sentido, porque la enseñanza de los números naturales en la educación básica primaria debe promover tareas que apoyen en diferentes métodos o respuestas que denotan el uso de razonamientos y estrategias intuitivos de acuerdo con los significados que le asignen los profesores y estudiantes a las actividades y situaciones que relacionen el uso de los números naturales.

Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008) reseñan que un mismo concepto matemático tiene diferentes significados que se determinan de acuerdo con las estructuras conceptuales que lo articulan a través de representaciones y fenómenos que dotan de sentido al concepto mismo. Por ello, este trabajo de investigación posibilita desarrollar un análisis del contenido, sobre la estructura conceptual del Número Natural, que dispone de un conjunto de procedimientos para llevar a cabo el diseño, la planificación y el análisis específico de una Unidad Didáctica.

El acompañamiento tutorial realizado a instituciones educativas públicas en el marco del PTA y en programas de cualificación matemática a docentes, por parte del autor de esta investigación, ha permitido conocer algunos currículos de matemáticas planteados para la formación matemática de escolares en la educación básica primaria en los que se limita el

aprendizaje del Número Natural a escribir, representar las cantidades y realizar operaciones desconectadas de una situación problema que posibilite la construcción de sentido numérico a partir del uso reflexivo de los números en situaciones (secuencia numérica, ordinal, cardinal, medida, simbólicas y operativas) propuestas en los referentes curriculares (MEN, 1998, 2006 y 2016). Estos programas curriculares de las matemáticas se organizan en relación a aspectos particulares sobre la enseñanza y aprendizaje de este contenido, destacándose el interés por la representación de los numerales, el reconocimiento de estos y la ejercitación de procedimientos algorítmicos basados en el sistema numérico, para que los estudiantes logren responder a las pruebas matemáticas nacionales e institucionales.

Lo descrito hasta aquí destaca dos interrogantes fundamentales para el desarrollo de este trabajo de investigación, el primero está relacionado con *¿Qué elementos se podrían considerar en los programas de formación de profesores en ejercicio, para que contribuyan a fortalecer el conocimiento didáctico del profesor de educación básica primaria en relación con la construcción de sentido numérico en la enseñanza del concepto de Número Natural?* Particularmente, desde los contextos de ordinalidad, de cardinalidad y de medida. El segundo está referido a *¿Cómo se podría desarrollar el conocimiento didáctico sobre sentido numérico en la formación del profesor en ejercicio del primer ciclo de la educación básica primaria?* Específicamente, desde su entorno laboral a través del estudio de tareas y situaciones desde una Unidad Didáctica Guía y la variedad de conocimientos que se generan al reflexionar críticamente sobre los aprendizajes dispuestos a enseñar a través de esta.

Es así como el interés de este trabajo de investigación se concreta en indagar sobre:

¿Qué elementos básicos del conocimiento didáctico se requieren en la formación profesional del profesor de matemáticas de primer ciclo de educación básica primaria, para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Número Natural en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida?

1.2 Objetivos de estudio

1.2.1. Objetivo general.

Establecer algunos elementos básicos del conocimiento didáctico en la formación del profesor de primer ciclo de educación básica primaria, para la construcción de sentido

numérico, por parte de los profesores, para la enseñanza del Número Natural en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida.

1.2.2. Objetivos específicos.

- Identificar y caracterizar algunos elementos básicos del conocimiento didáctico sobre la construcción de sentido numérico para la enseñanza del Número Natural, a través de un Modelo Local de Análisis Didáctico, en la formación de profesores de básica primaria.
- Reconocer y describir el conocimiento didáctico del profesor de primer ciclo de educación básica primaria, en relación con la construcción de sentido numérico para la enseñanza del Número Natural, mediante la reflexión de situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida presentadas en situaciones y tareas didácticas durante algunos encuentros de reflexión.

1.3 Hipótesis de trabajo

Atendiendo a las reflexiones descritas en la problemática y a los objetivos de este trabajo de investigación sobre el Conocimiento Didáctico en relación con la construcción de sentido numérico, en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida para la enseñanza del Número Natural, en la formación del profesor en ejercicio del primer ciclo de educación básica primaria se consideran las siguientes hipótesis que pueden permitir o reorientar el desarrollo del trabajo en la dirección de los objetivos:

Hipótesis 1. El conocimiento didáctico sobre la construcción de sentido numérico para la enseñanza del Número Natural que se ha desarrollado por los profesores del primer ciclo de básica primaria a lo largo de su formación inicial y continua, se ve influenciado por prácticas donde se privilegia la lectura y escritura correcta de los números como una condición sine qua non que permite la comprensión del Número Natural.

Hipótesis 2. Algunos profesores del primer ciclo de educación básica primaria cuando enseñan los números naturales, desarrollan prácticas intuitivas basadas en concepciones y creencias influenciadas por su experiencia, formación y materiales educativos que apoyan sus prácticas de enseñanza de este contenido escolar.

1.4 Justificación

La gestión educativa que desarrollan los profesores al enseñar matemáticas en cualquier nivel escolar relaciona conocimientos, habilidades y destrezas ligadas a situaciones de enseñanza que fomenten el sentido matemático en los distintos tópicos de aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, en las prácticas educativas se observa que la enseñanza del Número Natural está supeditada a desarrollar tareas a partir del conocimiento empírico e intuitivo que han desarrollado los profesores durante su experiencia profesional, las habilidades de enseñanza se relacionan con la orientación de actividades propuestas con materiales escolares en los que se obliga a los estudiantes a usar algoritmos y reglas que permiten resolver las tareas con cálculos precisos, y las destrezas de planificación se reducen a una interpretación reducida por los contenidos de aprendizaje según el currículo institucional de cada establecimiento educativo.

En el campo de la Educación Matemática (EM) se plantea la necesidad de que los profesores de matemáticas desarrollen sus conocimientos a partir de los aportes didácticos y conceptuales que les permitan gestionar los procesos, estrategias y criterios de enseñanza. Rico (1997b) refiere que el profesor de matemáticas debería tener una formación y unos conocimientos adecuados para controlar y gestionar la complejidad de relaciones que se establecen en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Por lo tanto, se requiere que la formación de los profesores en ejercicio se fortalezca a partir del conocimiento del currículo escolar, el conocimiento producido en el campo de la EM y el conocimiento generado por la integración de los aportes anteriores de manera que les permita reflexionar críticamente sobre las propuestas y prácticas desarrolladas sobre un tópico, situación o problema específico de la matemática escolar.

Este trabajo de investigación asume que el Conocimiento Didáctico (CD) del profesor de matemáticas posibilita desarrollar la gestión de enseñanza a través del análisis de contenido como un componente para la adquisición de nuevos conocimientos teóricos que le permitan tomar decisiones fundamentadas para planear, orientar y evaluar los aprendizajes de un objeto matemático de conocimiento escolar en vía de la construcción de sentido numérico. Además, este trabajo es importante porque reconoce el contexto sociocultural, donde el profesor del primer ciclo de básica primaria desarrolla sus prácticas, y sus relaciones con: el

conocimiento desarrollado por la comunidad o grupos sociales a los que pertenece los profesores focalizados en este estudio, el aprendizaje desarrollado por los profesores de matemáticas al involucrarse en actividades comunes sobre la enseñanza del Número Natural, la construcción de significados y conocimientos a partir de sus saberes, de manera que les permitan acceder a las comprensiones de la estructura conceptual sobre la enseñanza de los números naturales mediante las prácticas situadas y las interacciones colaborativas que permiten desarrollar y potenciar sus prácticas (Gómez y Rico, 2002).

Los conocimientos generales sobre la epistemología para la enseñanza conocimiento matemático, conocimiento didáctico y conocimiento del currículo se analizan en relación con los conocimientos particulares del contexto conocimiento de los estudiantes, conocimiento del currículo y conocimiento de los recursos para el aprendizaje . Estos conocimientos se interrelacionan en esta investigación para fortalecer el conocimiento didáctico del profesor sobre la construcción de sentido numérico a través de la enseñanza del Número Natural en el primer ciclo de la educación básica primaria.

Este trabajo de investigación reconoce que las decisiones sobre la enseñanza del Número Natural que el profesor de primaria efectúa están mediadas por el conocimiento didáctico que ha desarrollado durante su formación inicial y continua. Por ello, se propone en este estudio algunos elementos base en el Conocimiento Didáctico de los docentes del primer ciclo de educación básica primaria, para que fortalezcan sus capacidades para analizar, desarrollar y evaluar propuestas de enseñanza elaboradas a partir de fundamentos curriculares, didácticos y disciplinares.

Rico y Lupiáñez (2015) plantean que la enseñanza y el aprendizaje del contenido matemático escolar, requieren de un análisis delimitado del contenido matemático a enseñar, por lo que se le exige al profesor un conocimiento profundo de este, para situarlo en el contexto social y cultural donde desarrolla sus prácticas a través de su evolución histórica de dicho contenido. Así entonces, el profesor de matemáticas necesita conocer los orígenes y evolución del contenido matemático, la estructura en la que se inserta este, los sistemas de representación que ponen de manifiesto este contenido, los fenómenos abstraídos y organizados por las estructuras matemáticas dispuestas en el currículo escolar para la enseñanza.

El fortalecimiento del conocimiento didáctico se propone en este trabajo de investigación a partir de la reflexión en acción integrada por la reflexión en y reflexión sobre la práctica que ocurre cuando un profesor planea, desarrolla y evalúa un contenido matemático escolar.

tipo de reflexión que los practicantes realizan en su propia práctica mientras participan activamente de ella. Este tipo de reflexión podría llevar a modificaciones en su práctica a fin de satisfacer las necesidades inmediatas de la situación. Asimismo, la reflexión sobre la acción tiene lugar cuando los practicantes reflexionan sobre su práctica después de que ha ocurrido. A través de este tipo de reflexión, identifican sus este

estudio permite identificar las distintas reflexiones que el profesor realiza para potenciar sus conocimientos de referencia con el objetivo de optimizar su práctica profesional, así como para perfeccionar y desplegar sus habilidades y competencias para la enseñanza de las matemáticas.

El conocimiento didáctico del profesor contribuye al desarrollo de habilidades y destrezas matemáticas en los estudiantes porque permite identificar, desarrollar y comprender los significados y sentidos del objeto matemático a enseñar. Bedoya (2002) plantea que el Conocimiento Didáctico (CD) constituye el conocimiento que centra su atención en las matemáticas escolares, es decir, considera las matemáticas como objeto de enseñanza y de aprendizaje, y además se propone dar respuestas fundadas a problemas locales de su comunicación y comprensión. Por tanto, esta investigación considera el CD como una componente de la formación que permite potenciar los conocimientos generales y locales del profesor, para que sus diseños y estrategias de enseñanza se sustenten en aportes: epistemológicos, fenomenológicos, socioculturales y curriculares para la enseñanza de las matemáticas escolares. En otras palabras, para perfeccionar las prácticas reflexivas a partir de la práctica fundamentada del profesor en ejercicio del primer ciclo de educación básica primaria, desde el conocimiento sobre la construcción de sentido numérico a través de la enseñanza del Número Natural en los situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida.

De acuerdo con (Fuson, 1988) la enseñanza del Número Natural requiere de la integración de referentes internos (sentidos) que surgen del reconocimiento de referentes externos (contextos o situaciones de enseñanza). La autora indica que las situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida son fenómenos primarios que permiten dotar de

significado al Número Natural, aunque posteriormente se deben comprender otros fenómenos con funciones diferentes a la de indicar una posición relativa, cuantificar y comparar con patrones discretos. De igual manera, Sowder (1992b) refiere que el entendimiento de aspectos relacionados con los significados cardinales y ordinales del Número Natural, son fundamentales para la adquisición del sentido numérico. Además de ello, en este trabajo se retomaran algunas situaciones relacionadas con fenómenos de medida, cuando la magnitud está dividida en múltiplos de la unidad, es decir la comparación se realiza con magnitudes continuas a través de unidades no convencionales para desarrollar capacidades numéricas asociadas a la construcción de sentido numérico.

En este estudio se asume el Análisis Didáctico como una metodología de investigación para la formación docente que permite identificar y esclarecer los conocimientos didácticos que el profesor pone en juego, cuando planifica, organiza y enseña un contenido matemático escolar. Además, esta metodología permite fortalecer las competencias profesionales para analizar Unidades Didácticas construidas desde elementos conceptuales y conocimientos didácticos generados cuando se realiza dicho análisis a una unidad dispuesta para la enseñanza de un contenido específico. Igualmente, este trabajo de investigación es importante, porque realiza un acompañamiento situado en la formación matemática del profesor en ejercicio del primer ciclo de educación básica primaria, en relación al desarrollo de sus conocimientos didácticos alrededor de las propuestas fundamentadas que potencian el sentido numérico de los estudiantes, mediante el estudio y la reflexión crítica de actividades y tareas de una Unidad Didáctica Guía que permite relacionar los significados de ordinalidad, de cardinalidad y de medida que dotan y configuran el sentido de los números naturales como conocimientos matemáticos básicos en los primeros niveles escolares.

Los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) refieren que el conocimiento de los números naturales y de los sistemas de numeración es una fuente de razonamientos básicos que les permiten a los estudiantes desarrollar el Pensamiento Numérico a partir del dominio de los números naturales. Esta fuente de conocimientos les permite acceder a la comprensión de otros sistemas conceptuales desarrollados en el currículo de matemáticas. Sin embargo, el desarrollo del pensamiento numérico en los estudiantes también implica que se fortalezca el conocimiento didáctico del profesor en relación al Número Natural, para que los procesos de planificación, desarrollo y evaluación de los aprendizajes matemáticos escolares se sitúen en

un paradigma que busque promover el sentido numérico a través del reconocimiento de ideas y razonamientos manifestados desde el sentido personal de los objetos matemáticos de aprendizaje.

La enseñanza de los números y del sistema de numeración, para el desarrollo del pensamiento numérico según los referentes curriculares (MEN, 1998; 2006), debe considerar las experiencias escolares y extraescolares en las que los estudiantes tienen la posibilidad de desarrollar habilidades para usar los números y los métodos cuantitativos mediante el conocimiento de los significados de los números y de la numeración, las representaciones concretas, pictóricas y simbólicas, el uso descriptivo de los números en los distintos contextos numéricos, y el reconocimiento del valor absoluto y relativo de los números en ciertas situaciones. En consecuencia, este trabajo de investigación se considera importante porque reconoce el conocimiento curricular como una fuente que proporciona información necesaria para que el profesor articule en su práctica profesional criterios y objetivos de enseñanza para evaluar aspectos conceptuales y procedimentales, que en este estudio dan cuenta de la construcción de sentido numérico en el primer ciclo de la básica primaria.

1.5 Antecedentes

A continuación, se relacionan algunas fuentes documentales que han descrito algunos aportes en los últimos años en relación al objeto matemático de este trabajo de investigación y que permiten retomar algunas consideraciones para llevar a cabo este estudio. Estos aportes se organizan de acuerdo a las categorías de investigación: formación de profesores de matemáticas, enseñanza y aprendizaje del Número Natural y construcción de sentido numérico en el campo de la Formación de Profesores de Matemáticas, constructos didácticos y el currículo escolar como componentes de interés en el marco de esta investigación.

1.5.1. Investigaciones sobre la formación del profesor de matemáticas.

En los últimos años, numerosas investigaciones en Educación Matemática o de la Didáctica de las Matemáticas, entendida como campo de investigación han descrito algunas categorías de interés en el campo de la FPM (Rico, 1997a,b; Rico y Lupiáñez, 2008; Rico, Lupiáñez y Molina, 2013; Llinares y Krainer, 2006; Llinares, 2012, 2014; Socas,

2011; Bedoya, 2002; Ponte y Chapman, 2006; Sowder, 2007; Jaworski, 2008; Askew, 2008; Sánchez, 2011; Guacaneme y Mora, 2012) estas investigaciones coinciden en que la FPM es un campo multidisciplinar que aporta conceptos y procedimientos a los que el profesor de matemáticas debe recurrir para la enseñanza de las matemáticas escolares. Asimismo, estas investigaciones han planteado algunas limitantes, dificultades y desafíos a los que se enfrenta el campo de la FPM respecto a las expectativas de formación inicial y continua a nivel nacional e internacional.

1.5.1.1 Aportes sobre el campo de la Formación de Profesores de Matemáticas.

A continuación se describen algunas investigaciones realizadas por comunidades de investigación acerca del campo de la Formación de Profesores de Matemáticas (FPM):

En el estudio sobre el conocimiento y las prácticas de los profesores de matemáticas Ponte y Chapman (2006) identifican y discuten sobre los aportes de investigaciones, perspectivas, resultados y futuras líneas de investigación reportadas en la comunidad denominada International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME). Los autores delimitan estos estudios sobre el conocimiento y la práctica del profesor en relación a diferentes contextos donde las actividades de enseñanza están situadas: el salón de clase, la institución educativa, en la formación inicial y formación continua, y en otros entornos profesionales donde se evidencia las practicas mediante un conocimiento desarrollado a lo largo de su vida profesional. Asimismo, los autores reconocen en la literatura académica cuatro grandes categorías que focalizan estos estudios: el conocimiento de los profesores sobre las matemáticas, el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, las creencias y concepciones de los profesores, y la práctica de los profesores. Los autores expresan que estas categorías han evolucionado de manera tal, que los estudios recientes sobre el conocimiento y la práctica de los profesores de matemáticas han requerido interrelacionar subcategorías actitudes de los profesores y aspectos afectivos, investigación de docentes, profesores en comunidad, profesores universitarios, pensamiento del profesor y metacognición, y reflexión del profesor y práctica reflexiva que no se han podido abordar por separado debido al poco estudio que reporta la literatura académica al respecto.

Asumiendo que el conocimiento de los profesores de matemáticas determina en gran medida los razonamientos y decisiones que orientan los procesos de enseñanza escolar, los

profesores Llinares y Krainer (2006) en su apartado en el Handbook Of Research On The Psychology Of Mathematics Education. Past, Present And Future, identifican y caracterizan algunas investigaciones relevantes en el campo de la formación de profesores de matemáticas que se han realizado desde la comunidad PME sobre los formadores y profesores de matemáticas como aprendices. Este estudio identifica tres tipos de profesores los futuros profesores, los profesores en ejercicio y los formadores de profesores que están mediados por tensiones sobre las creencias, concepciones, construcciones teóricas y reflexiones sobre la enseñanza que posibilitan el desarrollo de los conocimiento, habilidades y capacidades propias de la enseñanza de las matemáticas a través de procesos sociales dentro de las comunidades profesionales.

Sowder (2007) propone el desarrollo de los profesores de matemáticas a partir de los conocimientos profesionales desarrollados a lo largo de su experiencia docente y centra su interés en comprender la preparación de los profesores de matemáticas y suministrarles las oportunidades de aprendizaje profesional que requieren que orientar de manera exitosa a sus estudiantes en las clases de matemáticas escolares. La autora hace énfasis en el cambio de enfoque que se le da al conocimiento desarrollado por los profesores, pasando de un conocimiento procedimental a un conocimiento fundamentado en principios que no es complementario al procedimental. Por lo tanto, este conocimiento basado en principios puede significar una reconceptualización de las matemáticas escolares y su enseñanza.

Por su parte, Jaworski (2008) sobre el desarrollo y el aprendizaje del formador de profesores de matemáticas, plantea que la formación del profesor de matemáticas es un proceso que desarrolla conocimientos tanto en el estudiante para profesor o profesor en ejercicio, como en los formadores que participan y concretan dicha formación. En consecuencia, los conocimientos que se desarrollan en ambos participantes de programas de formación son los siguientes: la matemática escolar, la didáctica de la matemática y sus aplicaciones, los elementos del sistema educativo y el sistema sociocultural donde se desarrolla el programa de formación al docente. Aunque el objetivo común de ambos es proporcionar mejores oportunidades de aprendizaje de las matemáticas escolares a los estudiantes, los conocimientos que posibilitan alcanzar este fin se encuentran en los lugares A y B si se refieren al formador, mientras que se ubican en los lugares B y C si se refieren al profesor como estudiante, dichos conocimientos se relacionan en la Figura 1.

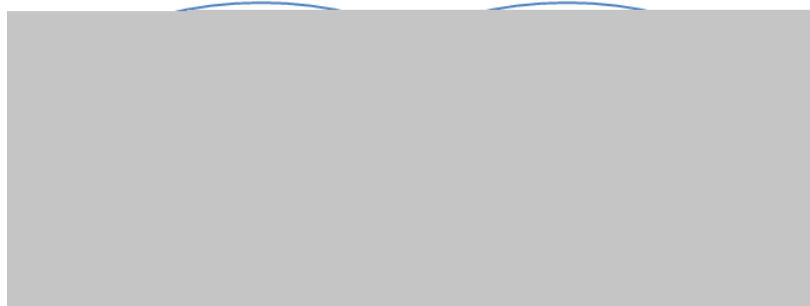


Figura 1. Configuraciones sistémicas y culturales, y los límites dentro de los cuales se encuentra la FPM (Jaworski, 2008)

La autora concluye en su estudio que tanto el conocimiento de profesores como el conocimiento del formador de profesores se incrementa y amplía en la medida en que se utilicen diferentes enfoques y metodologías de aprendizaje (tradicionales, constructivistas, socioculturales, entre otros.) que permitan ver y hacer de manera diferente para aprender como comunidad de todos sus aportes.

De igual manera, Socas (2011) trata de dar respuesta a las preguntas sobre ¿Qué tipos de tareas y actividades son primordiales en un plan de formación inicial para profesores de matemáticas en la básica primaria? Y si, ¿es suficiente separar la teoría de la práctica, para responder a las tareas y actividades primordiales de la formación del docente? Para dar respuesta a la primer cuestión retoma ideas donde se explicitan algunos conocimientos y competencias organizar el conocimiento matemático para enseñarlo, analizar e interpretar las producciones de los alumnos y gestionar el contenido matemático en el aula que se relacionan con tareas y actividades como ejemplos de buenas prácticas profesionales. En relación a la segunda cuestión, este estudio considera reflexionar sobre la dicotomía de la teoría y la práctica como conocimientos del profesor que permiten fortalecer sus competencias para diseñar y gestionar las prácticas educativas de matemáticas.

De acuerdo con Sánchez (2011) en su artículo sobre la revisión literaria de las tendencias de investigación en el campo de la FPM, reconoce al menos tres categorías sobre las que se orientan las investigaciones, a saber: centros de interés en la investigación sobre la FPM, los conceptos teóricos más usados en este campo y las nuevas tendencias de investigación. Sobre la categoría centros de interés en la FPM (Sánchez, 2011) afirma que la mayoría de estudios han indagado sobre: las creencias, opiniones y concepciones de los profesores en ejercicio, las prácticas de los profesores de matemáticas, el conocimiento y las habilidades

para la enseñanza de los profesores de matemáticas, las relaciones y tensiones entre la teoría y la práctica del profesor en ejercicio, y la práctica reflexiva de y sobre la planificación e instrucción de los contenidos matemáticos de enseñanza. Estas categorías investigadas y sistematizadas por comunidades académicas a través de la literatura especializada, evidencian la evolución de la FPM como campo de investigación.

Guacaneme y Mora (2012) señalan que la FPM es un campo que permite estudiar un sistema didáctico propio para la enseñanza de las matemáticas en el que los conocimientos matemáticos son una componente, al igual que el conocimiento del currículo, el conocimiento didáctico del contenido, las concepciones y creencias de los profesores sobre la enseñanza de las matemáticas, el conocimiento de los estudiantes, entre otros. Expresan los autores que el sistema didáctico en los programas de formación de profesores de matemáticas se relaciona a partir de las interacciones entre el futuro profesor, el formador de profesores y los saberes que requieren conocerse para fundamentar la gestión de enseñanza del estudiante para profesor. Sin embargo, los autores afirman que la condición epistémica de los conocimientos desarrollados en la FPM va más allá de los saberes matemáticos y por tanto es necesario establecer el estudio de un sistema didáctico similar al estudiado por la Educación Matemática que pretende identificar la fenomenología de la actividad del profesor de matemáticas.

Guacaneme, Obando, Garzón y Villa (2013) realizan un informe sobre los antecedentes, estructura, desarrollo y limitaciones de la formación de futuros profesores de matemáticas y de profesores en ejercicio. Este informe reconoce que en Colombia tanto el sistema educativo y la formación matemática escolar han presentado transformaciones políticas, sociales y académicas que generan una brecha entre las políticas promulgadas y las acciones efectuadas en el sistema educativo. Estos autores, reconocen que los profesores no cuentan con un sistema de formación continuada que integre los distintos niveles de formación e igualmente permita el traslado de las personas en formación a través del sistema y que propicie la formación docentes desde los requerimientos de su práctica educativa.

De igual manera, Alba (2015) considera que la formación de profesores de matemáticas en ejercicio debe abordarse a través de una metodología centrada en el desarrollo de las prácticas reflexivas, porque de esta manera se analizan las distintas acciones generadas al

interior de las aulas y el porqué de estas acciones. Asimismo, se propone realizar una indagación a los docentes para que comprendan lo relevante de su práctica, las causas de su gestión de enseñanza y las posibles derivaciones de esta gestión.

1.5.1.2 Aportes sobre el Conocimiento Didáctico en la formación de profesores de matemáticas.

La preocupación por las relaciones e interrelaciones entre los componentes del sistema didáctico en la FPM se refleja en diferentes estudios que aportan información sobre la naturaleza y las características de los tipos de conocimientos que un profesor de matemáticas debe evidenciar en el proceso de enseñanza, para desarrollar las competencias escolares de sus estudiantes, a través de situaciones didácticas fundamentadas con el objetivo de mejorar el aprendizaje y el desarrollo del sentido en los contenidos matemáticos escolares.

Gómez y Rico (2002) plantean que el Conocimiento Didáctico es un constructo cognitivo que se apoya en unos conocimientos disciplinares de referencia. Estos conocimientos de referencia a su vez sustentan el proceso de planeación, desarrollo y evaluación de las tareas y actuaciones realizadas en el aula de clase. Estos autores establecen tres clases de conocimientos de referencia: (i) la noción de currículo, (ii) los fundamentos de las matemáticas escolares y (iii) los organizadores del currículo. Los autores proponen que la relación de (i) y (ii) implica un conocimiento disciplinar que los profesores de matemáticas deben potenciar en relación a su Conocimiento Didáctico, mientras que el conocimiento (iii) le posibilita al profesor de matemáticas identificar, organizar y caracterizar la variedad de significados del objeto matemático de estudio.

Bedoya (2002) en su tesis doctoral, en el marco de un Programa de formación en un estudio evaluativo sobre los sistemas de representación de las funciones de segundo grado en la formación didáctica inicial de futuros profesores de matemáticas de enseñanza secundaria, destaca la noción de Conocimiento Didáctico. Este estudio considera que las bases de la formación didáctica del profesor de matemáticas Conocimiento Didáctico se componen de los siguientes tipos de reflexiones, análisis y prácticas asociadas: (i) una noción de currículo, alrededor de las dimensiones que los componen y sus niveles de reflexión, (ii) una fundamentación teórica sobre las nociones básicas que nutren la

enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; igualmente sobre los principios y criterios que sostienen los procesos de evaluación, (iii) una reflexión propia sobre los contenidos curriculares y su estructura conceptual, (iv) una idea fundamentada teóricamente sobre la manera de aprender cada uno de los contenidos del currículo escolar, (v) el análisis semiótico de los objetos de enseñanza y sus consecuencias didácticas, (vi) el análisis fenomenológico del contenido matemático y sus implicaciones didácticas, (vii) el análisis epistemológico e histórico de los contenidos y sus implicaciones educativas, curriculares, cognitivas y didácticas, (viii) análisis y valoración de los contextos en los que se presenta cada objeto matemático de enseñanza, de sus sentidos, significados y usos del mismo, y (ix) análisis y reflexión sobre los materiales, recursos y tecnologías con los que se puede mediar y desarrollar estos contenidos o conceptos matemáticos. Estos tipos de reflexiones, análisis y prácticas constituyen el conocimiento de la didáctica de las matemáticas desarrollado por el profesor al realizar los ciclos del análisis didáctico.

Asimismo, Gómez y Rico (como se citó en Bedoya, 2002) señalan que el Conocimiento Didáctico de un contenido matemático para la enseñanza requiere establecer una estructura sistemática de categorías hechos, conceptos, procedimientos y principios que organizan el sistema conceptual de un tópico. Esta investigación se estructura mediante tres dimensiones de la estructura conceptual del conocimiento matemático escolar actitudinal, procedimental y conceptual que permiten ser analizados dentro de un sistema dinámico de producción de aprendizajes (de manera significativa y con sentido) a los que el profesor en ejercicio debe acceder para fundamentar y complementar su práctica profesional.

Ball, Hill & Bass (2005) consideran que el conocimiento matemático para la enseñanza, es un conocimiento propio de los profesores que desarrollan prácticas de enseñanza que propenden por el desarrollo de habilidades y destrezas matemáticas en sus estudiantes. Este estudio longitudinal, demuestra que los profesores que obtuvieron mayores avances en los resultados del conocimiento matemático para la enseñanza lograron avances en el rendimiento de sus estudiantes. Estos autores se preocupan por comprender la naturaleza del conocimiento que los profesores deben fortalecer para promover los aprendizajes de las matemáticas en las aulas de clase, durante esta investigación los autores se encuentran con propuestas que sugieren: que los profesores de matemáticas tomen cursos adicionales sobre matemáticas; que los profesores se formen en la enseñanza de las matemáticas escolares a

partir del estudio de métodos de enseñanza, el desarrollo profesional, los materiales que apoyan la enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje matemático de los estudiantes, y otras propuestas que sugieren reclutar profesores de matemáticas en las universidades con resultados sobresalientes, apostando a que el conocimiento general y la competencia matemática básica son eficaces para promover el aprendizaje de los estudiantes.

De acuerdo con Ball, et al. (2005), la naturaleza real del conocimiento matemático para la enseñanza se relaciona con acciones como: planear las actividades de enseñanza y las tareas para apoyar el aprendizaje, evaluar el trabajo de los estudiantes, redactar y valorar evaluaciones, explicar las actividades de clase a los acudientes, entre otras actividades. Por lo tanto, el alcance del conocimiento matemático para la enseñanza está compuesto por dos

matemático que todo ciudadano debiera poseer y el segundo al conocimiento que todo profesor debe poseer para enseñar matemáticas escolares.

Por su parte, Askew (2008) argumenta que algunos profesores de primaria pueden tener problemas reales con la comprensión del conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas y estos problemas no eran considerados en el impacto de sus prácticas efectivas de enseñanza. El autor reconoce la importancia de investigar sobre el tipo de conocimiento que les permite a los profesores de primaria mejorar sus procesos de enseñanza y aprendizaje. Al respecto, refiere que las investigaciones sobre el conocimiento de futuros profesores de primaria son pocas en comparación con las realizadas a profesores en ejercicio. Sin embargo, estas últimas son necesarias porque permiten comprender lo que los profesores en ejercicio requieren conocer, para ayudar a aclarar aspectos en la formación inicial de los profesores de matemáticas. Una de las conclusiones de la investigación realizada por (Askew, 2008) es que en lugar de adquirir un cuerpo de conocimientos matemáticos, los profesores de primaria requieren algo más sensibilidad matemática que les permita afrontar los planes de estudios existentes, pero también estar dispuestos al cambio.

El modelo de conocimiento matemático para la enseñanza propuesto por Ball, Thames & Phelps (2008) en su estudio sobre desarrollar una teoría que permita estudiar el

conocimiento del profesor de matemáticas es un constructo de investigaciones alrededor de un desarrollo teórico, una clarificación analítica y pruebas empíricas. Este estudio se orienta a investigar la naturaleza del conocimiento de las matemáticas para la enseñanza y la identificación de conocimientos matemáticos claves para la instrucción apoyada en el análisis de los problemas matemáticos que surgen en las prácticas educativas. Este estudio sobre el conocimiento matemático para la enseñanza (Mathematical Knowledge for Teaching - MKT) identifica dos dominios del conocimiento matemático específico de los profesores: el conocimiento del contenido que se organiza mediante tres componentes (el conocimiento común del contenido, el conocimiento especializado del contenido y el conocimiento del horizonte matemático) y el conocimiento didáctico del contenido, que se constituye a partir de tres componentes (el conocimiento del contenido y de los estudiantes, el conocimiento del contenido y de la enseñanza, y el conocimiento del currículo). La estructura del MKT surge a partir de los desarrollos propuestos por Lee Shulman en 1986 sobre el conocimiento pedagógico para la enseñanza.

1.5.1.3 Aportes sobre el Análisis Didáctico como metodología en la Formación de Profesores de Matemáticas.

El currículo es una fuente de información que aporta un conjunto de estructuras, conceptos, nociones e ideas que dan cuenta de los contenidos de los programas de formación inicial y continua de los profesores de matemáticas. Desde esta perspectiva, (Rico, 1997a) plantea que la teoría curricular debe vincularse a los contenidos básicos de los programas de formación del profesor de matemáticas, debido a su valioso aporte para la reflexión sobre los sistemas de ideas conceptuales y procedimentales que dan cuenta de la riqueza de los componentes adicionales a las matemáticas que requieren conocer los profesores, para potenciar sus prácticas de enseñanza a partir de las necesidades de formación escolar. El potenciamiento de las prácticas de enseñanza de las matemáticas se asocia entonces al desarrollo de herramientas potentes que permitan fortalecer el Conocimiento Didáctico (conceptual, procedimental y actitudinal) sobre los focos de enseñanza, para mejorar la propia formación a partir de un marco metodológico de referencia.

En el artículo sobre la planificación de las matemáticas escolares en secundaria Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008) expresan que el profesor de matemáticas debe desarrollar estrategias que le permitan analizar el contenido mediante un procedimiento que le facilite el análisis y la organización de los distintos significados de un contenido matemático escolar. Los autores comienzan realizando una revisión curricular sobre el sistema de los números naturales en el primer ciclo de básica secundaria, posteriormente establecen los focos conceptuales a partir de la definición de los tipos de conocimiento de complejidad creciente (hechos, conceptos y estructuras) que posteriormente se asocian a un mapa que articula conceptos y procedimientos que se correlaciona con los sistemas de representación, estructura conceptual y el análisis fenomenológico como componentes del Análisis de contenido. Este proceso de análisis permite ampliar el conocimiento didáctico y las competencias de planificación, desarrollo y evaluación de propuestas didácticas a partir del estudio de los múltiples significados y relaciones dentro de un sistema conceptual de la matemática escolar.

Corrales (2013) en su tesis para magister en educación, presenta un informe sobre el proyecto de sistematización de experiencias mediante el análisis curricular y didáctico de una Unidad Didáctica organizada a partir de la estructura conceptual de los números racionales en el grado séptimo. Este trabajo permite articular y coordinar dos tipos de experiencias formativas conceptual (planeación) y procedimental (implementación) como componentes de conocimiento didáctico que permiten ampliar el conocimiento del contenido referido a una estructura matemática conceptual dispuesta para la enseñanza.

Hurtado (2014) en su tesis de maestría en educación, admite la necesidad de formación de los profesores de matemáticas con el objetivo de mejorar sus tareas de planeación, diseño, implementación y evaluación de los contenidos escolares. Este estudio centra su interés en el análisis de una Unidad Didáctica sobre la enseñanza de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real diseñada para el grado 8. ° De la educación básica secundaria. Este análisis se realiza a través de la metodología denominada Análisis Didáctico que se concreta a partir de la identificación de los conocimientos sobre el contenido escolar anteriormente mencionado. Las preguntas de los talleres permitieron identificar algunos conocimientos matemáticos, curriculares y didácticos que manifiestan los profesores cuando analizan las situaciones de la Unidad Didáctica y a través de los

resultados obtenidos, generar la reflexión sobre las necesidades formativas de los profesores para atender su práctica diaria.

1.5.2. Algunas investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del Número Natural.

El campo de la EM se ha ampliado gracias a los distintos trabajos que se han referenciado desde diferentes enfoques teóricos que sirven al profesor como herramientas que le ayudan a ampliar su conocimiento didáctico sobre las matemáticas. Estos enfoques han permitido estudiar dos disciplinas de indagación científica la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que tienen propósitos diferenciados, pero que el docente debe articular en sus propuestas de enseñanza de las matemáticas (Rico, 1997b).

De acuerdo a las investigaciones consultadas, se encuentra mayor producción académica alrededor del aprendizaje de este contenido escolar, debido a que la EM como campo tiene sus orígenes en la psicología de la educación y el desarrollo de los procesos desde enfoques cognitivos. A continuación, se presentan algunos trabajos alrededor del aprendizaje y la enseñanza del Número Natural.

Bajo la idea de que los números tienen significados según la situación en que se presenten Castro, Rico y Castro (1987) refieren que los números obtienen diferentes significados en función de los contextos donde se empleen. Algunos de estos contextos son: la secuencia verbal, contar, como cardinal, como medida, como ordinal, como código y como tecla. Así entonces, cuando nos referimos a una situación que demanda un tratamiento numérico, estamos obligados a comprender cuál es la intención (sentido) con que usan los números allí, que relaciones numéricas y razonamientos podemos destacar de una determinada situación.

Asimismo, Fuson (1988) expresa que las palabras número tienen varios usos de acuerdo a la situación que se desea atender, esta pluralidad de significados (referentes internos) provoca que la variedad de usos dependa de distintos contextos (referentes externos). La autora indica que los primeros tres usos de las palabras número corresponden los referentes sobre cardinalidad, ordinalidad y medida; los siguientes dos usos demandan la correcta pronunciación de la secuencia numérica convencional, estos son: secuencia y conteo; otros tipos de usos de las palabras número son: la lectura de símbolos (numerales) y etiquetar situaciones no numéricas o cuasi numéricas.

En su trabajo doctoral Castro (1995) realizó un estudio de los números figurados como representaciones simbólicas de los números naturales a partir de una aproximación curricular que posibilitó un análisis estructural de este contenido de enseñanza. Este estudio se basa en la consideración estructural de los números naturales a partir de tres tipos de numeraciones: numeraciones figuradas, habladas y escritas (Guitel, 1975). Esta perspectiva estructural de representación considera como sistemas alternativos las representaciones por medio de figuras, los términos de la secuencia numérica y los sistemas de numeración. Castro, Rico y Castro (como se citaron en Castro, 1995) proponen las funciones cognitivas de los números naturales a partir de tres clases de actividades: contar y cardinar, en respuesta a la cuestión sobre ¿Cuántos hay?, secuenciar y ordenar, en relación a la cuestión sobre ¿Qué posición ocupa? Y, representar y analizar, como respuesta a ¿Cuál es la cantidad?, ¿Qué estructura tiene? Estas funciones cobran sentido en una variedad de contextos entre los que se destacan los contextos cardinales, ordinales y figurativos. Esta investigación se realizó a partir de un diseño cuasiexperimental con tareas de aprendizaje sobre las secuencias lineales y cuadráticas a partir de tres sistemas simbólicos de representación (patrones puntuales, secuencia usual de número y desarrollos aritméticos), complementados por una evaluación cuantitativa a estudiantes de los niveles de 7.º y 8.º de secundaria.

Vásquez (2010) en su trabajo para obtener el título de magister en educación, desarrolla un análisis didáctico del concepto de Número Natural en la formación de profesores de matemáticas mediante los desarrollos de la teoría de transposición didáctica. Este estudio comienza con un análisis histórico-epistemológico a través de la perspectiva Piagetiana, perspectiva de las habilidades de conteo y una perspectiva sintética que integra los desarrollos piagetianos y de las habilidades de conteo para reconocer las nociones y conceptos presentes en las prácticas pedagógicas y en los procesos de aprendizaje de los estudiantes, en contraste con distintas formas de aproximación ontológica a través de definiciones: formales, lógicas, individuales y en los contextos de uso del Número Natural para el desarrollo del pensamiento numérico. Un aporte central de este estudio es la articulación de análisis epistemológico, histórico, ontológico y curricular para sustentar algunas categorías poco exploradas en las prácticas educativas sobre la enseñanza del Número Natural en los primeros grados de escolaridad.

Castro y Cañadas (2016) presentan en su capítulo sobre los números y operaciones en la educación infantil los conceptos, nociones y destrezas relacionadas con el desarrollo del pensamiento numérico escolar. Las autoras exploran tópicos de aprendizaje escolar como: El Número Natural y sus principios de cardinalidad y ordinalidad sobre los cuales se han basado algunas prácticas educativas apoyadas en las representaciones numéricas; los usos o contextos del número como una pluralidad de significados que permiten dar sentido al uso de los números para emplear la secuencia numérica, establecer el cardinal de una colección, identificar la posición (relativa) de un objeto en una disposición ordenada, describir la cantidad de unidades de una magnitud, o diferenciar un objeto de otro; la cuantificación como el proceso que se apoya en estrategias como: subitizar, estimar, contar y operar para establecer el cardinal de una colección; los sistemas de numeración como medios que permiten usar signos y reglas para la representación de los números de manera oral y escrita, y las operaciones aritméticas de estructura aditiva y multiplicativa a partir de propiedades definidas en las operaciones aritméticas de los números naturales.

1.5.3. Investigaciones sobre el sentido numérico.

El sentido numérico se ha desarrollado como un tópico de interés en el campo de la EM desde hace aproximadamente tres décadas. Este tópico ha tenido un amplio desarrollo en el campo del aprendizaje de las matemáticas, debido a su gran influencia para la adquisición de habilidades y destrezas ligadas al pensamiento numérico. A continuación, se presentan algunas investigaciones relacionadas con el sentido numérico como aspecto formativo en el campo de la EM.

Sowder (1992a) presenta un capítulo con la literatura de las investigaciones sobre la estimación como el desarrollo de una intuición cuantitativa y el sentido numérico como una red conceptual organizada que posibilita relacionar los números, las operaciones y sus propiedades, y la solución de problemas mediante estrategias creativas y flexibles que se apoyan en la profunda comprensión de los números. La autora indica que la definición de sentido numérico es compleja y por tanto es difícil evaluar debido a sus múltiples aspectos relacionados. Ella propone una aproximación a la definición de este citando a Resnick, 1989 (como se citó en Sowder, 1992a), el sentido numérico se evidencia en pensamientos y razonamientos mediante aspectos no determinísticos y con formas abiertas y terminadas.

Una contribución importante de este estudio es la caracterización de la estimación en tres categorías: estimación con cálculo, estimación de medidas y estimación numérica que la autora considera se desarrollan en la medida en que se amplía la intuición cuantitativa (o sentido numérico). Plantea que la estimación y el cálculo mental están estrechamente relacionados con la construcción de sentido numérico, aunque este no es un tópico de enseñanza escolar. Además, expresa que una razón por la que los niños carecen de sentido numérico es porque no establecen las relaciones entre los símbolos y sus conceptos de referencia.

Intentar clarificar los dominios y aspectos constitutivos de sentido numérico ha sido una de las líneas de investigación clave para organizar los aprendizajes escolares en los currículos de matemáticas. Sowder (1992b) examina las dimensiones y las vías que permiten demostrar y construir sentido numérico en los escolares. En la primera parte del capítulo la autora explora cuatro tópicos curriculares: la numeración, la magnitud numérica, el cálculo mental y la estimación como resultado del análisis de habilidades relacionadas con los comportamientos numéricos. Respecto al primer tópico indica que la construcción de sentido numérico requiere la relación del conteo, el agrupamiento y el valor de posición, según los NTCM de 1989; el segundo tópico promueve las habilidades de ordenar y comparar números; el tercer tópico se relaciona con las diversas manipulaciones que se pueden realizar a las cantidades numéricas a partir de un conocimiento del sistema de numeración; sobre el cuarto tópico manifiesta es una habilidad que permite el uso de estrategias intuitivas e innovadoras para validar un razonamiento numérico usado al considerar un resultado. La autora posteriormente, analiza el tratamiento de estos tópicos escolares en programas escolares estadounidenses y de la antigua unión soviética. Una conclusión clave de este estudio es que el sentido numérico no es un contenido de aprendizaje en el currículo escolar, por lo que se requiere que los profesores de matemática tomen conciencia de que deben proveer ambientes de enseñanza óptimos para la construcción de sentido numérico. Además, afirma que los estudiantes exhiben sentido numérico, pero una simple evaluación no permitiría establecer si un estudiante ha desarrollado esta cualidad en su totalidad, debido a que el sentido numérico es un fenómeno que abarca distintos aspectos de la aritmética.

Jordan, Glutting y Raminemi (2010) realizaron un estudio sobre algunas competencias relacionadas con el recuento, el conocimiento numérico y las operaciones aritméticas como aspectos característicos para la construcción de sentido numérico en los estudiantes. Los autores realizaron este estudio al finalizar los grados primero y tercero partiendo de la premisa de que los estudiantes en estos grados controlan las habilidades cognitivas ligadas al lenguaje, al espacio y al uso de la memoria como herramientas propicias para la construcción de sentido numérico. La capacidad de resolver problemas matemáticos presentados en diferentes contextos evidenció el progreso de habilidades numéricas basadas en la comprensión del número y las operaciones aritméticas. Un aporte clave de este estudio, es la proposición de valorar la construcción de sentido numérico a partir de habilidades intermedias importantes. La representación de pequeñas y grandes cantidades, el conteo, recuento verbal, valores cardinales de los números y problemas de estructura aditiva que deberían considerarse en el desarrollo de evaluaciones e intervenciones matemáticas tempranas.

Hernández, López, Quintero y Velásquez (2015) presentan un documento que compila algunos estudios en torno al Sentido Numérico como una fuente de conocimiento que va más allá del uso de los números. En este documento se realiza una aproximación al desarrollo de sentido numérico desde dimensiones algebraicas, métricas y variacionales. Una conclusión de este estudio es que el sentido numérico no es una cualidad que se pueda evaluar mediante una prueba porque este se evidencia en variadas actividades prácticas donde se usan los números de manera flexible y creativa.

Reflexionar sobre el sentido numérico y caracterizar sus componentes, es el propósito del artículo realizado por Almeida y Bruno (2015) en el que describen el sentido numérico como un sentido intuitivo de los números y sus usos; una consideración de que hay diversos niveles de exactitud al realizar situaciones numéricas y un conocimiento de cuándo se requiere calcular un resultado con exactitud. Las autoras reconocen que el sentido numérico es un aspecto se relaciona con conocimientos conceptuales y procedimentales que se usan mediante el razonamiento numérico y estrategias adecuadas y flexibles. En este artículo se consideran algunas actividades para desarrollar el sentido numérico a partir de propuestas de aula que permitan explorar diferentes métodos o estrategias de solución de manera que los estudiantes demuestren habilidades creativas y eficientes en métodos informales para la

solución de problemas que el profesor de matemáticas debe abordar con preguntas sobre lo razonable del resultado, los procedimientos efectuados y sobre lo que se espera obtener en la respuesta.

Los aspectos presentados en este apartado, sitúan este estudio sobre el conocimiento didáctico para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Número Natural, en relación con la formación de profesores del primer ciclo de básica primaria mediante su práctica profesional ubicada en un contexto sociocultural que se relaciona con algunas situaciones que dotan de sentido y significado al sistema de los números naturales. Por ello, a continuación se presentan los referentes conceptuales y didácticos que fundamentan el Modelo Local de Análisis Didáctico propuesto en este estudio para caracterizar algunos elementos básicos del Conocimiento Didáctico del profesor en referencia.

Capítulo 2: Marco conceptual

En este capítulo se presentan los referentes conceptuales, curriculares y didácticos que fundamentan un modelo curricular y didáctico propuesto en este estudio para el tratamiento de los conocimientos didácticos del profesor de primer ciclo de la educación básica primaria, sobre la construcción de sentido numérico a través de la enseñanza del número natural en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida.

Los referentes conceptuales y didácticos que se presentan a continuación, se enmarcan en algunos desarrollos teóricos propuestos en perspectivas socioculturales de la EM (Freudenthal, 1983; Radford, 2000). Estos desarrollos teóricos se interrelacionan con los enfoques para promover el sentido en la enseñanza de las matemáticas a través de una perspectiva curricular y funcional de la EM (Rico y Lupiáñez, 2008; Lupiáñez, 2009) que caracteriza una propuesta de modelo curricular y didáctico en el profesor en ejercicio que favorece el desarrollo de conocimientos didácticos sobre la construcción de sentido numérico a partir de la enseñanza del Número Natural. Este modelo le permite al profesor articular sus conocimientos y capacidades profesionales al planear, enseñar, evaluar y reflexionar de manera crítica sobre la formación matemática de sus estudiantes, en relación al currículo de la educación básica primaria.

Los aspectos relacionados con la formación del profesor de matemáticas y la enseñanza del Número Natural junto con la propuesta curricular para la enseñanza de las matemáticas del Ministerio de Educación Nacional de Colombia, MEN (1998, 2006, 2016) se relacionan en el modelo didáctico y curricular que proponemos en esta investigación, para fortalecer los conocimientos didácticos que el profesor de matemáticas de primer ciclo de educación básica primaria usa para realizar sus prácticas profesionales. Asimismo, en este capítulo se exhiben algunos elementos teóricos y prácticos que permiten organizar los conceptos estructurales de este estudio que se estructuran a partir de la Teoría de los Organizadores del Currículo (OC) (Rico, 1997a; Rico y Segovia, 2001; Gómez y Rico, 2002; Bedoya, 2002) que describen estructuras conceptuales de los conocimientos matemáticos escolares mediante el diseño, desarrollo y reflexión de situaciones de una Unidad Didáctica Guía que se usan como instrumentos de mediación entre los conocimientos prácticos y teóricos, representados en la Figura 2, de acuerdo con la metodología de investigación y de programas de cualificación en el campo de la

formación de profesores de matemáticas denominada Análisis Didáctico (AD) (Gómez 2007; Rico, Lupiáñez y Molina, 2013).

Figura 2. Categorías conceptuales en las que se basa esta investigación.

2.1 La formación de profesores en la Educación Matemática y la Didáctica de las Matemáticas

La formación matemática que se ofrece a las personas como parte de la herencia cultural y social, es concebida en este estudio como Educación Matemática (EM). En este sentido, en esta investigación se asume la EM como un sistema que abarca ideas, conceptos, procedimientos, métodos, representaciones, habilidades, destrezas, sentidos y significados, y reflexiones críticas a partir del uso sociocultural de las matemáticas.

El conocimiento matemático forma parte de la herencia cultural y de los valores de la sociedad que la educación y los educadores matemáticos deben poner al alcance de las personas que la integran. Las metas, intenciones y esfuerzos sistemáticos para alcanzarlo constituye una problemática fundamental para la comunidad educativa (Bedoya, 2002, p. 96).

Por ello, en la idea de EM que aquí se presenta se integran conceptos, procedimientos, y actitudes que relacionan la construcción, representación, aplicación y apreciación del conocimiento matemático desarrollado a través del sistema educativo.

Al interior del sistema educativo se desarrollan procesos de enseñanza y aprendizaje relacionados con la EM, estos procesos son indagados por la Didáctica de las Matemáticas (DM), como un campo de investigación integrado por diferentes enfoques y perspectivas que convierten este campo en un dominio que evoluciona continuamente como disciplina científica y como sistema social que relaciona teoría y práctica a través de desarrollos articulados con otros campos referenciales psicología, filosofía, epistemología, matemáticas, entre otros tal como lo plantea Steiner (como se mencionó en Godino, 1991). Así entonces, se reconoce que este campo constituye un núcleo de conocimiento para los profesores de matemáticas en formación inicial, continua y continuada.

Los conocimientos didácticos que los profesores de matemáticas emplean para desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje, se establecen como un foco de interés en el campo de la formación de profesores, y sus evidencias han empezado a soportar teóricamente investigaciones que enriquecen los programas de formación de docentes de matemáticas a partir de distintos modelos del conocimiento didáctico-matemático.

La formación del profesor de matemáticas a partir de su toma de conciencia, permite caracterizar su conocimiento a través de los saberes de referencia, capacidades y destrezas ligadas al conjunto de actuaciones que dan sentido y continuidad al desarrollo de destrezas para la enseñanza de las matemáticas. Lupiáñez (2009) refiere que las competencias del profesor de matemáticas en formación inicial se apoyan en la base de sus conocimientos, capacidades, destrezas y actitudes que le permiten aplicar diferentes comprensiones disciplinares y específicas de la enseñanza de las matemáticas, a partir de diversos contextos que posibilitan el desarrollo de competencias y el dominio cognitivo en los escolares. Por ello, en esta investigación se recalca que la formación del profesor de matemáticas en ejercicio a partir de sus prácticas le permiten potenciar el desempeño profesional y comprender las competencias profesionales, o capacidades como preferimos denominarlas, para identificar y seleccionar los tópicos de enseñanza, modelar situaciones de enseñanza y aprendizaje, evaluar y reorientar las actividades de acuerdo a los conocimientos evidenciados por los estudiantes.

Este desarrollo de capacidades profesionales para la enseñanza se manifiesta cuando el profesor realiza sus prácticas (basadas en fundamentos didácticos y el conocimiento de su contexto profesional) y constantemente las revisa críticamente en relación a los conocimientos

didácticos que ha desarrollado como sujeto histórico, social y cultural. Por tanto, en este estudio se concibe el Conocimiento Didáctico al igual que Bedoya (2002) quien admite el Conocimiento Didáctico como una fuente de formación y de información profesional que le permite al profesor diseñar y desarrollar las actividades de planificación curricular. En términos del autor, el Conocimiento Didáctico, o conocimientos didácticos como preferimos denominarlos, se componen de un sistema de conocimientos producidos al interior de la disciplina DM.

Además, (Bedoya, 2002) plantea que este conocimiento se relaciona con las siguientes nociones, análisis y reflexiones: conocimiento sobre el currículo, conocimiento sobre práctica, conocimiento de una estructura conceptual, conocimiento sobre la cognición escolar, conocimiento sobre los sistemas de representación, conocimiento acerca de los sentidos y modos de uso del contenido matemático escolar, conocimiento sobre el desarrollo histórico del objeto matemático y, conocimiento sobre los materiales, recursos y tecnologías que median los aprendizajes matemáticos para la organización de la enseñanza. Por ello, consideramos que el profesor de matemáticas amplía y reflexiona sobre su práctica, mediante el estudio de situaciones y tareas didácticas organizadas a partir de los aspectos mencionados anteriormente.

Mediante el Conocimiento Didáctico como categoría de estudio, se pretende responder y adoptar una posición formativa relacionada con cuestiones sobre ¿Qué tipo de matemáticas se deben enseñar?, ¿Cómo se pueden abordar las prácticas de enseñanza de las matemáticas? y ¿Qué tipo de formación requieren los profesores de matemáticas? Asuntos que han sido tal vez los ejes centrales del campo de investigación sobre la formación de profesores de matemáticas al interior de la DM.

A continuación, se describen algunos elementos característicos que retomamos en la investigación a partir de enfoques relacionados con perspectivas socioculturales, producidas en el campo de la DM, que se articulan a través del modelo curricular y didáctico, dispuesto para caracterizar los conocimientos didácticos del profesor de primer ciclo de educación básica primaria a partir la construcción de sentido numérico en sus propuestas para la enseñanza del Número Natural en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida.

2.2 Modelo curricular y didáctico

En el campo de la Educación Matemática se ha utilizado ampliamente el término modelo en distintos desarrollos teóricos-conceptuales para caracterizar la representación de fenómenos,

situaciones o prácticas en las que se requiere abstraer las características, principios o dimensiones de una representación matemática que se quiere esquematizar. Al respecto, Skovsmose (1999) refiere que las matemáticas no sólo propician maneras de describir y tratar problemas, sino que permiten reconstruir situaciones de la realidad a través de su característica modeladora que facilita el razonamiento a partir de abstracciones mentales (modelos mentales o imágenes similares o imprecisas) y las abstracciones materializadas (imágenes de las abstracciones mentales o cosificaciones) que configuran el cambio de estatus ontológico de una abstracción mental, para materializarse y permitir la interacción cultural a las personas dentro de

enmarca dentro de la imagen del mundo, la imagen del matemático dentro de la imagen del

De la

misma forma, Castro y Castro (1997) reconocen que los modelos son poderosos instrumentos conceptuales que permiten la representación de múltiples relaciones y estructuras con las que interactuamos en situaciones reales.

De acuerdo a lo anteriormente expresado, las acciones y decisiones que el profesor en ejercicio considera cuando realiza actividades didácticas como la planeación, el desarrollo, las orientaciones educativas, sus ideas y discursos sobre el tópico matemático de enseñanza, y los aspectos evaluados de las matemáticas escolares obedecen a un enfoque de enseñanza que el profesor ha construido como sujeto de una transformación social. Por ello, se subraya en esta investigación que el modelo de enseñanza de las matemáticas escolares que el profesor desarrolla en el aula de clase, necesita fundamentarse en el conocimiento curricular, disciplinar y didáctico que articula diferentes fenómenos que permitan a los escolares construir sentido y significado de los objetos matemáticos de conocimiento a través de la interacción sociocultural con personas, situaciones y objetos de su vida cotidiana.

En consecuencia, los modelos de enseñanza de las matemáticas del profesor requieren fundamentarse en conocimientos didácticos que permitan configurar un sistema conceptual y procedimental que sustente las propuestas formativas y la construcción de sentido que los estudiantes han desarrollado en escenarios de enseñanza y aprendizaje de los números naturales en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida.

Por ello, en esta investigación se considera el modelo curricular y didáctico del profesor como una construcción teórica-formal basada en propuestas didácticas que interpretan los fenómenos socioculturales del aula en los que se incluyen el sistema social didáctico (contexto, profesor, estudiantes, conocimiento matemático escolar y medios) y las acciones del profesor en ejercicio para gestionar su práctica fundamentada a partir de los conceptos, procedimientos, relaciones y sentidos particulares de los conocimientos didácticos. El modelo curricular y didáctico que el profesor en ejercicio demuestra en las prácticas de enseñanza de las matemáticas está mediado por conocimientos disciplinares, académicos, socioculturales y didácticos que él exhibe a través de acciones, discursos y medios que utiliza para: diseñar, implementar y evaluar las intervenciones o actividades realizadas en el aula; estos conocimientos han sido desarrollados por el profesor a lo largo de su formación profesional, su experiencia práctica y discursiva en relación con la matemática, como objeto de enseñanza y de aprendizaje. Además, el modelo curricular y didáctico es un sistema de acciones y decisiones fundamentadas que permite reconocer las concepciones, creencias y conocimientos del profesor en relación a su conocimiento sobre cómo se enseñan las matemáticas escolares y cómo se aprenden estas.

El modelo curricular y didáctico que el profesor desarrolla en su práctica profesional incide en los aprendizajes y destrezas que sus estudiantes desarrollen sobre las matemáticas escolares. Al respecto Skovsmose (2000) afirma que en la enseñanza de las matemáticas se sitúan en dos tipos de prácticas: el paradigma del ejercicio y el enfoque investigativo, el primero se basa en ejercicios de mecanización de procedimientos y reglas matemáticas, y el segundo se sustenta en la indagación, planteamiento y resolución de problemas situados en un contexto. De acuerdo a ello, el modelo curricular y didáctico que el profesor practique en sus experiencias de enseñanza permitirá o limitará el progreso de los conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales articulados con el sentido de uso desarrollado sobre los objetos matemáticos de estudio y su funcionalidad en situaciones de la cotidianidad.

Por ello, analizar los Conocimientos Didácticos del profesor en ejercicio requiere considerar cuál es el modelo curricular y didáctico que él emplea y qué ideas explícitas o implícitas tiene sobre estas cuestiones fundamentales para la enseñanza y el aprendizaje: ¿Con qué modelo conceptual describe e interpreta la realidad de los procesos de enseñanza/aprendizaje de sus estudiantes? ¿Qué tipo de situaciones de enseñanza propone para que sus estudiantes desarrollen el pensamiento matemático? ¿Qué desempeños evidencian el aprendizaje de las matemáticas?

¿Qué sentidos y significados se asignan a los tópicos de enseñanza de las matemáticas? ¿Cuáles son los fines educativos seleccionados para orientar la intervención didáctica? ¿Qué principios didácticos fundamentales orientan los fines educativos previstos? Entre otras. Estos interrogantes permiten determinar los argumentos empíricos o documentados que el profesor en ejercicio evidencia en el desarrollo de su práctica sobre la enseñanza del Número Natural en el primer ciclo de la Educación Básica Primaria.

2.2.1 El currículo funcional en la Educación Matemática

Concretar y desarrollar un programa de formación matemática que se ocupe de las cuestiones relativas al conocimiento matemático y de los procesos asociados a su aprendizaje, enseñanza y evaluación, requiere de un currículo que integre los conocimientos didácticos y específicos que el profesor de matemáticas utiliza cuando toma decisiones para la enseñanza de la matemática

actuación educativa. En un currículo se concretan una serie de principios ideológicos, pedagógicos, psicopedagógicos que, en su conjunto, muestran la orientación general del sistema

conocimientos matemáticos, las situaciones y contextos de aprendizaje, y las perspectivas de enseñanza desde esta disciplina.

Rico y Lupiáñez (2008) expresan. El currículo como plan formativo debe dar respuesta a las siguientes cuestiones desde su diseño y desarrollo: ¿Qué formación? y ¿Con cuál conocimiento?, ¿Para qué la formación? y ¿Qué aprendizaje persigue?, ¿Cómo llevar a cabo la formación?, y

cuestiones presentadas anteriormente delimitan cuatro líneas de estudio o dimensiones interconectadas cultural/conceptual, cognitiva, ética o formativa y social mediante las cuales se pueden trabajar e interpretar los planes de formación que se realizan en el sistema educativo. Además, estos autores refieren que cada uno de los enfoques presentados conllevan a diferentes modelos de currículo para la planeación según: los conocimientos que enfatizan, la clase de pensamiento que se desarrolla, el valor de la argumentación y las relaciones de comunicación, la complejidad y variedad de habilidades a promover, entre otros. En consecuencia, el modelo curricular y didáctico que el profesor en ejercicio desarrolle para la enseñanza de un contenido matemático, da cuenta de los conocimientos prácticos y teóricos que sustentan su praxis en

términos de los criterios de selección, planteamiento, implementación, evaluación y reflexión didáctica de la enseñanza de las matemáticas escolares.

Las expectativas de aprendizaje en los currículos de matemáticas de países como España y Colombia, entre otros, han estado inclinadas por el desarrollo de competencias como rasgos

manifiesto un claro énfasis en el enfoque funcional del conocimiento matemático a partir de su naturaleza y prior

referenciado en estudios sobre planes y propuestas internacionales, de acuerdo con Rico y Lupiáñez (2008) son: Enfoque instrumental o tecnológico, Enfoque estructural o técnico, Enfoque integrado y Enfoque funcional.

A continuación, en la Tabla 1 se describen los enfoques anteriormente mencionados.

<i>Tipos de conocimiento</i>	<i>Finalidades formativas individuales</i>	<i>Finalidades sociales y culturales</i>
<i>Instrumental</i>	Conocimiento dirigido al logro de aprendizaje de hechos concretos y destrezas en técnicas singulares. Conocimiento de las representaciones convencionales. Formación dirigida al conocimiento de conceptos básicos y al dominio de reglas.	Prioridad por el dominio de técnicas y algoritmos útiles. Interés por la seguridad, precisión y rapidez individuales. Desarrollo de conductas y logro de objetivos específicos. Dominio de los usos básicos y convencionales de los conceptos
<i>Estructural o técnico</i>	Conocimiento dirigido al dominio de conceptos, estructuras, técnicas y razonamientos formales. Sistemas de representación diversos y conexión entre ellos. Formación dirigida hacia el dominio formal de técnicas y razonamientos matemáticos.	Prioridad por el dominio de relaciones y propiedades. Importancia de la precisión y el rigor en la comunicación. Desarrollo de competencias profesionales específicas. Desarrollo de trabajo experto en la comunidad matemática.
<i>Integrado</i>	Conocimiento y dominio de estrategias metacognitivas. Formación basada en la creatividad y en la valoración de la belleza de las representaciones matemáticas. Cultivo de la imaginación y la curiosidad por las matemáticas.	Uso de heurísticos y resolución de problemas abiertos. Importancia de argumentar y justificar las propias ideas. Diversificación de competencias Capacidad para interactuar en una diversidad de contextos. Desarrollo del pensamiento crítico y de la autonomía intelectual.
<i>Funcional</i>	Conocimiento centrado en el desarrollo de estrategias cognitivas propias. Uso de distintas representaciones para dar	Técnicas de modelización para el planteamiento y resolución de problemas en contexto.

respuesta a una cuestión. Formación dirigida a mejorar el pensamiento del alumno y dotarle de cierta autonomía.	Capacidad de hacerse entender; énfasis en la argumentación. Desarrollo de competencias matemáticas y su aplicación en diversos contextos. Desarrollo del trabajo en equipo y del pensamiento funcional.
--	--

Tabla 1. Atributos que caracterizan los enfoques de las matemáticas escolares. (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 180)

En esta investigación se considera el enfoque funcional de las matemáticas escolares que retoma la modelización de situaciones reales, a partir del conocimiento relacionado con el sentido atribuido a la resolución de problemas y situaciones en diferentes situaciones.

En el enfoque funcional de las matemáticas escolares los conceptos y procedimientos matemáticos tienen un para qué cercano, sirven para algo tangible, pues las nociones matemáticas constituyen herramientas mediante las que actuamos para dar respuesta a cuestiones, problemas e interrogantes del entorno. (Rico y Lupiáñez, 2008, pp. 178)

Este enfoque centra su atención en el sentido y significado que tanto escolares como profesores atribuyen al uso de los aprendizajes matemáticos en situaciones escolares y extraescolares, más que en memorizar y acumular aprendizajes desarrollados en el currículo de las matemáticas. Por ello, proponemos en el modelo curricular y didáctico desarrollado en este estudio para la formación del profesor en ejercicio un currículo transformativo y reflexivo que propicie el modelo funcional de las matemáticas escolares caracterizado por: tareas situadas en los problemas socioculturales, herramientas conceptuales y un sujeto sociocultural que interactúa con los miembros de su entorno.

2.2.2 Perspectiva sociocultural en la formación de profesores de matemáticas.

Plantear la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva sociocultural ha sido una de las alternativas de la educación matemática contemporánea, que considera los saberes y los seres como agentes que se relacionan en la formación de personas con razonamientos críticos sobre los discursos y prácticas matemáticas constituidas cultural e históricamente. De acuerdo con Radford (2014), la enseñanza de las matemáticas se puede asumir en sus procesos de enseñanza y aprendizaje en términos de la *actividad o labor*² conjunta entre profesores y estudiantes. Esta idea sobre un macro-proceso de enseñanza y aprendizaje,

²

surge a partir de una posición política-conceptual que considera que la educación en general, la enseñanza y aprendizaje en particular, tratan de saberes y seres que se relacionan a través de una *labor conjunta* que sitúa unos conocimientos reflexionados en las prácticas que a su vez propician una transformación permanente en los sujetos (Radford, 2014).

El contexto social donde el profesor desarrolla sus prácticas y las interacciones que este realiza al participar en comunidades académicas de práctica, favorecen el proceso de aprendizaje de los profesores en ejercicio atendiendo a sus necesidades y requerimientos formativos locales en relación a la disciplina que enseñan a sus estudiantes. De acuerdo con Sfard (como se citó en Gómez y Rico, 2002) el aprendizaje se admite como un proceso de convertirse en miembro de una comunidad específica, empleando su lenguaje y actuando de acuerdo a las normas acordadas en dicha comunidad. En este sentido, el proceso formativo del profesor de matemáticas se entiende en esta investigación como el proceso de comprender, actuar y reflexionar sobre los aprendizajes enseñados a sus estudiantes de acuerdo a las particularidades del medio social donde él desarrolla su práctica profesional.

Así entonces, los conocimientos didácticos del profesor se transforman en la medida en que él participa en comunidades que socialmente construyan nuevas maneras de significar, aprender de y crear prácticas situadas en contextos donde las interacciones colaborativas posibiliten desarrollar habilidades y destrezas (reflexivas y críticas) para fundamentar sus decisiones sobre la enseñanza de las matemáticas escolares. La construcción de significados (sociales y personales) se origina cuando las comunidades o las personas contrastan el producto de su experiencia con las expectativas generadas durante este proceso (Gómez y Rico, 2002). Este proceso de reflexión/acción sobre la práctica, permite tanto a comunidades como a personas desarrollar sentido y significado de los objetos matemáticos que son enseñados a los escolares.

A continuación, se desarrollan algunos constructos didácticos situados en la perspectiva sociocultural que articulan el modelo curricular y didáctico propuesto para identificar los conocimientos didácticos que el profesor utiliza al momento de enseñar un contenido de enseñanza. En esta investigación, emplearemos la fenomenología didáctica (Freudenthal, 1983) y el proceso de subjetivación y objetivación (Radford, 2014) para establecer nuestro modelo curricular y didáctico dispuesto para la formación del profesor en ejercicio y la ampliación de sus

conocimientos didácticos sobre la construcción de sentido numérico a través de la enseñanza del Número Natural.

2.2.2.1 Fenomenología didáctica.

La enseñanza de algunos tópicos de las matemáticas escolares, demandan que los profesores de matemáticas centren su interés en el conocimiento y comprensión de una variedad de significados y sentidos que obtienen estos tópicos en función de contextos o situaciones particulares que conforman su sistema conceptual. Para Freudenthal (1983) el conocimiento didáctico para la enseñanza de las matemáticas debe situarse en los campos de los objetos matemáticos (noúmenos) y las situaciones donde este tome un sentido común (fenómenos). Es decir, que las situaciones propuestas en el currículo escolar deben permitir la construcción, organización, el desarrollo del sentido y significado de los objetos matemáticos enseñados, de sus propiedades, de las relaciones y acciones que realizamos a través de ellos en cada fenómeno de la realidad.

Puig (1997) plantea que la fenomenología freudenthaliana al servicio de los procesos de enseñanza de las matemáticas, permite comprender la variedad de relaciones entre los noúmenos y los fenómenos que dan origen al desarrollo del pensamiento matemático. En el caso de los números naturales, expresa el autor que el campo semántico está compuesto por los significados de número y contextos como: cardinal, ordinal, medida, de secuencia, de recuento, de etiqueta y de lectura de notaciones. Aunque el autor no detalla cada uno de estos contextos, expresa que la adquisición de los conceptos de número exclusivamente se debe realizar a partir de recortes de objetos mentales ideales al interior del campo semántico.

En este sentido, la fenomenología didáctica asociada a nuestra propuesta de modelo curricular y didáctico permite desarrollar una forma de aproximación a los significados de un objeto matemático de estudio a través del sentido en el que se emplea dicho objeto y los fenómenos que otorgan significados específicos que estructuran el sistema conceptual. De acuerdo con Gómez y Cañadas (2011) la fenomenología puede concebirse como una herramienta eficaz y eficiente para reconstruir contextos y fenómenos, en los que se puedan generar situaciones problema que los estudiantes puedan enfrentar. Además, el reconocimiento de estos fenómenos y contextos le permiten al profesor de matemáticas analizar y mejorar sus propuestas de enseñanza a partir de los sentidos que articulan los significados de los tópicos matemáticos de enseñanza escolar.

2.2.2.2 Subjetivación y objetivación.

La Teoría de la Objetivación (TO) sostiene que desde un punto de vista ontológico, el ser y el saber se interrelacionan de una forma profunda, por lo que uno no podría ocurrir sin el otro. Radford (2014) expresa que esta interrelación entre el ser y el saber posibilita concebir la enseñanza y el aprendizaje como un proceso donde no solo se producen saberes, sino que también se reproducen subjetividades. Por ello, se deben hacer esfuerzos para comprender las producciones de saberes y de subjetividades que ocurren en el aula e incentivar las formas de acción didáctica que conlleven a un *aprendizaje y enseñanza significativos*³, es decir, que no limite o condicione la Educación Matemática.

El proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que se presenta en este estudio, para la formación de los profesores de matemáticas en ejercicio, al igual que (Radford, 2014) se considera como un proceso que reconoce que el ser interactúa con ideas, objetos y artefactos que no han sido productos de sus propias prácticas, sino que han sido desarrollados por comunidades que le han precedido. En este sentido, los significados que cada ser desarrolla están definidos por la toma de conciencia de las situaciones que son de su conocimiento. Estas situaciones pasan por lo que se denomina en la TO proceso de objetivación

N Q R Z l Q d a ¶

definido como toma de conciencia en el curso de un proceso social, emocional y sensible; es un proceso mediatizado por la cultura material (signos, artefactos, lenguaje, etc.), los sentidos y el

proceso de objetivación o conociendo está enmarcado en las relaciones que se establecen entre el mundo y el sujeto que es formado y se forma, a manera de proyecto histórico-social, a través de las interacciones sociales dentro de su cultura.

De igual manera, Radford (2014) plantea que el termino subjetivación (o volviéndose), se refiere a aquellos procesos a través de los cuales los sujetos asumen una actitud en prácticas culturales y se forman como sujetos culturales e históricos, es decir, la subjetivación es el proceso histórico de creación del yo. Cada sujeto que se relaciona con situaciones, objetos materiales o ideas del mundo se enfrenta a resistencias que le imprimen estos aspectos, porque

3

pedagógicas que implican:

- 1) Una profunda comprensión de los conceptos matemáticos y
- 2) La generación de un espacio político y social que permita desarrollar subjetividades reflexivas, solidarias y responsables.

cada uno de ellos ha sido creado o transformado por la labor de generaciones humanas, que producen subjetividades que inducen la significación personal y las concepciones que cada sujeto se hace a partir de su interacción con estos aspectos.

Las relaciones discursivas y las acciones, o labores, pretenden generar procesos de subjetivación de las personas que participan en prácticas matemáticas culturales, sociales e históricas, a través del desarrollo de prácticas sociales para su significación. Es así, como a través del *trabajo* o *labor* que los sujetos estimulan el proceso de *alteridad*⁴ a través de situaciones donde: se desarrollen culturalmente, comprendan ideas, se expresen de diferentes maneras, se relacionen con el mundo y se transformen de manera constante y reflexivamente.

Así entonces, el modelo curricular y didáctico que este estudio plantea para la formación de profesores en ejercicio, reconoce que el encuentro de los conocimientos que él posee con los conocimientos didácticos que se han edificado histórica y socialmente genera procesos de toma de conciencia sobre esos aspectos que no conoce, pero necesita reconocer para la enseñanza de un tópico del currículo escolar. Además, estos conocimientos didácticos permiten generar subjetivaciones con las que tiene que interactuar dialécticamente y a través del uso con sentido de estos conocimientos. En otras palabras, enseñar (planificar, dotar de sentido, significar, usar, reflexionar y valorar) y aprender (tomar conciencia, comprender de manera crítica y transformar mis formar de relacionarme) permiten interactuar, participar y reflexionar mediante las labores sociales y culturales con sus estudiantes y con las matemáticas como cuerpo social de conocimiento.

La Figura 4 esquematiza la concepción de aprendizaje y enseñanza, significativos, en la formación tanto de profesores como de estudiantes a través de los aspectos denominados *objetivación* (conociendo) y *subjetivación* (volviéndose) como parte de un mismo proceso que se desarrolla en la mediación o labor conjunta entre estudiantes y profesores.

Figura 3. Modelo de enseñanza y aprendizaje en la Teoría de la Objetivación (Figura adaptada de Radford, 2014, p. 139)

2.3 Contextualización curricular sobre sentido numérico y el Número Natural

La perspectiva del currículo funcional que se propone en este estudio, para la formación del profesor en ejercicio, comienza con la revisión curricular del Número Natural como estructura conceptual y del sentido numérico como el desarrollo práctico del sistema conceptual, procedimental y actitudinal que evidencia el conocimiento numérico de una persona en particular. Esta revisión parte de los desarrollos internacionales, nacionales, institucionales y de aula sobre ambos aspectos para su consideración en la planificación, implementación y evaluación de los contenidos relacionados con el desarrollo del número.

El sentido numérico ha ocupado un gran interés por la comunidad académica que estudia la enseñanza y aprendizaje de los números. Al respecto, El Consejo Nacional de profesores de matemáticas de los Estados Unidos de América, reconoce el sentido numérico como un desarrollo central para el avance del estándar referido a los números y las operaciones (NCTM, 2000). Este desarrollo se concibe en este documento como el paso de niveles de usos básicos a niveles sofisticados donde el conocimiento se perfecciona a partir de: ideas, representaciones, habilidades, razonamientos, reconocimientos, cálculos, estimaciones y usos flexibles de los números, para la resolución de problemas y conectar los aprendizajes numéricos iniciales con los posteriores. De la misma forma, los estándares para la enseñanza de las matemáticas en los Estados Unidos de América NCTM (2000) plantean la enseñanza de los números naturales en el primer ciclo de escolaridad (pre-jardín hasta grado segundo) a partir de objetivos sobre: la comprensión de los números, las formas de representarlos, las relaciones entre números y los sistemas numéricos; comprender los significados de las operaciones y cómo estas se relacionan entre sí; y calcular con fluidez y hacer estimaciones razonables. En los primeros años de escolaridad se hace énfasis en el desarrollo de este estándar como conocimiento base, para el

progreso de otros focos escolares relacionados con la medida, el álgebra, la geometría y el análisis de datos.

2.3.1 El Número Natural y el sentido numérico en el currículo nacional.

La necesidad de articular los programas curriculares y los aprendizajes escolares, desarrollados a nivel institucional y nacional ha posibilitado la definición de directrices curriculares por parte del MEN, para la enseñanza y evaluación, en nuestro caso de las matemáticas, que ofrecen las instituciones educativas en Colombia mediante las propuestas curriculares organizadas para la formación de cada sujeto en su dimensión personal, profesional y ciudadana. Por ello, la educación matemática no debe considerarse como un proceso de transmisión de conceptos y saberes cognitivos, sino como campo de acción e investigación que requiere relacionar desarrollos socioculturales, como se presenta en la Figura 5, que modelen prácticas sociales de las matemáticas con sentido, aplicabilidad y eficacia que favorezcan el aprendizaje significativo según Ausbel, Novak y Gowin (como se mencionó en MEN, 2006). Además, este campo requiere articular una enseñanza para la comprensión que evidencie, consolide y profundice el conocimiento matemático a través de actuaciones, actividades, tareas y proyectos escolares que revelen destrezas conceptuales, procedimentales y actitudinales de acuerdo con Perkins, Gardner, Wiske y otros (como se indicó en MEN, 2006). Estas perspectivas para el aprendizaje significativo y la enseñanza para la comprensión, se articulan en la noción de competencia como un conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y actuaciones que se relacionan en la práctica flexible, efectiva y con sentido de una situación en un contexto nuevo o retador.

Figura 4. Estructura curricular del área de matemáticas. (MEN, 1998, p. 36)

El aprendizaje de las matemáticas favorece la toma de decisiones, afrontar situaciones cotidianas, exponer ideas, validar, argumentar o refutar afirmaciones basadas en el conocimiento matemático propio y de otras personas con las que se interactúa. Esta perspectiva de la enseñanza es considerada por los referentes educativos de las matemáticas en Colombia que se estructuran a partir de tres grandes aspectos curriculares, a saber: los *procesos generales*, que se conciben como destrezas o habilidades el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y, comparación y ejercitación de procedimientos que caracterizan lo que significa ser matemáticamente competente; *conocimientos básicos*, que se relacionan con pensamientos y sistemas conceptuales y procedimentales que facilitan el desarrollo del pensamiento matemático, y *el contexto para la enseñanza*, concerniente a los ambientes que rodean al estudiante y le dan sentido a las matemáticas que aprenden (MEN, 1998). La enseñanza del Número Natural y la construcción de sentido numérico que se aborda en esta investigación se relacionan con la propuesta curricular para el desarrollo de Pensamiento Numérico y el Sistema Numérico de los naturales en el primer ciclo de la educación básica primaria, como conocimiento básico para el trabajo posterior con otros pensamientos y sistemas matemáticos.

El énfasis que se asume en los referentes nacionales para la enseñanza y el aprendizaje de los números es el estudio de sistemas numéricos para desarrollar el Pensamiento Numérico, como una concepción más desarrollada que el sentido numérico.

que sentido numérico, el cual incluye no sólo éste, sino el sentido operacional, las habilidades y destrezas numéricas, las comparaciones, las estimaciones, los órdenes de magnitud, (MEN, 1998, p. 43).

Empero, los desarrollos realizados por la comunidad académica sobre sentido numérico evidencian que este sistema de usos está ligado al desarrollo matemático a nivel personal de una red conceptual, procedimental y actitudinal que articula habilidades y destrezas basadas en el conocimiento de los números y del sistema de numeración decimal.

Una de las situaciones que contribuyen al desarrollo del Pensamiento Numérico en los escolares es la comprensión de los significados del número, sus diferentes interpretaciones y representaciones que evolucionan en la medida en que los estudiantes se enfrenten a situaciones escolares y extraescolares específicos donde los números describan, relacionen y modelen situaciones que propician los sentidos y significados que asignamos a estos. Los Lineamientos Curriculares en Matemáticas, MEN (1998), plantean tres aspectos básicos (comprensión de los números y de la numeración; comprensión del concepto de las operaciones y, cálculos con números y aplicaciones de números y operaciones) que pueden ayudar a desarrollar el Pensamiento Numérico de los escolares y a orientar el trabajo en el aula a través del sistema de los números naturales. Estos aspectos son las bases sobre las que se organizan los aprendizajes curriculares referidos al Pensamiento Numérico y el uso de sistemas de numeración en cada uno de los ciclos y niveles escolares.

Los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas, MEN (2006), refieren que el progreso del Pensamiento Numérico requiere del desarrollo de procesos curriculares y la organización de situaciones fundamentadas en la comprensión del uso y los significados de los números y la numeración; el alcance del sentido y significado de las operaciones y las relaciones numéricas, y el desarrollo de diversos métodos de estimación y cálculo. Sin embargo, este referente curricular no hace énfasis en algunas destrezas como, reconocer el tamaño relativo de los números, emplear distintas representaciones de los números, usar números como referentes y realizar juicios argumentados sobre los efectos de las operaciones con los números, que vinculadas a situaciones significativas podrían apoyar la construcción de sentido numérico en los escolares.

De igual manera, el MEN (2006) plantea que una aproximación al concepto de Número Natural asociada al conteo se realiza desde las situaciones y experiencias donde los estudiantes se enfrentan operaciones aritméticas (adición, sustracción, multiplicación y división) que requieren la comprensión de los números relacionada con el conteo de unidades simples o complejas a través de estrategias de reunión, separación, repetición y repartición de unidades separadas, que mediante la numerosidad o cardinalidad permiten establecer el tamaño de una agrupación o colección numerable. No obstante, esta apreciación relaciona situaciones cardinales y de medida entendiéndolos como una sola situación, por lo que en ambas se pueden utilizar las mismas destrezas, habilidades y procesos numéricos. Sin embargo, destacaremos en este trabajo que ambas situaciones se diferencian en el tipo de magnitud que describen, mientras que el número cardinal representa magnitudes continuas, el número como medida representa las veces que la unidad está contenida en la magnitud continua a partir de la comparación. Asimismo, esta apreciación dificulta reconocer el conteo como una destreza que se usa igualmente para ordenar y codificar objetos con una disposición pre-establecida.

2.3.2 Currículo institucional.

El comité de profesores que enseñan matemáticas en la Institución ha establecido en el plan de área que la metodología de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas está relacionada con cuatro enfoques metodológicos, a saber: *aprendizaje orientado por proyectos*, como una metodología que indaga por problemas que requieren ser abordados a partir de decisiones y procedimientos fundamentados; *aprendizaje por proyectos*, que consiste en desarrollar actividades de aprendizaje mediante la interacción de los escolares para promover los aprendizajes; *aprendizaje basado en problemas*, concebido como una estrategia de enseñanza y de aprendizaje que generan la adquisición de conocimiento y el desarrollo de habilidades y actitudes matemáticas mediante situaciones propuestas por el docente; y *estudio de casos*, entendido como una técnica que permite seleccionar una situación escolar, personal o laboral para que los estudiantes resuelvan estas situaciones a partir de la simulación de condiciones matemáticas, de convivencia, científicas, entre otras.

El plan curricular de matemáticas que se estudia en esta investigación centra su interés en el primer ciclo de la educación básica primaria de la Institución Educativa Ateneo en el municipio de Pradera. Esta institución proyecta, en su currículo de las matemáticas, el desarrollo de

destrezas y conocimientos necesarios para resolver, modelar y formular situaciones problemas que requieran solucionarse mediante procedimientos de cálculo. No obstante, los acompañamientos a las prácticas de enseñanza de las matemáticas en los primeros grados escolares no dan cuenta de estos propósitos formativos basados en el desarrollo de destrezas y conocimientos, porque las prácticas se basan en la memorización de propiedades y la ejercitación de algoritmos operatorios que posteriormente se usarán en la resolución de problemas propuestos por el profesor en clase.

El currículo institucional para la enseñanza de las matemáticas refiere en sus propósitos formativos para los primeros grados escolares los siguientes aspectos: en grado primero, se procura identificar la noción de Número Natural en sus diferentes significados a partir de la manipulación, representación y la identificación de magnitudes que permitan comunicar y resolver problemas sencillos; en segundo grado, se pretende reconocer el significado de los números naturales y emplearlos en operaciones de adición y sustracción mediante el conocimiento del valor posicional, las relaciones numéricas y espaciales en contextos de medición, conteo, comparación, codificación, localización en situaciones de la vida cotidiana, y en el grado tercero, se quiere fortalecer el concepto de Número Natural y de las representaciones fraccionarias de los números racionales positivos relacionándolos en operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división) para comunicar, resolver y argumentar algunas situaciones problema de la vida cotidiana. Sin embargo, estos propósitos formativos de las matemáticas escolares no relacionan la enseñanza de los números naturales en contextos de ordinalidad, cardinalidad y medida, como situaciones que promueven el sentido numérico a partir del reconocimiento de la magnitud, estimación, cálculo y los sistemas de representación de los números naturales. Además, en estos propósitos no se establece la importancia de reconocer las relaciones y propiedades del Sistema de Numeración Decimal como un proceso que favorece el desarrollo de estrategias de cálculo y estimación en situaciones problema, y solo asocian este conocimiento con los algoritmos tradicionales de las operaciones aritméticas enseñadas en estos grados escolares.

2.3.3 Currículo propuesto en el aula.

La enseñanza de los tópicos matemáticos escolares se realiza a través de un instrumento denominado plan de aula que parte de la referencia curricular planteada en los Lineamientos

curriculares, Estándares básicos de competencia y Derechos básicos de aprendizaje (MEN, 1998; 2006; 2016). Estos referentes se integran en el plan de aula a través de un objetivo de aprendizaje por cada contenido matemático escolar, este objetivo se caracteriza a partir de unas evidencias de aprendizaje que los profesores describen como expectativas del aprendizaje escolar de los tópicos definidos para un periodo escolar específico.

Los contenidos curriculares para la enseñanza de las matemáticas en la Institución se organizan a partir de contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales. Entre los contenidos de enseñanza para el primer ciclo, que se describen como conceptuales se encuentran los siguientes: para el grado primero, el número cien (100), la centena, lectura y escritura de números hasta cuatrocientos noventa y nueve (499), relación de orden de los números hasta cuatrocientos noventa y nueve (499), entre otros; para el grado segundo, valor posicional, composición y descomposición de números hasta mil (1.000), la adición y sustracción con sus términos, entre otros, y para el grado tercero, conteo y lectura de números, comparación y orden de los números, valor posicional, recta numérica, resolución de problemas con operaciones aritméticas y sistema de numeración romana. Respecto a los contenidos de enseñanza relacionados con las situaciones procedimentales y actitudinales se enuncian los mismos contenidos expuestos en lo conceptual, pero describiéndolos en tercera persona. Sin embargo, no existe una distinción clara entre los contenidos conceptuales, como el Número Natural, la cardinalidad, el conteo, la ordinalidad, entre otros, y los procedimentales como la agrupación, la composición numérica, la transformación en operaciones de estructura aditiva, entre otros procesos rutinarios.

2.4 Modelo local de Análisis Didáctico y Organizadores del Currículo

En esta investigación se retoma el término modelo local propuesto por (Bedoya, 2002) el cual relaciona un diseño curricular local, una estructura conceptual local y unos conocimientos didácticos sobre el contenido matemático escolar. Por lo tanto, concebiremos en este estudio el modelo local como un constructo que se compone de: I) un diseño curricular local (que asumiremos en el modelo curricular y didáctico) de la formación del profesor en ejercicio que orienta la enseñanza de las matemáticas del primer ciclo de la educación básica primaria; II) una estructura conceptual referente a un contenido escolar o tópico matemático específico, como lo es la enseñanza del Número Natural en este nivel escolar, y III) los conocimientos didácticos y

disciplinarios para la construcción de sentido numérico a partir de las propuestas de enseñanzas basadas en un modelo formativo de matemáticas en los grados donde el profesor desarrolla su práctica profesional.

Al igual que los estudios realizados por el grupo de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA) de la Universidad de Granada, en este estudio se asume el Análisis Didáctico (AD) como una metodología de investigación que permite analizar los conocimientos didácticos empleados a la hora de abordar, interpretar, plantear, evaluar y responder a una diversidad de fenómenos, inquietudes y problemas matemáticos que requieren analizarse a través de conceptos y procedimientos situados en el currículo escolar de matemáticas. Por ello, el AD lo empleamos en este estudio como un método de análisis con una múltiple funcionalidad, porque sirve como metodología de investigación que integra un sistema analítico, descriptivo e interpretativo específico de la Didáctica de la Matemática, así como un procedimiento para diseñar, redactar, usar y analizar propuestas curriculares a través de un sistema de categorías estructurado mediante diferentes áreas de conocimiento (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013).

El Modelo Local de Análisis Didáctico (MLAD) propuesto en esta investigación permite describir los conocimientos didácticos del profesor que enseña matemáticas, mediante la integración del Análisis Didáctico de Contenido y el Análisis Didáctico Cognitivo para identificar la pluralidad de usos, significados y sentidos de un contenido matemático escolar y los conocimientos asociados a este a través del sistema de organizadores del currículo (OC). De acuerdo con Rico (1997b) se consideran los OC a aquellos conocimientos que acogemos como aspectos fundamentales para articular el diseño, implementación y evaluación de Unidades Didácticas. Por ello, en el MLAD abordado en esta investigación se indagan por los conocimientos curriculares, didácticos y disciplinarios que el profesor en ejercicio del primer ciclo de educación básica primaria considera al seleccionar, planear, implementar y evaluar los conocimientos escolares desarrollados para la construcción de sentido numérico en propuestas de enseñanza del Número Natural en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida.

La práctica del profesor de matemáticas requiere de la articulación de Conocimientos Didácticos fundamentados y reflexiones sobre las finalidades de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por ello, la práctica de enseñanza de las matemáticas al plantear, desarrollar y evaluar una propuesta educativa no se limita a elegir y secuenciar un conjunto de conceptos y

procedimientos, sino a articular los sentidos, significados y representaciones de un contenido matemático escolar (Rico, 1997a; Rico y Gómez, 2002; Bedoya, 2002). En el marco de este trabajo la práctica debe considerar la información y el sentido que aportan tópicos, como la construcción de sentido numérico a través de la enseñanza del Número Natural, o la estructura sistémica de los contenidos matemáticos a través de fenómenos, representaciones, propiedades y habilidades que caracterizan la reflexión/acción matemática desarrollada a partir del uso, sentido y significado de los conceptos y procedimientos matemáticos desarrollados en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

A continuación, en la Tabla 2 se presentan las categorías del MLAD propuesto en esta investigación para caracterizar y describir los conocimientos didácticos del profesor del primer ciclo de educación básica primaria sobre la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Número Natural.

Modelo Local De Análisis Didáctico - MLAD				
<i>Análisis Didáctico del Contenido - ADC</i>				
Análisis Didáctico	Histórico - Epistemológico - ADHE	Sentido y modo de uso - ADSU	Sistemas de Representación - ADSR	Estructura Conceptual - ADEC
Explora	¿Qué conceptos, procedimientos y representaciones de la historia de las matemáticas son convenientes en la enseñanza del sistema de los números naturales?	¿Qué usos del sistema conceptual aportan sentidos a la enseñanza y el aprendizaje del sistema de los números naturales?	¿Qué sistemas de representación propician la comprensión de la estructura de los números naturales?	¿Qué estructura sistémica conceptual permite el desarrollo de los significados del Número Natural?
<i>Análisis Didáctico Cognitivo - ADCg</i>				
Análisis Didáctico de	Expectativas de aprendizaje	Limitaciones y dificultades de enseñanza y aprendizaje	Oportunidades de aprendizaje	
Explora	¿Qué objetivos de enseñanza y aprendizaje se relacionan con la construcción de sentido numérico en la enseñanza de los números naturales?	¿Qué limitaciones y dificultades de enseñanza y aprendizaje se relacionan la construcción de sentido numérico en la enseñanza de los	¿Qué situaciones y prácticas dotan de sentido la enseñanza y el aprendizaje de los números naturales para la construcción de sentido numérico en el primer ciclo de	

números naturales?	educación básica
	primaria?

Tabla 2. MLAD para caracterizar los Conocimientos Didácticos del profesor para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Número Natural.

2.4.1 Análisis de contenido sobre los números naturales.

El Análisis de Contenido sobre un tópico del currículo escolar se concreta a través de diferentes categorías que permiten estructurar los objetos matemáticos de estudio desde la perspectiva de su aprendizaje y enseñanza. Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008) plantean que los contenidos matemáticos escolares se organizan a partir de dos grandes campos: *conceptual* y *procedimental*; que a su vez se establecen a partir de tres conocimientos de complejidad creciente. En relación al campo conceptual se identifican los conocimientos relacionados con *hechos*, que son aspectos básicos estructurados a partir de términos, notaciones, convenios o resultados; *los conceptos*, que se ubican en un nivel intermedio y algunos se caracterizan por tener una variedad de significados, y *las estructuras*, que conforman una red de propiedades, operaciones y relaciones establecidas en el sistema donde se sitúa el contenido matemático escolar. Asimismo, en el campo procedimental se establecen los conocimientos sobre *las destrezas*, que son las habilidades básicas que se requieren para enseñar y aprender un contenido matemático escolar; *los razonamientos*, ubicados en un nivel medio y definidos como estrategias de interacción con el objeto matemático de enseñanza, y *las estrategias*, con un nivel superior se relacionan con el conocimiento flexible, creativo y fundamentado de estrategias de: cálculo, estimación, representación y solución de problemas basadas en el conocimiento de la estructura conceptual.

A continuación, se presenta en la Figura 6 la estructura sistémica que esta investigación propone para describir la información de las categorías de conocimientos de contenido sobre los números naturales que permiten establecer los significados en los contextos de ordinalidad, cardinalidad y medida.

Figura 5. Modelo local de Análisis de Contenido.

2.4.1.1 Análisis didáctico histórico-epistemológico.

En la antigüedad los primeros pobladores experimentaron las necesidades numéricas, para *contar* animales, personas y objetos; *medir* magnitudes de manera intuitiva, y *ordenar* situaciones relacionadas con ceremonias religiosas, procesos para la caza, las organizaciones gubernamentales, entre otras. A través de la historia se puede evidenciar que el concepto de Número Natural ha podido ser transformado o reinterpretado de acuerdo a las necesidades de las culturas como los babilonios y egipcios quienes desarrollaron procesos numéricos asociados al cálculo, los griegos sus desarrollos sobre el número se relacionan con los aspectos pragmáticos de las operaciones y el cálculo, y teóricos sobre la naturaleza y atributos del número, la edad media en la que se establece el número como una categoría que contiene las magnitudes y sus medidas, a partir del uso del sistema de numeración decimal y la etapa de la fundamentación teórica del número caracterizada por la conceptualización del número a partir de perspectivas ordinales, cardinales, conjuntistas y axiomáticas (Vásquez, 2010). En consecuencia, el Análisis didáctico histórico-epistemológico (ADHE) evidencia que el concepto de Número Natural se ha transformado históricamente en la medida en que las culturas a lo largo de las épocas han requerido utilizar los números para: clasificar, contar, describir, representar, ordenar y medir en situaciones que han permitido la reflexión sobre la naturaleza de los números naturales y los sentidos de estos en relación con los significados asignados en cada una de las épocas y culturas.

Este ADHE centra la atención en los trabajos realizados por Stevin (durante la edad media) y, Dedekind, Peano, Cantor y Frege a finales del siglo XIX durante el periodo de la fundamentación aritmética del número, porque es en estos periodos donde se realizan aportes a las definiciones numéricas desde las perspectivas ordinales, cardinales, de medida y conjuntistas

que han orientado parte de la conceptualización del Número Natural. Sin embargo, son las prácticas culturales sobre estos números las que favorecieron que las comunidades antiguas dieran los significados de ordinal, cardinal y medida mediante nociones y procedimientos numéricos basados en la organización, numerabilidad y comparación de magnitudes sobre las que se conceptualizaron los números en la antigüedad.

Vásquez (2010) expresa que las ocupaciones de Stevin durante la edad media lo llevaron a desarrollar un tratado para integrar las nociones de contar y medir articuladas al concepto de número, que para la época rompe con la idea griega sobre el número y la magnitud. Este tratado propone que el número está asociado al conteo de cantidades y al resultado de la comparación de magnitudes, en este sentido se considera el número como medio para evidenciar la cantidad y la magnitud. En los trabajos de Stevin se evidencian afirmaciones categóricas que la unidad es un número, la unidad es divisible infinitamente y las porciones de la unidad son a su vez números que se contraponen a la concepción griega del número y la magnitud, lo que produce una ruptura con la dicotomía entre la naturaleza de lo continuo y lo discreto.

Vásquez (2010) refiere que el trabajo realizado por Dedekind sobre la fundamentación del número desde la perspectiva ordinal, se apoya en la base de un conjunto de enunciados a partir de conceptos lógicos que no recurren a intuiciones lógicas a-priori del espacio y tiempo. Por lo tanto, la definición formal del Número Natural propuesta por Dedekind parte de una teoría de sistemas (álgebra de conjuntos) en la que precisa operaciones, transformaciones, homomorfismos, equivalencias, isomorfismos, operación del sucesor, orden general, conjunto infinito, ordinal y cardinal, entre otras propiedades aritméticas significativas, para lo que él define como un sistema numérico infinito simple bien ordenado.

Dedekind estableció la siguiente caracterización para el sistema simple infinito que él relacionó con los números naturales.

71. Definición: un sistema N se dice *simplemente infinito*, si existe una aplicación similar $\hat{\iota}$ de N en sí mismo tal que N resulte la cadena (44) de un elemento no contenido en $\hat{\iota}:0$; Llamamos a este elemento, que en lo que sigue indicamos con el símbolo 1, *el elemento fundamental* de N , y decimos que el sistema simplemente infinito N está *ordenado* por la aplicación $\hat{\iota}$ conservando las notaciones precedentes 4 para las imágenes y de las cadenas, podemos decir que la esencia en un sistema N simplemente infinito está caracterizada por la

existencia de una aplicación $\hat{f}$ de N , y de un elemento 1 que satisfacen las condiciones siguientes:

$$\hat{f}^n(1) \in N$$

$$\hat{f}(1) = 0$$

El elemento 1 no está contenido en N

La aplicación $\hat{f}$ es unívoca.

De lo anterior se sigue evidentemente que cada sistema N simplemente infinito es de hecho un sistema infinito (64), porque es similar a una parte propia N_0 de sí mismo. (Dedekind, 1930, p. 149, capítulo 6, artículo 71, como se citó en Vásquez, 2010, p.60)

Grattan-Guinness (como se citó en Vásquez, 2010) sobre el trabajo realizado por Dedekind plantea dos elementos característicos, a saber: se evidencia una postura por la ordinalidad como el principio básico para la construcción de los números naturales como *sistema simple infinito* y ordenado y el desarrollo de una teoría general que permite explicar casos especiales, como el de los naturales mediante sistemas y no a partir de conjuntos como lo realizan Frege y Russell.

Igualmente, durante el siglo XIX el trabajo realizado por Giuseppe Peano centró su interés en la indagación de formas de expresión simbólica a través de una fundamentación axiomática que explicita los conceptos matemáticos de las imprecisiones ocasionadas por el lenguaje natural. Por ello, Peano exhibe en su trabajo una teoría de los números naturales mediante una estructura axiomática, ver Figura

N

$\mathbb{N}$

de $\mathbb{N}$ sigue $\mathbb{N}$

los

conceptos enunciados anteriormente, Peano postula nueve axiomas sobre los cuales estructura una teoría formal de los naturales a partir del método deductivo.

Figura 6. Axiomas de Peano (Peano, 1889, p.1 como se mencionó en Vásquez, 2010, p. 61).

Esta axiomatización se fundamenta en una estructura ordinal al igual que el trabajo realizado por Dedekind, pero la demostración axiomática se basa en la noción de cadenas de clases que se organizan mediante la operación $\cup$ que permite la secuenciación numérica de unas cantidades después de otras.

Asimismo, el trabajo sobre la teoría de conjuntos realizado por Cantor para comprender la naturaleza de la continuidad en el campo de los números reales, permitió identificar una conceptualización de los números naturales a partir de la noción de cardinal. Por ello, Cantor, 1915 (como se mencionó en Vásquez, 2010) centró su desarrollo en la cardinalidad de los conjuntos infinitos y por ello partió de las definiciones de conjunto (agregado) y número cardinal.

/ de objetos | de

nuestra intuición o de nuestro pensamiento, definidos y separados. Esos objetos serán llamados elementos de /

/ al concepto que, por medio

de nuestra facultad activa de pensamiento, emerge del agregado / cuando hacemos abstracción de la naturaleza de su variedad de elementos | y del orden en el cual ellos son dados.

Nosotros notaremos el resultado de ese doble acto de abstracción, el número cardinal o potencia de / , por $\aleph$. (Cantor, 1915, pp. 85-86 como se menciona en Vásquez, 2010, p. 64)

Luego de realizar la conceptualización de conjunto y número cardinal, él hace uso del principio de equipotencia, para determinar la equivalencia entre dos conjuntos numerables / y $\mathbb{O}$ poniendo cada uno de sus elementos en relación uno a uno. Posteriormente, define el orden

entre los números cardinales en relación a un conjunto que se subsume en otro mayor y las distintas operaciones que se establecen en este campo numérico. Por esta razón, describe de manera esquemática un procedimiento para presentar los números finitos, o números naturales como los conocemos en la actualidad.

1.

del agregado $'_4 L : A_4$;

1; tenemos entonces que $S L : ''_4$

2. Luego el conjunto $'_4$

-unión

$'_5$ así que $'_5 L : ' _4 A_5$; El número cardinal de $'_5$

por 2: $t L : ''_5$

3.

$'_6 L$

$: ' _5 A_6$; $'_7 L : ' _6 A_7$;

una sucesión ilimitada que

pp. 98-99 como se indica en Vásquez, 2010, p. 65)

Estos argumentos presentados por Cantor permiten reconocer que la serie numérica de los números naturales, exceptuando el 1, se organizan como la adición del anterior y la unidad.

Del mismo modo, el trabajo realizado por Frege para fundamentar la aritmética a través de principios lógicos que propendan por el sentido y significado de los conceptos básicos a partir de la lógica. Por lo tanto, Frege desde su reflexión filosófica propone emplear la lógica para demostrar la naturaleza de los números, sin necesidad de recurrir a las imperfecciones y obstáculos del lenguaje natural (Vásquez, 2010). Así entonces, Frege plantea que todos los objetos que son subsumidos por una categoría más amplia, a su vez forman parte de la prolongación del concepto de dicha categoría y para establecer una definición clara de estas es preciso establecer algunos principios lógicos, libres de dificultades causadas por la intuición, la experiencia física, las definiciones funcionales o psicológicas.

Con los anteriores elementos se siguen entonces un conjunto de definiciones, que le permiten construir, lógicamente la serie infinita de números naturales: el cero (0 es el número que

(y un

objeto T que cae bajo él de tal tipo que el número que corresponde al concepto $($ es $\mathbb{J}$ y que

(, pero no es igual a $T \cup I$)

1996, artículos 70 a 83 como se presenta en Vázquez, 2010, p. 67)

En los trabajos realizados durante el siglo XIX, se ve la necesidad de acudir a nociones primarias, basadas en el uso práctico, para establecer el orden y cardinal de una colección a partir de conjuntos o axiomas que logran concretar una definición netamente matemática. No obstante, en los trabajos realizados por estos matemáticos se evidencia algunos rasgos distintivos sobre la noción de medida en la que los naturales permiten comparar colecciones y se apoyan en las ideas de orden, unidad y equivalencias entre cantidades comparables.

En suma, los trabajos realizados por Stevin, Dedekind, Cantor, Peano y Frege muestran un gran interés por el desarrollo de las producciones basadas en los objetos de la praxis, pensamiento o conceptos lógicos, es decir, que la aritmética hace parte tanto de las prácticas sociales como de la lógica y por tanto puede ser susceptible de ser demostrada con definiciones que describan las propiedades de los objetos y a través de las representaciones o usos del número mediados por la intuición. Además, el ADHE descrito en este estudio, nos permite considerar que el conocimiento didáctico de los profesores de matemáticas sobre la historia del concepto de Número Natural debe ser una comprensión general que les permita identificar nociones tales como: conteo, sucesor, equivalencia, cardinal, orden, unidad, agrupación y magnitud; que favorezcan la reconstrucción y articulación de todos los contextos socioculturales en los que el número adquiere sentido y significado a través de la interacción de sujetos culturales que extienden este sistema conceptual de acuerdo a sus necesidades sociales.

2.4.1.2 Análisis didáctico del sentido y modo de uso.

En este trabajo de investigación se emplea el Análisis didáctico del sentido y modo de uso (ADSU) como un tipo de conocimiento que le permite al profesor de matemáticas organizar las situaciones de enseñanza mediante el reconocimiento de la pluralidad de sentidos, significados y modos de uso que algunas estructuras y conceptos matemáticos adquieren al organizar distintos fenómenos socioculturales y abstractos.

propiedades, las acciones que realizamos sobre ellos y las propiedades de esas acciones, en tanto se encuentran en el primer término de un par fenómenos/medios de organización. (Puig, 1997, p.67)

En el caso de los objetos mentales denominados números naturales, podemos destacar diferentes *situaciones, términos y contextos* que permiten dotar de sentido la enseñanza y aprendizaje de conceptos y estructuras que aportan diversos significados según su función de uso (secuencia verbal, recuento, cardinal, ordinal, medida, etiqueta, notación escrita, código y tecla).

Los escenarios donde los números naturales tienen una funcionalidad, están relacionados con las actividades o tareas donde se emplean de manera práctica atendiendo a los sentidos significados y modos de uso que estos admitan en dichos escenarios que toman como referencia entornos naturales, sociales, culturales y científicos. La OCDE (como se indicó en Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008) en su estudio PISA reconoce 4 escenarios, a saber: *personales*, se relacionan con ambientes cotidianos de los alumnos que permiten explorar conceptos y nociones básicas; *educativas, ocupacionales o laborales*, concernientes a las tareas matemáticas en los entornos educativos o profesionales con las que el estudiante dan cuenta de respuestas que permitan responder a dichos escenarios; *públicas*, asociados a labores como comprender, analizar y valorar información que afectan la vida política y social de los estudiantes como ciudadanos, y *científicas*, asociados a tareas más abstractas que requieren la comprensión de un proceso tecnológico y el conocimiento teórico de un problema matemático. Abordaremos en este estudio el primer escenario propuesto por el estudio PISA, en el que se indagan por situaciones empleadas para contar, ordenar, numerar, comparar y calcular cantidades, y el segundo escenario, donde se indaga por la medición, las operaciones básicas y el cálculo de algunas cantidades numéricas.

Los términos que se usan para referirse a un concepto matemático escolar permiten reconocer sus diversos sentidos de uso. Ruiz (2016) afirma que los términos asociados a un concepto o noción suministran diferentes sentidos, significados, características y modos de uso. Por ello, este estudio sobre la enseñanza de los números naturales recurre a términos como: signo, cifra, cantidad, conjunto, colección, ordinal, cardinal, medida, conteo, subitizar, calcular y estimar, utilizados para designar nociones, conceptos y procesos relacionados con esta estructura conceptual. Al igual que los términos calcular y estimar se asocian en este estudio a estrategias de cálculo; emplearemos aquí el término conteo como habilidad de cuantificación que supone unos niveles y principios para su adecuado uso (Gelman & Gallistel, 1992; Fuson, 1988).

Las situaciones numéricas son aquellas circunstancias en las que los conceptos y las estructuras, como instrumentos de conocimiento, asumen una función específica para dar respuesta a necesidades socioculturales. Al respecto, Rico et al. (2008) refieren que los contextos en los que aparecen determinadas estructuras se distinguen porque plantean posibles respuestas a la cuestión sobre ¿para qué se utilizan estas nociones? Por ello, el contexto o situación describe la manera en que se usan los conceptos, en una o diferentes situaciones. En el caso del sistema de los números naturales se reconocen diferentes situaciones en las que estos se usan para contar, medir, ordenar, cuantificar, operar y simbolizar cantidades.

De acuerdo con Rico et al., (2008) el sistema de los números naturales se puede usar en al menos seis situaciones, a saber: la primer situación numérica es esencial para el dominio lingüístico y funcional de las demás, en ella se emplean los números para *numerar* o asignarles términos de la secuencia numérica a los objetos de una colección, en la segunda situación se utilizan los números naturales como *cardinal*, para dar cuenta de la pregunta ¿Cuántos hay? en una colección de diferentes objetos; en ocasiones esta situación requiere la aplicación de operaciones de estructura aditiva o multiplicativa cuando se requiere saber la cantidad de elementos que hay en diferentes agrupamientos, la tercer situación de *medida* permite conocer ¿Cuánto mide? a través de la cantidad de unidades de alguna magnitud continua, en esta situación el número describe la cantidad de veces que la unidad de medida está contenida en la magnitud que se mide, la cuarta situación recurre al uso *ordinal* de los naturales para conocer la posición relativa de un elemento en una colección y ordenada mediante la pregunta ¿Qué lugar ocupa?, en situaciones *operacionales* se emplea el número para conocer ¿Cuál es el resultado? de aplicar acciones como: agregar, repartir, separar, reiterar, entre otras; para dar cuenta de ellas mediante las operaciones aritméticas aplicadas a los números naturales, la sexta y última situación es la *simbólica* en la que los números se usan para distinguir o diferenciar elementos de una colección y determinar ¿Cuál es el código?. Asimismo, en los trabajos de (Castro, Rico y Castro, 1987; Castro y Cañadas, 2016) además de las situaciones anteriormente presentadas se encuentra la situación de secuencia numérica donde los números naturales se emplean para repetir de manera verbal la secuencia numérica para estimar un tiempo, como en el caso del juego del escondite, o sin darle ningún significado a los términos, como en el caso de las retahílas o canciones.

Caracterizar la relación de una estructura matemática con los fenómenos a partir de las situaciones donde se ubican y las maneras en que se presentan, es un procedimiento muy limitado. Familias de fenómenos y subestructuras se vinculan porque éstas modelizan a aquéllas y, así, expresan su sentido (Rico et al., 2008). Por ello, esta investigación retoma la subestructura de o

sus propiedades, que se simboliza (N,

en fenómenos que se apoyen en el conteo, la ordinalidad, la cardinalidad y la medida, como ideas que se retoman en otros subsistemas siguientes a partir de diferentes modelos.

Escenarios	Situaciones	Subestructura	Sentidos y modos de uso
- Personales - Educativas	1. Ordinal 2. Cardinal 3. Medida	Orden de los números naturales, que se basa en propiedades, que se	Clasificar y contar. Ordenar colecciones y eventos. Determinar cantidad de objetos o elementos de una colección. Medir una magnitud continua a partir de la comparación. Igualar colecciones o magnitudes.

Tabla 3. Modelo fenomenológico que se explora en esta investigación.

En síntesis, la Tabla 3 presenta algunas ideas sobre el conocimiento de los sentidos y modos de uso que requiere el profesor del primer ciclo de educación básica primaria acerca de la enseñanza y aprendizaje de la pluralidad de conceptos del sistema de los números naturales, para construir sentido numérico, las relaciones y operaciones numéricas que se pueden establecer a partir de la distinción de la función asignada al objeto de estudio en una situación particular. De la misma forma, el conocimiento numérico requiere la comprensión funcional del Sistema de Numeración Decimal como el conjunto de términos, signos y principios que posibilitan la representación y el tratamiento numérico en cada uno de los contextos presentados inicialmente.

2.4.1.3 Análisis didáctico de los sistemas de representación.

La enseñanza del Número Natural en el currículo escolar también requiere del conocimiento y de la comprensión de distintos modos de representarlos mediante signos, gráficos o símbolos según el uso que se les asigne. Al respecto, Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008) plantean que los sistemas de representación de las nociones matemáticas capturan las propiedades de los conceptos y los procedimientos. Estos sistemas de representaciones relacionan modelos que permiten comprender, utilizar y destacar algunas propiedades de los conceptos o procedimientos matemáticos de enseñanza.

En el caso de los números naturales es importante reconocer que la enseñanza y el aprendizaje de los significados y su conceptualización ponen de manifiesto una dificultad asociada a la conceptualización compleja y abstracta que en ocasiones en las prácticas educativas se aborda erróneamente como la representación simbólica. Rico et al. (2008) refieren que conocer un contenido matemático se alcanza a través del dominio de sus sistemas de representación y de las formas de representar una misma propiedad utilizando distintos sistemas de representación.

En la Figura 8 se representan cuatro formas, a saber: simbólica, gráfica, verbal y manipulativa que permiten modelar el sistema de los números naturales de acuerdo con Rico et al. (2008).

Figura 7. Sistemas de representación de los números naturales. (Rico et al., 2008, p. 16)

La representación simbólica se caracteriza por evidenciar una estructura simple, aditiva o posicional, como lo es el sistema de numeración decimal que permite la representación de

cualquier cantidad mediante relaciones numéricas operativas. *La representación gráfica* que se caracteriza por explorar atributos de ordinalidad, secuencialidad o relaciones aritméticas, algebraicas y geométricas, como es el caso del triángulo de Pascal o las tablas de sumar y multiplicar. *La representación verbal* se identifica por que las reglas del lenguaje establecen y determinan la representación numérica, particularmente cuando se emplean números ordinales, a través de un conjunto de reglas nemotécnicas para distinguirlos, o cardinales/medida, en los que se emplean las palabras número de manera habitual. Posteriormente, *la representación manipulativa* que permite el uso de modelos (regletas de Cuisenaire, bloques de base diez, tarjetas de valor, entre otros) que recrean algunas propiedades o características de las estructuras numéricas que los estudiantes requieren comprender. Este proceso de comprensión se puede acompañar de la articulación de actividades en las que se empleen diferentes representaciones y que permitan explorar, conjeturar y reflexionar sobre la conveniencia de emplear algunos de estos modelos según el contexto numérico de uso.

2.4.1.4 Análisis didáctico de la estructura conceptual.

La estructura conceptual del sistema de los números naturales evidencia la riqueza de ideas, focos prioritarios, relaciones y conexiones entre los conceptos y procedimientos que se articulan al interior de la estructura. Esta disposición comienza con la delimitación de conceptos (mediante hechos, conceptos y estructuras) y procedimientos (en los niveles de destrezas, razonamientos y estrategias) que posibilita clasificar y planear los contenidos matemáticos como objetos de aprendizaje escolar. Rico et al., (2008) plantean que para avanzar y profundizar en el análisis de contenido de una estructura matemática es importante que el profesor establezca las relaciones y prelación entre conceptos, procedimientos y estructuras. Sin embargo, consideramos que en el contexto local esta clasificación es compleja para un profesor de primaria, porque en algunos casos no tienen una formación específica para la enseñanza de las matemáticas.

Por ello, este estudio propone situaciones y tareas didácticas que se construyen a partir de esta estructura conceptual para que el profesor del primer ciclo de educación básica primaria analice algunos focos prioritarios agrupados en conceptos, nociones, procedimientos y estructuras que enuncian, organizan y resumen el sistema de los números naturales. En esta investigación se toman los focos conceptuales prioritarios que se presentan en la Tabla 4.

<i>Focos conceptuales prioritarios</i>	<i>Hechos, conceptos y procedimientos relacionados</i>
--	--

Significados y usos de los números naturales.	• Secuencia/Contar • Ordinal/Ordenar • Cardinal/Cuantificar • Medida/Comparar • Signo/Codificar • Símbolos/Estructurar • Números/Operar • Recta numérica/Representar • Magnitud del número/Estimación y cálculo numérico
Orden en los números naturales	• Disposición/Sucesor y antecesor • Secuencia numérica/Orden de magnitud • Comparar/Calcular magnitudes numéricas • Estructura ordinal/Inicio y sucesión numérica • Estimación/Aproximar cantidades

Tabla 4. Adaptación de los focos conceptuales del sistema de los números naturales (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008, p. 12)

La información que aportan los focos prioritarios, descritos en la Tabla 4, permite sintetizar un mapa conceptual, en la Figura 9, que representa las conexiones que se establecen dentro del sistema de los números naturales. Este tipo de representaciones conceptuales permiten que el profesor en formación comprenda las relaciones establecidas al interior de la estructura. Aunque estas tienen la limitación de que son representaciones empleadas como una forma de expresar el comportamiento de dicha estructura conceptual, pero no la reemplazan.

De este modo, el Análisis de Contenido se concreta en un marco que presenta una síntesis de las diferentes relaciones que detallan la complejidad existente en la estructura conceptual en el sistema de los números naturales y sus múltiples relaciones con hechos, conceptos y nociones que requieren el dominio procedimental de los naturales a través de las destrezas, razonamientos y estrategias que caracterizan el dominio de una red de dominios conceptuales, procedimentales y actitudinales, que se consideran en esta investigación como sentido numérico que permite ampliar el uso y los significados subjetivos de los números naturales.

Figura 8. Adaptación del mapa conceptual del Sistema de los números naturales (Rico, et al., 2008, p.14)

2.4.2 Análisis didáctico cognitivo sobre sentido numérico.

Este estudio asume el Análisis Didáctico Cognitivo como un sistema de organizadores para analizar aquellas condiciones y orientaciones, curriculares y didácticas, que los profesores consideran para fundamentar sus propuestas de enseñanza sobre el Número Natural en situaciones que posibiliten la construcción de sentido numérico. Este análisis considera las *expectativas de aprendizaje, las limitaciones y dificultades de enseñanza y aprendizaje, y las oportunidades para la enseñanza y el aprendizaje de los profesores* que orientan la enseñanza de las matemáticas en la educación básica primaria, además, este sistema de organizadores le permite al maestro comprender y articular en sus propuestas educativas situaciones y tareas que permitan la construcción de sentido numérico en las propuestas de enseñanza de los números naturales en distintas situaciones donde se requiera interpretar, calcular, estimar y relacionar los números a partir de sus diferentes significados.

Este Análisis de tipo Cognitivo se establece a través de los organizadores relacionados en la Figura 10.

Figura 9. Modelo local de Análisis Cognitivo.

Inicialmente, las expectativas de aprendizaje, se presentan en esta investigación como un organizador que permite identificar los objetivos y competencias de las matemáticas escolares para que los estudiantes y los profesores desarrollen y comprendan las habilidades y capacidades asociadas al contenido matemático de enseñanza (Lupiáñez, 2009). Posteriormente, el organizador denominado limitaciones y dificultades de enseñanza y aprendizaje, nos permite analizar las condiciones y problemas que restringen la enseñanza y comprensión de los números naturales en el primer ciclo de la educación básica primaria, a través de aquellas situaciones, ideas o procedimientos inapropiados que generan significaciones y consideraciones limitadas para la construcción de sentido numérico. Finalmente, las oportunidades de aprendizaje, se emplean al igual que Lupiáñez (2009) quien propone este análisis como un organizador que considera las situaciones prácticas de enseñanza sobre el Número Natural a partir del análisis de las expectativas de aprendizaje, las limitaciones y dificultades de enseñanza, y las oportunidades de enseñanza y aprendizaje que el profesor conoce y considera para el desarrollo de destrezas y habilidades escolar sobre este contenido de enseñanza.

2.4.2.1 Expectativas de aprendizaje relacionadas con sentido numérico.

Este organizador analiza el conjunto de conocimientos, razonamientos, procedimientos y formas de actuar que integran parte del conocimiento curricular y didáctico que el profesor utiliza para al diseñar, desarrollar, evaluar y reflexionar sobre el proceso de aprendizaje de las matemáticas escolares como proceso sociocultural de conocimiento. De acuerdo con Lupiáñez (2013), las expectativas de aprendizaje se analizan a través de dos niveles de concreción, a saber: *los objetivos*, que articulan los conocimientos específicos, el desarrollo de capacidades observables y la resolución de problemas en contextos determinados que se adelantan durante una etapa, un curso o un contenido escolar, y *las competencias*, asumidas como las acciones

donde los sujetos expresan diversos conocimientos conceptuales y procedimentales, que favorecen la dimensión actitudinal mediante capacidades para tomar decisiones, actuar, interpretar, resolver y formular problemas en distintas situaciones o contextos prácticos que exijan cierto nivel de dificultad.

Los objetivos que se relacionan con la enseñanza del Número Natural en las situaciones seleccionadas para la construcción de sentido numérico en el primer ciclo de la educación básica primaria, se retoman de los Estándares básicos de competencias matemáticas (MEN, 2006), que describen los aprendizajes esperados en cada uno de los ciclos escolares, y los Derechos básicos de aprendizaje en matemáticas (MEN, 2016), que detallan las intenciones formativas en cada grado escolar. A continuación, en la Tabla 5 se consideran las expectativas generales del currículo de matemáticas, que se relacionan con la enseñanza y aprendizaje del Número Natural y la construcción de sentido numérico en este ciclo escolar.

Estándar básico de competencia del Pensamiento Numérico en el ciclo de 1 ° a 3 °	DBA	Evidencias de Aprendizaje
Reconozco significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros).	Grado 1 1. Identifica los usos de los números (como código, cardinal, medida, ordinal) y las operaciones (suma y resta) en contextos de juego, familiares, económicos, entre otros.	Reconoce en sus actuaciones cotidianas posibilidades de uso de los números y las operaciones.
Describo, comparo y cuantifico situaciones con números, en diferentes contextos y con diversas representaciones.		Construye e interpreta representaciones pictóricas y diagramas para representar relaciones entre cantidades que se presentan en situaciones o fenómenos.
Describo situaciones que requieren el uso de medidas relativas.		Explica cómo y por qué es posible hacer una operación (suma o resta) en relación con los usos de los números y el contexto en el cual se presentan.
Identifico, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables.		Interpreta y resuelve problemas de juntar, quitar y completar, que involucren la cantidad de elementos de una colección o la medida de magnitudes como longitud, peso, capacidad y duración.
Identifico regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo (calculadoras, ábacos, bloques	Grado 1 2. Utiliza diferentes estrategias para contar, realizar operaciones (suma y resta) y resolver problemas aditivos.	Realiza conteos (de uno en uno, de dos en dos, etc.) iniciando en cualquier número. Determina la cantidad de elementos de una colección agrupándolos de 1 en 1, de 2 en 2, de 5 en 5.
	Grado 2	Establece y argumenta conjeturas de los posibles resultados en una secuencia numérica.
		Interpreta y construye diagramas para

multibase, etc.).	1. Interpreta, propone y resuelve problemas aditivos (de composición, transformación y relación) que involucren la cantidad en una colección y la medida de magnitudes (longitud, peso, capacidad y duración de eventos) y problemas multiplicativos sencillos.	representar relaciones aditivas y multiplicativas entre cantidades que se presentan en situaciones o fenómenos.
	Grado 2 2. Utiliza diferentes estrategias para calcular (agrupar, representar elementos en colecciones, etc.) o estimar el resultado de una suma y resta, multiplicación o reparto equitativo.	Construye representaciones pictóricas y establece relaciones entre las cantidades involucradas en diferentes fenómenos o situaciones.
	Grado 3 1. Interpreta, formula y resuelve problemas en diferentes contextos, tanto aditivos de composición, transformación y comparación; como multiplicativos directos e inversos.	Construye diagramas para representar relaciones aditivas o multiplicativas observadas entre las cantidades presentes en una situación. Resuelve problemas aditivos (suma o resta) y multiplicativos (multiplicación o división) de composición de medida y de conteo. Analiza los resultados ofrecidos por el cálculo matemático e identifica las condiciones bajo las cuales ese resultado es o no plausible.
	Grado 3 2. Propone, desarrolla y justifica estrategias para hacer estimaciones y cálculos con operaciones básicas en la solución de problemas.	Reconoce el uso de las operaciones para calcular la medida (compuesta) de diferentes objetos de su entorno. Argumenta cuando algunos atributos de los objetos se pueden ser medidos mediante la comparación directa con una unidad y cuándo pueden ser calculados con algunas operaciones entre números.

Tabla 5. Estándares básicos de competencias (MEN, 2006), Derechos básicos de aprendizaje Versión 2 (MEN, 2016)

De igual manera, las competencias que se valoran en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares, se consideran desde los procesos generales de la actividad matemática (MEN, 1998; 2006) que expresan el hacer y comprender las matemáticas escolares a partir de las disposiciones y actitudes propias de cada ser sociocultural. Las competencias, o procesos como se denominan en los referentes curriculares, que se consideran para la valoración de los

conocimientos y procedimientos de las matemáticas se establecen a partir de cinco modos de actuar y usar las matemáticas, a saber: formulación, tratamiento y resolución de problemas (RP); modelación (M); comunicación (C); razonamiento (R) y formulación, comparación y ejercitación de procedimientos (EP).

A continuación, en la Tabla 6 se presentan las relaciones establecidas entre los objetivos específicos para la enseñanza y las competencias con el propósito de identificar las prioridades sobre las expectativas de aprendizaje y las formas de evidenciar estos.

Objetivos específicos para la enseñanza	Competencias (Procesos generales de la actividad matemática)				
	RP	M	C	R	EP
OEE1. Realizar el conteo de objetos o individuos iniciando en cualquier número y atendiendo al uso de la secuencia numérica.	X		X		X
OEE2. Reconocer la posición relativa de objetos o individuos que se encuentran en una disposición ordenada.	X		X	X	X
OEE3. Establecer el número cardinal de los objetos o individuos de una colección o clase.	X		X	X	X
OEE4. Asociar un Número Natural a la medida (comparación) de magnitudes continuas.	X		X	X	X
OEE5. Utilizar y reconocer equivalencias entre diferentes representaciones, concretas, pictóricas y simbólicas que se presentan en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida.		X		X	
OEE6. Estimar los posibles resultados al determinar el ordinal de una serie ordenada, el cardinal de una colección o la medida de una magnitud continua.	X		X	X	

Tabla 6. Relación entre objetivos para la enseñanza y competencias de los números naturales en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida.

La relación de objetivos y competencias sobre los números naturales constituyen parte de las intuiciones, comprensiones, capacidades, habilidades y razonamientos sobre las maneras de significar y usar con sentido los números en contextos específicos. Al respecto, Castro y Segovia (2015) afirman:

El sentido numérico no es algo estático que unas personas poseen y otras no. Consiste en una competencia cognitiva que se adquiere y desarrolla gradualmente mediante la actividad en el campo numérico, como resultado de explorar números y relacionarlos con procedimientos que no se limiten solo a los algoritmos tradicionales (p.110).

Es decir, que el sentido numérico no es un contenido específico de enseñanza, sino el resultado de usar de manera significativa, flexible y con sentido los números en prácticas socioculturales que aporten al desarrollo de conocimientos, procedimientos y actitudes basados en las relaciones, intuiciones o razonamientos sobre los números, el sistema de numeración decimal y los sentidos operacionales en la solución de un problema.

Los niños que tienen buen sentido numérico (1) entienden correctamente los significados de los números, (2) han desarrollado relaciones múltiples entre los números, (3) reconocen las magnitudes relativas de los números, (4) conocen el efecto relativo de las operaciones numéricas, y (5) desarrollan puntos de referencia para sus mediciones de objetos comunes y de situaciones en su entorno. (NCTM, 1989, p.38)

Al respecto, Sowder (1992b) plantea que el sentido numérico se relaciona con todas las actividades de enseñanza y de aprendizaje que exploren las formas de pensar acerca de los números, particularmente en su artículo se refiere al desarrollo del sentido numérico a partir de cuatro tópicos curriculares: la numeración, las magnitudes numéricas, el cálculo mental y la estimación. Este estudio asume algunas destrezas (conteo, orden, comparación de magnitudes, cálculo y estimación de cantidades) descritas por la autora acerca los contenidos curriculares mencionados, como situaciones que potencian la construcción de sentido numérico en la enseñanza de los números. En la Tabla 7 se relacionan algunas de estas destrezas con habilidades generales para la construcción de sentido numérico que propician la comprensión y el uso de los números naturales.

<i>Destreza</i>	<i>Habilidad</i>
Contar	Aptitud para secuenciar de diferentes maneras los números naturales en forma ascendente o descendente.
Ordenar	Habilidad para comparar y ordenar números.
Comparar magnitudes	Capacidad para razonar y hacer juicios a partir del tamaño de los números.
Estimar	Habilidad de usar puntos de referencia para aproximar una respuesta

numérica.

Capacidad de utilizar estrategias numéricas para aproximar las respuestas de los cálculos y razonar sobre la conveniencia de estos.

Tabla 7. Destrezas y habilidades propuestas para la construcción de sentido numérico en la enseñanza de los números naturales.

2.4.2.2 Limitaciones y dificultades de enseñanza y aprendizaje.

La información suministrada por el organizador de limitaciones y dificultades de enseñanza y de aprendizaje, ocupa un lugar importante para la formación profesional de los maestros que enseñan matemáticas, porque las decisiones y tareas propuestas para la enseñanza están determinadas por los conocimientos didácticos, que los profesores consideran a partir de las relaciones entre las limitaciones y dificultades de enseñanza y aprendizaje, expectativas de aprendizaje y los conocimientos matemáticos referidos por los estudiantes. Lupiáñez (2009) plantea que las limitaciones sobre el aprendizaje aportan información al profesor sobre qué aspectos de la enseñanza de las matemáticas pueden condicionar el aprendizaje de un contenido particular.

A continuación, en el marco de esta investigación presentamos en la Tabla 8 algunas limitaciones y dificultades que se relacionan con la enseñanza y el aprendizaje de los números naturales y la construcción de sentido numérico en el primer ciclo de la educación básica primaria y los objetivos relacionados en las expectativas de aprendizaje.

<i>Limitaciones</i>	<i>Dificultades</i>	<i>Objetivos</i>
Reconocer significados del Número Natural en algunas situaciones.	D1. Limitar la enseñanza del contexto de secuencia numérica, al conteo y escritura de numerales en orden ascendente de los términos de la sucesión.	OE1, OE2
	D2. Enseñar el Número Natural sólo desde una perspectiva conjuntista (cardinal). Desconociendo otras situaciones que aportan al sentido y significado de este objeto de conocimiento.	OE2, OE3, OE4
	D3. Abordar pocas tareas de enseñanza	OE1, OE2

	relacionadas con situaciones ordinales de los números naturales.		
	D4. Generalizar erróneamente propiedades de los números en la enseñanza del Número Natural en diferentes situaciones.	OE2, OE3, OE4	
	D5. Confundir el significado de cardinal y de medida de los números naturales en las tareas de enseñanza.	OE1, OE3, OE4	
No establecer conexiones entre algunas representaciones de los números naturales.	D6. Establecer equivalencias erróneas entre los números naturales y sus representaciones al enseñar este contenido de aprendizaje.	OE1, OE2, OE5	
	D7. Emplear pocos y de manera limitada los materiales manipulativos y representaciones gráficas en la enseñanza de los números naturales para visualizar relaciones numéricas.	OE5	
Utilizar procesos erróneos de estimación y de cálculo mental en situaciones donde se utiliza el Número Natural.	D8. Desarrollar pocas tareas de enseñanza que permitan a los estudiantes reconocer criterios para estimar cantidades y medidas relacionadas con los números naturales.	OE3, OE4, OE6	
	D9. Desconocer la magnitud relativa de los números naturales en tareas para la enseñanza de este contenido de aprendizaje.	OE1, OE2, OE4, OE6	
	D10. Utilizar erróneamente propiedades numéricas en la enseñanza del Número Natural, para obtener el resultado de un cálculo mental.	OE2, OE3, OE4, OE6	

Tabla 8. Limitaciones y dificultades para la enseñanza y aprendizaje del Número Natural en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida.

El proceso de formación profesional dispuesto en esta investigación admite que la información suministrada por este organizador sobre las limitaciones y dificultades para la enseñanza y aprendizaje del número en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida en la perspectiva de la construcción de sentido numérico, permite reconocer los inconvenientes que se

pueden presentar en el proceso de enseñanza y aprendizaje relacionados con las expectativas de aprendizaje en relación a los conocimientos conceptuales y procedimentales que los estudiantes del primer ciclo de la educación básica primaria pueden utilizar y extender a situaciones en escenarios de la cotidianidad y de otras áreas de conocimiento.

2.4.2.3 Oportunidades para la enseñanza y aprendizaje.

De acuerdo con Ruiz y Rico (2016) el organizador de las oportunidades de enseñanza considera las circunstancias y prácticas, orientaciones, solicitudes y desafíos que asisten y provocan los aprendizajes matemáticos de los escolares. Así entonces, este estudio reconoce que la enseñanza del Número Natural en los primeros grados de escolaridad se relaciona con habilidades sobre el conteo, el reconocimiento verbal y escrito de los numerales, el uso de las reglas y propiedades del Sistema de Numeración Decimal y el uso de estos números en escenarios funcionales y significativos que posibiliten el desarrollo de destrezas y habilidades de sentido numérico. A continuación, describiremos algunas condiciones de enseñanza y aprendizaje que promueven la comprensión del Número Natural en las situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida para la construcción de sentido numérico.

Se denomina condiciones de enseñanza y el aprendizaje del Número Natural a aquellos aspectos referidos a la planificación escolar, las tareas de enseñanza y aprendizaje, y a las actitudes de profesores y estudiantes que median la comprensión sobre los usos y significados que este contenido de currículo toma en escenarios funcionales.

La planificación escolar requiere del conocimiento didáctico de los profesores, de manera que les permita determinar e integrar las expectativas, limitaciones y oportunidades de aprendizaje que promuevan la comprensión de los contenidos de enseñanza a partir de la resolución de problemas como estrategia de enseñanza. Al respecto Lupiáñez (2009) afirma que el diseño y la selección de tareas son elementos centrales en el proceso que el profesor realiza con el objetivo de diseñar una unidad didáctica. Así entonces, la planificación escolar sobre el Número Natural requiere que se reconozcan las expectativas, destrezas, habilidades y situaciones (personales y educativas, como se mencionó en el Análisis didáctico del sentido y modo de uso) que posibilitan planear y diseñar actividades de enseñanza y aprendizaje que integren conceptos y procedimientos numéricos relacionados con el uso de los números naturales para la enseñanza en el primer ciclo de la educación básica primaria.

Las tareas de enseñanza y aprendizaje propuestas por los profesores requieren la consideración habilidades para el conteo, el orden, la comparación de magnitudes y la estimación de cantidades numéricas. Estas habilidades se relacionan con el sentido numérico porque permiten construir ideas y potenciar destrezas, reconocer y usar las relaciones numéricas en la resolución de problemas y de construir relaciones entre los aprendizajes pasados y los nuevos a lo largo de la escolaridad y por tanto relacionan las situaciones, contextos y representaciones numéricas que posibilitan desarrollar la comprensión y el sentido de uso de los números a partir de la resolución de problemas. Asimismo, estas tareas requieren del conocimiento de los factores afectivos y cognitivos de los escolares que promuevan el alcance de las expectativas de aprendizaje a partir de sus conductas. Además, las situaciones de enseñanza con las que el profesor de primer ciclo de educación básica primaria puede ayudar a la comprensión de los escolares en relación al Número Natural en situaciones ordinales son:

- Realizar competencias deportivas o juegos de retos para determinar la posición de llegada de los participantes.
- Utilizar cuentos, canciones u otras formas de narración relacionando los hechos de manera cronológica.
- Preguntar por las variaciones del lugar ocupados por un objeto, persona o animal en una organización preestablecida.
- Explorar la escritura y simbolización de los números ordinales a través de una imagen de objetos, personas o animal en una organización establecida.

Algunas situaciones relacionadas con la comprensión sobre el Número Natural en el escenario cardinal son:

- Emplear las partes del cuerpo de manera individual y grupal para contarlas y definir la cantidad de partes.
- Clasificar y numerar los objetos, personas o animales que corresponden a una misma clase.
- Representar de manera verbal y simbólica la totalidad de objetos que hacen parte de una colección.
- Realizar comparaciones de objetos, personas o animales en distintas agrupaciones y entre diferentes clases.

En relación a las situaciones que posibilitan la comprensión del Número Natural en el contexto de medida encontramos:

- Colecciones de objetos, personas o animales con una magnitud (longitud, peso, superficie o duración) que permita compararlos con una unidad de medida acordada.
- Estimar cuantas veces cabe una unidad de medida en una magnitud, dos veces la magnitud, tres veces la magnitud, etc. Asimismo, cuantas veces en la mitad o en un cuarto.

De igual manera, las tareas sugeridas para el aprendizaje de los números naturales en los primeros años de escolaridad se pueden apoyar con materiales como las regletas de Cuisenaire, las plaquetas de Herbinière-Lebert, cubos encajables, dados, entre otros. A continuación, se presenta en la Tabla 9 las primeras cinco representaciones de los números naturales en los materiales mencionados y el tipo de contexto que permiten abordar.

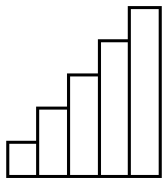
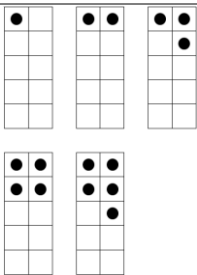
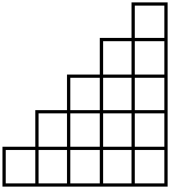
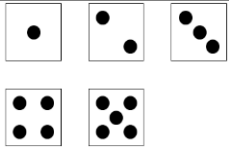
Representación	Tipo de material	Situaciones numéricas para su uso
	Regletas de Cuisenaire	<i>Ordinal</i> al establecer un orden por tamaños o por colores. <i>Cardinal</i> al contabilizar cuántas barras del mismo tamaño hay en cada colección. <i>Medida</i> al comparar sus longitudes o superficies.
	Las plaquetas de Herbinière-Lebert	<i>Ordinal</i> al determinar un orden de acuerdo al número de puntos de la tableta. <i>Cardinal</i> al determinar que tabletas conforman una colección de nueve puntos.
	Cubos encajables	<i>Ordinal</i> al establecer un lugar de posición para cada cubo de acuerdo a su valor numérico. <i>Cardinal</i> al definir una construcción que represente ocho cubos. <i>Medida</i> al determinar la superficie o longitud entre las construcciones.
	Dados	<i>Ordinal</i> al establecer un orden de lanzamientos y puntos acumulados. <i>Cardinal</i> Al determinar la cantidad de puntos obtenidos en tres lanzamientos.

Tabla 9. Representaciones de materiales didácticos y situaciones numéricas para su uso.

De acuerdo con las consideraciones anteriores, el profesor se constituye en un profesional reflexivo que analiza su práctica sociocultural para mejorar sus propuestas de enseñanza a partir del desarrollo de un sistema estructurado de conocimientos, que denominamos Conocimiento Didáctico, que relacione los conceptos, procedimientos y actitudes sobre la enseñanza y aprendizaje de los números naturales en situaciones de uso mediante formas flexibles, creativas y argumentadas para la comprensión que denominamos sentido numérico.

Lo descrito en este apartado, describe de manera teórica la articulación de categorías sobre la formación del profesor en la Educación Matemática desde una perspectiva sociocultural, El modelo curricular y didáctico, la contextualización a partir de las situaciones, sentidos y significados del contenido matemático escolar, y el Modelo Local de Análisis Didáctico como un constructo de categorías que permite identificar los conocimientos didácticos para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Número Natural. Posteriormente, se presenta el enfoque de la investigación y la articulación metodológica que permite reconocer y caracterizar los conocimientos didácticos que los profesores han desarrollado a lo largo de su experiencia profesional y sociocultural.

Capítulo 3: Marco y diseño metodológico

En esta sección del trabajo se describen los aspectos que fundamentan el marco y el diseño metodológico desde el paradigma cualitativo, en relación a la naturaleza de esta investigación sobre el Conocimiento Didáctico a partir de algunos elementos centrales de este estudio como la formación del profesor, el modelo curricular y didáctico, la contextualización del contenido escolar en referencia y el Modelo Local de Análisis Didáctico que retoma el profesor en las actividades propuestas para la enseñanza del Número Natural en los primeros grados de escolaridad.

Además, en el marco investigativo de este estudio se propone una articulación metodológica Investigación-Acción, Estudio de caso y la Metodología del Análisis Didáctico que permite identificar el Conocimiento Didáctico, que el profesor ha desarrollado a lo largo de su experiencia formativa profesional, a través del uso de instrumentos como la entrevista semiestructurada, la situaciones de enseñanza de una Unidad Didáctica y un taller de análisis y reflexión sobre las situaciones propuestas para la enseñanza del contenido matemático escolar, que posibilitan analizar y sintetizar la información relativa al Conocimiento Didáctico para la enseñanza del Número Natural en la perspectiva de la construcción de sentido numérico.

3.1 Marco metodológico

El objetivo primordial de este estudio es describir algunos elementos centrales del Conocimiento Didáctico que el profesor en ejercicio ha desarrollado durante su formación y práctica profesional para la construcción de sentido numérico a través de la enseñanza del Número Natural, en el primer ciclo de la educación básica primaria. Por ello, esta investigación relaciona una complementariedad metodológica situada en el paradigma cualitativo porque se desarrolla partiendo de la información local (formativa y situacional) que posibilita describir y caracterizar los conocimientos didácticos que los profesores exhiben en las prácticas de enseñanza y aprendizaje de los números naturales en los primeros grados escolares. Gonzales, Brown y Slate
 igración cualitativa proporciona una comprensión profunda, intrincada y detallada de los significados, las acciones, los fenómenos, las actitudes, las intenciones y los comportamientos tanto no observables como observables, que se emplean de manera recomendable por la investigación naturalista (como se mencionó en Cohen, Manion y Morrison, 2018, pág. 288). Este paradigma permite analizar, describir y entender los fenómenos de

enseñanza de las matemáticas en términos de situaciones socioculturales donde los participantes (profesores en ejercicio) reflexionan en y desde la práctica, para conocer y transformar su realidad profesional.

Para el desarrollo de esta investigación, se articulan tres metodologías, a saber: Investigación-Acción (IA), Estudio de Caso (EC) y el Análisis Didáctico (AD), que se integran de manera sistémica a través de un marco metodológico que posibilite comprender la realidad social de algunos fenómenos asociados con la formación, la práctica y el conocimiento didáctico del profesor en ejercicio del primer ciclo de la educación básica primaria para la enseñanza de los números naturales y la construcción de sentido numérico en los primeros grados de escolaridad. Mediante la complementariedad metodológica anteriormente expuesta, se pretende interpretar, caracterizar y describir los conocimientos que el profesor usa para planear un currículo escolar, diseñar propuestas de enseñanza, implementar actividades de enseñanza de las matemáticas, y evaluar los aprendizajes escolares relacionados con la construcción de sentido numérico a partir de la enseñanza del Número Natural en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida.

A continuación, se describe cada una de las metodologías de investigación propuestas para el desarrollo de este trabajo mediante la articulación metodológica.

3.1.1. Investigación-Acción.

La investigación-acción (IA), propuesta en el modelo de articulación metodológica de este estudio, centra su interés en comprender la práctica de enseñanza a través de sus interacciones, discursos, maneras de compartir y significar en la enseñanza de un contenido escolar a partir de los conocimientos que el profesor ha desarrollado como sujeto sociocultural. McAteer (como se citó Cohen, Manion & Morrison, 2018) expresa que la investigación acción es una metodología que permite a los investigadores (a menudo maestros) comprender y desarrollar conocimientos sobre las prácticas educativas y analizar su complejidad. Es decir, que esta metodología de investigación en el campo de la educación a través de la práctica reflexiva y crítica posibilita el desarrollo de conocimientos profesionales que fundamentan las decisiones y propuestas educativas.

Particularmente, utilizamos la IA en este estudio para comprender los conocimientos didácticos que orientan las prácticas, del profesor en ejercicio, relacionadas con la enseñanza del Número Natural y la construcción de sentido numérico en los primeros grados de la educación

básica primaria y promover reflexiones críticas sobre su práctica que les permita a los profesores desarrollar Conocimiento Didáctico para apoyar sus decisiones y actuaciones para la enseñanza basada en la comprensión y uso con sentido de los números naturales mediante situaciones de aprendizaje significativas para los estudiantes.

El desarrollo de la IA en esta investigación se retoma a partir de las cuatro etapas propuestas por Zuber-Skerritt (como se mencionó en Cohen, et al., 2018):

1. *Planificación* - Fundamentación del Modelo local de Análisis Didáctico (MLAD) y construcción de preguntas centrales para describir los conocimientos didácticos del profesor.
2. *Acción* - Encuentros para analizar y reflexionar sobre situaciones y tareas didácticas con objetivos formativos y de reflexión sobre las propuestas de enseñanza del Número Natural y la construcción de sentido numérico.
3. *Observación* - Discursos y propuestas sugeridas para la enseñanza que permiten al docente reflexionar sobre la enseñanza del Número Natural y la construcción de sentido numérico.
4. *Reflexión* - Caracterización de los conocimientos desarrollados a lo largo de su experiencia profesional por los profesores sobre la enseñanza del Número Natural y la construcción de sentido numérico.

3.1.2. Estudio de caso.

La práctica de enseñanza del Número Natural centrada en la construcción de sentido numérico en los primeros grados de básica primaria, es el caso que pretendemos conocer y caracterizar a través del conocimiento didáctico que el profesor emplea en el contexto formativo y profesional en que se han constituido estos en saberes de referencia para el desarrollo profesional, por ello, empleamos el estudio de caso (EC) para reconocer el contexto local de la práctica de enseñanza del contenido escolar mencionado en relación con el que este ha realizado a lo largo de su experiencia profesional, conocimiento didáctico y las capacidades de los escolares que pueden originarse en dichas prácticas. Cohen, Manion y Morrison (2018) refieren.

únicos y dinámicos, por lo que los estudios de caso investigan e informan las interacciones de eventos, relaciones humanas y otros factores de la vida real, complejos, dinámicos y en

El contexto escolar, en el que sitúa la práctica del profesor en ejercicio del primer ciclo de la educación básica primaria de la Institución Educativa Ateneo, es un entorno con múltiples relaciones que se encuentran mediadas por las decisiones, actuaciones y actividades de enseñanza y aprendizaje que él considera relevantes para la construcción de sentido numérico mediante las capacidades numéricas relativas a los números naturales. Describir y caracterizar estas relaciones a partir de este estudio, posibilita comprender el sustento de los conocimientos didácticos que el profesor ha desarrollado como el resultado de una formación teórica y/o práctica que media su modelo curricular y didáctico para la enseñanza de este contenido escolar.

Stake (como se mencionó en Cohen, et al., 2018) propone la implementación de la metodología de EC, a partir de cinco momentos, a saber:

1. *Delimitar el caso y conceptualizar el objeto de estudio* - Describir y conceptualizar el Modelo Local de Análisis Didáctico (MLAD).
2. *Relacionar los fenómenos del caso que pueden direccionar las preguntas de investigación* - Examinar a través de preguntas sus conocimientos didácticos sobre la enseñanza del Número Natural y la construcción de sentido numérico en relación al MLAD.
3. *Recolección de la información y buscar patrones en la misma* - Entrevistas a los profesores, describir y caracterizar las propuestas y los discursos relacionados con la enseñanza del Número Natural y la construcción de sentido numérico que propone a partir de la reflexión didáctica sobre el estudio de estos.
4. *Triangulación de las observaciones para apoyar las interpretaciones* - Caracterizar los conocimientos didácticos desarrollados por los profesores mediante una reflexión formativa.
5. *Describir algunas interpretaciones alternativas para estudios posteriores y caracterizar generalidades o afirmaciones del caso.*

3.1.2.3 Metodología del Análisis Didáctico.

El Análisis Didáctico (AD) descrito a través del MLAD en el capítulo anterior tiene una doble funcionalidad, porque aporta información relativa al Conocimiento Didáctico para la enseñanza y es una metodología propia de la Didáctica de la Matemática, basada en el análisis y la síntesis cualitativa de estructuras que caracterizan el Conocimiento Didáctico. Este es el sistema metodológico que se viene realizando de manera desarrollada y complementaria en el grupo de

investigación y formación de profesores del grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA) de la Universidad de Granada. El MLAD que se presenta en este estudio se retoma como una modificación del sistema de categorías propio del análisis didáctico que hace referencia a la idea de estrategia de formación de profesores, de desarrollo de competencias profesionales para estos y de su desarrollo curricular (Rico, 1997b; Bedoya, 2002; Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009). El AD empleado en la metodología de este estudio no solo se concibe como una estrategia metodológica de formación y desarrollo curricular, sino como una técnica de investigación sobre el Conocimiento Didáctico desarrollado a través de unas bases teóricas o intuitivas que el profesor ha desarrollado a partir de su formación y práctica profesional.

En el mismo sentido que (Corrales, 2013) el modelo metodológico propuesto desde el AD en este estudio se realiza a partir de tres estructuras de análisis didáctico, a saber:

1. *Contextualización curricular* sobre el sentido numérico y el Número Natural.
2. *Análisis Didáctico de Contenido sobre los números naturales (ADC)*: Análisis didáctico histórico-epistemológico, Análisis didáctico del sentido y modo de uso, Análisis didáctico de los sistemas de representación y Análisis didáctico de la estructura conceptual.
3. *Análisis Didáctico Cognitivo sobre Sentido Numérico (ADCg)*: Expectativas de aprendizaje relacionadas con la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Número Natural, Limitaciones y dificultades de enseñanza y aprendizaje y Oportunidades de enseñanza y aprendizaje.
4. *Análisis de la información obtenida en los encuentros de reflexión formativa*.
5. *Caracterización del conocimiento del profesor y síntesis analítico sobre la formación de profesores en relación al estudio*.

3.2 Diseño metodológico

La articulación metodológica que se plantea en esta investigación, posibilita el reconocimiento y la descripción de aspectos, fenomenológicos (a través del Estudio de Caso), prácticos (a través de la Investigación-Acción) y del conocimiento profesional (mediante el Análisis Didáctico) que median la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos matemáticos escolares. Además, con esta articulación metodológica se pretende analizar y describir diferentes elementos locales y socioculturales que intermedian la enseñanza del Número Natural y el desarrollo de capacidades escolares relacionadas con el sentido numérico.

Posteriormente, se presentan algunos aspectos propios del diseño metodológico que permiten describir el contexto, los participantes y las fases en que se desarrolla esta investigación.

3.2.1 Contextualización y participantes.

La Institución Educativa Ateneo desde el 2013 se encuentra acompañada por el Programa Todos a Aprender (PTA) orientado desde el Ministerio de Educación Nacional. Durante el periodo 2015 a 2018 este proceso de acompañamiento se realiza por el autor de este estudio quien se desempeña como docente tutor en la Institución, acompañando la reflexión pedagógica y didáctica mediante Comunidades de Aprendizaje, Laboratorios pedagógicos y acompañamientos al aula como estrategia para el fortalecimiento de los conocimientos profesional en las áreas de matemáticas y lenguaje a los docentes que se realizan sus prácticas en los niveles de transición y básica primaria, desde.

En el desarrollo de estos acompañamientos se realiza esta la investigación con tres docentes del primer ciclo de básica primaria (grados de primero a tercero), las cuales fueron seleccionados de acuerdo a los siguientes criterios: ser docentes del primer ciclo y tener al menos tres años de experiencia enseñando en estos grados, orientar la enseñanza de las matemáticas, tener afinidad por la enseñanza de las matemáticas y ser acompañado por el Programa Todos a Aprender. De acuerdo a estos criterios se seleccionan tres docentes que laboran en la sede Eloy Silva de la Institución Educativa Ateneo, ubicada en la zona urbana del municipio de Pradera, Valle del Cauca. Esta Institución se ha propuesto desarrollar sus prácticas de enseñanza mediante estrategias basadas en el modelo educativo de la pedagogía transformadora, que toma como referencia las problemáticas sociales para que los profesores las presenten a sus estudiantes como situaciones donde los aprendizajes surgen en el proceso de transformar (de manera adecuada para la sociedad) una de ellas. Además, la Institución Educativa dentro de sus estrategias de atención a los estudiantes del primer ciclo de la básica primaria ha determinado que las docentes de primero y segundo orienten todas las áreas del currículo escolar, por lo que cada profesor debe articular materiales, recursos y estrategias propias con los elementos asignados desde el Programa Todos a Aprender.

De acuerdo al plan de área de matemáticas de la Institución, las estrategias educativas del modelo educativo se apoyan en los contextos social, tomando aquellas situaciones socioculturales de la región y problematizándolas, y disciplinar, destacando las habilidades y

destrezas que se desarrollan a través de los procesos de la actividad matemática (razonar, comunicar, modelar, ejercitar y resolver problemas) propuestos en los referentes curriculares (MEN, 1998; 2006).

En la Tabla 10 se precisa la información relacionada con el contexto institucional de la sede escolar.

Institución Educativa Ateneo	
Carácter	Pública
Zona	Urbana
Municipio	Pradera, Valle del Cauca
Modelo pedagógico propuesto en el PEI	Pedagogía transformadora
Modalidad	Áreas Comerciales.
Cantidad de Sedes escolares	4 de Transición y educación básica primaria 2 de educación básica secundaria y media técnica.
Sede escolar	Eloy Silva
Población atendida en la sede	436 Niñas de los estratos 1 y 2 del municipio.
Docentes de la sede escolar	Dieciocho docentes de los grados de transición a quinto de educación básica primaria.
Participantes	Dos docentes del grado primero y una docente del grado segundo que orientan la enseñanza de las matemáticas en su grado asignado.

Tabla 10. Contextualización y participantes de la investigación.

Las profesoras que participan de esta investigación tienen formación profesional en básica con énfasis en áreas de conocimiento como Lenguaje y Ciencias Sociales y la cualificación que han recibido para enseñar matemáticas ha sido por talleres, laboratorios y cursos que han realizado durante su experiencia profesional.

3.2.2 Fases de la investigación.

Como se indicó en el marco y el diseño metodológico, el desarrollo de esta investigación comprende una complementariedad metodológica que se estructura sistémicamente en dos perspectivas (prospectiva y retrospectiva) del análisis del conocimiento profesional que el profesor evidencia en la construcción de sentido numérico mediante la enseñanza del Número Natural. De igual manera, el análisis prospectivo está asociado con dos fases propuestas que

integran las etapas de Investigación-Acción y el Estudio de Caso (Planificación/Identificación y Acción/Relación) que permiten delimitar la investigación y relacionar algunos elementos curriculares y didácticos relacionados con el objeto de estudio; en el análisis retrospectivo se desarrollan las fases (Observación/Descripción y Reflexión/Descripción) que posibilitan la caracterización del Conocimiento Didáctico que el profesor en ejercicio ha desarrollado para proponer actividades de enseñanza del Número Natural que posibiliten la construcción de sentido numérico.

En la Figura 11 representamos el modelo de complementariedad metodológica (Investigación-Acción, Estudio de Caso y Análisis Didáctico) propuesto para el desarrollo de esta investigación.

Figura 10. Diseño metodológico de la investigación.

Las fases anteriores se articulan de manera simultánea con la metodología del Análisis Didáctico de acuerdo con el Modelo Local de Análisis Didáctico propuesto en esta investigación a partir de las unidades de análisis relacionadas en la Tabla 11.

Unidades de Análisis del Modelo Local de Análisis Didáctico
<i>Análisis Didáctico del Contenido - ADC</i>

Histórico-Epistemológico - ADHE	Sentido y modo de uso - ADSU	Sistemas de Representación - ADSR	Estructura Conceptual - ADEC
<i>Análisis Didáctico Cognitivo - ADCg</i>			
Expectativas de aprendizaje - ADEA	Limitaciones y dificultades de enseñanza y aprendizaje - ADLD	Oportunidades de aprendizaje - ADOA	

Tabla 11. Unidades de análisis del Modelo Local de Análisis Didáctico.

Las unidades de análisis del Modelo Local de Análisis Didáctico se articulan a partir de los dos objetivos específicos de este estudio:

- **O1.** Identificar y caracterizar algunos elementos básicos del conocimiento didáctico sobre la construcción de sentido numérico para la enseñanza del Número Natural, a través de un Modelo Local de Análisis Didáctico, en la formación de profesores de básica primaria.
- **O2.** Reconocer y describir el conocimiento didáctico del profesor de primer ciclo de educación básica primaria, en relación con la construcción de sentido numérico para la enseñanza del Número Natural, mediante la reflexión de situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida presentadas en situaciones y tareas didácticas durante algunos encuentros.

De acuerdo a los objetivos planteados en el estudio, durante la primera fase de la investigación se propone un sistema de categorías propuesto (la formación de profesores en la Educación Matemática, Modelo curricular y didáctico, contextualización del sentido numérico y el Número Natural, y Modelo Local de Análisis Didáctico) que posibilita identificar y caracterizar el Conocimiento Didáctico que un profesor debe considerar para la construcción de Sentido Numérico en la enseñanza del Número Natural.

En la segunda fase de la investigación, se vincula esta caracterización sobre el Conocimiento Didáctico con el diseño de situaciones para proponer una Unidad Didáctica Guía considerando elementos, asociados a los componentes: curriculares, de enseñanza y aprendizaje, y de sentido y uso de los contenidos escolares que privilegien la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Número Natural en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida.

Durante la tercera fase de investigación, se observan registros de los estudiantes y se proponen dos encuentros de reflexión donde se desarrolla una entrevista para reconocer la

formación inicial y/o continua de las docentes participantes en el estudio y presentan algunas situaciones de enseñanza del Número Natural en contextos de ordinalidad, cardinalidad y medida, para reflexionar sobre la construcción de sentido numérico.

En la última fase de investigación, se realiza una triangulación de la información derivada de la entrevista y los encuentros de reflexión para el análisis de las situaciones de enseñanza de una Unidad Didáctica Guía, permitiendo reconocer y detallar los conocimientos didácticos de las docentes que participan del estudio. Asimismo, se plantean algunos elementos centrales que se requieren en la formación de los docentes de primer ciclo de básica primaria, respecto al Modelo Local de Análisis Didáctico dispuesto en este estudio.

A continuación, en la Tabla 12 se ilustra el desarrollo sistémico y estructural del Análisis Didáctico en cada una de las fases de la investigación.

Fases	Objetivos relacionados	Propósitos	AD
Fase 1 Planificación / Identificación	O1	Identificar los fenómenos, estructuras, conceptos y modos de uso relacionados con la enseñanza del Número Natural. Caracterizar las expectativas curriculares, las limitaciones y dificultades, y las oportunidades de enseñanza y aprendizaje.	Exponer un modelo Local De Análisis Didáctico (MLAD) que vincule los desarrollos del Análisis Didáctico de Contenido (Curriculares, epistemológicos, históricos y fenomenológicos) y los del Análisis Didáctico Cognitivo (Expectativas, limitaciones y dificultades, y oportunidades de enseñanza y aprendizaje).
Fase 2 Acción / Relación	O1 O2	Reconocer los conocimientos didácticos que los profesores demuestran sobre la enseñanza del Número Natural y la construcción de sentido numérico. Reflexionar sobre algunas situaciones y tareas didácticas propuestas en el MLAD para la enseñanza del Número Natural y la construcción de sentido numérico.	Relacionar los conocimientos didácticos del profesor mediante una propuesta de situaciones que permitan el análisis de la enseñanza del Número Natural y la construcción de sentido numérico en relación al MLAD. Identificar algunas preguntas que permitan identificar los conocimientos didácticos de los profesores en relación al contenido escolar mencionado.

Fase 3 Observación / Descripción	O1	Describir los conocimientos didácticos de los profesores sobre la enseñanza del Número Natural y la construcción de sentido numérico.	Analizar algunas situaciones y tareas didácticas propuestas a partir de los desarrollos del MLAD.
	O2		Relacionar el conocimiento didáctico de los profesores del primer ciclo de educación básica primaria con los desarrollos propuestos en el ADC y el ADCg.
Fase 4 Reflexión / Descripción	O2	Caracterizar el conocimiento didáctico desarrollado por los profesores sobre la enseñanza del Número Natural y la construcción de sentido numérico.	Establecer algunos elementos centrales de los conocimientos didácticos desarrollados por los profesores participantes en relación al MLAD de la investigación.

Tabla 12. Articulación sistémica y estructural del AD.

3.2.3 Técnicas e instrumentos para la recolección de la información.

El diseño metodológico presentado aquí, se apoya en algunas técnicas e instrumentos empleados para la detallar la información sobre el desarrollo de conocimientos didácticos en la formación curricular o en Didáctica de las Matemáticas, para para la enseñanza del Número Natural y la construcción de sentido numérico en el primer ciclo de la educación básica primaria.

Inicialmente, se realiza un encuentro, cuya duración es de aproximadamente tres horas, con las docentes seleccionadas en este estudio en el que se realiza una entrevista (ver Apéndice A) a través de preguntas asociadas a las unidades de análisis presentadas en el capítulo dos. Esta entrevista, sintetizada en la Tabla 13, tiene por propósitos indagar sobre la formación inicial y continua de las profesoras participantes y reconocer los conocimientos que estas emplean al enseñar el Número Natural y construir sentido numérico en sus estudiantes, a partir del análisis de tres situaciones de enseñanza (Reconociendo la posición, explorando cantidades y midiendo espacios). A continuación, se presenta el guion de la entrevista realizada a los docentes durante el primer encuentro.

Unidades de análisis	Cuestiones centrales
Formación de profesores en a Educación Matemática	• ¿En qué Institución realizó su licenciatura o formación tecnológica? • ¿En qué año terminó sus estudios de licenciatura? • ¿Tiene alguna formación de posgrado que considere la enseñanza de las matemáticas?

	• ¿Qué cursos o talleres de enseñanza de las matemáticas han realizado en su formación de licenciatura, postgrado o a través de programas de cualificación?
Modelo curricular y Didáctico	• ¿Qué actividades proponen para la enseñanza del Número Natural? • ¿Qué conocimientos han logrado desarrollar sus estudiantes en relación al Pensamiento Numérico? • ¿Cómo organiza usted en el plan de aula del año escolar la enseñanza del Número Natural?
Contextualización del sentido numérico y de la enseñanza del Número Natural.	• ¿Cuál podría ser un propósito de enseñar los números naturales en el primer ciclo de básica primaria? • ¿Qué capacidades o destrezas numéricas se evalúan en los estudiantes al enseñar los números naturales? • <i>Reconozco significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros)</i> requiere desarrollar en el primer ciclo de básica primaria. ¿Qué contextos emplea usted para desarrollar el Número Natural? • ¿Por qué se deben considerar en la enseñanza del Número Natural los contextos mencionados en el estándar anterior?
Modelo Local de Análisis Didáctico	• ¿Qué conoce usted sobre la historia de los números naturales? Y ¿Cómo utiliza usted esta información para la enseñanza de los números naturales? • ¿Qué representaciones numéricas utiliza en sus propuestas para que los estudiantes comprendan los significados del Número Natural? • ¿Qué limitaciones de enseñanza considera que usted tiene para enseñar el Número Natural? • ¿Qué conceptos y procedimientos numéricos deben enseñarse a los estudiantes en el primer ciclo de la básica primaria? Algunas preguntas desde las situaciones de enseñanza: • En la situación reconociendo la posición ¿Qué dificultades de aprendizaje identifican en los estudiantes de la situación anterior? • Asimismo, en la misma situación ¿Qué sentido tiene sumar las posiciones de los animales durante la carrera? • En la situación explorando cantidades ¿Qué uso del número natural se propone enseñar la profesora con la anterior actividad? • Igualmente, en la situación mencionada ¿Qué destrezas o habilidades se deben desarrollar en los estudiantes para que puedan comprender la situación anterior? • En la situación midiendo espacios ¿En la situación propuesta hay alguna evidencia que la profesora enseñe actividades de estimación como una estrategia, para que los estudiantes den sentido a sus respuestas? • Sobre la situación anterior ¿Crees que tiene sentido en la situación anterior que los estudiantes comparen las cantidades y luego las ordenen de acuerdo a su capacidad? ¿Por qué?

Tabla 13. Guion de la entrevista realizada en el primer encuentro.

Luego, en un segundo encuentro de reflexión se proponen unas preguntas de análisis de situaciones de enseñanza a través de una segunda entrevista, desarrollada en la tercera fase, para analizar y reflexionar sobre las categorías de estudio asociadas a los conocimientos sobre la historia, los usos y sentidos, la estructura, las representaciones, las expectativas de aprendizaje, las limitaciones y dificultades de enseñanza, y las oportunidades para la enseñanza y aprendizaje de los números naturales mediante situaciones y tareas didácticas. Finalmente, se observan los registros de los estudiantes y se describen los conocimientos desarrollados por los profesores en las prácticas de enseñanza en relación con las unidades de análisis propias del MLAD, con el propósito de caracterizar algunos elementos centrales de los conocimientos didácticos evidenciados durante los encuentros basados en la reflexión.

Para recoger la información sobre el Conocimiento Didáctico del profesor en ejercicio de acuerdo a la articulación metodológica se emplea la entrevista semiestructurada como una técnica que permite el desarrollo de temas y preguntas abiertas. Se retoma la entrevista semiestructurada con el objetivo de tener indicadores o hacer sondeos sobre algunos saberes específicos, de manera que la redacción y la secuencia de las preguntas se puedan adaptar a cada entrevistado (Cohen, Manion y Morrison, 2018). Es así, como las entrevistas (como se presentan los guiones en los apéndices A y C) tienen este tipo de organización (semiestructurada) debido a que se organizan a partir de discusiones y preguntas abiertas sobre las situaciones, los materiales, las representaciones, los conceptos y las nociones, los objetivos y expectativas de aprendizaje, y las diferentes limitaciones o dificultades que pueden aparecer en algunas situaciones y tareas didácticas que se proponen para la reflexión sobre la enseñanza del Número Natural y la construcción de sentido numérico.

Este estudio se apoya en la Unidad Didáctica como un dispositivo de sistematización y desarrollo profesional constituido por un conjunto de actividades que se realizan en un tiempo determinado para la consecución de unos objetivos específicos (Rico y Segovia, 2001). Se utiliza este instrumento en la investigación para presentar algunas situaciones y tareas didácticas (ver propuestas para la reflexión en los apéndices B y D) que puedan configurar una Unidad Didáctica que permita caracterizar aquellas propuestas de enseñanza que han sido elaboradas a partir de la reflexión teórica/práctica sobre un contenido, nivel escolar y contexto sociocultural particular en el que propone la reflexión formativa a partir de los conocimientos conceptuales,

procedimentales y actitudinales desarrollados durante el proceso sistémico del Análisis Didáctico.

En la Tabla 14 se muestra la vinculación de los objetivos para la enseñanza del Número Natural propuestos en el organizador del currículo expectativas de aprendizaje y, las situaciones y tareas propuestas para la reflexión durante el segundo encuentro con las maestras.

Objetivos específicos para la enseñanza	Situaciones y tareas de enseñanza propuestas para la reflexión
OEE1. Realizar el conteo de objetos o individuos iniciando en cualquier número y atendiendo al uso de la secuencia numérica.	• Situación: Reconociendo la posición. • Situación: Explorando cantidades. • Situación: Midiendo espacios.
OEE2. Reconocer la posición relativa de objetos o individuos que se encuentran en una disposición ordenada.	• Tarea 1 de la situación: Reconociendo la posición.
OEE3. Establecer el número cardinal de los objetos o individuos de una colección o clase.	• Tarea 1 de la situación: Explorando cantidades.
OEE4. Asociar un Número Natural a la medida (comparación) de magnitudes continuas.	• Tarea 1 de la situación: Midiendo espacios.
OEE5. Utilizar y reconocer equivalencias entre diferentes representaciones, concretas, pictóricas y simbólicas que se presentan en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida.	• Situación: Explorando cantidades. • Situación: Midiendo espacios
OEE6. Estimar los posibles resultados al determinar el ordinal de una serie ordenada, el cardinal de una colección o la medida de una magnitud continua.	• Situación: Reconociendo la posición. • Situación: Explorando cantidades. • Situación: Midiendo espacios.

Tabla 14. Relación de objetivos de enseñanza y las situaciones y tareas propuestas en la Unidad Didáctica Guía.

Asimismo, estas situaciones y tareas didácticas retoman algunos contenidos, objetivos, estrategias y evaluación de las actividades de enseñanza como elementos imprescindibles para la reflexión y desarrollo de propuestas educativas basadas en la integración de conocimientos curriculares y didácticos. A continuación, se detallan cada uno de los componentes de las situaciones y tareas didácticas propuestas para la reflexión.

Primera situación y tarea didáctica para la enseñanza: Reconociendo la posición (ver propuestas para la reflexión en los apéndices B y D).

Contenidos: Los números naturales como ordinales, orden de los objetos, conteo ordinal, comparación de posiciones, estimar la posición de cada elemento a partir de una reorganización, representación no numérica de las posiciones y simbolización numérica de las posiciones.

Objetivos: Reconocer la posición relativa de objetos o individuos que se encuentran en una disposición ordenada y estimar los posibles resultados al determinar el ordinal de una serie ordenada.

Segunda situaciones y tarea didáctica para la enseñanza: Explorando cantidades (ver propuestas para la reflexión en los apéndices B y D).

Contenidos: Los números naturales como ordinales, orden de los objetos, conteo verbal, conteo cardinal, estimación de cantidades y representación mediante configuraciones puntuales y mediante numerales,

Objetivos: Determinar la cantidad de objetos o individuos que pertenecen a una colección y estimar la cantidad de elementos que componen una colección

Tercera situación y tarea didáctica para la enseñanza: Comparando la capacidad de recipientes (ver propuestas para la reflexión en los apéndices B y D).

Contenidos: Los números naturales como medida, unidad de comparación, comparación de magnitudes continuas, conteo verbal, estimación de la magnitud y representación de la magnitud con numerales.

Objetivos: Comparar la capacidad de recipientes empleando medidas no convencionales y usar puntos de referencia para aproximar una posible respuesta.

Estrategias: La propuesta educativa que integra las tres situaciones descritas se desarrolla mediante la estrategia basada en la resolución de problemas con números naturales a partir de las situaciones ordinales, cardinales y de medida. Asimismo, esta estrategia se relaciona con la comprensión del profesor sobre algunas habilidades centrales, como el conteo, la posición relativa, la representación numérica la comparación de magnitudes continuas y la estimación de resultados en cada uno de las situaciones mencionadas.

Evaluación: Estas situaciones permiten reflexionar sobre algunos conocimientos didácticos que el profesor considera para la enseñanza con sentido de los números naturales a partir de las situaciones y funciones que estos desarrollan según su uso. Por ello, la Evaluación de las

situaciones y tareas didácticas está asociada a la descripción de conocimientos, procedimientos y actitudes del profesor que se relacionan con la enseñanza de este tópico del currículo escolar (enseñanza del Número Natural).

Las entrevistas realizadas se basan en la comprensión de algunos elementos básicos del conocimiento didáctico para desarrollar propuestas para la construcción de sentido numérico, en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida dispuestas, en la enseñanza y comprensión del Número Natural que se indagan a partir de las siguientes categorías (ver estructura de las entrevistas en los apéndices A y C):

- Formación de profesores (FP).
- Modelo curricular y didáctico para la enseñanza (MCD)
- Conocimientos para la enseñanza y el aprendizaje del Número Natural y desarrollo del sentido numérico (CNN y CSN).
- Modelo Local de Análisis Didáctico (MLAD).

La caracterización de las unidades de análisis del MLAD (ver estructura de las entrevistas en los apéndices A y C) inicia con la identificación de las propuestas educativas que desarrollan los profesores a partir de las ideas, conocimientos y actividades consideradas durante los encuentros basados en la reflexión didáctica y continúa con la descripción de los conocimientos didácticos empleados en sus discursos sobre las situaciones, representaciones, procedimientos y habilidades numéricas realizadas en la práctica para la enseñanza del Número Natural y la construcción de sentido numérico (ver propuestas para la reflexión en los apéndices B y D).

El procesamiento de la información para su respectivo análisis, se realiza mediante la triangulación de: discursos, ideas, observaciones a los registros de los estudiantes y respuestas, surgidas durante los encuentros de reflexión centradas en las situaciones y tareas de la Unidad Didáctica Guía, que consideran los organizadores descritos en el Modelo Local de Análisis Didáctico sobre la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Número Natural.

Lo descrito hasta aquí en este capítulo presenta la propuesta de articulación metodológica entre la Investigación-acción, el Estudio de caso y la metodología de Análisis Didáctico, para reconocer el Conocimiento Didáctico a partir de la experiencia profesional y el conocimiento desarrollado a través de su práctica sociocultural, que plantea el uso técnicas de observación y entrevistas que se articulan con las situaciones y tareas de una Unidad Didáctica Guía planteada

para identificar los saberes que el profesor ha desarrollado como parte de su conocimiento profesional. En el siguiente capítulo se adelantan las reflexiones sobre las categorías de análisis, planteadas en este estudio, que posibilitan describir el conocimiento didáctico que los profesores han desarrollado en su experiencia práctica y/o formativa sobre la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Número Natural .

Capítulo 4: Reflexiones y análisis sobre el conocimiento didáctico para la enseñanza del Número Natural

En este capítulo se presentan las reflexiones del estudio de caso en relación con la planeación, el desarrollo y la evaluación de propuestas educativas sobre el conocimiento didáctico del profesor para la construcción de sentido numérico en las propuestas de enseñanza del Número Natural en la perspectiva de construcción de sentido numérico y el análisis de estas reflexiones en tres profesoras que se desempeñan como docentes en el primer ciclo de la educación básica primaria en la Institución Educativa de referencia. Por ello, se describen los análisis en relación a las categorías de estudio (formación de los profesores del estudio de caso, modelo curricular y didáctico, y modelo local de análisis didáctico) a partir de la información suministrada, en las fases 1 y 3 de este trabajo de investigación, sobre el conocimiento conceptual y procedimental sobre la enseñanza de las matemáticas escolares que las profesoras desarrollan en las prácticas de enseñanza. Las ideas expresadas por las maestras durante los encuentros de reflexión, para establecer algunos elementos básicos del conocimiento didáctico en la formación del profesor de primer ciclo de educación básica primaria, permiten caracterizar el conocimiento didáctico que promueven a partir de prácticas profesionales que favorecen la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Número Natural a partir de situaciones ordinales, cardinales y de medida.

4.1 Análisis de las reflexiones de los profesores sobre la enseñanza del Número Natural para la construcción de sentido numérico

En los siguientes apartados se presentan algunos elementos y reflexiones relevantes originadas en relación al conocimiento didáctico para la construcción de sentido numérico por parte de las maestras de primer ciclo de educación básica primaria, mediante propuestas educativas para la enseñanza del Número Natural en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida. Para ello, los análisis y reflexiones relevantes se organizan de acuerdo a los objetivos específicos I) identificar y caracterizar algunos elementos básicos del conocimiento didáctico sobre la construcción de sentido numérico para la enseñanza del Número Natural, a través de un Modelo Local de Análisis Didáctico, en la formación de profesores de básica primaria y II) reconocer y describir el conocimiento didáctico del profesor de primer ciclo de educación básica primaria, con relación a la construcción de sentido numérico para la enseñanza del

Número Natural, mediante la reflexión de situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida presentadas en situaciones y tareas didácticas durante algunos encuentros de reflexión. A continuación, se describen las categorías de estudio sobre la formación de los profesores en el estudio de caso, modelo curricular y didáctico y el Modelo Local de Análisis Didáctico que permiten describir y caracterizar algunos conocimientos didácticos que los profesores emplean al desarrollar propuestas para enseñar el Número Natural y construir sentido numérico en sus estudiantes (fases 3 y 4 de este estudio).

4.1.1 Formación de los profesores en el estudio de caso.

De acuerdo con Ball, Thames & Phelps (2008) los conocimientos que un profesor que enseña matemáticas en cualquier nivel escolar debe dominar, se relacionan con el conocimiento del contenido (conocimientos sobre: las matemáticas, el programa curricular y la enseñanza de las matemáticas) y el conocimiento didáctico del contenido (conocimientos en relación con los aprendizajes matemáticos desarrollados por los estudiantes, con las teorías sobre la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos, los materiales y recursos dispuestos para la enseñanza). Asimismo, (Bedoya, 2002) propone que la formación de profesores de matemáticas en formación inicial o continua debe favorecer el desarrollo del Conocimiento Didáctico que permite tomar decisiones y realizar prácticas basadas en comprensiones sobre el currículo, la práctica situada en el contexto local, el reconocimiento de una estructura conceptual, la cognición escolar, los sistemas de representación, los sentidos y modos de uso del contenido matemático escolar, el desarrollo histórico del objeto matemático y sobre los materiales, recursos y tecnologías que median los aprendizajes matemáticos para la organización de la enseñanza.

Durante los encuentros de formación, se reconoce que las profesoras que participan en el estudio de caso tienen formación profesional en licenciaturas de educación con énfasis en diferentes áreas de conocimiento como lengua castellana y ciencias sociales. Las docentes indican que los conocimientos para la enseñanza de las matemáticas que emplean en sus prácticas, los obtuvieron durante su formación como normalistas y en diplomados o programas gubernamentales de cualificación y actualización curricular para la enseñanza de las matemáticas en los niveles educativos de la educación básica primaria. Una de las maestras manifiesta que realizó un curso de enseñanza de las matemáticas en el que comprendió algunas estrategias de

representación y de enseñanza de las matemáticas a partir de la solución de problemas con el uso de conocimientos matemáticos escolares.

De acuerdo a lo anterior, consideramos que la formación de estas profesoras en ejercicio que orientan la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en los grados primero y segundo de educación básica primaria, requiere de la profundización en conocimientos didácticos sobre la construcción de sentido numérico a través de propuestas para la enseñanza del Número Natural que permitan comprender, ajustar y tomar decisiones sobre las diferentes propuestas educativas relacionadas con este objeto de conocimiento. Dicha profundización es necesaria en tanto permite desarrollar en los profesores en ejercicio capacidades profesionales para la planificación de sus prácticas, la selección de las situaciones y tareas de aprendizaje, los recursos que median los aprendizajes y la evaluación de las competencias desarrolladas por los estudiantes.

El modelo de formación que se propone en este trabajo como medio para cualificar las capacidades profesionales de las profesoras que participan del estudio, se sitúa desde una perspectiva sociocultural (Freudenthal, 1983; Gómez y Rico, 2002; Radford, 2014) que considera los saberes, los seres, el contexto social y las situaciones de uso como sistemas que se articulan para la formación de personas con razonamientos críticos y comprensión de sus propuestas de enseñanza, prácticas profesionales y discursos matemáticos constituidos cultural e históricamente. De este modo, la formación del profesor de matemáticas y de la enseñanza de las matemáticas escolares desde la perspectiva sociocultural (Gómez y Rico, 2002; Radford, 2014) plantean la construcción de significados (matemáticos) personales a partir de las interacciones sociales que permiten tomar consciencia del aquello que se desconoce para transformar su saber, que en el caso de los profesores denominamos Conocimiento Didáctico.

4.1.2 Modelo curricular y didáctico.

El modelo curricular y didáctico del profesor de matemáticas es un sistema de discursos, acciones y decisiones que suministra información sobre los conocimientos que el maestro emplea en sus prácticas a partir de criterios sobre cómo se enseñan y cómo se aprenden las matemáticas escolares (Bedoya, 2002). En dicho modelo se articulan, desde una perspectiva sociocultural, los siguientes supuestos teóricos: el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es una actividad social de producción de saberes y subjetividades que generan una transformación constante de los sujetos (Radford, 2014); el contexto social es un medio que permite comprender,

actuar y reflexionar sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como de sus necesidades formativas locales (Gómez y Rico, 2002); el conocimiento didáctico para la enseñanza de las matemáticas considera los objetos de enseñanza en situaciones donde estos tomen sentidos y significados de uso (Freudenthal, 1983); y la concepción del currículo funcional como una propuesta que promueve la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con sentido y significado de uso en diferentes situaciones socioculturales (Rico y Lupiáñez, 2008).

En relación a la caracterización del modelo curricular y didáctico presentado anteriormente, se identifica en las docentes que participan del estudio de caso las siguientes características:

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares por parte de las profesoras se asume como un requisito para poder avanzar en los siguientes grados escolares, de manera que el estudiante logre aprender hechos concretos y desarrolle habilidades específicas relacionadas con reglas de uso de los contenidos matemáticos (tal como se puede observar en el registro fotográfico en el apéndice E). Lo anteriormente descrito, se reconoce en las respuestas que ofrecieron al siguiente interrogante ¿Qué es lo más importante que un estudiante debe aprender sobre el pensamiento numérico en el primer ciclo de básica primaria? (ver estructura de la entrevista en el apéndice A) al respecto las profesoras plantean que las estudiantes han desarrollado habilidades para representar los números a partir de las características del sistema de numeración decimal, destrezas de conteo uno a uno y en tramos de la secuencia numérica (es decir empezando en un número distinto a la unidad y finalizando en otro), así como capacidades para resolver problemas de estructura aditiva mediante agrupaciones y desagrupaciones de cantidades numéricas. Además, una de las profesoras reconoce que algunos estudiantes para resolver problemas aritméticos requieren dibujarlos o emplear estrategias de cálculo mental, por lo que ella desarrolla actividades de enseñanza basadas en la representación gráfica o en procesos de cálculo para que se aproximen a los contenidos matemáticos de estudio, es decir, que esta profesora reconoce las subjetividades que los estudiantes poseen y permite que ellos desarrollen estrategias numéricas basadas en las relaciones y producciones propias de los estudiantes para hacerlos conscientes del sentido de cada situación de enseñanza de los números naturales.

Al profundizar sobre la pregunta ¿Qué es lo más importante que un estudiante debe desarrollar sobre el Número Natural en el primer ciclo de educación básica primaria? algunas

respuestas de las profesoras fueron: el reconocimiento del numeral, comprensión del sistema de numeración decimal, desarrollar habilidades de conteo de cantidades y resolver problemas sencillos haciendo uso de las operaciones básicas. Estas respuestas fueron ampliadas por solicitud del investigador al preguntar por qué consideran que el reconocimiento del numeral, la habilidad de conteo y la solución de problemas sencillos es lo más importante sobre el aprendizaje del número natural, a lo que las docentes explicaron que un estudiante que confunde los símbolos de los números (numerales) difícilmente podrá operar cantidades que se le presenten en un problema sencillo; si un estudiante realiza conteos de manera eficiente podrá realizar sumas y restas pequeñas y de esta manera comprenderá el significado de estas operaciones para operar con cantidades más grandes; y en algunas de sus respuestas afirman que un estudiante del primer ciclo de educación básica primaria, requiere resolver problemas sencillos usando de manera eficiente las operaciones aritméticas que se trabajan en los planes curriculares de los grados primero, segundo y tercero de educación básica primaria.

Sobre la pregunta ¿En qué documentos se apoya para planear las actividades de enseñanza sobre el Número Natural? Las profesoras relatan que las propuestas de enseñanza de las matemáticas parten del plan de estudios y los referentes curriculares a nivel Nacional (lineamientos curriculares, estándares básicos de competencias y derechos básicos de aprendizaje) que se integran con actividades tomadas de los libros de texto (entregados por el Ministerio de Educación Nacional y otros en que ellas se apoyan) y de ejercicios que se encuentran en plataformas virtuales relacionadas con el portal de Colombia Aprende, porque estas propuestas están elaboradas por personas formadas en la enseñanza de las matemáticas.

Asimismo, una profesora dice: ³ VLHPSUH SDUWR GH ORV UHIHUHQWHV *Derechos básicos de aprendizaje y los plane* V GH iUHD \ DXOD « HVWRV PH S *actividades de aprendizaje centradas en la comprensión y uso de los números que apoyo con los* HMHUFLFLRV SURSXHVWRV HQ ORV OLEURV GH WDWWR TXH *Wado* cuenta de que parten de los referentes curriculares y luego ubica en los libros de texto actividades relacionadas con las expectativas de aprendizaje de los contenidos matemáticos.

Al contrastar las respuestas de las profesoras en relación a los supuestos teóricos que estructuran el modelo curricular y didáctico del profesor para la enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva sociocultural se reconoce:

Para una de las profesoras el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es una actividad individual que permite desarrollar conocimientos conceptuales y procedimentales específicos que cada estudiante debe desarrollar como parte del proceso escolar. Ella manifiesta que: ³ / DV HVWXGLDQWHV DSUHQGHQ D HVFULELU ORV Q~PHU

objetos o figuras que se les presentan; reconocen el orden de los números quien es mayor, menor o igual según las diferentes representaciones del número, las estudiantes pueden realizar cálculos de sumas y restas con cantidades menores que cien, y usan el valor de posición para

FRPSRQHU \ GHVFRPSRQHU ODV XQLGDGHV GHFHQDV \ DSH. No obstante, las otras dos profesoras evidencian repuestas y prácticas asociadas al desarrollo de estrategias numéricas asociadas al desarrollo de estrategias cognitivas y uso de representaciones manipulativas, pictóricas y simbólicas a partir de las capacidades individuales que toman como referencia para promover los aprendizajes de los demás estudiantes. Una evidencia de ello es la siguiente expre *en las soluciones uno encuentra estudiantes que necesitan dibujar y*

otros que usan el cálculo mental que es más avanzado; estas soluciones yo las promuevo IRUPDQGR HTXLSRV FRRSHUDWLYRV SDUD TXH ORV XQRV D

En la respuesta mencionada anteriormente, se refleja la influencia que tienen los programas gubernamentales (como el Programa Todos A Aprender) para la cualificación de los docentes en relación a prácticas que consideren subjetividades que permitan dar sentido a las actividades escolares para la enseñanza de las matemáticas. Esto debido a que en los encuentros de CDA en el programa se reflexiona sobre las prácticas de enseñanza de las matemáticas a partir de las diferentes formas de representación que posibilitan el acercamiento a los significados de los contenidos matemáticos del currículo escolar.

Al analizar las respuestas dadas por las profesoras, se reconocen algunos elementos característicos sobre sus concepciones del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, porque para una de las profesoras la enseñanza de las matemáticas se asocia a la comprensión y reproducción de conceptos, técnicas y reglas algorítmicas específicas. En relación a lo anterior, se reconoce que la docente revela un enfoque de enseñanza donde los aprendizajes están relacionados con las representaciones convencionales, el conocimiento de conceptos básicos, el dominio de reglas o técnicas y algoritmos útiles que los estudiantes deben usar. En términos de Rico y Lupiáñez (2008) una perspectiva del desarrollo de conocimientos de tipo instrumental se asocia a la formación de matemáticas escolares dirigidas a la comprensión de

conceptos básicos y al dominio de técnicas y reglas útiles que permiten el desarrollo de conductas y el logro de objetivos específicos que centran la atención en la seguridad, precisión y rapidez individuales.

En las otras dos profesoras se identifica la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como una actividad de labor conjunta (Radford, 2014) donde se desarrollan aprendizajes y estrategias matemáticas basadas en la interacción y discusión de los estudiantes. Esta perspectiva de enseñanza puede complementarse con un modelo curricular y didáctico que reconozca el conocimiento desarrollado sobre la matemática escolar, como un conocimiento cultural (Bedoya, 2002; Radford, 2014) que origina subjetividades que requieren ser interpretadas y utilizadas para generar propuestas escolares que propicien elaboraciones y reflexiones sociales que favorezcan la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos escolares. Por ello, se plantea la necesidad de generar programas de formación didáctica para la enseñanza de las matemáticas que concienticen a los profesores en ejercicio sobre situaciones y objetos de enseñanza que favorezcan la comprensión matemática en relación a las ideas intuitivas que se han desarrollado a través de sus interacciones sociales como sujetos históricos, sociales, culturales y políticos.

Gómez y Rico (2002) plantean que el contexto social es un medio que permite al docente en ejercicio reflexionar de manera crítica sobre su práctica a partir de tres elementos, a saber: las situaciones para la enseñanza, las capacidades cognitivas que desarrollarán los estudiantes y las limitaciones y oportunidades de cualificación sobre su formación. Respecto al contexto social como componente del modelo curricular y didáctico, una profesora comenta: ³ «HO MXHJR GH C WLHQGD «HV XQD HVWUDWHJLD PX\ GLGIFWLFD TXH SHUPL como son niñas tan pequeñas, entonces, siempre busco una estrategia lúdica que las motive y las incentive al mismo tiempo «el juego de la WLHQGD para las representaciones, conteo, lectura, escritura, entonces me parece que es una estrategia muy didáctica. Ésta expresión evidencia el uso de algunas situaciones para promover el desarrollo de estrategias y habilidades que permiten acceder a los conocimientos matemáticos conceptuales y procedimentales mediante situaciones significativas y reales para algunas de las estudiantes. Aunque se emplean situaciones cotidianas para la enseñanza de las matemáticas es preciso indicar que el profesor requiere comprender, actuar y reflexionar (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008) sobre el desarrollo de destrezas (contar, ordenar, comparar y estimar) y situaciones (conteo, ordinalidad, cardinalidad, medida, operacional y simbólico) numéricas que favorezcan la construcción de sentido numérico

4.1.3.1 Análisis didáctico de contenido sobre los números naturales.

Para el desarrollo de este análisis se ha considerado un sistema de organizadores del currículo (análisis histórico-epistemológico, análisis de los sentidos y modos de uso, análisis de los sistemas de representación y análisis de la estructura conceptual) como dimensiones fundamentales que permiten caracterizar los conocimientos sobre la pluralidad de usos, sentidos y significados de un contenido matemático escolar con lo plantean Rico (1997a), Bedoya (2002), Rico, et al. (2008) y Rico, Lupiáñez y Molina (2013).

Teniendo en cuenta los conocimientos didácticos que se caracterizaron sobre el análisis de contenido para la enseñanza de los números naturales, se describen y analizan las afirmaciones de las profesoras que participaron del estudio de caso.

4.1.3.1.1 Análisis didáctico histórico-epistemológico.

En relación el *análisis histórico-epistemológico* se referenció el trabajo de Vásquez (2010) en el cual se retoman los trabajos sobre el Número Natural que desarrollados por Stevin durante el siglo XVI, asumiendo el número y la magnitud como aspectos indisolubles y naturalezas cercanas en relación a sus usos; Dedekind, Peano, Cantor, y Frege, en el siglo XIX, desarrollaron perspectivas relacionadas con el ordinal, la axiomatización, una visión conjuntista del cardinal y principios lógicos, para fundamentar el número a partir de algunos usos prácticos e intuitivos desde una definición netamente matemática.

Al reflexionar sobre la pregunta ¿Cómo se organiza la enseñanza del Número Natural en el plan de aula del año escolar? (ver unidades y preguntas de análisis apéndice A). Una profesora expresa lo siguiente: ³ « P X F K D V Y H F H V Q R V L J R H Q S U R J U D P D H V F R conj X Q W R V \ O D V X Q L G D G H V G H Y D O R U S R V L F R Q D D S D U W ». Esta concepción pre-que se asocia a que en algunas prácticas de enseñanza del Número Natural se instruyen tal como fueron transmitidas a los maestros en sus experiencias formativas o como se han desarrollado en la historia de la matemática como disciplina a partir de la fundamentación aritmética con Cantor (como se menciona en Vasquez, 2010) quien propone el desarrollo de conjuntos para establecer la cardinalidad de las estructuras numéricas y su orden a través de una relación de emparejamiento. Asimismo, la concepción planteada por la docente considera que el elemento de inicio de los naturales es la unidad y la secuencia consiste en un número sucesor que se añade uno (Peano, como se menciona en Vasquez, 2010) y se plantea el significado de número ordinal

para la organización y designación de una posición relativa de un número dentro del sistema simple finito (Dedekind, como se mencionó en Vasquez, 2010).

Al consultar sobre la tercera situación llamada midiendo espacios (ver situaciones del apéndice B) ¿Cómo crees qué se relaciona la enseñanza de la medida con la enseñanza del Número Natural? Una docente señala: ³ & R Q H O F R Q W H R S R U T X H D O O t H V W D U *de vasos que utilizaron a* O O O H Q D U O D M D U U D \ D O O O H Q D U O . R V E D O G. Esta respuesta pone de manifiesto que la profesora reconoce que una estrategia en común entre las situaciones de uso de la magnitud continua y el número pueden asociarse a la naturaleza del conteo como habilidad para comparar y cuantificar (Castro y Cañadas, 2016).

Sin embargo, en una reflexión posterior con la profesora, ella sostiene que la medida la enseñan cuando trabaja con las estudiantes en el cuaderno de geometría y el Número Natural lo desarrolla en el cuaderno de aritmética. Esta apreciación puede estar relacionada con la concepción de las naturalezas del número y la magnitud como se propone en Vasquez (2010), quien describe que en la antigüedad los griegos asumían el número y la medida como aspectos distintos de acuerdo a sus usos prácticos; esta concepción se rompe con el trabajo de Stevin, quien postula que la unidad se puede dividir y estas porciones de unidad son a su vez números, rompiendo con la dicotomía entre lo continuo y lo discreto.

4.1.3.1.2 Análisis didáctico el sentido y modo de uso de los números naturales.

En relación al *análisis de los sentidos y modos de uso* se plantea partir de los desarrollos de Puig (1997), Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008) y Ruiz (2016) organizados según los escenarios, situaciones, subestructura y modos de uso que permiten dotar de sentido y significado a los números naturales según su función de aplicación; y Rico, et al. (2008) quienes a partir del trabajo del estudio PISA retoman algunas situaciones (personales, educativas, públicas y científicas) que ayudan a generar usos funcionales, es decir con sentido, de los contenidos matemáticos escolares, para este estudio consideramos los escenarios personales y educativos como ambientes para generar propuestas educativas en los planes escolares del primer ciclo de educación básica primaria.

Al indagar sobre ¿Qué contextos emplea para enseñar el Número Natural? (ver unidades y preguntas de análisis apéndice A). De acuerdo al estándar básico significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación,

³ «D SDUWLU GH ODV i, HFKDYM y GHODj FODOSHQGD ubanos, los

Q~PHURV HQ OD WHPSHUDWXUD OR FRQWH[WXDO FXiQW

medidas, pues centímetros, el metro que constantemente lo ven con las mamás modistas y que ellos ya saben que es u Q PHWUR SHUR OHV IDOMD expresón de

manifiesto que los contextos propuestos en los referentes curriculares (MEN, 1998; 2006; 2016)

son asumidos por las docentes como actividades intuitivas aisladas del concepto, donde los

números cumplen una función de uso que requiere estrategias de conteo y operacionales para dar

cuenta de una posición, medida o cantidad. De igual manera, otra profesora expresa lo siguiente:

el conteo lo trabajo a partir de los objetos o láminas que se les entregan para que las cuenten y

digan cuántas de estas hay, también, les indico que comparemos que colección tiene más objetos

TXH RWUD R VL WLHQHQ LJXDO FDQWLGDG«HQ OD PHGLFL

definir las distancias, capacidades de los recipientes o medir los espacios con números y

FRQWDPRV FXiQWRV SDVRV GH FDGD EQEWDKSDSDOR DQFKR

contextos del Número Natural como estrategias de conteo, comparación y medición que los

estudiantes deben desarrollar para aprender a dominar los usos del número por medio de

actividades de ejercitación de habilidades en propuestas educativas.

Al reflexionar sobre la primera situación denominada reconociendo la posición (ver situaciones del apéndice B), donde se describe una propuesta para enseñar el Número Natural como ordinal, ¿Qué otras situaciones pueden usarse para complementar esta actividad de

enseñanza? Una de las profesoras indica: ³VH SXHGHQ XWLOL]DU DFWLYLGD

encostados y juegos de escale UD SRU HTXLSRV GH HWXG GNDQWHV´

reconocer que hay un reconocimiento del uso ordinal del Número Natural para designar que

posición ocupa una persona u objeto dentro de una colección organizada (Puig, 1997; Rico,

Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008; Ruiz, 2016). No obstante, esta expresión devela una especie de

preocupación por mantener los mismas situaciones que se proponen para la enseñanza del

número, desconociendo el sentido de uso ordinal que el Número Natural emplea en situaciones

de ordenar de acuerdo a tamaños, tiempo de llegada, lugar que se ocupa en una fila, secuencia de

actividades antes de ir a la escuela, entre otros.

Respecto a la segunda situación, denominada explorado cantidades (ver situaciones del apéndice B), para enseñar el Número Natural en una situación cardinal, se propone la siguiente

cuestión ¿Qué uso del Número Natural se propone enseñar la profesora con la anterior actividad?

Una de las respuestas expresa: *conteo a saltos y reconocer el último número contado como el*

FDUGLQDO GH OD FROHFFLYQ FRPSRVL.F En esta expresión se

identifica una confusión referida a los usos y las habilidades o destrezas que los estudiantes deben desarrollar en relación a los entornos que permiten emplear los números naturales con sentido para generar un significado funcional de este contenido escolar. Asimismo, a la pregunta

¿Qué sentido tiene sumar las posiciones de los animales durante la carrera? (ver situaciones del

apéndice B). Una profesora manifiesta: *3 Vt WLHQH VHQWLGR SRUTXH DOOt HV*

HVR PH VLUYH SDUD LGHQWLILFDU TXH LHO FRQV En esta expresión se

puede reconocer una inclinación por operar los números desconociendo la función de designar

que posición relativa ocupa respecto a un personaje que se encuentra de primero. En los trabajos

de Puig (1997), Rico, et al. (2008) y Ruiz (2016) se plantean que los sentidos y usos del número

están en función de las acciones que estos realizan en situaciones para enumerar, ordenar,

cuantificar, medir, operar y codificar; de igual manera, que las situaciones que requieren de

operaciones aritméticas tienen sentido al abordarse en situaciones de cardinalidad o medida

donde las cantidades se pueden componer, transformar, combinar e igualar.

De acuerdo a lo anterior, se requieren considerar los usos y sentidos de los números naturales (Freudenthal, 1983) a partir de situaciones fenoménicas donde estos se apliquen con sentidos y significados de medir, contar, comparar, codificar, localizar, entre otros usos socioculturales que propician la identificación de situaciones cercanas que logren aproximar los sentidos personales o subjetivo a sentidos compartidos objetivados (Radford, 2014).

4.1.3.1.3 Análisis didáctico de sistemas de representación.

En relación al *análisis de los sistemas de representación*, Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008) proponen que los conocimientos didácticos del profesor sobre este análisis en el campo de los Números Naturales se organiza a partir de una estructura que relaciona sistemas de representación: *simbólica*, con propiedades, reglas y operaciones internas, *gráfica*, con características de orden, secuenciales y con relaciones algebraicas o geométricas, *verbal*, con normas de lenguaje que determinan la designación numérica, y *manipulativa*, para designar y modelar características y propiedades de la estructura numérica.

Al reflexionar sobre la cuestión ¿Qué representaciones numéricas tiene en cuenta para la enseñanza del Número Natural? (ver unidades y preguntas de análisis apéndice A). Una profesora alude: ³ 4 X H G L E X M H Q O D V F D Q W L G D G H V G H R E M H W R V T X *regletas y con numerales, también, que las representen en el ábaco y con el material de base diez, estas representaciones las trabajó a partir de las compras del mercado y en ella evalúo las competencias que las estudiantes demuestren en las diferentes formas de representar una misma cantidad*´ En esta reflexión se reconoce que la profesora emplea diversos sistemas de representación de tipo simbólico, gráfico, verbal y manipulativo para la enseñanza y aprendizaje del Número Natural como se plantea en Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008). Sin embargo, las características y propiedades de cada sistema de representación no son del todo reconocidas por la docente. Por ejemplo, la representación simbólica va más allá de representar o codificar con los números, en esta se deben reconocer propiedades, reglas y operaciones internas.

Respecto a la pregunta ¿Cuáles representaciones puede utilizar el profesor para complementar la enseñanza de este aprendizaje? planteada para reflexionar sobre la primera situación denominada reconociendo la posición (ver situaciones del apéndice B) donde se proponen representaciones verbales y gráficas. Al respecto, una profesora menciona: ³ (O S U R I H V R U S X H *realizar un trabajo con tiras de papel o regletas de Cuisenaire para acomodarlas de acuerdo a su tamaño, realizar competencias de carreras con los estudiantes o utilizar una línea de tiempo para ubicar diferentes sucesos históricos y que los niños indiquen que ocurrió primero y que* S D V y G H M S X p y *de respuesta se evidencia una tendencia de la docente de apoyarse en representaciones gráficas y manipulativas para que los estudiantes modelen y representen las situaciones propuestas. Sin embargo, el uso de variadas representaciones y por separado no es suficiente, estas requieren una conexión entre ellas de manera sistémica que permitan al paso de una representación a otra para asegurar la comprensión y el aprendizaje del Número Natural (Lupiáñez, 2009).*

Se resalta, en la respuesta dada que la docente propone diferentes entornos en el que el Número Natural tiene como significado designar el lugar que ocupa una persona y un objeto como lo plantean Rico et al. (2008).

En relación a la segunda situación denominada explorando cantidades (ver situación en apéndice B), en la que se propuso una representación gráfica y en configuraciones puntuales con

plaquetas de Herbinière-Lebert, se formuló la pregunta ¿Qué representaciones de número podrían usarse para complementar la actividad? Una profesora responde: ³ « V H S X H G H Q X W L O líneas numéricas para indicar cuantas ovejas tenía y con cuantas quedó luego de regalar algunas, también con materiales de base diez, indicando cuantas ovejas hay en el conjunto y cuantas result D Q O X H J R G H T X H U H L D O y esta es la respuesta. Se ve que las propuestas de representación realizadas por la docente, se continúan situando en representaciones de tipo gráfico y manipulativo, sin proponer otras representaciones de tipo verbal o simbólico. Se puede inferir, que ello se debe al grado escolar en el que trabajan las docentes, en el cual buscan apoyarse en registros familiares y adecuados a las edades de los estudiantes, con el propósito de facilitar la comprensión y los razonamientos relacionados con el Número Natural.

La distinción entre unidad y decena en el programa escolar (ver apéndice D) empieza con tareas sobre la visualización de colecciones gráficas de objetos para que las estudiantes puedan diferenciar si hay muchos o pocos objetos, para su posterior comparación mediante el conteo como estrategia de cuantificación de colecciones numerables, luego se registra una tarea sobre el emparejamiento de cantidades y la representación con numerales de ambas colecciones igualadas y finalmente, se realizan tareas sobre la distinción, composición y orden numérico de colecciones mediante representaciones que obedecen a reglas simbólicas de designación numérica.

Igualmente, los recursos y materiales que se emplean en la enseñanza del Número Natural permiten la representación manipulable de las cantidades numéricas, este tipo de actividades posibilitan la comprensión de algunas reglas y propiedades del Sistema de Numeración Decimal, para luego relacionarlas con los algoritmos de las operaciones aritméticas. No obstante, estas formas de representación manipulable se requieren acompañar de representaciones verbales (ordinales y cardinales), gráficas (rectas numéricas, configuraciones puntuales, tablas numéricas, entre otras), y simbólicas (simple, aditivo y posicional) que les permitan a los estudiantes entender las propiedades numéricas, equivalencias, reglas de representación y usos de los naturales en los diferentes modelos representativos acordes al contexto donde se emplee el concepto de Número Natural. De igual manera, podemos considerar que en estas repuestas al preguntarles por los recursos o materiales siempre se piensa en los recursos didácticos como (ábacos, regletas, bloques, entre otros) y no se comprenden estos como todos aquellos dispositivos (libros de texto, calculadoras, unidades de enseñanza, situaciones de la vida cotidiana, entre otros) que permiten mediar los conocimientos numéricos, sus habilidades y

formas de razonar en relación a un concepto o procedimiento relacionado con la enseñanza del Número Natural (Rico et al., 2008).

4.1.3.1.4 Análisis didáctico de la estructura conceptual.

El organizador del currículo relacionado con el *análisis de la estructura conceptual* como lo plantean Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008) permite comprender la articulación de *conceptos* (focos prioritarios, hechos, conceptos y estructuras) y *procedimientos* (destrezas, razonamientos y estrategias) para organizar y desarrollar propuestas de enseñanza y aprendizaje basadas en la comprensión y usos con sentido del sistema de los números naturales. Este trabajo emplea los focos conceptuales sobre los significados y usos de los números naturales y el orden de los mismos, los cuales se componen de algunos hechos, conceptos y procedimientos que destacan la comprensión y aplicación del sistema de los números naturales en situaciones socioculturales.

En la reflexión sobre la primera situación, reconociendo la posición (ver situaciones del apéndice B), se indaga sobre ¿Cuáles representaciones puede utilizar el profesor para complementar la enseñanza de este aprendizaje? A esta pregunta una docente expresa: ³ O D *posición de los números, pienso que si maneja bien lo que es el valor posicional entonces se puede trabajar muy bien lo que el valor ordinal y cardinal, hacer una muy buena lectura de la representación gráfica que se está presentando, porque hay niños que no manejan una visualización y atención adecuada, para identificar que el tigre es el que está dando una pauta y a partir de ahí es que empezamos a manejar la situación, entonces de debe hacer una lectura en voz alta varias veces, trabajar lo de las posiciones, a partir de una gráfica para trabajar la* Y L V X D O. L. Esta evidencia que la profesora presenta una confusión conceptual relacionada con el Número Natural en su significado ordinal, al interpretar la posición de los números en relación al valor posicional en el Sistema de Numeración Decimal. Al respecto, Rico et al. (2008) refieren que el Número Natural se usa en situaciones ordinales para describir la posición relativa respecto a un atributo comparable de un elemento que se encuentra en una colección ordenada.

De igual manera, en la respuesta referida por la profesora se evidencia un problema conceptual sobre el valor de posición al indicar que un buen manejo de este permite que el estudiante trabaje bien el valor ordinal y el valor cardinal. Es decir, el valor de posición que es

una característica del Sistema de Numeración Decimal (sistema funcional de representación) no implica que el estudiante comprenda la posición relativa y la cuantificación asociadas al significado del número en su función de determinar un lugar de ubicación (ordinal) y en función de describir el tamaño relativo y/o absoluto de una colección numerable (cardinal).

En relación a la situación reconociendo la posición (ver situaciones del apéndice B), se pretende que los estudiantes logren reconocer la posición relativa de un animal durante la carrera, indicándola a través de términos verbales y estimar posibles ubicaciones de los animales de acuerdo a movimientos supuestos. Atendiendo a ello, se planteó la siguiente pregunta: ¿Qué aprendizajes se proponen desarrollar en los estudiantes con la situación anterior? Al respecto las docentes respondieron: *el ordinal y el cardinal, pero allí también se ve lo del conteo, la posición de los movimientos, numeración ordinal, se* *ordinales, el reconocimiento de un animal que da la pauta de primero, antes, en medio y*

Asimismo, sobre la segunda situación explorando cantidades (ver situaciones del apéndice B), se proponen destrezas para la representación numérica mediante configuraciones puntuales y realizar agrupaciones con igual cantidad de elementos, por lo que se propone la pregunta ¿Qué destrezas o habilidades se deben desarrollar en los estudiantes para que puedan comprender la situación anterior? Al respecto, las profesoras indican: *la base estaría en el preescolar donde el niño puede contar, representar y reagrupar. Con respecto a las tarjetas de puntos los niños deben tener habilidades de realizar sumas y restas en cantidad, la secuencia, la escritura, el antes y el después, los números pares, los impares, la*

En estas respuestas se evidencian algunos *hechos*, como la posición antes, después y en medio, secuencia, unidad, agrupar, agregar, suma, resta, quitar, términos ordinales, la base diez y solución de problemas (primero); *conceptos*, como número pares e impares, numeral, ordinal y cardinal; *estrategias*, como la estimación, la observación y la representación escrita y puntual;

destrezas, como el conteo, reagrupamiento; y *razonamientos*, sobre ubicación de un objeto en una colección ordenada (Rico et al., 2008). Cabe mencionar que al relatar estas respuestas las profesoras no son conscientes de las componentes de la estructura conceptual descrita en este trabajo, por lo que exponen conceptos y procedimientos de la estructura del sistema de los números naturales.

Sin embargo, al proponer la pregunta sobre las habilidades o destrezas se alude a cuestiones como la lectura, las diferentes descomposiciones de una misma cantidad y la magnitud del Número Natural (Rico et al., 2008). Mientras que las profesoras relacionan en sus respuestas sumas, restas, conocer los números y sus símbolos, identificar los números pares e impares y comprender la unidad y la base diez, no son habilidades propias de los aprendizajes asociados a la comprensión del Número Natural, sino procedimientos y estrategias que permiten desarrollar las destrezas asociadas al conocimiento de este contenido escolar.

La numeración del uno al once centra su atención en el dominio de las representaciones de numerales y se promueven tareas sobre la descripción de una imagen (ver apéndice D) que pretende emplear el reconocimiento de los números en la cardinalidad de objetos dispuestos en el gráfico. No obstante, la narración comienza describiendo que un maquinista tiene cero (0) acompañantes. En el caso de la situación propuesta sobre los números naturales desde la cardinalidad, el número cero es asociado a la ausencia de objetos (Castro y Cañadas, 2016) y por tanto la docente argumenta, que por esto, en la decena no existen unidades ya que el valor de posición del cero justifica esta idea.

4.1.3.2 Análisis didáctico cognitivo sobre sentido numérico.

El análisis didáctico de tipo cognitivo que presenta esta investigación se organiza a partir de tres organizadores, a saber: expectativas de aprendizaje relacionadas con el sentido numérico, limitaciones y dificultades de enseñanza y aprendizaje y las oportunidades para la enseñanza y el aprendizaje. De acuerdo con Lupiáñez (2009) estos organizadores del currículo permiten analizar aquellas orientaciones curriculares y didácticas, que los profesores plantean para fundamentar sus propuestas de enseñanza de las matemáticas.

En relación a los conocimientos didácticos que se caracterizaron sobre el análisis didáctico de tipo cognitivo para fundamentar las propuestas de enseñanza del Número Natural, se reconocen y

analizan las reflexiones de las profesoras que participaron del estudio, a partir de los organizadores del currículo presentados a continuación.

4.1.3.2.1 Expectativas de aprendizaje relacionadas con el sentido numérico.

En el Modelo Local de Análisis Didáctico presentado en este trabajo asume las *expectativas de aprendizaje* al igual que Lupiáñez (2013) quien propone considerar este constructo a través de *los objetivos*, que articulan los conocimientos específicos, el desarrollo de capacidades observables y la resolución de problemas en contextos determinados que se adelantan durante una etapa, un curso o un contenido escolar, y *las competencias*, tomadas como las acciones donde los sujetos expresan diferentes conocimientos conceptuales y procedimentales, que favorecen la dimensión actitudinal a partir de capacidades para tomar decisiones, actuar, interpretar, resolver y formular problemas en diferentes escenarios prácticos que requieran un nivel de dificultad.

En documentos curriculares (NTCM, 2000; MEN, 1998 y 2006) las propuestas orientadas hacia la enseñanza del Número Natural en los primeros grados escolares intentan favorecer la comprensión de los números, las representaciones de estos, las relaciones entre números y los sistemas numéricos, comprender los sentidos y significados de las operaciones y cómo estas se relacionan entre sí; y calcular con fluidez y hacer estimaciones razonables. Es decir, que los aprendizajes numéricos en el primer ciclo de educación básica primaria pretenden desarrollar capacidades para razonar, formular y resolver situaciones problema mediante la aplicación creativa, flexible y justificada de procedimientos numéricos basados en las experiencias de uso de los números en diversas situaciones con distintos significados. Igualmente, en los lineamientos curriculares en matemáticas (MEN, 1998) se proyecta la comprensión de los números y de la numeración; el conocimiento del concepto de las operaciones y, cálculos con números y aplicaciones de números y operaciones, como elementos básicos que pueden ayudar a desarrollar el pensamiento numérico de los escolares y permiten orientar el trabajo de aula en relación al sistema de los números naturales.

Para el análisis de este estudio proponemos los siguientes objetivos específicos de enseñanza y las competencias asociadas a cada uno de ellos:

- **OEE1.** Realizar el conteo de objetos o individuos iniciando en cualquier número y atendiendo al uso de la secuencia numérica. (A través de competencias como: la resolución y formulación de problemas, la comunicación y la ejercitación de procedimientos).
- **OEE2.** Reconocer la posición relativa de objetos o individuos que se encuentran en una disposición ordenada. (Mediante las competencias: la resolución y formulación de problemas, la comunicación, el razonamiento y la ejercitación de procedimientos).
- **OEE3.** Establecer el número cardinal de los objetos o individuos de una colección o clase. (A partir de competencias como: la resolución y formulación de problemas, la comunicación, el razonamiento y la ejercitación de procedimientos).
- **OEE4.** Asociar un Número Natural a la medida (comparación) de magnitudes continuas. (En las competencias: la resolución y formulación de problemas, la comunicación, el razonamiento y la ejercitación de procedimientos).
- **OEE5.** Utilizar y reconocer equivalencias entre diferentes representaciones, concretas, pictóricas y simbólicas que se presentan en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida. (A través de las competencias: de modelación, y razonamiento).
- **OEE6.** Estimar los posibles resultados al determinar el ordinal de una serie ordenada, el cardinal de una colección o la medida de una magnitud continua. (A través de competencias como: la resolución y formulación de problemas, la comunicación y el razonamiento).

Al indagar por los conocimientos sobre las expectativas de aprendizaje, se propone la pregunta ¿Cómo se organiza la enseñanza del Número Natural en el plan de aula del año escolar? (ver apéndice A - unidades y preguntas de análisis) y se reconocen respuestas como: ³ « S R U ejemplo este año miraba ellas hasta que número habían llegado, hasta qué número reconocían, los identificaban, leían, entonces, a partir de allí particularmente encontré que ellas solo habían visto hasta el número diez, H Q W R Q F H V U H I R U J D P R, V³ « P X D F K U D H S U Y H I V H I Q W Q D R F D en programa escolar, pero se comienza por conjuntos, las unidades de valor posicional a partir G H J U i L F R E N El grado primero se realiza un diagnóstico del conteo, la representación, la identificación y algunas composiciones numéricas pequeñas con números de una cifra, luego se empieza a trabajar las operaciones de sumas y restas en problemas planteados « ´ Igualmente, a la cuestión sobre ¿Qué aprendizajes sobre el Número Natural evalúa en sus estudiantes? (ver apéndice A - unidades y preguntas de análisis). Las profesoras mencionaron respuestas como:

³/D UHSUHVHQWDFLyQ OHFWXUD FRQWHR UHSUHVHQWDF
operaciones combinadas, la posición, si reconoce Q OD IRUPD DVFHQGHQWH GHV
representación numérica y gráfica, que diferencie qué es el número y el numeral, para la
HVFULWXUD \ OD UHSUHVHQWDFLyQ (Q JFURQLWDFRG HOODPULN\$R HQ H
solución de sumas y restas sencillas que se le presentan en situaciones de enseñanza. También,
TXH UHDOLFHQ FIOFXOR PHQWDO FRQ FDQWLGDGHV QXPpUL

En las respuestas referidas a estas preguntas se pueden reconocer que algunos conocimientos para la enseñanza de este contenido escolar, comienzan con actividades diagnósticas y actividades que consideran estrategias y procedimientos (OEE1, OEE3, OEE5 y OEE6) sobre el conteo, la lectura, la representación de cantidades numéricas y destrezas para desarrollar cálculo mental, como objetivos específicos de aprendizajes que son básicos para el desarrollo de los sentidos y significados de uso del Número Natural; en relación a las competencias, requeridas para la comprensión de este contenido escolar, se infieren de términos a partir de términos como , trabajar las operaciones y que realicen cálculo metal

la revisión documental de los cuadernos de los estudiantes (ver apéndice E, imágenes de las propuestas escolares) se relacionan con las competencias, o procesos generales de la actividad matemática (MEN, 1998; 2006), de razonamiento, modelamiento, comunicación y, formulación, comparación y ejercitación de procedimientos aritméticos basados en la comprensión de los números y la numeración.

Al plantear las unidades y preguntas de análisis (ver apéndice A) se propone una reflexión relacionada con el DBA 1 de grado primero de educación básica primaria, el cual plantea que en este grado escolar el estudiante como código, cardinal, medida, ordinal) y las operaciones (suma y resta) en contextos de juego, familiares, económicos,

estudiantes para evidenciar esta expectativa de aprendizaje? A este interrogante las profesoras responden: ³ «cuando ya estuvo bien claro esta relación de cantidad, número y lectura. Entonces, ya comenzamos a hablar de la decena y me fui por las familias de los números. Empecé trabajando la decena y ya estoy en la centena y les estoy trabajando lo que es valor posicional, representación pictórica, lectura de números, los símbolos mayor qué, menor qué e

LJXDO VROXFLyQ GH SUREOHPDV FRQ VXPLWDV DJUXSDQ
³ «tienen una mo QHGD GH TXLQLHQWRV \ OHV VREUD«HQ OD SUIFW

SURQWR QR VDEHQ HQWRQFHV TXHG 3 kiFXDQGRFHOODV

expresan, pues se debe identificar que usen las palabras número apropiadas a la cantidad a la que se están refiriendo, cuando las estudiantes realizan compras en la tienda escolar que calculen cuánto dinero les deben devolver, en la solución de problemas de aumento, disminución, cambio y composición que puedan calcular con operaciones las respuestas a las

SUHJXQWDV TXH En estas respuestas las profesoras evidencian propósitos de aprendizaje asociados al reconocimiento de cambios, transformaciones y composiciones numéricas (OEE3) para luego ser aplicadas a problemas aritméticos, asimismo, se reconocen representaciones (gráficas, simbólicas y manipulativas) que posibilitan el desarrollo de destrezas y habilidades para contar, ordenar y comparar cantidades numéricas en la perspectiva de construcción de sentido numérico (Sowder, 1992b). Estas ideas sobre las expectativas de aprendizaje pueden complementarse con situaciones y tareas didácticas, que permitan construir sentido numérico, al desarrollar habilidades y destrezas para comparar los tamaños relativos de los números y determinar lo razonable de usar algunas cantidades (pequeñas, medianas o grandes), así como estimar los resultados numéricos a partir de números de referencia (NTCM, 2000).

Igualmente, en la tarea uno, reconociendo la posición, se propone la cuestión sobre el propósito de la propuesta presentada y los conocimientos previos de los estudiantes en relación al desarrollo de la actividad; en la segunda tarea, explorando cantidades, se cuestiona sobre los estándares curriculares del pensamiento numérico y sistemas numéricos que se asocian con la propuesta; y en la tercera tarea, midiendo espacios, se propone la pregunta sobre el propósito de enseñanza de la tarea planteada (ver apéndice D). En las respuestas de las profesoras sobre las tareas uno y tres se pueden evidenciar iniciativas por el desarrollo de procesos relacionados con la comparación y orden de las cantidades a partir de magnitudes como el tamaño de superficies y la clasificación de regletas de Cuisenaire de acuerdo a la longitud del tamaño de cada barra, así como la cantidad de veces que la superficie de una regleta menor se encuentra en una regleta de mayor extensión.

No obstante, el desarrollo de esta expectativa de aprendizaje (DBA 1 del grado primero) exige el reconocimiento de la posición relativa de objetos o individuos en una disposición ordenada; asociar los números naturales con situaciones de comparación de magnitudes; y estimar posibles

resultados al realizar estrategias de cálculo en los contextos que se proponen en el DBA mencionado como objetivo de aprendizaje.

Además, las destrezas y habilidades relacionadas con la comprensión de diversas representaciones del número requieren articularse con el desarrollo de procedimientos y razonamientos creativos y flexibles de cálculo mental y estimación, como por ejemplo razonar y hacer juicios a partir del tamaño relativo de los números, utilizar números de referencia para aproximar una respuesta numérica y emplear estrategias numéricas para calcular y reflexionar sobre la conveniencia de las respuestas referidas a un problema aritmético, para posibilitar la construcción de sentido numérico a partir de conocimientos y usos con sentido del Número Natural (Sowder, 1992b).

Al indagar a las profesoras sobre la segunda situación, explorando cantidades, se pregunta sobre ¿Cuál podría ser el objetivo de aprendizaje de la clase presentada en la anterior situación?

Al respecto las profesoras en sus respuestas sugieren *la agrupación y el conteo para*

*GHWHUPLQDU FXiQWDV LPiJHQHV KD\´ ³KD\ WDFURVHSU & P
KDFHU DJUXSDFLRQHV \ FRQWDU ORV REMHWRVy HoLQGGLFD
creería que el objetivo es reconocer los objetos de un conjunto a partir del conteo y la*

DJUXSDFLQ´ manera, se propone la pregunta ¿Qué habilidades se pretenden que los estudiantes desarrollen? En relación a la tercera situación midiendo espacios (ver apéndice B

situaciones de reflexión) algunas respuestas de las profesoras plantean lo siguiente: ³ «TXH conozcan las medidas estandarizadas y que le den utilidad en las diferentes cosas que ellos

*KDJDOy &«TXH VHSDQ FRQWDU FDQWLGDGHV GH FROHFFLRQ
que puedan reconocer la cantidad de elementos de una colección y que puedan establecer que
cantidades son mayores, LJXDOHV R PHQRUHV TXH RWUDV´*

En estas respuestas se reconocen objetivos de enseñanza y aprendizaje referidos al desarrollo de destrezas para contar y agrupar, así como de comprensiones para identificar, establecer y reconocer las cantidades numéricas en situaciones cardinales. Sin embargo, la comprensión del número en situaciones cardinales requiere desarrollar estrategias de conteo, agrupamiento y visualización que favorezcan la estimación de cantidades numéricas a partir del desarrollo de procedimientos variados y con sentido de uso del número cardinal. Al analizar las habilidades que proponen las docentes en la segunda respuesta se evidencian ideas intuitivas para el

desarrollo de actividades numéricas que promuevan la construcción de sentido numérico a partir de la comprensión de conceptos, procedimientos algorítmicos y formas de razonar, pero se requiere la articulación de diferentes representaciones numéricas que permitan el desarrollo de diversas y novedosas formas de razonar, utilizar y argumentar procedimientos y estrategias a partir de los sentidos y significados del Número Natural (Sowder 1992a; 1992b).

Los objetivos de aprendizaje de los estudiantes sobre la comprensión del Número Natural y la construcción de sentido numérico en las ideas mencionadas por las profesoras, se ven restringidos por propuestas de enseñanza que privilegian actividades de ejercitación de procedimientos, técnicas y reglas de uso de los números que se plantean en tareas de aprendizaje descontextualizadas que se plantean en libros de texto y ejercicios descargados de páginas web como Red Maestros, Actiludis y Colombia Aprende.

4.1.3.2.2 Limitaciones y dificultades de enseñanza y aprendizaje.

El segundo organizador que se propone en este estudio para el análisis didáctico de tipo cognitivo, está relacionado con *las limitaciones y dificultades de enseñanza y aprendizaje* del Número Natural y la construcción de sentido numérico en el primer ciclo de la educación básica primaria, como un componente que genera información sobre los aspectos de enseñanza que pueden condicionar la práctica educativa y comprensión de un contenido matemático escolar. Según Lupiáñez (2009) este organizador se compone de condiciones, dificultades y objetivos específicos de enseñanza que pueden delimitar la enseñanza y el aprendizaje de un contenido matemático escolar.

A continuación, se proponen algunas limitaciones y dificultades asociadas a la enseñanza y aprendizaje del Número Natural en la perspectiva de la construcción de sentido numérico en el primer ciclo de la educación básica primaria.

Las limitaciones que se vinculan con el reconocimiento de los significados del Número Natural en algunas situaciones las siguientes dificultades y objetivos específicos:

- **D1.** Limitar la enseñanza del contexto de secuencia numérica, al conteo y escritura de numerales en orden ascendente de los términos de la sucesión. (OEE1 y OEE2).

- **D2.** Enseñar el Número Natural sólo desde una perspectiva conjuntista (cardinal). Desconociendo otras situaciones que aportan al sentido y significado de este objeto de conocimiento. (OEE2, OEE3 y OEE4).
- **D3.** Abordar pocas tareas de enseñanza relacionadas con situaciones ordinales de los números naturales. (OEE1 y OEE2).
- **D4.** Generalizar erróneamente propiedades de los números en la enseñanza del Número Natural en diferentes situaciones. (OEE2, OEE3 y OEE4).
- **D5.** Confundir el significado de cardinal y de medida de los números naturales en las tareas de enseñanza. (OEE1, OEE3 y OEE4).

Las limitaciones relacionadas con no establecer conexiones entre algunas representaciones de los Números Naturales con las siguientes dificultades y objetivos específicos:

- **D6.** Establecer equivalencias erróneas entre los números naturales y sus representaciones al enseñar este contenido de aprendizaje. (OEE1, OEE2 y OEE5).
- **D7.** Emplear pocos y de manera limitada los materiales manipulativos y representaciones gráficas en la enseñanza de los números naturales para visualizar relaciones numéricas. (OE5).

Las limitaciones sobre el uso de procesos erróneos de estimación y de cálculo mental en situaciones donde se utiliza el Número Natural, en relación a las siguientes dificultades y objetivos específicos:

- **D8.** Desarrollar pocas tareas de enseñanza que permitan a los estudiantes reconocer criterios para estimar cantidades y medidas relacionadas con los números naturales. (OEE3, OEE4 y OEE6).
- **D9.** Desconocer la magnitud relativa de los números naturales en tareas para la enseñanza de este contenido de aprendizaje. (OEE1, OEE2, OEE4 y OEE6).
- **D10.** Utilizar erróneamente propiedades numéricas en la enseñanza del Número Natural, para obtener el resultado de un cálculo mental. (OEE2, OEE3, OEE4 y OEE6).

Para caracterizar el conocimiento didáctico de las profesoras sobre estas limitaciones y dificultades se propone la siguiente pregunta ¿Qué dificultades de aprendizaje tienen sus estudiantes en relación a la comprensión del Número Natural? (ver apéndice A). Las profesoras

expresan que: ³ «DOJXQDV QLxDV WLHQHQ GLILFXOWDG SDUD HVH UHFRQRFHQ« HQQMHQDVHQHQHQDFV OOHJDQ KDVWDHLOQ QFIPDURHQ grado escolar algunas niñas no representaban bien los diez primeros números, y así mismo la WDEOD SRVLFLyO³Requisitos tienen dificultad para contar a saltos con cantidades mayores a cinco, algunas para indicar la cantidad de láminas de una colección tienen que contar dos y tres veces la colección, se les dificulta contar hacia atrás, reconocer el valor de posición de los números, comparar el mayor y menor número según los numerales del valor de SRVLFLyO´

En estas respuestas y en la revisión documental de los cuadernos de las estudiantes (ver apéndice E), se logra identificar algunas dificultades para establecer la cantidad numérica que describe el cardinal de una colección, escribir el símbolo correspondiente a una cantidad numérica, contar de manera verbal en forma ascendente y descendente números hasta el veinte, proponer pocas actividades de enseñanza del número en situaciones ordinales, aplicar propiedades operativas en situaciones numéricas donde carecen de sentido. Es decir, se interpretan las dificultades D1, D2, D3, D4, D5, D6 y D10 en relación al reconocimiento de los significados del Número Natural en variados contextos de uso (MEN 2006; 2016; Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008) por lo que se plantea la necesidad analizar los alcances que se proponen en el currículo nacional (MEN 1998; 2006) para establecer qué tipo de propuestas, ambientes y materiales se pueden emplear en las prácticas de enseñanza para la comprensión del Número Natural y la construcción de sentido numérico en los profesores y estudiantes.

Se propuso en la primera entrevista (ver apéndice A) la pregunta sobre ¿Qué limitaciones de enseñanza usted reconoce en su práctica que le dificulten enseñar el Número Natural? Para identificar los conocimientos de las profesoras en relación a sus necesidades formativas para la enseñanza del Número Natural y la construcción de sentido numérico. A esta cuestión una de las docentes enuncia: *38 Q D O L P L W D F L y Q T E X H W H Q J R S* *Enseñar los números naturales es que mi formación es en ciencias sociales y en derecho, por eso enseño los números como yo los aprendí en mi época de estudiante. También, me baso mucho en las actividades que proponen los libros de texto y no las comparo con otras propuestas de enseñanza*´. En esta respuesta se reconocen condiciones relacionadas con la formación matemática de los profesores en ejercicio que dificultan la enseñanza de las matemáticas en general, porque deben recurrir a concepciones e intuiciones que generalmente están supeditadas por sus formas de relacionarse en la sociedad

(Radford, 2014). Al reconocer las limitaciones de la formación profesional para la enseñanza de los números naturales, la profesora propone algunas actividades intuitivas a partir del uso cotidiano y más usual que se les asigna a los números, por ello, las capacidades, destrezas y habilidades asociadas a la construcción de sentido numérico son limitadas para valorar, argumentar y generar diferentes formas de usar con sentido los números naturales, por ello, estas limitaciones le obstaculizan reconocer los significados del Número Natural en algunas situaciones, como cuando se propone la enseñanza de la medida solo a partir de la geometría; no establecer conexiones entre diferentes representaciones del Número Natural, por ejemplo al pasar de representaciones de regletas de Cuisenaire a materiales de base diez; y emplear procesos erróneos de estimación y de cálculo mental en algunas situaciones numéricas, cuando se solicita que sumen mentalmente unidades con unidades y decenas con decenas.

Las otras respuestas a esta pregunta no se analizaron, debido a que las profesoras expresaron situaciones relacionadas con el acompañamiento escolar de los acudientes de los estudiantes, la dificultad de trabajar con los materiales didácticos y la dificultad de lectura que tienen los estudiantes para resolver problemas de la enseñanza de las matemáticas. Estas respuestas no daban cuenta de la pregunta de reflexión con el propósito de reconocer cuales situaciones les generaban resistencia a las maestras para poder comprender y enseñar las capacidades, destrezas y habilidades que los estudiantes requieren comprender y utilizar con sentido en relación a los números naturales y a la construcción de sentido numérico.

Respecto al reconocimiento de limitaciones y dificultades de enseñanza y aprendizaje inicialmente en la primera situación, reconociendo la posición (ver apéndice B) se realizó la pregunta ¿Qué dificultades de aprendizaje identifica en los estudiantes de la situación anterior?

Las profesoras indican: ³ 8 QD HV HO FRQWHR TXH QR VH KD DERUGD

UHFRQRFHQ PX\ ELHQ OD SRVLFLyQ QR GMDH QHQ LQD OV H FXDHO

movimientos, cuantos se hacen a la de UHFKD R FXDQWRV DWUiv « QR KD\

SRVLFLyQ TXH RFXSDQ ORV DQLPDOHV GH ODy FDUUHHB HO

que una dificultad es que confunden la pronunciación de los números para ordenar, y se les

dificulta reconocer la posición de un objeto que se ha desplazado en una organización definida,

además, nR UHFRQRFHQ HO DQLPDO TXH YD GH SULPHUR SDUD

Posteriormente, en la segunda situación, explorando cantidades (ver apéndice B) se propone la

siguiente cuestión ¿Crees que en la situación anterior hay limitaciones de enseñanza que el

profesor no considera para que sus estudiantes comprendan el uso del Número Natural en este contexto? ¿Por qué? En esta pregunta algunas respuestas de las profesoras fueron: ³ *Considero que sí, por el solo hecho de que haya una persona o dos que no hayan comprendido bien la agrupación, ya hay una limitante y una falencia* « V H U H T u X L o H e t t i d i a n t e s r e a l i c e n a g r u p a c i o n e s y l u e g o h a g a n c o n t e o y r e p r e s e n t a c i o Q H V 6 t « *porque debe darle paso a que los estudiantes realicen estrategias de adición o sustracción y las evalúen por sí solito V y 3 6 t porque un estudiante evidencia que no cuenta bien a saltos de cinco en cinco y no se explica a los estudiantes que estas ovejas se pueden contar en grupos de dos en dos, tres en tres u otros. De igual manera, las fichas de los puntos permiten componer las cantidades numéricas, pero se dificulta que los estudiantes puedan restar con ellas´*. Finalmente, en la tercera situación, midiendo espacios (ver apéndice B) al comparar la capacidad de los vasos con la de la jarra, se formuló la pregunta ¿Qué pudo haber sucedido para que los grupos de estudiantes tuvieran diferentes respuestas? Respecto a esta pregunta las profesoras mencionan: ³ *8 Q D Y D U L D Q W H S X haber sido la capacidad de los vasos, es decir, que ambos grupos tuvieran vasos con capacidades diferentes. Si los vasos fuesen del mismo tamaño pudo haber sucedido que no los O O H Q D U R Q D O D P L S X P H G F D I S D E H O D V L O S E t u d i a n t e s a l n o l l e n a r c o m p l e t a m e n t e l o s v a s o s o T X H V H G L V W U D M H U R Q \ f r o w s e r r q e x o h y d w f e s t u d i a n t e s n o l l e n a r o n l o s v a s o s d e m a n e r a a d e c u a d a , p a r a m e d i r l a c a p a c i d a d d e l a j a r r a o q u e l o s e s t u d i a n t e s s e e q u i v o q u H Q H Q H O F R Q W H R G H O R V Y D . V R V T X H Y D Q*

En relación a las respuestas alusivas a la primera pregunta, se puede evidenciar que las profesoras describen dificultades de habilidades para realizar el conteo, orden, posición relativa, espacialidad y la pronunciación numérica. Además de las mencionadas, esta situación plantea unas dificultades relativas a la confusión de la secuencia numérica verbal de los números ordinales y cardinales, y la transformación posicional que ocurre cuando un elemento de una colección ordenada se desplaza y se extrae de dicha compilación (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008).

En la segunda pregunta sobre las limitaciones de enseñanza de la segunda situación propuesta algunas menciones se refieren al agrupamiento, conteo, representación, uso de estrategias aditivas que evalúan los mismos estudiantes y el uso de materiales con limitaciones para la realización de la actividad. Sin embargo, estas menciones hacen referencia a estrategias y habilidades que los estudiantes deben desarrollar a lo largo de la situación, pero no están

relacionadas con las limitaciones de enseñanza que el profesor no considera como el conocimiento que los estudiantes tienen sobre las tarjetas de puntos y las ventajas de representar numéricamente una cantidad con este material, así como, el agrupar colecciones de ovejas con la misma cantidad para luego indicar el tamaño del rebaño de ovejas.

En las respuestas de cuestión relacionada con la tercera situación sobre las respuestas de los grupos de estudiantes, las profesoras identifican dificultades como emplear vasos de diferentes tamaños y capacidades o que los estudiantes no llenen totalmente los vasos, por lo que tendrían resultados diferentes y esto daría paso a una primera idea del trabajo con magnitudes continuas. Estas respuestas, permiten reconocer que las profesoras consideran que algunas dificultades asociadas a la revisión de materiales y propósitos de enseñanza como aspectos que limitan o apoyan la comprensión y el desarrollo de capacidades numéricas en los estudiantes en relación a las expectativas de aprendizaje situadas en los currículos significativos y funcionales para la enseñanza del Número Natural y la construcción de sentido numérico en los estudiantes.

No obstante, una limitación que pudo conducir a que los estudiantes presentaran diferentes respuestas asociadas a la comparación de capacidad de los vasos y las jarras es que corresponden a patrones de medida no estandarizados cuyo almacenamiento de líquido depende criterios de llenado que de un llenado a otro varían y esto afecta la comparación de magnitudes.

De igual manera, en la segunda tarea, explorando cantidades, se reflexiona sobre las limitaciones del conocimiento de cada profesora para enseñar los números naturales en situaciones cardinales; en la tercera situación, midiendo espacios, se indagó por las dificultades que pueden tener sus estudiantes a plantearles esta tarea didáctica (ver apéndice D). En las opiniones de las profesoras sobre estas preguntas se reconocen ideas sobre las necesidades formativas en relación a los conceptos (número natural, usos de los números y sistemas de representación numérica), procedimientos (contar, componer, descomponer, adicionar y sustraer cantidades numéricas) y estrategias numéricas (de cálculo y estimación basadas en el sentido y significado de conceptos y procedimientos) que ellas deben comprender para transmitir a sus estudiantes. También, describen algunas dificultades en los estudiantes, referidas al uso de materiales como el pentaminó para reconstruir superficies de espacios donde solo se presenta el contorno, el reconocimiento del concepto de superficie y de la cantidad numérica asociada a las cuadrículas internas de la figura que se les presenta a los estudiantes.

Las dificultades D7, D8 y D9 propuestas en relación a las limitaciones sobre la falta de conexiones entre algunas representaciones y el uso de procesos erróneos de estimación y cálculo mental en situaciones donde se emplea el Número Natural no se destacan en las respuestas ofrecidas por las docentes. Esto puede asociarse a que las situaciones de reflexión que se proponen no tratan de manera literal estas dificultades y las profesoras no han considerado estas conexiones y estrategias como aspectos significativos para reconocer las relaciones numéricas a partir de la representación y el uso de estrategias flexibles para calcular y estimar cantidades como actividades que promueven la construcción de sentido numérico en sus estudiantes.

4.1.3.2.3 Oportunidades para la enseñanza y aprendizaje.

Las *oportunidades para la enseñanza y aprendizaje* corresponden a un organizador del Análisis Didáctico que permite relacionar ambientes, orientaciones, solicitudes y expectativas que promueven el desarrollo de aprendizajes funcionales (Rico y Lupiáñez, 2008) y significativos de los contenidos matemáticos escolares. De acuerdo con Ruiz y Rico (2016) este organizador se compone de condiciones, demandas específicas y retos para la enseñanza que se convierten en una fuente de información de contenidos didácticos que amplían el conocimiento profesional de los maestros y el desarrollo capacidades específicas para la enseñanza de los contenidos matemáticos escolares.

En relación a las oportunidades para la enseñanza y el aprendizaje se plantea la pregunta ¿Qué recursos o materiales utiliza al desarrollar propuestas para la enseñanza del Número Natural? (ver apéndice A). Las profesoras mencionan: ³ (Q HO DXOD PH DSR\ R PXFKR GH trabajo y cuaderno del estudiante del texto 9 DPRV D \$ \$ U d H Q G H u e s u r P l i b r o m u y completo y plantea unas actividades muy pertinentes para lo que uno busca como docente en el momento de su planeación', ³ 8 VR ILFKDV FDU W R Q H V de recursos para el aprendizaje « ILFKDV FRQ FK D S T X S L D V V W S S I D Q H O V D O y Q G H F O D V H materiales entregados el año anterior por el programa PTA, allí vienen tarjetas de valor posicional, círculos de doble cara, cartones de base diez y círculos de unidades de valor posicional, con ellos se realizan actividades para que los estudiantes cuenten algunos conjuntos GH REMHWRV \ U H S U H V H Q W H Q H O . W e B A l m e n t e e n l a t a r e a u n o , reconociendo la posición, se plantea la pregunta sobre otras situaciones del contexto social que pueden complementar la situación presentada y en la tarea tres, midiendo espacios, se considera

la reflexión sobre los materiales didácticos que pueden integrarse a la situación propuesta (ver apéndice D) y en las reflexiones de las profesoras se identifica la intención de presentar actividades en ambientes prácticos como carreras atléticas de las estudiantes, la organización de las estudiantes por edades, estatura y tiempos que demoran desplazándose desde su casa hasta la escuela.

Al intentar reconocer los conocimientos didácticos de las profesoras, en relación con las oportunidades de enseñanza y aprendizaje, se les propone la pregunta sobre ¿En la situación propuesta hay alguna evidencia qué la profesora enseñe actividades de estimación como una estrategia, para que los estudiantes den sentido a sus respuestas? En relación a la tercera situación, midiendo espacios (ver apéndice B). Al respecto las profesoras mencionan: ³ « V t porque ellos deben medir la capacidad de los vasos y la capacidad de las j D U UyD³W't « S R U T X H los estudiantes no realizan el mismo procedimiento para llenar dos o más jarras o baldes, sino que a partir de estas actividades prácticas ellos pueden calcular cuántos vasos se requieren para llenar otra cantidad de recipientes '. Seguidamente, en la misma situación se pregunta por ¿Crees que tiene sentido en la situación anterior que los estudiantes comparen las cantidades y luego las ordenen de acuerdo a su capacidad? ¿Por qué? Las profesoras en sus reflexiones indican: ³ V t S R U T X H a identificar los conceptos de aproximación y estimación, D GLIHUHQFLDU, H O O X Q R G S F O U R X H U R Q O D V P H G L G D V G H F D X Q O L W U R H V L J X D O D G R V E R W H O O D V \ H y ³ W D r o p e r W L Y L G D G V H W U D E D M D O D R U G L Q D O L G D G G H O D V P H G L G D V F X i O H V C

En estas reflexiones se reconoce la intención de asociar la demanda específica sobre la estimación como estrategia de solución a contextos que requieran de la aproximación numérica en situaciones ordinales, cardinales y de medida. No obstante, como lo proponen Ruiz y Rico (2016) se requieren considerar los ambientes y retos de enseñanza que supone la comprensión de este contenido matemático escolar. Es decir, el conocimiento didáctico de la enseñanza del Número Natural para la construcción de sentido numérico requiere de ambientes donde se evidencien los sentidos de uso, las representaciones y las maneras flexibles de utilizar los números para transformar, componer o igualar cantidades numéricas, así como, proponer actividades socioculturales de enseñanza que favorezcan el uso habilidades de estimación y cálculo mental a partir de desafíos cognitivos para que los estudiantes construyan y desarrollen sentido numérico.

En la primera tarea, reconociendo la posición (ver apéndice D), se formula la pregunta ¿Qué otras situaciones del contexto usted considera pueden complementar la situación presentada? Y en la segunda tarea, explorado cantidades, se indagan los conocimientos didácticos de las profesoras en relación a ¿Qué otro tipo de representaciones del número se abordaron en la actividad? Y ¿Qué otras representaciones del número pueden complementar la actividad? En las respuestas a estas cuestiones se reconocen las características que se describen a continuación.

Sobre la primera pregunta las profesoras proponen trabajar con objetos con diferentes longitudes, trabajar secuencias de tiempo con las estudiantes sobre sus actividades rutinarias y organizar las estudiantes en el salón de clase de acuerdo a sus apellidos, en estas propuestas de las profesoras se reconocen orientaciones y solicitudes de las expectativas de aprendizaje referidas al desarrollo de procesos y estrategias para clasificar y ordenar de acuerdo a una característica los elementos de una colección o grupo.

En las repuestas de los interrogantes anteriores sobre la segunda tarea, se reconocen ideas de complementar estas representaciones con tarjetas de valor posicional, ábacos y materiales de base diez, que permiten a los estudiantes identificar características del sistema de numeración decimal, aunque apoyan de manera limitada a la construcción de sentido numérico en relación a la composición numérica en otras formas distintas a la del valor posicional, por ejemplo para reconocer que a 25 se le adicionan 37 es igual que 30 más 32 o que 22 más 40.

En la siguiente sección se describen algunas reflexiones y recomendaciones finales del estudio asociadas al conocimiento didáctico de los profesores en ejercicio, del primer ciclo de educación básica primaria, a partir de la formación profesional para la enseñanza de las matemáticas, la enseñanza y aprendizaje de los números naturales en la perspectiva de la construcción de sentido numérico, y los fundamentos didácticos que sustentan las decisiones, actuaciones y propuestas que el profesor devela en su modelo curricular y didáctico.

Capítulo 5: Consideraciones finales a modo de conclusión

En esta sección se describen las consideraciones finales del estudio, relacionadas con la caracterización del conocimiento didáctico del profesor de primer ciclo de educación básica primaria para la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Número Natural, en la Institución Educativa Ateneo del municipio de Pradera en el Valle del Cauca, desde el punto de vista de los conocimientos didácticos para el desarrollo de prácticas socioculturales de enseñanza y aprendizaje se consideran los avances y desafíos referidos a la formación didáctica de los profesores para la enseñanza de las matemáticas, la caracterización del Conocimiento Didáctico sobre el Número Natural en las situaciones fenoménicas ordinales, cardinales y de medida en la perspectiva del construcción de sentido numérico a partir de un modelo local y teórico de Análisis Didáctico compuesto por el Análisis Didáctico de Contenido (ADC) y el Análisis Didáctico Cognitivo (ADCg), para describir los conocimientos didácticos que las profesoras del estudio de caso, han desarrollado en su proceso formativo y práctico, en relación al modelo curricular y didáctico que ponen en práctica en sus propuestas de enseñanza y aprendizaje de los números naturales.

Asimismo, se presentan algunas consideraciones y posibles temas de investigación para desarrollar en futuros estudios que supongan indagar sobre: los Conocimientos Didácticos para la enseñanza de las matemáticas, el modelo curricular y didáctico de los profesores que enseñan o se forman enseñar las matemáticas escolares, el contenido matemático escolar y las expectativas de aprendizaje sobre el Número Natural en la perspectiva de la construcción de sentido numérico en los profesores y estudiantes.

5.1 Conclusiones

El primer objetivo específico de este estudio cuyo interés centra su atención en caracterizar el conocimiento didáctico sobre la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Número Natural, requiere de la identificación de un modelo curricular y didáctico en la práctica del profesor que se articule con el Modelo Local de Análisis Didáctico (MLAD) (Bedoya, 2002) presentado en el capítulo II de este trabajo, en el que se resumen algunas consideraciones curriculares, conceptuales y procedimentales que ponen de manifiesto la variedad de conocimientos que los profesores de la educación básica primaria deben considerar al momento

de diseñar, implementar y evaluar propuestas para la enseñanza del Número Natural en situaciones fenoménicas (Freudenthal, 1983) de ordinalidad, cardinalidad y medida en la perspectiva de la construcción de sentido numérico, los cuales constituyen fuentes importantes o significativas para que los profesores y estudiantes se aproximen al concepto matemático escolar caracterizado en este trabajo. A través del sistema de categorías planteado en el capítulo 2 de este estudio, se plantean como elementos básicos del Conocimiento Didáctico del profesor del primer ciclo de básica primaria los aspectos relacionados con saberes históricos, fenomenológicos, de estructura conceptual, de representación, de expectativas de aprendizaje, de limitaciones y dificultades, y sobre las oportunidades para fortalecer la práctica de enseñanza y aprendizaje, que favorecen el diseño, implementación y evaluación de propuestas educativas que propicien la construcción de sentido numérico en la enseñanza significativa del Número Natural.

Respecto al segundo objetivo específico, reconocer y describir el Conocimiento Didáctico desarrollado por profesores del primer ciclo de educación básica primaria en relación a la construcción de sentido numérico para la enseñanza del Número Natural, se propusieron situaciones y tareas didácticas que permitieran el desarrollo de procesos de análisis y reflexión por parte de los docentes en encuentros de reflexión. En los capítulos III y IV se presentan algunas estrategias metodológicas consideradas para realizar las observaciones y entrevistas durante los acompañamientos formativos con los docentes en relación a la enseñanza del Número Natural en situaciones de ordinalidad, cardinalidad y medida para la construcción de sentido numérico. En estos encuentros se presentaron situaciones y tareas didácticas diseñadas por el autor del estudio, como instrumentos que propician procesos de análisis y reflexión por parte de las docentes del estudio, para identificar sus conocimientos, opiniones e ideas sobre las propuestas y acciones de enseñanza relacionadas con este contenido matemático escolar. De esta manera las situaciones y tareas didácticas permitieron a los docentes conocer propuestas de enseñanza que favorezcan la construcción de sentido numérico (Sowder, 1992a; 1992b), dado que este fue un referente importante en el diseño de las tareas al referenciarse como expectativa de enseñanza y aprendizaje en la dimensión cognitiva del MLAD.

Al presentar la problemática se proponen dos hipótesis. La primera que el Conocimiento Didáctico sobre la construcción de sentido numérico para la enseñanza del Número Natural que se ha desarrollado por los profesores a través de su participación formativa y práctica, las observaciones y encuentros de reflexión permiten evidenciar la fuerte influencia que

tienen las prácticas donde se privilegia la lectura y escritura correcta de los números como una condición sine qua non que permite el aprendizaje del Número Natural y esto se reconoce en ideas como: ³ O R L P S R U W D Q W E S que los estudiantes **escriban y reconozcan los números**, que identifiquen los valores de los números según sus cifras y que S X H G D Q U H V R O Y H U S U R E O H P L W D V V H Q F L O Y O R Y G E S V X P D V como la que se muestra en la Figura 11.

Ilustración 1. Imagen de una propuesta de enseñanza del Número Natural.

En esta propuesta de enseñanza se reconoce una fuerte creencia que la comprensión del Número Natural sea una condición de aprender a escribirlos y a leerlos, dejando de lado otras actividades igualmente importantes como reconocer los principios y niveles de conteo (Gelman & Gallistel, 1992; Fuson, 1988), ordenar, comparar magnitudes y estimar (Sowder, 1992b). En suma, las observaciones y encuentros de reflexión permiten reconocer que algunas prácticas de enseñanza del Número Natural evidencian que el énfasis otorgado por los profesores es de escribir los numerales de manera correcta y afianzar la ejercitación de algoritmos operativos de manera que la construcción y desarrollo de sentido sobre las operaciones y los números empleados en dichas operaciones sea parcializada.

La segunda hipótesis mencionada, relaciona el desarrollo de prácticas de enseñanza intuitivas basadas en concepciones y creencias influenciadas por su experiencia, formación y materiales educativos que apoyan sus prácticas de enseñanza de este contenido escolar. En este estudio mediante expresiones como: ³ (Q H O D X O D P H D S R \ R P X F K R G H O F y cuaderno del estudia Q W H 9 D P R V D \$ S U H Q G H U « P H S D U H F H T X H H

plantea unas actividades muy pertinentes para lo que uno busca como docente en el momento de V X S O D Q Se Defino @ que las profesoras identifican usos funcionales del Número en situaciones socioculturales, aunque no identifican el potencial de este escenario para trabajar los contextos (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008; Castro y Cañadas, 2016) del número y así desarrollar estrategias de estimación, cálculo mental y estrategias flexibles de cálculo basadas en el conocimiento de relaciones, reglas y usos del número que permiten construir el sentido numérico y ampliar el significado del Número Natural (Sowder, 1992a, 1992b; NCTM, 2000). También, en las observaciones de las propuestas de enseñanza de los libros de texto, se puede indicar que los autores y editoriales de estos generan propuestas de enseñanza para unos profesores y estudiantes ideados que no corresponden con la situación sociocultural de estas comunidades.

A través de expresiones como:

*«lo más importante que las estudiantes deben aprender son:
las representación del número, el conteo, la representación gráfica, la representación pictórica
y la resolución de problemas teniendo en cuenta el contexto»*

Y debe saber es la numeración, identificar el número antes, entre y después, hacer secuencia de números naturales.

Se puede identificar cuáles profesoras, e incluso los niños, manejan con mayor fluidez algunas preguntas de reflexión descritas en el capítulo IV de este trabajo, evidencian un conocimiento curricular para la enseñanza de los números naturales que se relaciona con algunas representaciones simbólicas, verbales, gráficas y manipulativas, lo que deja ver que sus respuestas tienen una fuerte influencia por los contenidos abordados en talleres de programas de formación como Todos A Aprender, asimismo, se priorizan en los planes de aula situaciones cardinales y ordinales, dando prioridad a unas más que otras, y algunos contextos en los que los números se utilizan de manera operativa. Esto refleja un saber sobre las representaciones y sobre las situaciones fenoménicas (ordinales, cardinales y de medida) que pueden complementarse con el análisis crítico y reflexivo del paso de unas representaciones a otras tomando decisiones a partir de las características, reglas y relaciones numéricas, así como de uso funcional que privilegia la construcción de sentido numérico y genere un amplio conocimiento significativo sobre el Número Natural.

Además, con expresiones como ³8VR ILFKDV FDUWRQHV ULQFRQHV &5\$
SLRODV SHSDV«HWSBDV«DOyQ GH FODVH VH XVDQ ORV PD

anterior por el programa PTA, allí vienen tarjetas de valor posicional, círculos de doble cara, cartones de base diez y círculos de unidades de valor posicional, con ellos se realizan actividades para que los estudiantes cuenten algunos conjuntos de objetos y representen el total

GH REMHW RV FR Q O RV E DM H U D O H V. Los participantes del estudio emplean materiales didácticos como objetos manipulativos, regletas y bloques base diez que buscan apoyar el procesos de enseñanza y aprendizaje de los números naturales en situaciones ordinales y cardinales, pero no se alcanza a analizar a profundidad qué estrategias y capacidades surgen de estas representaciones (Lupiáñez, 2009) y qué fenómenos posibilitan pasar de unos registros a otros a partir de los múltiples usos del número (Puig, 1997; Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008; Ruiz, 2016).

En ideas como: ³ «en cuanto a medidas, pues trabajo los centímetros, el metro que constantemente lo ven con las mamás modistas y que ellos ya saben que es un metro, pero les falta O D D S O L F D S E l e c o n d e Q e». Las profesoras relacionan el Número Natural en situaciones de medida a partir de la enseñanza de la geometría, para considerar las magnitudes de longitud, superficie y capacidad. Esta idea sobre el Número Natural en situaciones de medida se debe a que los principales referentes para la planeación de las actividades matemáticas es las situaciones socioculturales del uso funcional del Número en la medida y los libros de texto en los que predominan situaciones métricas basadas en la comparación de magnitudes continuas para lo cual el uso del Número Natural es limitado y la dificultad de reconocer que en la historia, como se describió en el Análisis didáctico histórico epistemológico, de acuerdo a (Vasquez, 2010) esa dicotomía entre la unidad y la magnitud fue superada por Stevin reconociendo desde actividades prácticas que el número puede describir tanto unidades como magnitudes. Igualmente, observando los textos de apoyo de las docentes se identifican escasas situaciones donde aparece el Número Natural en situaciones de medida y todas se desarrollan en las unidades asociadas con la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría. Además, son escasos los ejemplos que ofrecen los documentos curriculares como lineamientos, DBA y mallas de aprendizaje de los primeros grados que permitan comprender las situaciones de aprendizaje relacionadas con el Número Natural en situaciones de medida, porque se ofrecen más ideas sobre situaciones cardinales y ordinales.

El desarrollo de esta investigación ha permitido una transformación del modelo curricular y didáctico del autor para apoyar el proceso formativo sobre la enseñanza de las matemáticas, en

los docentes en ejercicio de la institución acompañada, mediante las prácticas de tutoría del Programa Todos a Aprender. El diseño y ejecución de este estudio posibilita comprender los conocimientos didácticos que los maestros han desarrollado a lo largo de su experiencia profesional y cómo estos conocimientos están relacionados con sus prácticas socioculturales (Radford, 2014), que en la mayoría de los casos no son realizadas conscientemente, para el desarrollo de situaciones, tareas y evidencias de aprendizaje apropiadas para la comprensión y uso flexible de los números naturales en la perspectiva de la construcción de sentido numérico en sus estudiantes.

Igualmente, el conocimiento desarrollado a partir de esta investigación ha permitido comprender que la formación profesional situada en el contexto local, permite el desarrollo de capacidades específicas y propias para el fortalecimiento de los conocimientos curriculares y didácticos de los profesores y de sus formadores, esto a partir del conocimiento profundo del currículo escolar, las prácticas socioculturales y las experiencias formativas de los profesores acompañados en el proceso de formación. Estos conocimientos requieren de la comprensión de los formadores de profesores (Ball, Thames & Phelps, 2008; Bedoya, 2002), para adelantar reflexiones didácticas en relación a la enseñanza del Número Natural para la construcción de sentido numérico en los escolares, mediante procedimientos y evidencias de aprendizaje que relacionen las ideas subjetivas de los escolares que se doten de significado en situaciones que requieran el uso de diferentes razonamientos, estrategias y representaciones basadas en la comprensión de este tópico de aprendizaje.

Este estudio posibilitó la caracterización del Conocimiento Didáctico de algunos profesores en ejercicio, este proceso de reconocimiento de los saberes parte del supuesto de que la experiencia y la formación personal se convierten en fuentes básicas para la generación de un modelo curricular y didáctico que fundamente teóricamente las propuestas de enseñanza de las matemáticas escolares. Este tipo de conocimiento es importante para el formador de profesores de matemáticas (Ball, Thames & Phelps, 2008; Bedoya, 2002), debido a que permite seleccionar los enfoques, metodologías, materiales y perspectivas de aprendizaje relacionadas con el contexto sociocultural donde el maestro desarrolla su práctica profesional. En este sentido, los programas de formación matemática de profesores (en formación inicial o continua) necesitan considerar los conocimientos históricos, fenomenológicos, sobre la estructura conceptual, sobre el sistema de representaciones, las expectativas de aprendizaje, las limitaciones y dificultades, y

sobre las oportunidades para fortalecer la práctica de enseñanza y aprendizaje planteadas en el Modelo Local de Análisis Didáctico, que se plantean como elementos básicos para fortalecer los conocimientos curriculares y didácticos que amplían la fundamentación del modelo curricular y didáctico para generar decisiones basadas en perspectivas de formación y el desarrollo desde enfoques socioculturales (Freudenthal, 1983; Radford, 2014) y la implementación de currículos funcionales (Rico y Lupiáñez, 2008) que permitan el desarrollo de competencias profesionales y la reflexión sobre los ambientes, recursos y propuestas para promover el aprendizaje de las matemáticas con sentido.

5.1.1 Educación Matemática y Didáctica de las Matemáticas en la formación de profesores.

De acuerdo a los conocimientos descritos sobre esta categoría, en el capítulo IV de este trabajo, se sugiere que en los programas de formación de profesores de matemáticas se reflexione sobre la construcción de sentido numérico (u otros sentidos como: espacial, métrico, aleatorio y algebraico) como un recurso mediacional para un currículo integrador y funcional de las matemáticas (Rico y Lupiáñez, 2008). Esto implica que la formación del profesor de matemáticas a partir de modelos curriculares y didácticos posibilite la innovación desde su desempeño profesional y favorezcan el desarrollo de competencias para analizar y seleccionar las situaciones, recursos y representaciones que permitan modelar propuestas de enseñanza y aprendizaje, evaluar y reorientar las propuestas de enseñanza y aprendizaje para la comprensión con sentido de los estudiantes.

Las tareas y situaciones que se proponen en el marco de la enseñanza de las matemáticas como cuerpo social de conocimiento y desde un enfoque funcional, requieren la comprensión de significados, sentidos y modos de uso de los números naturales (u otros contenidos escolares). Por ello, en este estudio se promueven las propuestas educativas para la enseñanza de los números naturales en el currículo escolar que favorezcan la construcción, organización, el sentido y uso de los conceptos, procedimientos y acciones que realizamos en diferentes fenómenos de la realidad (Freudenthal, 1983; Radford, 2014; Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008). Igualmente, el proceso formativo de los profesores de matemáticas requiere privilegiar la toma de conciencia y reflexión sobre la funcionalidad y las capacidades numéricas que los escolares requieren fortalecer a partir de la comprensión y sentido de los Números Naturales, porque los significados numéricos que cada profesor o estudiante adquiere están definidos por la

toma de conciencia sobre los números y la numeración como un producto que se ha transmitido como parte de la herencia cultural.

5.1.2 Modelo curricular y didáctico para la enseñanza del Número Natural.

En relación a los conocimientos que las profesoras evidencian, en las reflexiones del capítulo IV de este trabajo, sobre el modelo curricular y didáctico que los profesores del primer ciclo de educación básica primaria emplean para enseñar el Número Natural y desarrollar sentido numérico, se solicita una atención a partir de su contexto local (Bedoya, 2002) y los conocimientos didácticos que median la enseñanza de este contenido matemático escolar. Por ello, los programas de formación inicial o continua de profesores de matemáticas requieren identificar los conocimientos disciplinares, académicos, socioculturales y didácticos que estos manifiestan en gestiones, discursos y recursos que emplean para diseñar, implementar y evaluar las propuestas educativas sobre la enseñanza de los números naturales, así como para analizar y diseñar un currículo integrador y significativo que se origine de los saberes y subjetividades que han sido desarrollados por el profesor a lo largo de su desarrollo personal y profesional, para validar estos saberes y subjetividades en comunidades que socialmente generen nuevas formas de designar, aprender de y organizar las prácticas (Rico y Gómez, 2002; Radford, 2014).

La formación y la práctica de los profesores en ejercicio, que enseñan matemáticas, están mediadas por las reflexiones e informes que surgen al interior de comunidades académicas (Rico, 1997b), por lo que se recomienda pertenecer o conformar comunidades de formación, innovación e investigación sobre la enseñanza de las matemáticas escolares al interior de las instituciones educativas. Sin embargo, el participar de estos espacios de reflexión formativa requiere de condiciones que incluyen la gestión de los planes curriculares de formación que garanticen la reflexión crítica de las propuestas educativas, la voluntad e interés de los maestros en participar de dichos escenarios, el conocimiento didáctico y curricular para realizar ajustes a las propuestas educativas y el diseño e implementación de unidades de enseñanza que relacionen dichos conocimientos para la enseñanza del Número Natural y la construcción de sentido numérico. Además, se espera que las reflexiones generadas al interior de las comunidades de formación, innovación e investigación doten al docente de conocimientos didácticos relacionados con los contenidos y con los aspectos curriculares que le permitan aproximarse a los organizadores que se han propuesto en el Modelo Local de Análisis Didáctico presentado en este trabajo, en el que

se promueve una redimensión de la concepción sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje desde una perspectiva sociocultural, que tenga en cuenta las situaciones fenoménicas del contenido matemático escolar y las prácticas socioculturales que generan transformación en los conocimientos matemáticos a partir del proceso de objetivación y subjetivación (Freudenthal, 1983; Radford, 2014). Igualmente, en transcurso de estas prácticas formativas se pretende fomentar un aprendizaje de las matemáticas con sentido, a partir de un currículo integrador, funcional, significativo y para la comprensión (MEN, 2006; Rico y Lupiáñez, 2008).

5.1.3 Contextualización del sentido numérico y el Número Natural.

La reflexión sobre las ideas de las profesoras asociadas a esta categoría de análisis, permiten considerar que en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los números naturales se necesita de la concepción del currículo de matemáticas como una fuente de conocimientos integradores, funcionales y significativos que permita que los estudiantes generen estrategias cognitivas personales que posibiliten el planteamiento y la solución de problemas cotidianos, expresarse en cuestiones profesionales, clasificar, organizar y comunicar (MEN, 1998; 2006) la información matemática para tomar decisiones razonadas e interpretar estas informaciones con razonamientos adecuados (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008). Es decir, la enseñanza y aprendizaje de los números naturales requiere de conceptos y procedimientos que se utilizan con sentido y de forma activa para generar y dar respuesta a situaciones del entorno social que aportan a su significado.

Ideas planteadas durante los encuentros de reflexión, como: ³ VLHP SUH SDUWR GH ORV *básicos de competencia, los Derechos básicos de aprendizaje, la malla curricular y la matriz de referencia,.. Y tengo en cuenta el diagnóstico de cada niño, porque no son grupos* K R P R J p Q n h r v. Están una aproximación de uso de los referentes curriculares, para conocer las expectativas de enseñanza y aprendizaje de los números naturales, pero este uso requiere de: la comprensión de términos disciplinares, la mediación de situaciones de enseñanza potentes que permitan generar capacidades numéricas tanto en los maestros como en los escolares, y hacer conscientes a los maestros que el propósito de enseñar los números naturales es desarrollar un significado amplio que permita relacionar las situaciones fenoménicas con estrategias flexibles para contar, comparar magnitudes, ordenar, estimar y usar estrategias de cálculo mental (NCTM, 2000; MEN, 2006).

Además, el proceso de enseñanza y aprendizaje de los números naturales facilita el paso de niveles básicos a niveles sofisticados de conocimiento numérico en los que se perfeccionan conceptos, representaciones, habilidades, razonamientos, reconocimientos, cálculos, estimaciones y usos flexibles de los números, para plantear y resolver problemas numéricos a través de las conexiones de las comprensiones numéricas iniciales con los posteriores (NCTM, 2000). A este paso de niveles básicos a niveles avanzados lo designamos en este estudio con el nombre de sentido numérico, que resulta de examinar números, en nuestro caso el sistema de los números naturales, y asociarlos con procedimientos que no estén supeditados al uso exclusivo de razonamientos sobre los algoritmos tradicionales. La construcción de sentido numérico favorece el desarrollo de estrategias de conteo, orden, comparación de magnitudes, cálculo y estimación de cantidades que los docentes necesitan abordar en sus propuestas de enseñanza del Número Natural para que los estudiantes puedan avanzar en los niveles de conocimiento numérico más avanzados (Sowder, 1992b).

La siguiente Ilustración 2 que se muestra a continuación, permite reconocer que los profesores retoman actividades centradas en la secuenciación y comparación análoga de los números a partir de la escritura y pronunciación de los términos número.

Ilustración 2. Propuesta para relacionar ordinales y cardinales en la enseñanza del Número Natural.

Esta perspectiva ha derivado que se implementen tareas y actividades para desarrollar algunas situaciones desprovistas de sentido, específicamente situaciones numéricas (ordinales, cardinales y de medida) que privilegian el uso de cálculos escritos precisos, para que los escolares empleen

algoritmos tradicionales, procedimientos y reglas, que limitan el uso de estrategias flexibles de estimación, comparación y las relaciones entre los conceptos numéricos (Sowder 1992b).

5.1.4 Modelo Local de Análisis Didáctico.

El Modelo Local diseñado para identificar el Conocimiento Didáctico, desarrollado por el profesor a lo largo de su experiencia práctica y formativa en relación con la construcción de sentido numérico en la enseñanza del Número Natural, plantea la necesidad de reconocer elementos asociados a: la estructura conceptual de los números naturales, la historia evolutiva del contenido de enseñanza, los sistemas de representación y las situaciones fenoménicas que dotan de sentido y significado a este contenido escolar, para complementar el conocimiento de contenido y tomar decisiones sobre las propuestas escolares que se originen a partir de aspectos socioculturales. Asimismo, este Modelo Local demanda la comprensión, articulación y el razonamiento crítico de los referentes curriculares que permitan identificar las expectativas, limitaciones y dificultades, y oportunidades para la enseñanza y el aprendizaje de los números naturales desde una perspectiva fenomenológica para la construcción de sentido numérico en los escolares (Bedoya, 2002; Rico, Lupiáñez y Molina, 2013; Corrales, 2013; Hurtado, 2014).

Para desarrollar los Conocimientos Didácticos de los profesores en los aspectos abordados en el Modelo Local se requiere del acompañamiento reflexivo y formativo por parte de los formadores con un amplio conocimiento de las componentes de los organizadores del currículo, para concientizar a los profesores sobre aquellos conocimientos que no son evidentes al momento de tomar decisiones para diseñar, desarrollar o evaluar propuestas de enseñanza con sentido y significado del Número Natural. También es importante concientizar a los profesores sobre la importancia de construir sentido numérico, como una forma de participar en prácticas sociales para entender información estadística, hacer cálculos y estimaciones numéricas, tomar decisiones financieras y personales que les demanden el uso de los números (Hernández, López, Quintero y Velásquez, 2015), en nuestro caso números naturales.

El Modelo Local de Análisis Didáctico es una estrategia que permite el desarrollo de Conocimiento Didáctico para el fortalecimiento de capacidades profesionales (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008) en procesos de formación de profesores que enseñan

matemáticas, partiendo del Análisis de Contenido, para reconocer los significados, representaciones, sentidos y modos de uso que se han asignado a los contenidos matemáticos escolares, y continuando con el Análisis Cognitivo cuya finalidad es el desarrollo de capacidades cognitivas centradas en las expectativas de aprendizaje, las limitaciones y dificultades de aprendizaje, así como las propuestas que permiten articular los contenidos y el desarrollo de habilidades a través de una planeación curricular que considere los sentidos, modos de uso y significados del sistema de los números naturales o de cualquier otro tópico de la enseñanza de las matemáticas.

La formación a través de un Modelo Local de Análisis Didáctico, debe acompañarse de situaciones de enseñanza o Unidades Didácticas Guía que permitan la reflexión de los profesores situada en el conocimiento del contenido matemático de enseñanza y las capacidades formativas que se espera desarrollar a lo largo de un programa formativo (Bedoya, 2002; Rico, Lupiáñez y Molina, 2013). Este procesos de formación, centrado en el Modelo Local de Análisis Didáctico plantea la necesidad de concebir el aprendizaje de las matemáticas como una herencia cultural que ha sido desarrollada por sujetos y comunidades a través de la historia, por tanto requiere considerar las subjetividades que el profesor o futuro profesor haya desarrollado como sujeto a través de su práctica social.

5.2. Recomendaciones generales

Algunas sugerencias para el desarrollo de investigaciones sobre los conocimientos didácticos del profesor para la enseñanza del Número Natural están referidas al diseño y uso de Unidades Didácticas Guía (UDG) basadas en el sistema de categorías de análisis denominado Modelo Local de Análisis Didáctico, también para la evaluación de las capacidades numéricas que desarrollan los profesores con la mediación de Unidad Didáctica Guía centrada en la construcción de sentido numérico y el desarrollo de habilidades en el cálculo mental y la estimación.

De acuerdo con Sowder (1992b) el sentido numérico permite el desarrollo de una red de conocimientos, procedimientos y actitudes que debe acompañarse de experiencias donde se piensen y usen los números de manera flexible a partir del conocimiento de la numeración, la magnitud numérica, el cálculo mental y la estimación. Por ello, sugerimos que las situaciones relacionadas con el cálculo mental y la estimación como capacidades que permiten la integración

del sentido numérico en campos del pensamiento matemático como en la medición, la geometría, el álgebra y la estadística.

Se plantea también desarrollar estudios sobre el desarrollo de Unidades Didácticas Guía que integren los referentes curriculares en relación con los desarrollos de la investigación actual, porque en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y en Los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) se presenta una propuesta de formación matemática basada en el desarrollo del Pensamiento Numérico como parte del Pensamiento Matemático que es más amplio. No obstante, se sugiere que el Pensamiento Numérico se articule con conocimientos subjetivos que se basen en labores socioculturales que desarrollados en comunidades particulares. Por lo que se plantea el desarrollo del Pensamiento Numérico a través de la construcción de sentido numérico centrado en habilidades numéricas flexibles y creativas que permitan resolver, proponer, argumentar y razonar sobre el sentido y significado de los números y la numeración.

Se recomienda a los programas de formación a profesores de matemáticas analicen críticamente las propuestas de los libros de texto a partir de unidades de análisis que articulen conocimientos sobre el currículo escolar y el contenido matemático de estudio, para reconocer los tipos de Pensamiento Matemático que promueven en sus propuestas educativas (Rico, 1997b), así como transformar estas propuestas para que sean significativas y con sentido para los profesores y estudiantes. Es decir, analizar las propuestas educativas de enseñanza de las matemáticas escolares a partir de categorías que integren las dimensiones conceptuales y procedimentales de los conocimientos didácticos, para desarrollar actitudes críticas, innovadoras y académicas (Bedoya, 2002; Hurtado, 2014) en el modelo curricular y didáctico que práctica el profesor que enseña matemáticas en cualquier nivel escolar.

El estudio de los conocimientos didácticos del profesor requiere el estudio epistemológico y fenomenológico de los contenidos escolares (Rico y Gómez, 2002; Bedoya, 2002; Rico, Lupiáñez y Molina, 2013) porque en la mayoría de propuestas educativas relacionadas con la enseñanza del Número Natural en la perspectiva de la construcción de sentido numérico, están mediadas por la intuición, la experiencia formativa y los usos generales del número que en la sociedad se atribuyen escribir, contar, ordenar y cuantificar. Por ello, es necesario desarrollar

programas que acompañen y reflexionen sobre la práctica de los profesores que enseñan matemáticas con el objetivo de

Además, el desarrollo de esta investigación contribuyó al reconocimiento de la importancia del trabajo en comunidades de formación, innovación e investigación, debido a que en las tutorías dentro del Programa Todos a Aprender, se requiere que las instituciones educativas cuenten con profesores que integren comunidades académicas que analicen, apliquen y valoren los conocimientos producidos en la comunidad de investigación en el campo de la educación. En este sentido, reconocemos que un foco de investigación pueden ser los conocimientos didácticos compartidos por comunidades de formación, innovación e investigación y cómo estos conocimientos se desarrollan mediante el estudio de propuestas innovadoras para la enseñanza de los números y la numeración.

Referencias bibliográficas

Ley General de la Educación Colombiana. Ley 115. (1994). Bogotá, Colombia.

Alba, J. A. (2015). Desarrollo de competencias profesionales de profesores de matemáticas en ejercicio: una propuesta de formación desde la reflexión sobre la práctica. En B.

Didáctica de la matemática: una mirada internacional, empírica y teórica (pp. 29-47). Chía, Colombia: Universidad de La Sabana.

Almeida, R., y Bruno, A. (2015). Mirar los números con sentido. *Uno revista de Didáctica de las matemáticas.* (70), 9-15.

Askew, M. (2008). Mathematical discipline knowledge requirements for prospective primary teachers, and the structure and teaching approaches of programs designed to develop that knowledge. En P. Sullivan & T. Wood (Eds.) *The International Handbook of Mathematics Teacher Education VOLUME 1: Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (pp. 13-35). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Ball, D., Hill, H., & Bass. H. (2005) Knowing Mathematics for Teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator* (29), 14-22.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher education* (59), 389 - 407.

Bedoya, E. (2002). *Formación inicial de profesores de matemáticas: enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras graficadoras.* (Tesis doctoral) no publicada, Universidad de Granada, Granada, España.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años)* (Tesis doctoral), Universidad de Granada, Granada, España.

- Castro, E., y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico. (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. (pp. 95 – 124). Barcelona, España: Ice/Horsori. Universitat de Barcelona.
- Castro, E., y Cañadas, M. C. (2016). Números y operaciones. En E. Castro y E. Castro (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil* (pp. 153-172). Madrid, España: Ediciones Pirámide.
- Castro, E., Rico, L., y Castro, E. (1987). *Números y operaciones. Fundamentos para una didáctica escolar*. Madrid, España: Editorial Síntesis S.A.
- Castro, E., y Molina, M. (2011). Números naturales y sistemas de numeración. En I. Segovia y L. Rico (Coords.) *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 47-74). Madrid, España: Ediciones Pirámide.
- Castro, E., y Segovia, I. (2015). Sentido numérico. En P. Flores y L. Rico (Coords.) *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 109-126). Madrid, España: Ediciones Pirámide.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018), *Research Methods in Education (8th Ed.)*. Oxford, Great Britain: Routledge.
- Colombia, M.E.N. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Editorial Magisterio.
- Colombia, M.E.N. (2006). *Estándares básicos de competencias matemáticas*. Bogotá, Colombia: Imprenta Nacional de Colombia. Obtenido de http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/DBA_Matem%C3%A1ticas.pdf
- Colombia, M.E.N. (2013). Guía uno: Sustentos del Programa para la transformación de localidad educativa. Programa todos a aprender. Obtenido de https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-10659_archivo_pdf_sustentos_junio27_2013.pdf
- Colombia, M.E.N. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje*. Bogotá, Colombia: Panamericana formas e impresos S.A.

- Corrales, M. J. (2013). *Análisis didáctico de una propuesta instruccional en torno a los números racionales en el grado séptimo en la Institución Educativa San Vicente*. (Tesis de maestría). Instituto de educación y pedagogía. Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. New York, Estados Unidos: Kluwer Academic Publishers.
- Freudenthal, H. (1991). Didactical Principles. En H. Freudenthal (Ed.), *Revisiting Mathematics Education: China Lectures* (pp. 45 - 124). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.
- Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New York, Estados Unidos: Springer-Verlag.
- Gelman, R., & Gallistel, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, 44(1), 43-74.
- Godino, J. D. (1991). Hacia una teoría de la didáctica de las matemáticas. En A. Gutiérrez (Ed.) *Área de Conocimiento: Didáctica de la Matemática*. (pp. 105-148). Madrid, España: Editorial Síntesis.
- Gómez, P., y Rico, L. (2002). Análisis didáctico, conocimiento didáctico y formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Documento no publicado. Granada, España: Universidad de Granada.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. (Tesis doctoral), Universidad de Granada, Granada, España.
- Gómez, P., y Cañadas, M. C. (2011) La fenomenología en la formación de profesores de matemáticas. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación*, 2(Especial), 78-89. Disponible en <https://revistas.uniandes.edu.co/doi/pdf/10.18175/vys2.especial.2011.05>
- Guacaneme, E. A., y Mora, L. C. (2012). La educación del profesor de matemáticas como campo de investigación. *Revista Papeles* 4(7), 102-109. Colombia. Obtenido de <http://csifesvr.uan.edu.co/index.php/papeles/article/viewFile/211/181>

- Guacaneme, E., Obando, G., Garzón, D., y Villa, J. (2013). Informe sobre la formación inicial y continua de profesores de Matemáticas: El caso de Colombia. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(especial) 11-49. Costa Rica. Obtenido de <http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/12220>
- Hernández, O., López, J., Quintero, A., y Velásquez, A. (2015). *El sentido numérico: más allá de los números*. San Juan, Puerto Rico: Createspace.
- Hurtado, C. A. (2014). *Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real y su impacto en la educación básica*. (Tesis de maestría). Instituto de educación y pedagogía. Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Institución Educativa Ateneo. (2017). *Plan de área institucional para la enseñanza de las matemáticas*.
- Jaworski, B. (2008). Development of the mathematics teacher educator learning and development. En B. Jaworski and T. Wood (Eds.), *the Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*, (4) (pp. 1-13). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.
- Jordan, N. C., Glutting, J., & Ramineni, C. (2010). The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences*, 20, 82-88.
- Llinares, S. (2012). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación matemática* 7(10), 53-62. Costa Rica. Obtenido de <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/viewFile/10559/9996>
- Llinares, S. (2014). Conocimiento de matemáticas y tareas en la formación de maestros. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* 9(12), 205-220. Costa Rica. Obtenido de <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/18921/19035>
- Llinares, S., & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teachers educators as learners. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 429-459). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

- Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. (Tesis doctoral), Universidad de Granada, Granada, España.
- Lupiáñez, J. L. (2013). Análisis didáctico: La planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico., J. L. Lupiáñez., y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 81-101). Granada, España: Comares.
- NCTM (1989). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Edición en castellano. Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES".
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Estados Unidos: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ponte, J., & Chapman, O. (2006).
Gutierrez y P. Boero. (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (pp. 461-494). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. R. (coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: Instituto de Ciencias de la Educación-Horsori.
- Radford, L. (2000).
Analysis. *Educational Studies in Mathematics*. 42(3), 237 - 268.
- Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista latinoamericana de Etnomatemática*. 7(2), 132 - 150.
- Rico, L. (Ed.). (1997a). Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria. Madrid, España: Editorial Síntesis.
- Rico, L. (Coord.). (1997b). La educación matemática en la enseñanza secundaria. Barcelona, España: ICE-Horsori.

- Rico, L., Lupiáñez, J., y Molina, M. (Eds.) (2013). *Análisis didáctico en educación matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada, España: Comares.
- Rico, L., y Lupiáñez, J. L. (2015). Aprender las matemáticas escolares. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 41-60). Madrid, España: Ediciones Pirámide.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Revista Suma*, (58), 7-23.
- Rico, L., y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid, España: Alianza Editorial.
- Rico, L., y Segovia, I. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid, España: Síntesis.
- Ruiz, J. F. (2016). Sentido y modos de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (Coords.) *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 139-151). Madrid, España: Ediciones Pirámide.
- Ruiz, J. F., y Rico, L. (2016). Oportunidades para el aprendizaje. En L. Rico y A. Moreno (Coords.) *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 209-224). Madrid, España: Ediciones Pirámide.
- Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA*. 5(4), 129-145. España. Obtenido de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3653702>
- Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes y Una empresa docente.
- Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista Ema*. 6(1), 3-26. Colombia. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/1122/1/70_Skovsmose2000Escenarios_RevEMA.pdf
- Socas, M. M. (2011). Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria: Buenas prácticas. *Ed7ucatio siglo XXI* 29(2), 199-224. España. Obtenido de <http://revistas.um.es/educatio/article/view/133031>

- Sowder, J. (1992a). Estimation and number sense. En D. Grouws. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 245 – 275). Nueva York, United States of America: MacMillan.
- Sowder, J. (1992b). Making Sense of Numbers in School Mathematics. En G. Leinhardt, R. Putman y R. Hattrup. (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 1-51) New Jersey, United States of America: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Sowder, J. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. Lester. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.157-223). Charlotte, United States of America: Information Age Publishing.
- Vásquez, N. L. (2010). *Un ejercicio de transposición didáctica en torno al concepto de número natural en el preescolar y el primer grado de educación básica*. (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Apéndices

Apéndice A – Unidades y preguntas de análisis

Entrevista inicial		
<i>Unidades de análisis</i>	<i>Preguntas centrales</i>	<i>Preguntas auxiliares</i>
FP	¿Qué cursos o talleres de enseñanza de las matemáticas han realizado en su formación de licenciatura, postgrado o a través de programas de cualificación?	• ¿Qué materiales (libros o guías) utilizaban en los cursos o talleres de enseñanza de las matemáticas? • ¿En qué Universidad o Programa realizaron estos estudios?
CNN	¿Qué conocimientos matemáticos han logrado desarrollar sus estudiantes en relación al Pensamiento Numérico?	• ¿Qué es lo más importante que un estudiante debe desarrollar sobre el pensamiento numérico en el primer ciclo de básica primaria? • ¿Qué es lo más importante que un estudiante debe desarrollar sobre el Número Natural en el primer ciclo de educación básica primaria?
	¿Cómo organiza usted la enseñanza del Número Natural en el plan de aula del año escolar?	• ¿Qué tipo de actividades o tareas propone para la enseñanza del Número Natural? • ¿En qué documentos se apoya para planear las actividades de enseñanza sobre el Número Natural? • ¿Qué recursos o materiales utiliza al desarrollar estas actividades? • ¿Qué aprendizajes sobre el Número Natural evalúa en sus estudiantes? • ¿Qué aprendizajes matemáticos se deben desarrollar en los estudiantes para evidenciar <i>Identifica los usos de los números (como código, cardinal, medida, ordinal) y las operaciones (suma y resta) en contextos de juego, familiares, económicos, entre otros</i>
CSN	Teniendo en cuenta que el estándar <i>Reconozco significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros)</i> desarrollar en el primer ciclo de básica primaria. ¿Qué contextos emplea usted para desarrollar el Número Natural?	• En cada contexto mencionado ¿Qué habilidades se pretenden que los estudiantes desarrollen? • ¿Qué representaciones numéricas tiene en cuenta para la enseñanza del Número Natural? • ¿Qué dificultades de aprendizaje tienen sus estudiantes en relación a la comprensión del

Número Natural?

- ¿Qué limitaciones de enseñanza usted reconoce al desarrollar actividades educativas sobre el Número Natural?
-

Tabla 15. Unidades de análisis y temas de centrales de investigación de la entrevista inicial.

Apéndice B - Situaciones de reflexión para las docentes

Primera situación: reconociendo la posición

Durante un momento de la clase de matemáticas en el grado primero se presenta la siguiente tarea con los estudiantes y se generan la siguiente discusión:

Profesor: Después de contarles el cuento sobre la Carrera de los animales. Les voy a presentar una imagen tomada al comenzar la carrera atlética.

Allí se observa al tigre que va de primero en la carrera. Entonces, ¿Qué animal va en la posición quinta?

Mariana: Profesora, en esa posición está el pato.

Ricardo: No profesora, el elefante está de quinto, porque están corriendo hacia abajo.

Profesor: La jirafa ¿en qué posición de la carrera está ubicada?

Mariana: Profe, la jirafa está de diez.

Ricardo: Profesora, sí la jirafa es la décima.

Profesor: Mariana cuando usamos los números para ordenar decimos décimo o décima y no diez.

Profesor: Si los animales continúan corriendo en las mismas posiciones, pero luego de un tiempo el gato de la novena posición pasa a la tercera posición ¿en qué nueva posición de la carrera se ubicará el ratón?

- Mariana: Profesora, el ratón estará de cinco.
- Ricardo: Profesora, el ratón pasará a ser el octavo.
- Profesor: Están seguros ¿de qué el ratón puede ocupar la quinta o la octava posición? luego de que el gato se adelante hasta la tercera posición.
- Ricardo: Profesora, el ratón ocupa la octava posición porque el gato pasa de tercero y todos se corren do puestos para atrás.
- Mariana: Profesora, el ratón pasa a ocupar la posición quinta, porque después del gato todos se adelantan un puesto.

Preguntas para reflexionar sobre la situación:

1. ¿Qué dificultades de aprendizaje identifican en los estudiantes de la situación anterior?
2. ¿Qué aprendizajes se proponen desarrollar en los estudiantes con la situación anterior?
3. ¿Cuáles representaciones puede utilizar el profesor para complementar la enseñanza de este aprendizaje?
4. ¿Qué otras situaciones pueden usarse para complementar esta actividad de enseñanza?
5. ¿Qué sentido tiene sumar las posiciones de los animales durante la carrera?

Segunda situación: Explorando cantidades

En un momento de la clase de matemáticas en grado primero se les presenta a los estudiantes de manera general la siguiente situación y se establecen los siguientes diálogos:

- Profesora: Observen la siguiente imagen que les acabo de entregar a cada uno. Allí se presenta un rebaño de ovejas que tiene un pastor.

Para saber cuántas ovejas hay en el rebaño vamos a encerrarlas en grupos de cinco ovejas y luego contamos de cinco en cinco para indicar ¿Cuántas ovejas hay en el rebaño del pastor?

Sofía: Profesora, son veinticinco ovejas y muestra la siguiente representación:

Jacobo: No profesora, son veintiséis ovejas y muestra la siguiente representación:

Profesora: ¿Cómo se dieron cuenta de cuántas ovejas había en el rebaño del pastor?

Sofía: Pues, encerramos de a cinco ovejas y luego las contamos así: cinco, diez,

Jacobo: Yo hice lo mismo, pero me quedó una por fuera, porque ya no habían más, entonces, conté: cinco, diez, quince, veinte, veinticinco y una más veintiséis.

Profesora: Jacobo, yo creo que encerraste una oveja en dos grupos y la contaste dos veces. Recuerda que cada oveja se debe contar una sola vez y por ello no puede estar encerrada en dos grupos.

Ahora vamos a representar con estas tarjetas, la profesora muestra las tarjetas de puntos, la siguiente situación:

Grupo 2: Profesora, nosotros llenamos la jarra con nueve vasos y usamos estas láminas

Profesora: En este momento, van a comparar la capacidad de la jarra con la del balde y me representarán ¿con cuánto contenido de la jarra puedo llenar el balde?

Grupo 1: Profesora, el contenido de la jarra cabe nueve veces y la representamos así:

Grupo 2: Profesora, nosotros llenamos el balde con nueve vasos y usamos estas láminas:

Profesora: Después de realizar las comparaciones, entonces ¿qué tanto contenido de los vasos plásticos necesito para llenar el balde?

Grupo 1: Profesora, se necesita el contenido de setenta y dos vasos plásticos, porque una jarra se llena con ocho vasos.

Grupo 2: Profesora, el balde se llena con ochenta y un vasos plásticos, porque se necesitan nueve vasos para llenar la jarra.

La profesora al planear la actividad se aseguró que el contenido de los vasos plásticos llenos completara exactamente la capacidad de las jarras y de los baldes, de tal manera que un balde contiene nueve veces la capacidad de la jarra.

Preguntas para reflexionar sobre la situación:

1. ¿Cómo crees qué se relaciona la enseñanza de la medida con la enseñanza del Número Natural?
2. En la primera tarea de comparar la capacidad de los vasos con la de la jarra ¿Qué pudo haber sucedido para que los grupos de estudiantes tuvieran diferentes respuestas?
3. ¿En la situación propuesta hay alguna evidencia que la profesora enseñe actividades de estimación como una estrategia, para que los estudiantes den sentido a sus respuestas?
4. ¿Qué destrezas o habilidades se requieren para que los estudiantes de los grupos puedan responder a las tareas planteadas por la profesora?
5. ¿Crees que tiene sentido en la situación anterior que los estudiantes comparen las cantidades y luego las ordenen de acuerdo a su capacidad? ¿Por qué?

Apéndice C – Unidades y preguntas complementarias de análisis

Entrevista complementaria		
<i>Unidades de análisis</i>	<i>Preguntas de reflexión</i>	<i>Temas de análisis</i>
ADC	• ¿Qué otras tareas del contexto social usted considera que pueden complementar la actividad presentada? • ¿Qué otro tipo de representaciones del número se abordaron en la actividad? Y ¿Qué otras representaciones del número pueden complementar la actividad? • ¿Cuáles estrategias utiliza en sus prácticas para que los estudiantes comprendan los usos del Número Natural? • ¿Qué hechos históricos usted toma como situaciones importantes para la enseñanza del Número Natural?	Análisis de tres tareas didácticas de ordinalidad, cardinalidad y medida, para la enseñanza de los números naturales y la construcción de sentido numérico en el primer grado de la educación básica primaria
ADC y ADCg	• ¿Cuáles son los conocimientos previos requeridos en los estudiantes	

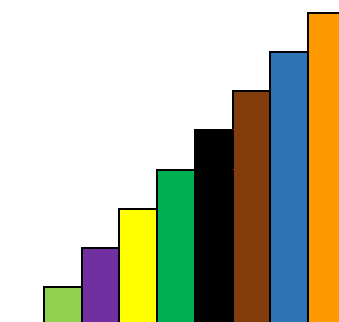
	para la solución de la tarea propuesta? • ¿En qué orden se desarrollan los conocimientos posteriores sobre el Número Natural y qué objetivo tienen estos aprendizajes? • ¿Qué aspectos evalúa sobre la enseñanza del Número Natural y las habilidades numéricas?
ADCg	• Determine ¿Cuál es el propósito de la actividad? • De acuerdo a los EBC ¿Cuál o cuáles estándares del pensamiento numérico y sistemas numéricos se relacionan con la tarea propuesta? • ¿Qué limitaciones de su conocimiento pueden relacionarse con la enseñanza de esta tarea didáctica? • ¿Qué propósito de enseñanza puede relacionarse con la tarea propuesta? • ¿Qué dificultades podrían presentar sus estudiantes para desarrollar la tarea propuesta? • ¿Qué materiales didácticos pueden complementar la tarea didáctica propuesta? ¿Por qué?

Tabla 16. Unidades de análisis y temas de centrales de investigación complementarios.

Apéndice D – Tareas de reflexión complementaria para las docentes

Primera tarea didáctica de enseñanza: Reconociendo la posición

Se entrega a cada uno de los estudiantes un juego de regletas como las que se presentan a continuación, para responder a las preguntas de la tarea I:





Tarea I: Ordenando y reconociendo la posición de las regletas.

1. Ordena de manera descendente, o sea de mayor a menor, el largo de las regletas que se te han entregado.
2. ¿Cuál es el color de la regleta que se encuentra en la primera posición?
3. ¿En qué posición se encuentra la regleta de color café?
4. Si de esta organización quitamos la regleta de color negro ¿Qué regleta se ubicará en la octava posición?
5. Si adelantamos la regleta de color amarillo cuatro posiciones por delante ¿En qué nueva posición se ubicará esta regleta?

Preguntas de reflexión:

Teniendo en cuenta la situación propuesta responda a las siguientes cuestiones:

1. Determine ¿Cuál es el propósito de la actividad?
2. ¿Cuáles son los conocimientos previos requeridos en los estudiantes para la solución de la tarea propuesta?
3. ¿Qué otras tareas del contexto social usted considera que pueden complementar la actividad presentada?

Segunda tarea didáctica de enseñanza: Explorando cantidades

Se propone a los estudiantes encerrar en grupos de igual cantidad (cinco en cinco, tres en tres, dos en dos, etc.), escribir en letras y en símbolos la cantidad de flores o animales que hay en las colecciones que se muestran a continuación:

Colección	Cantidad en letras	Cantidad en símbolos

Colección	Cantidad en letras	Cantidad en símbolos

Posteriormente, los estudiantes desarrollarán la siguiente tarea a partir de la actividad anterior.

Tarea I: Contando e identificando las cantidades de imágenes.

1. ¿En cuál de las colecciones hay 28 imágenes?
2. ¿Cuál colección tiene menor cantidad de imágenes?
3. ¿Cuántas imágenes le faltan a la colección de flores para tener la misma cantidad que la colección de animales silvestres?
4. Dibujando plaquetas numéricas como las siguientes:

Representa con las plaquetas las cantidades de las colecciones de: flores, gatos y animales silvestres.

5. Utilizando las plaquetas encuentra dos formas diferentes de representar cada colección de imágenes.

Preguntas de reflexión:

De acuerdo a la situación propuesta responda a las siguientes cuestiones:

1. De acuerdo a los EBC ¿Cuál o cuáles estándares del pensamiento numérico y sistemas numéricos se relacionan con la tarea propuesta?
2. ¿Qué limitaciones de su conocimiento pueden relacionarse con la enseñanza de esta tarea didáctica?
3. ¿Qué otro tipo de representaciones del número se abordaron en la actividad? Y ¿Qué otras representaciones del número pueden complementar la actividad?

Tercera tarea didáctica de enseñanza: Midiendo espacios

Se entrega en parejas de estudiantes algunas fichas encajables (de un pentaminó) como las que se muestran a continuación, para que los estudiantes cuenten las cuadrículas internas, identifiquen las fichas que conforman entregadas y resuelvan las siguientes preguntas de la tarea I:

Tarea I: Estableciendo el tamaño.

1. ¿Cuántas cuadrículas internas tienen las once fichas encajables?
2. Al representar una figura con las siguientes fichas: dos azules, una púrpura, dos amarillas y una verde ¿Cuántas cuadrículas internas tendría la figura?
3. Al realizar las siguientes representaciones:

A)

B)

¿Alguna de las representaciones tiene más cuadrículas que la otra? ¿Por qué?

4. ¿Cuántas fichas similares a las anteriores necesito para representar la siguiente figura?

5. Aproximadamente, ¿Cuántas fichas parecidas a las anteriores se requieren para representar la siguiente figura?

Preguntas de reflexión:

A partir de la situación propuesta responda a las siguientes cuestiones:

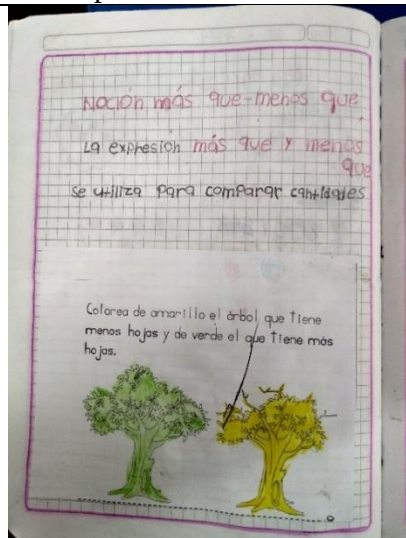
1. ¿Qué propósito de enseñanza puede relacionarse con la tarea propuesta?
2. ¿Qué dificultades podrían presentar sus estudiantes para desarrollar la tarea propuesta?
3. ¿Qué materiales didácticos pueden complementar la tarea didáctica propuesta? ¿Por qué?

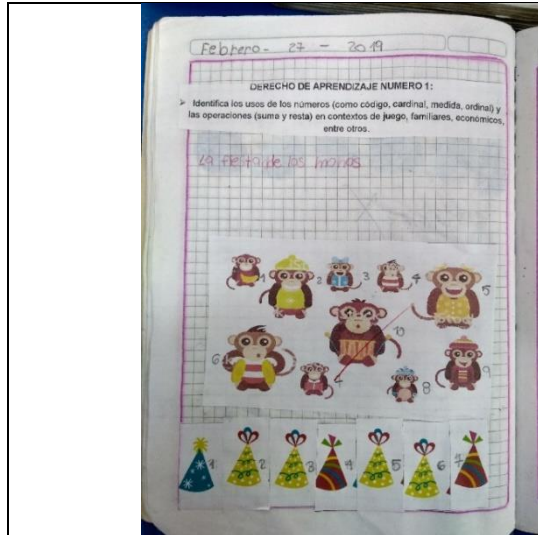
Reflexiones sobre las situaciones

Primera situación de enseñanza: Reconociendo la posición

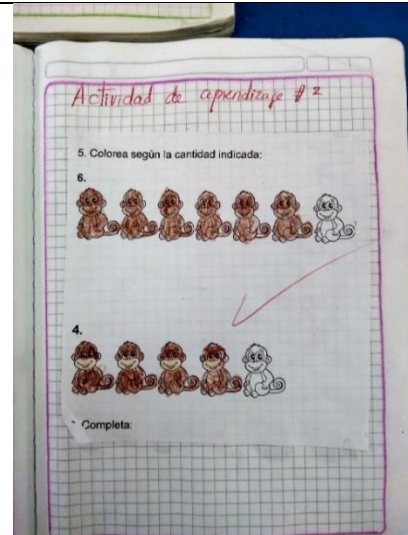
Situaciones	H1	H2	H3	H4	H5	Explicite por qué relaciona esta habilidad a la situación
Situación 1 Reconociendo la posición	X	X Ordenar	X	X	X	Rejillas de los regletas Identificar cardinal y ordinal Forma ascendente y descendente Selección de datos Tamaño de las fichas
Situación 2 Explorando cantidades		X	X	X	X	Agrupación Cantos por grupos Trazados de las imágenes - comparar formas Comparación colecciones Observación para estimar
Situación 3 Midiendo espacios	X	X		X	X	Espacialidad, superficie, cuadrículas Manejo del espacio Manejo de límites, orientación y lateralidad Posición de las imágenes Escala de representación

Apéndice E – imágenes de las propuestas escolares

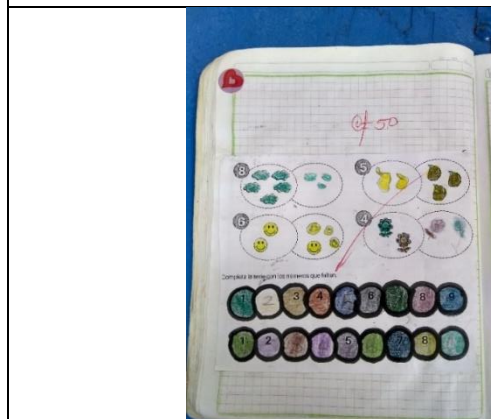
La unidad y los números	
Muchos y pocos	Comparación de cantidades
	
Emparejamiento y representación con numerales	Distinción de la cantidad numerable



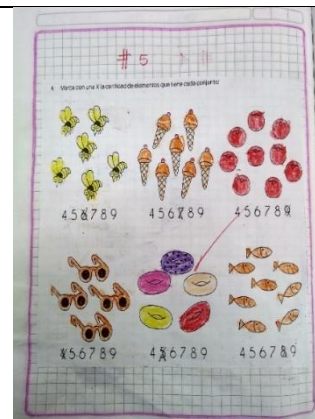
Composición y orden numérico



Asociación de numeral y colección



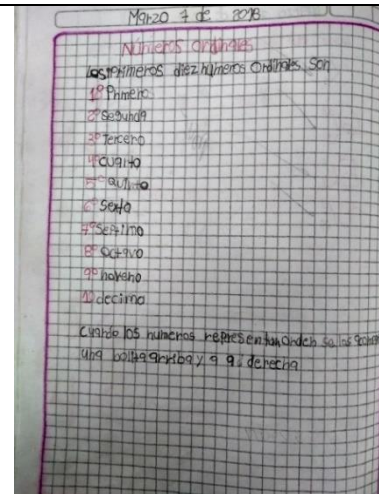
Situación en contexto cardinal



Numeros en contexto ordinal



Relacion ordinales y cardinales



Lugar de posición

Números Cardinales

Alcoba número ordinal el Comisario Uno de ciudad Cardinal.

observa.

Número	1	2	3	4
Cardinal	Uno	dos	tres	Cuatro
Ordinal	Primero	Segundo	tercera	cuarto

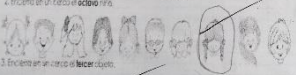
Tarea:
Representa el Ordinal y Cardinal de los números 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

Número	5	6	7	8	9	10
Cardinal	Cinco	seis	Siete	ocho	nueve	diez
Ordinal	quinto	sexta	septimo	octavo	novena	decimo

glo

Marzo - 11 de 2019

Desarrollo las competencias

1. Encuentra en un grupo de seis niños. 
2. Encuentra en un grupo de ocho niños. 
3. Encuentra en un grupo de trece objetos. 
4. Encuentra en un grupo de seis juguetes. 
5. Encuentra en un grupo de seis frutas. 