



EL LÍMITE COMO CONCEPTO FUNDAMENTADOR DEL INFINITO POTENCIAL
EN MATEMÁTICAS: UN ACERCAMIENTO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO

JONATHAN ESTEVAN LUCERO CHAVES

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2021



EL LÍMITE COMO CONCEPTO FUNDAMENTADOR DEL INFINITO POTENCIAL
EN MATEMÁTICAS: UN ACERCAMIENTO HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO

JONATHAN ESTEVAN LUCERO CHAVES

DIRECTORA
LUZ VICTORIA DE LA PAVA CASTRO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN, ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2021

Índice general

0.1. Resumen	7
0.2. Introducción	8
1. Métodos y técnicas en el cálculo con indivisibles e infinitesimales	11
1.1. El método exhaustivo: Arquímedes	12
1.2. Infinitesimales e indivisibles en el siglo XVII	20
1.2.1. El método de aproximación: Kepler	20
1.2.2. El método de los indivisibles: Cavalieri	23
1.2.3. El método aritmético del infinito: Wallis	30
1.3. Las cantidades infinitamente pequeñas	34
1.3.1. Límite e Infinitesimales: Newton	34
1.3.2. Infinitesimales: Leibniz	41
2. El límite y el infinito como conceptos fundadores del cálculo	47
2.1. Los predecesores en las ideas de Leibniz	48
2.1.1. El análisis de las cantidades infinitamente pequeñas	48
2.1.2. Johann Bernoulli y el infinito	51
2.1.3. Las series y el análisis de los infinitamente pequeños en Euler	56
2.2. El problema de los fundamentos	59
2.2.1. Críticas a la fundamentación del cálculo por Berkeley	59
2.2.2. El límite como fundador del cálculo por D'Alembert	62
2.3. Los puntos de vista a finales del siglo XVIII	66
2.3.1. Lagrange y el cálculo como álgebra	66

2.3.2.	La competencia del problema berlinés	69
2.3.3.	La noción de Límite antes de Cauchy	70
3.	La formalización del infinito potencial mediante el concepto de Límite .	79
3.1.	Cauchy y la definición de límite	83
3.1.1.	El límite y los infinitesimales	83
3.1.2.	Conceptos basados en la definición de límite	89
3.2.	Las Conferencias de Weierstrass de 1861	99
3.2.1.	Los Argumentos $\varepsilon - \delta$	100
3.2.2.	La definición de límite	102
3.3.	Comentarios Finales	103
4.	La noción de límite en relación con el infinito como obstáculo epistemológico	107
4.1.	La noción de obstáculo epistemológico	107
4.2.	Obstáculos epistemológicos en educación matemática	109
4.3.	Obstáculos epistemológicos relacionados con la noción de límite	111
4.3.1.	Horror al Infinito	112
4.3.2.	Otro tipo de obstáculos epistemológicos	117
4.3.3.	Infinito actual, en la definición de límite, como obstáculo epistemológico	119
4.4.	Algunos ejemplos	120
4.4.1.	Ejemplos	120
4.4.2.	Discusión acerca de los ejemplos	124
5.	Comentarios Finales	125
Referencias		129

Índice de figuras

1.1. Figura no rectilínea.	13
1.2. Cuadratura del círculo.	15
1.3. Cuadratura de la parábola.	17
1.4. Capas cilíndricas que conforman un barril.	21
1.5. Área de un círculo.	21
1.6. Método para medir el volumen de un barril de vino.	22
1.7. Extensión de Figuras.	23
1.8. Comparación de un cono y una pirámide.	24
1.9. Figura plana dada $F = ABC$	24
1.10. Teorema de Cavalieri.	25
1.11. Todas las líneas de la figura plana.	26
1.12. Todos los planos de un sólido.	27
1.13. Cuadrado $ABCD$, dividido por dos triángulos.	28
1.14. Volumen de una Pirámide.	29
1.15. Curvas de la forma $y = x^n$	31
1.16. Curva $y = x^n$, limitada por el eje x y la recta $x = a$	32
1.17. Método de razones primeras y últimas: Lema II	35
1.18. Método de razones primeras y últimas: Lema IV	37
1.19. Triángulo Característico.	40
1.20. Sucesión de ordenadas y correspondientes a la curva $\widehat{OC}$	42
1.21. Triángulo Característico.	43
1.22.	44
1.23.	44

1.24. Método de Transmutación.	45
1.25. Cuadratura de la curva	46
2.1. Definición II, de L'Hôpital.	50
2.2. Determinación de áreas.	55
2.3. Parábola AM de ecuación $y^2 = ax$	65
4.1. Rejilla de análisis del obstáculo epistemológico: Horror al Infinito	113
4.2. El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 2.	122

0.1. Resumen

Desde un enfoque histórico-epistemológico, en este trabajo de grado se da cuenta del proceso de construcción y formalización de las nociones de límite e infinito potencial, conceptos de gran utilidad y relevancia en el campo de la historia, epistemología y educación matemática.

Mostramos algunos elementos de causalidad con el propósito de argumentar que la definición de límite formaliza el infinito potencial. Para esto, nos centraremos especialmente en los métodos infinitesimales, que dieron paso a la solución de problemas relativos a cuadraturas de figuras, y en los desarrollos con respecto a la consolidación del concepto de límite. Estudiamos la génesis, construcción y formalización de las definiciones de límite y de infinito potencial, prestando especial atención en los trabajos de Arquímedes, Cavalieri, Wallis, Newton, Leibniz, entre otros, hasta llegar a la consolidación del infinito potencial a través del límite, en los trabajos de Cauchy y Weierstrass sobre la emergencia del cálculo y el análisis matemático.

En este trabajo se abordan, además, aspectos importantes relacionados con algunos obstáculos epistemológicos, que se presentan en el desarrollo histórico de los conceptos de límite e infinito.

Palabras Clave: Límite, Infinito Potencial, Infinitesimal, Historia de las Matemáticas, Obstáculo Epistemológico.

0.2. Introducción

El estudio histórico-epistemológico de las matemáticas aporta desde diferentes formas en el ámbito educativo, y está ligado a procesos de aprendizaje de conceptos o teorías matemáticas, que inciden en un mejor acercamiento al conocimiento matemático por parte de los estudiantes. En este sentido, es de gran relevancia que los estudiantes conozcan el desarrollo de los conceptos matemáticos y sus diferentes procesos de consolidación, potenciando la comprensión de algunos aspectos de la actividad matemática.

Este trabajo de grado se enmarca dentro de la línea de historia y epistemología de las matemáticas. A lo largo de este documento hacemos un rastreo histórico de el concepto de límite, identificando cómo el infinito potencial ha estado vinculado a las diferentes nociones de límite, hasta su consolidación formal en la definición de límite de Cauchy.

En educación matemática el concepto de límite, generalmente se introduce a través de la definición formal $\varepsilon - \delta$ o de las técnicas algorítmicas para su cálculo, sin embargo, la definición de un concepto no garantiza la comprensión del mismo. La definición formal da precisión y rigor matemático, pero encapsula las situaciones y procesos que le dan sentido al concepto, ocultando su significación y complejidad. El infinito potencial, por ejemplo, es un concepto que atraviesa históricamente las diferentes nociones de límite y es parte esencial de la definición moderna de límite, sin embargo, su rol no es evidente en esta última. Este hecho llama la atención, y lo abordamos desde la teoría de los obstáculos epistemológicos. Hay concepciones que se transforman en obstáculos epistemológicos, donde para superarlos se requiere de una nueva teoría y un cambio importante en el punto de vista, estos se dan en la génesis de una noción, o a través de concepciones colectivas transmitidas. Estos obstáculos se deben a la naturaleza del conocimiento matemático en sí, o se producen en la transposición didáctica del saber científico al saber escolar.

Este trabajo de grado, aborda entonces dos miradas; primero, se presenta un desarrollo histórico, donde a través de varios personajes se da cuenta de la relación entre infinito potencial y límite, y cómo el infinito potencial es formalizado en el concepto de límite; segundo, se caracterizan algunos obstáculos epistemológicos presentes en el desarrollo

histórico de estos conceptos.

Los aspectos mencionados anteriormente, evidencian la necesidad de comprender los diferentes contextos de construcción, rigorización y formalización de los conceptos, nociones, técnicas, algoritmos y objetos matemáticos, los cuales son elementos fundamentales del trabajo en educación matemática. Es por eso que se pretende no solo hacer un tratamiento desde el punto de vista de métodos y técnicas novedosas en cada periodo histórico, sino también se pretende poner en evidencia las diferentes posturas respecto a cuestiones epistemológicas. Mediante la historia de las matemáticas, se pretende dar cuenta de los complejos procesos de génesis, evolución y consolidación de una teoría matemática, sin olvidar que en estos procesos de construcción circulan de manera particular, concepciones pedagógicas y filosóficas. Además, las matemáticas son una actividad humana, una construcción social, elaborada durante siglos con base en procesos de interrelación cultural.

Con el propósito de estudiar la manera en que los estudiantes conciben los conceptos de límite y de infinito potencial, tanto en el cálculo como en el análisis, debemos partir de los significados que históricamente se le han atribuido a dichos conceptos, los cuales difícilmente se pueden encontrar en los libros de texto, que mediante la transposición didáctica se encuentran ya terminados y adaptados a las convenciones científicas rigurosas, ocultando las dificultades y obstáculos que permitieron la evolución de los conceptos hasta la fase de institucionalización como conceptos matemáticos. Por lo tanto es necesario recurrir a la historia, epistemología y filosofía de las matemáticas, además de algunas investigaciones en educación matemática como [7, 11, 34], para acercarnos a los elementos constitutivos de la significación de los conceptos mencionados anteriormente.

Los aspectos antes mencionados se desarrollan en cinco capítulos, los cuales se especifican a continuación.

En el primer capítulo se realiza una recopilación de métodos de tratamiento de procesos infinitesimales, donde se trabaja con el infinito potencial y el límite en el marco de cuadraturas de figuras, que se pueden ver en las obras de Arquímedes. Se presentan los métodos indivisibles utilizados en el siglo XVII por Kepler y Cavalieri. Además se tiene en

cuenta el trabajo algebraico de Wallis y las contribuciones al cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz. En este capítulo se presentan, además, las primeras nociones de límite planteadas por Euclides, Wallis y Newton.

El segundo capítulo, gira en torno a un análisis de la evolución histórica de la noción de infinitesimal por parte de los hermanos Bernoulli, L'Hôpital y Euler. También se presentan las críticas realizadas por Berkeley a los fundamentos de las matemáticas, que desencadenaron en el trabajo algebraico de Lagrange, y las ideas de límite por parte de D'Alembert, Lacroix, Lhuillier y Carnot.

En el tercer capítulo se presentan las ideas de Bolzano sobre los fundamentos del cálculo y sobre el infinito matemático. También se hace alusión a una caracterización sobre la fundamentación del infinito potencial a través del concepto formal de límite por parte de Cauchy. Finalmente se presenta la definición de límite en el lenguaje $\varepsilon - \delta$ que se encuentra en los trabajos de Weierstrass.

En el cuarto capítulo se presenta una caracterización de algunos obstáculos epistemológicos presentes en la historia del concepto de límite. Mediante algunas investigaciones realizadas por diferentes autores, se retoman las ideas de dichas investigaciones y se profundiza en los obstáculos, especialmente en el denominado horror al infinito.

Por último, en el quinto capítulo presentamos algunos comentarios finales que resultan después de el estudio realizado.

Este documento pretende aportar al análisis de tipo histórico-epistemológico del concepto de límite y su relación con el infinito potencial, brindando una mirada de estos dos conceptos que pueda servir como referencia a docentes y estudiantes de carreras como Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas, y afines. Esperamos que este estudio contribuya a mejorar algunos aspectos de la enseñanza y del aprendizaje, relacionados con la noción de límite como concepto fundamentador del infinito potencial.

Métodos y técnicas en el cálculo con indivisibles e infinitesimales

Las primeras preguntas con respecto al infinito surgieron en Grecia al pensar en el espacio, el tiempo y la divisibilidad de la materia. Anaximandro, siglo VI a.C., consideraba que todas las cosas estaban conformadas de algo denominado “ápeiron”, al cual se considera como imperecedero, neutral, ilimitado e infinito. Cuando salieron a la luz las paradojas de Zenón de Elea, siglo V a.C., existían dos concepciones opuestas del espacio y el tiempo, que eran consideradas infinitamente divisibles y que estaban formados por pequeños intervalos indivisibles. Cuatro son las paradojas más conocidas de Zenón que se encuentran en la *Física* de Aristóteles [3], relacionadas al movimiento y la continuidad, donde se considera que el movimiento no existe, dado que es un engaño de nuestros sentidos. El problema surge al querer tratar a las magnitudes continuas, y al tiempo, como algo discreto, lo cual lleva a contradicciones relacionadas con el infinito.

En la *Física* [3], Aristóteles (384-322 a.C.) menciona que el infinito es “lo que no se deja recorrer y carece de límite, es aquello que tomada una determinada cantidad, siempre es posible tomar por fuera algo de ella”. El infinito para Aristóteles se dividía en dos clases, el infinito como un proceso de crecimiento sin final, o de subdivisión sin final, denominado “infinito potencial”; y el infinito como una totalidad completa, el cual existe en un cierto instante, denominado “infinito actual”. Aristóteles acepta el uso del infinito potencial en matemáticas, en ambas direcciones, hacia lo más grande, como se puede ver en la aritmética donde: dado el número uno, mediante la operación suma se obtiene el número dos y así sucesivamente en un proceso sin fin y hacia lo más pequeño, como se puede ver en la geometría donde a una magnitud continua, se la divide a la mitad, a lo que resta se divide nuevamente a la mitad así si sucesivamente en un proceso que nunca termina. Con respecto

al infinito actual este es rechazado por Aristóteles en las matemáticas, es decir que no existe una última cantidad infinitamente pequeña, ni tampoco existe una última cantidad infinitamente grande, sin embargo el infinito actual sigue teniendo validez en el campo de la Filosofía. Con respecto a lo anterior, Aristóteles menciona:

Y parece también razonable que en los números el más pequeño sea el límite, pero que en la dirección del más grande toda pluralidad siempre puede ser superada. En las magnitudes, por el contrario, toda magnitud es superada en la dirección de lo más pequeño ... Pero en la dirección del número mayor siempre es posible pensar otro mayor ... De ahí que este infinito sea potencial, nunca actual, aunque lo que se tome supere siempre toda pluralidad determinada. [3, pp.208-209]

Este pensamiento, expresado por Aristóteles, sería adoptado por Euclides (325-265 a.C.) y Arquímedes. En los *Elementos* de Euclides se evidencia un trabajo con el infinito potencial, lo cual se muestra a través del siguiente postulado y de la siguiente proposición:

■ **Postulado 2.** Prolongar continuamente en línea recta una recta [19].

En otras palabras, una recta se puede prolongar cada vez más y más, tanto como se quiera.

■ **Proposición IX.20.** Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos [20, p.226].

Es decir, que si se da un número primo muy grande, siempre es posible obtener uno más grande que el dado con anterioridad, en un proceso que se repite continuamente.

En el libro de los *Elementos* de Euclides, los conceptos matemáticos se trabajan con un alto grado de formalismo; sin embargo el uso del infinito potencial, por ejemplo en el postulado 2 y en la proposición IX. 20, es informal.

1.1. El método exhaustivo: Arquímedes

Eudoxo de Cnido (390-337 a.C.), desarrolló la teoría de razones y proporciones, además, introdujo el “Axioma de Eudoxo-Aquímedes¹”, que fue considerado en la obra *Sobre la esfera y el cilindro* como el siguiente postulado:

¹**Definición V.4:** Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, puede exceder una a la otra. [20, p.10]

Postulado I.5. Y además, en las líneas desiguales y las superficies desiguales y los sólidos desiguales el mayor excede al menor en una magnitud tal que, añadida a sí misma, es capaz de exceder cualquier magnitud propuesta de las que decimos que guardan razón [4, p.112].

Arquímedes (288-212 a.C.), retoma y potencializa el método de exhaustión, al hacer que el límite de las medidas de las áreas de una sucesión de polígonos inscritos y circunscritos en un círculo, o en una parábola, sea el área aproximada de estas figuras.

La noción de límite en Arquímedes

La base del método exhaustivo se encuentra, en los *Elementos*, en la siguiente Proposición, donde se prefigura el concepto de límite como salida conceptual para encapsular los procesos infinitos:

Proposición X.1. Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada. [21, p.12].

En términos modernos, según Recalde [32, pp.100-101], la proposición X.1 menciona que: sea M_0 y ε dos magnitudes dadas y sea $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ una sucesión, tal que: $M_1 < M_0, M_2 < M_1, \dots, M_{n+1} < M_n, \dots$, entonces, existe un $n \in \mathbb{N}$, tal que $M_n < \varepsilon$, que en el lenguaje moderno significa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0.$$

La esencia de este método, se observa al cuadrar la Figura 1.1 no rectilínea, y que

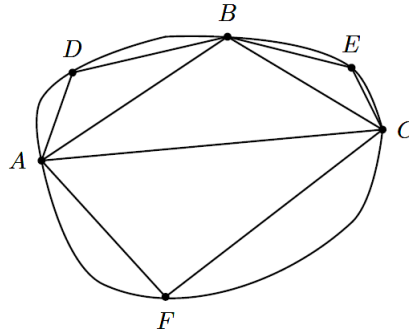


Figura 1.1. Figura no rectilínea.

denotaremos por R , donde, según Grattan-Guinness [23, pp.47] se pretende demostrar que un área, una superficie o un volumen R , que se está investigando, es igual a una magnitud conocida A del mismo tipo (por ejemplo, R puede ser la superficie de una esfera y A cuatro círculos máximos de la esfera). Se construyen entonces dos sucesiones de figuras, una monótona creciente y otra monótona decreciente, que estén respectivamente inscritas y circunscritas a R ; así pues, se obtiene mediante reducción al absurdo que $A = R$, como se puede ver en Recalde [32, pp.101-102]:

1. Dentro de R , se inscribe una sucesión de figuras rectilíneas $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ que crecen monótonamente. En este caso $A_1 = ABC, A_2 = ADBECF, \dots$, etc.
2. Las figuras son escogidas de tal manera que la sucesión $R - A_1, R - A_2, \dots, R - A_n, \dots$ cumpla con la hipótesis de la proposición X.1.
3. Con ayuda de consideraciones teóricas se presume el límite de la sucesión de las figuras inscritas, el cual es designado como A .

Ahora se demuestra que $A = R$, mediante el método de reducción al absurdo.

1. Se supone que $R > A$, de lo cual $R - A > 0$, por el principio de Eudoxo existe un n natural, tal que $R - A_n < R - A$, lo que implica que $A_n > A$, lo cual es imposible.
2. Se supone que $R < A$, de lo cual $A - R > 0$, por el principio de Eudoxo existe un n natural, tal que $A - A_n < A - R$, lo que implica que $A_n > R$, lo cual es imposible.

Por lo tanto se concluye que: $A = R$.

La cuadratura del círculo

Arquímedes estableció una aproximación a la cuadratura del círculo, tomando de los *Elementos* la Proposición X.1, con la cual consiguió igualar el círculo C a un triángulo rectángulo $T = ABD$ cuya altura R_n es el radio del círculo y su base l es la longitud de la circunferencia; esto permite deducir la longitud de la misma (ver Figura 1.2), como se puede ver en la siguiente proposición, de la obra *Medida del Círculo* de Arquímedes:

Proposición 1: Un círculo es equivalente a un triángulo rectángulo cuyos catetos son iguales al radio y a la circunferencia del círculo. [4]

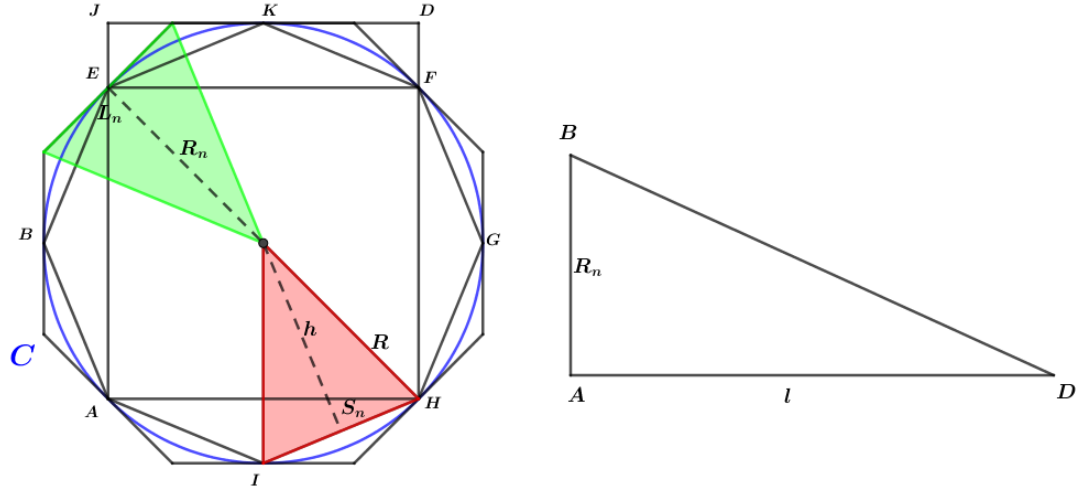


Figura 1.2. Cuadratura del círculo.

En la demostración, Arquímedes usa el método de reducción al absurdo utilizando polígonos inscritos y circunscritos, como lo menciona Recalde [32, pp.103-105] (ver Figura 1.2).

Demostración. Sea C un círculo de radio R , supongamos que $C > T$, que es equivalente a $C - T > 0$, donde T es el triángulo ABD . Para realizar la demostración de esta proposición, se hace uso del método exhaustivo que corresponde a la proposición X.1 de los *Elementos*; esto es, dado un círculo C y una magnitud superficial $C - T$, existe una sucesión de polígonos P_n inscritos en C , tal que $C - P_n < C - T$, para algún número entero positivo n .

Para esto, tomamos una sucesión de polígonos inscritos en la circunferencia C :

P_0 : Cuadrado $AEFH$.

P_1 : Octógono $ABEKFGHI$.

$\vdots$

P_n : Polígono regular Cuadrado 2^{n+2} lados inscrito en C .

Sea $M_0 = C - P_0, M_1 = C - P_1, M_2 = C - P_2, \dots, M_n = C - P_n$,

Donde $M_0 - M_1 = C - P_0 - [C - P_1] = P_1 - P_0 = 4\triangle EKF$

De lo anterior tenemos:

$$4\triangle EKF = 2 \text{ Rectángulos } EJDF > 2 \text{ Sector } EKF$$

$$4 \text{ Rectángulos } EJDF > 4 \text{ Sector } EKF$$

$$4 \text{ Rectángulos } EJDF > C - P_0, \text{ donde } C - P_0 = 4 \text{ Sector } EKF$$

$$\frac{4 \text{ Rectángulos } EJDF}{2} > \frac{C - P_0}{2}$$

$$2 \text{ Rectángulos } EJDF > \frac{1}{2}(C - P_0)$$

$$M_0 - M_1 > \frac{1}{2}M_0$$

De lo cual $M_1 < \frac{1}{2}M_0$, de la misma manera se podría probar que $M_2 < \frac{1}{2}M_1$ y en general que $M_{n+1} < \frac{1}{2}M_n$ lo cual garantiza el cumplimiento de la Proposición X.1. De tal manera que: $C - P_n < C - T$, entonces $P_n > T$.

Por otro lado si l es la longitud de la circunferencia, tenemos que

$$\begin{aligned} P_n &= n(\text{Triángulo que tiene la base } S_n \text{ y la altura } h) \\ &= \text{Triángulo que tiene la base } nS_n \text{ y la altura } h \\ &< \text{Triángulo de base } l \text{ y altura } R_n \end{aligned}$$

dado que $nS_n < l$ y $h < R_n$. Por lo tanto $P_n < T$, lo que contradice el resultado anterior.

Ahora, se supone que $C < T$, de lo cual $T - C > 0$. Usando X.1 de los *Elementos*, para el caso de polígonos circunscritos, existe Q_n , polígono circunscrito, tal que: $Q_n - C < T - C$, de lo cual $Q_n < T$. De otro lado,

$$\begin{aligned} Q_n &= n(\text{Triángulo de base } L_n \text{ y altura } R_n) \\ &= \text{Triángulo de base } nL_n \text{ y la altura } R_n \\ &> \text{Triángulo de base } l \text{ y altura } R_n \end{aligned}$$

puesto que $nL_n > l$. Significa que $Q_n > T$, lo cual contradice el resultado anterior. Por lo tanto, $C = T$, como se quería demostrar. $\square$

La cuadratura de la parábola

El siguiente teorema se encuentra en *Cuadratura de la parábola* [5], en donde se hace uso del método exhaustivo, para su demostración.

Teorema: El área del segmento parabólico es igual a cuatro tercios del área del triángulo inscrito.

La siguiente demostración es tomada de Recalde [32, pp.113-114].

Demostración. Sea la parábola ABC , donde B es el vértice de la parábola. Se inscriben los triángulos como aparecen en la Figura 1.3. Partimos de la siguiente sucesión de triángulos:

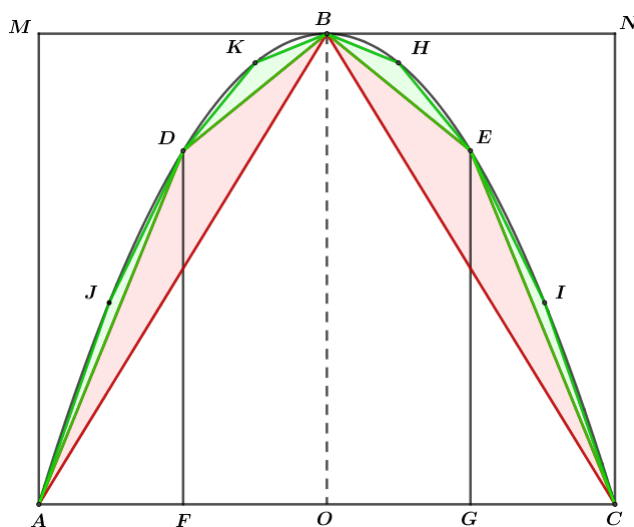


Figura 1.3. Cuadratura de la parábola.

$$\begin{aligned} P_0 &= \triangle ABC, \\ P_1 &= P_0 + (\triangle ADB + \triangle BEC), \\ P_2 &= P_0 + \triangle ADB + \triangle BEC + \triangle AJD + \triangle DKB + \triangle BHE + \triangle EIC, \\ &\vdots \\ P_n. \end{aligned}$$

Gracias a la proposición 21² podemos afirmar que:

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= 8\triangle ADB \\ \triangle ABC &= 8\triangle BEC)\end{aligned}$$

²Proposición 21: sea AC la base de un segmento parabólico ABC , y B el vértice de dicho segmento. Sea E un punto en el segmento parabólico en el cual la tangente es paralela a BC , entonces la medida de la superficie del triángulo ABC es 8 veces la del triángulo BEC .

$$2\triangle ABC = 8(\triangle ADB + \triangle BEC)$$

$$\triangle ABC = 4(\triangle ADB + \triangle BEC).$$

Por lo tanto: $P_1 = P_0 + \frac{1}{4}P_0$.

Realizando el mismo procedimiento anterior con el resto de triángulos, se llega a que:

$$\triangle ADB = 4(\triangle AJD + \triangle DKB) \text{ y } \triangle BEC = 4(\triangle BHE + \triangle EIC),$$

$$\triangle ABC = 4(4(\triangle AJD + \triangle DKB) + 4(\triangle BHE + \triangle EIC)),$$

$$\triangle ABC = 4^2((\triangle AJD + \triangle DKB) + (\triangle BHE + \triangle EIC)).$$

Por lo tanto: $P_2 = P_0 + \frac{1}{4}P_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P_0$.

Y en general:

$$P_n = P_0 + \frac{1}{4}P_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P_0 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n P_0.$$

Debemos demostrar que esta sucesión cumple las hipótesis de la proposición X.1. Llamemos S al área del segmento parabólico; debemos mostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe n , tal que $S - P_n < \varepsilon$.

Tomemos el paralelogramo $AMNC$, en el cual AM es paralela a NC y a BO . $P_0 = \frac{1}{2}a$ donde ($a =$ paralelogramo $AMNC$), pero $S < a$, luego: $P_0 > \frac{1}{2}S$ y $S - P_0 < \frac{1}{2}S$, de lo cual tenemos que si $M_0 = S - P_0, M_1 = S - P_1, M_2 = S - P_2, \dots, M_n = S - P_n$.

Donde $S - P_1 = (S - P_0) - \frac{1}{4}P_0 < \frac{1}{2}S - \frac{1}{2}P_0 = \frac{1}{2}(S - P_0)$, entonces

$$S - P_1 < \frac{1}{2}(S - P_0)$$

De lo cual $M_1 < \frac{1}{2}M_0$, de la misma manera se podría probar que $M_2 < \frac{1}{2}M_1$ y en general que $M_{n+1} < \frac{1}{2}M_n$ lo cual garantiza el cumplimiento de la Proposición X.1 de los *Elementos* de Euclides.

El paso siguiente consiste en la búsqueda del límite de la sucesión de figuras inscritas, para lo cual se parte de:

$$P_n = \sum_{k=0}^n \frac{P_0}{4^k} = \frac{4}{3}P_0 - \frac{1}{3} \frac{1}{4^{n-1}}P_0 \quad (1.1)$$

Una vez obtenido el resultado de dicha suma, Arquímedes demuestra mediante el método de reducción al absurdo que $S = \frac{4}{3}P_0$. Para esto parte de dos casos que se pueden ver en Pérez [31, pp.6-7]:

(I) Supongamos que $S > \frac{4}{3}P_0$; es decir, que $S - \frac{4}{3}P_0 > 0$.

Como el área del triángulo inscrito en un segmento parabólico S es la mitad del área del paralelogramo circunscrito, la cual, a su vez, es mayor que el área del segmento, se sigue que el área de triángulo inscrito en un segmento parabólico es mayor que a mitad del área de dicho segmento, lo que permite aplicar el método exhaustivo.

Por tanto, en la sucesión de áreas:

$$S, S - P_0, S - \left(P_0 + \frac{1}{4}P_0\right), S - \left(P_0 + \frac{1}{4}P_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P_0\right), \dots, \\ S - \left(P_0 + \frac{1}{4}P_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P_0 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n P_0\right).$$

Cada una es menor que la mitad de la que le precede y, por tanto, en virtud del método exhaustivo podemos concluir que en alguna etapa se tendrá que:

$$S - \frac{4}{3}P_0 > S - \left(P_0 + \frac{1}{4}P_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P_0 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n P_0\right).$$

Esto implica que:

$$\frac{4}{3}P_0 < \left(P_0 + \frac{1}{4}P_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P_0 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n P_0\right),$$

lo que es contradictorio con la igualdad (1.1). Por tanto, no puede ser $S > \frac{4}{3}P_0$.

(II) Supongamos que $S < \frac{4}{3}P_0$; es decir, que $\frac{4}{3}P_0 - S > 0$.

Como cada una de las áreas $P_0, \frac{1}{4}P_0, \left(\frac{1}{4}\right)^2 P_0, \dots, \left(\frac{1}{4}\right)^n P_0$, es menor que la mitad de la que le precede y, por tanto, en virtud del método exhaustivo, podemos concluir que en alguna etapa se tendrá que $\left(\frac{1}{4}\right)^n P_0 < \frac{4}{3}P_0 - S$. Entonces

$$\frac{4}{3}P_0 - S > \left(\frac{1}{4}\right)^n P_0 > \frac{1}{3} \frac{1}{4^{n-1}} P_0 = \frac{4}{3}P_0 - \left(P_0 + \frac{1}{4}P_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P_0 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n P_0\right).$$

Lo que implicaría que

$$S < P_0 + \frac{1}{4}P_0 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 P_0 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n P_0.$$

Que es absurdo pues la suma de la derecha es el área de un polígono inscrito en el segmento parabólico S . Por tanto, no puede ser $S < \frac{4}{3}P_0$.

Como (I) y (II) nos lleva a contradicciones, solo nos queda decir que $S = \frac{4}{3}P_0$ □

1.2. Infinitesimales e indivisibles en el siglo XVII

1.2.1. El método de aproximación: Kepler

Johannes Kepler (1571-1630) se interesó por el cálculo de áreas y volúmenes, el cual se intensificó a partir de un incidente en su boda, pues en ese evento le llamó la atención el método que usó el comerciante de vinos para medir el volumen del tonel. Llevándolo a escribir un libro sobre este tema titulado *Nova stereometria doliorum vinariorum* que se puede traducir como (Nueva geometría sólida de los barriles de vino), publicado en 1615. Pero este problema también lo llevó a plantearse la siguiente pregunta: ¿Cuál es el mejor diseño para un barril de modo que se maximice su volumen?

Para Kepler, un sólido (barril) estaría formado por numerosas capas finas cilíndricas y trató el volumen como la suma de capas cilíndricas [25], donde las capas se tomaban perpendiculares al eje del barril, el grosor de cada cilindro puede ser tan fino como uno quiera imaginar. Es decir, las capas cilíndricas están apiladas y todas juntas forman el barril³, (ver Figura 1.4). Según Edwards [18, p.102] “El enfoque de Kepler en la *estereometría* es diseccionar un sólido dado en un número infinito (aparentemente) de piezas infinitesimales, o ‘indivisibles’ sólidos”, de un tamaño y forma conveniente para la solución del problema particular. Kepler sumaba los volúmenes de esas piezas componentes para obtener el volumen de un sólido

³Kepler consultó los trabajos de Arquímedes y descubrió que su método de indivisibles le había permitido obtener resultados de un modo mucho más simple y más general que Arquímedes [36, p.83].

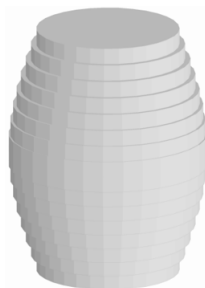


Figura 1.4. Capas cilíndricas que conforman un barril.

dado. Los elementos infinitesimales de Kepler tenían que tener la misma dimensión que el cuerpo que quería medir. Es decir, si quería calcular un área entonces sumaba elementos de área y si quería calcular un volumen consideraba elementos infinitesimales sólidos.

En el cálculo del área del círculo, inicialmente considera al círculo como un polígono regular con un infinito número de lados, compuesto por una infinidad de triángulos infinitesimales (ver Figura 1.5). Como el área de un triángulo es la mitad del producto de su base por su altura, el área total del círculo viene dada por la mitad del producto del perímetro de la circunferencia y el radio. De un modo análogo, Kepler encuentra el volumen de una esfera.

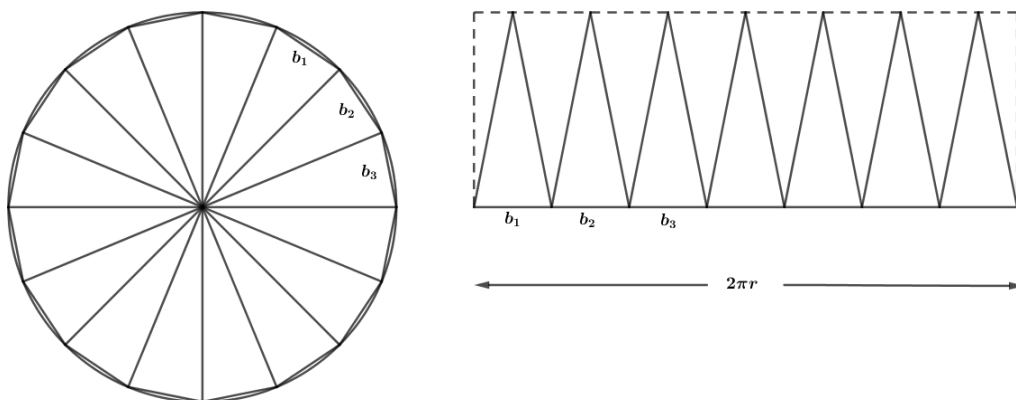


Figura 1.5. Área de un círculo.

El método utilizado por el comerciante, para medir el volumen del barril, consistía en insertar una vara desde del agujero central S hasta el lado opuesto de la tapa en D (ver Figura 1.6), donde la longitud $SD = d$, Kepler observó que un barril estrecho y más alto tendría el

mismo valor SD que uno más ancho, sin embargo el volumen sería mucho más pequeño [36, pp.82-83]. Para optimizar el volumen, Kepler aproxima el barril por un cilindro que tiene la

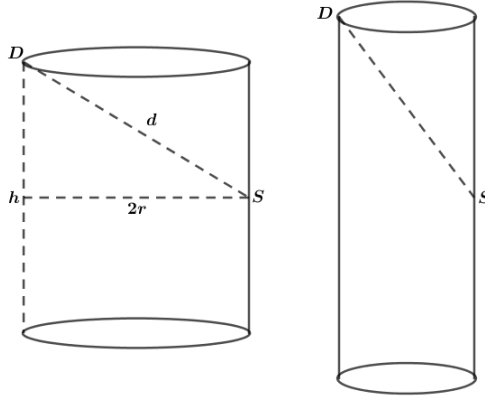


Figura 1.6. Método para medir el volumen de un barril de vino.

diagonal d como antes, r sería el radio de la base y h la altura. Entonces la relación entre d , h y r puede escribirse, usando el teorema de Pitágoras: $d^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + (2r)^2$. Ahora despejamos r^2 :

$$4r^2 = d^2 - \frac{h^2}{4}; r^2 = \frac{d^2}{4} - \frac{h^2}{16}.$$

Por lo tanto el volumen ($V = r^2\pi h$) en función de h y d es:

$$V = h\pi \left(\frac{d^2}{4} - \frac{h^2}{16} \right) = \pi \frac{d^2 h}{4} - \pi \frac{h^3}{16}.$$

Pero si d está fijo, ¿qué valor de h nos da el mayor volumen V ? Hoy sabemos (usando métodos del cálculo), que el volumen máximo se alcanza en

$$h = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot d$$

Con respecto a esto Kepler mostró que si un barril no satisfacía que $3h^2 = 4d^2$, pero se desviaba algo de ella, esto habría tenido solo un pequeño efecto en el volumen, porque cerca de sus máximos una función cambia lentamente [36, p.83]. Kepler tabuló valores para reforzar su idea de que el volumen de esos cilindros con diagonales iguales cambian muy poco en un entorno de un máximo [8, p.116].

1.2.2. El método de los indivisibles: Cavalieri

Los “indivisibles” de Bonaventura Cavalieri (1598-1647) son elementos infinitos y su naturaleza depende de la dimensión de los objetos, es decir poseen una dimensión menor que aquella de la figura que componen; así, para las superficies, los indivisibles serán las líneas; para los volúmenes, superficies, y en general, para objetos de dimensión n serán los objetos de dimensión $n - 1$. Según Recalde [32, p.175], la suma de estos infinitos elementos constituyen el total de la figura. La noción de indivisible se puede ver en la obra de Cavalieri: *Geometria indivisibilibus continuorum quadam nova ratione promota* de 1653.

La idea de Cavalieri fue considerar una figura plana como un conjunto infinito de cuerdas interceptadas dentro de una superficie; donde cada una es vista como un rectángulo con una dimensión infinitamente pequeña, aspecto que lo llevan a enunciar el principio que lleva su nombre

Primer Principio de Cavalieri: Si dos superficies cortadas por un sistema de rectas paralelas generan segmentos correspondientes isométricos, estas tienen una misma área; si los segmentos correspondientes tienen una relación constante, existe la misma relación entre las áreas. [6, p.59]

Sean A_1, A_2, A_3 las áreas de los cuadriláteros representados en la figura 1.7, gracias al primer principio, se tiene que $A_1 = A_2 = 2A_3$. Análogamente, este principio se aplica a las figuras geométricas de tres dimensiones.

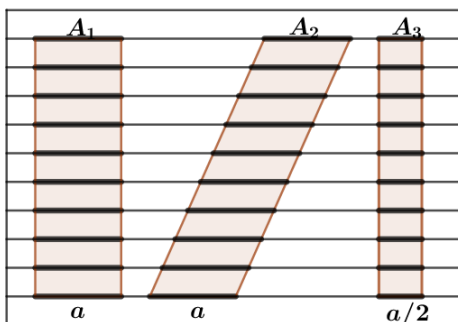


Figura 1.7. Extensión de Figuras.

Segundo Principio de Cavalieri: Si dos sólidos cortados por un sistema de planos paralelos generan secciones correspondientes a la misma área, estos tienen el mismo volumen. Si las secciones correspondientes tienen una relación constante, dicha relación existe entre los volúmenes. [6, p.59]

Como ejemplo del segundo principio de Cavalieri, se muestra gráficamente la comparación entre un cono y una pirámide (Ver Figura 1.8)

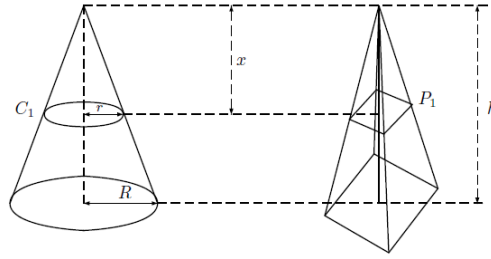


Figura 1.8. Comparación de un cono y una pirámide.

Para profundizar en Cavalieri, se presentan los presupuestos de su método, para esto se parte de una figura plana dada $F = ACB$ limitada por una curva ACB y una recta AB llamada “regula” (ver Figura 1.9). Cavalieri consideraba una línea recta que partiendo de la posición AB en la figura, se desplaza uniformemente conservándose siempre paralela a AB , y se quedaba con un haz de segmentos paralelos que determinaban la figura F sobre dicha recta en sus posiciones sucesivas a lo largo de su movimiento. A estos segmentos los llamaba “todas las líneas de la figura plana” o “los indivisibles de la figura dada”; representaremos dicho haz como $O_F(l)$.

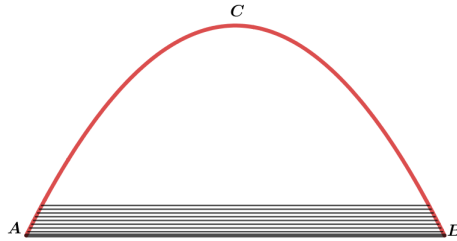


Figura 1.9. Figura plana dada $F = ACB$.

En términos modernos según Grattan-Guinness [23, pp.50-51], Cavalieri construía una aplicación

$$F \mapsto O_F(l) \quad (1.2)$$

que va del conjunto de las figuras planas a el conjunto formado por haces de segmentos paralelos, y extendía la teoría de magnitudes de Eudoxo⁴ para incluir en ella sus nuevas magnitudes $\{O_F(l)\}$. Más tarde estableció aunque no de manera satisfactoria la relación fundamental entre dos figuras planas:

$$F_1 : F_2 = O_{F_1}(l) : O_{F_2}(l) \quad (1.3)$$

Si en vez de ser una recta la regla fuese un plano, se obtiene de una manera análoga la relación

$$S_1 : S_2 = O_{S_1}(p) : O_{S_2}(p), \quad (1.4)$$

donde S_i es un sólido y $O_{S_i}(p)$, son todos los planos que corresponden a él, para $i = 1, 2$.

El objetivo de Cavalieri era hallar la razón de la izquierda en la igualdad (1.3) por medio del cálculo de la razón de la derecha, y para ello le era de gran ayuda un postulado que conduce al llamado “teorema de Cavalieri”. El postulado mencionado afirma que si en dos figuras dadas de la misma altura F_1 y F_2 todo par de segmentos correspondientes (es decir segmentos de distancia iguales de la misma regla común) están en la misma razón, entonces $O_{F_1}(l)$ y $O_{F_2}(l)$ también están en la misma razón. O bien, en notación moderna y usando la Figura 1.10:

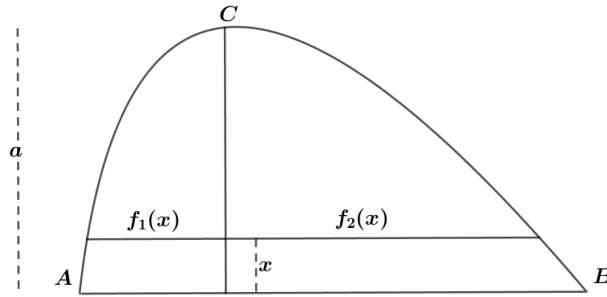


Figura 1.10. Teorema de Cavalieri.

⁴Ver libro V de los *Elementos* de Euclides.

Si para todo x tal que $0 < x < a$, se tiene que $f_1(x) : f_2(x) = b : c$ entonces

$$O_{F_1}(l) : O_{F_2}(l) = b : c. \quad (1.5)$$

Esto junto con (1.3), nos da inmediatamente el siguiente teorema:

Teorema de Cavalieri: Si para todo x tal que $0 < x < a$, se tiene que $f_1(x) : f_2(x) = b : c$ entonces

$$F_1 : F_2 = b : c. \quad (1.6)$$

El método colectivo de los indivisibles

Se compara la colección de indivisibles de figuras como se puede ver en la Figura 1.7, que resultan de secciones hechas por rectas paralelas (o planos paralelos) a las bases y a igual distancia. Esto puede variar de acuerdo a la forma de hacer las divisiones, lo que permite obtener diferentes tipos de indivisibles.

Todas las líneas de la figura plana: Dada una figura plana ACB y una recta AB , los segmentos que se generan al intersecar la figura con rectas paralelas a la dada (llamada regla) se constituyen en los indivisibles de la figura. Particularmente si la figura tiene una base recta y se toman rectas paralelas a ésta, la colección de los segmentos generados por la intersección entre la figura F y estas rectas son la colección de todas las líneas, es decir $O_F(l)$ (Ver Figura 1.11).

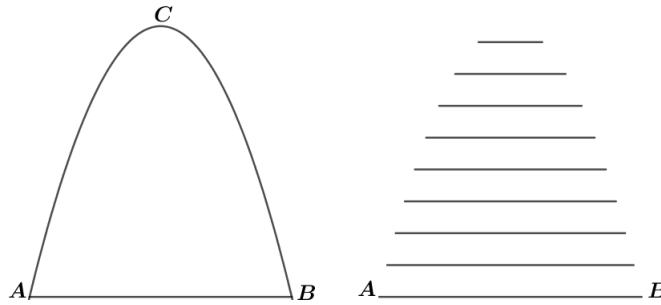


Figura 1.11. Todas las líneas de la figura plana.

Todos los planos de un sólido: Cavalieri toma como indivisibles a todas las regiones que se generan por la intersección del sólido con planos paralelos a uno dado inicialmente. Particularmente si el sólido tiene como base una región plana (ver Figura 1.12) a la colección de todas las regiones que se obtienen al cortar un sólido S por planos paralelos a ésta, se le denomina la colección de todos los planos $O_S(p)$.

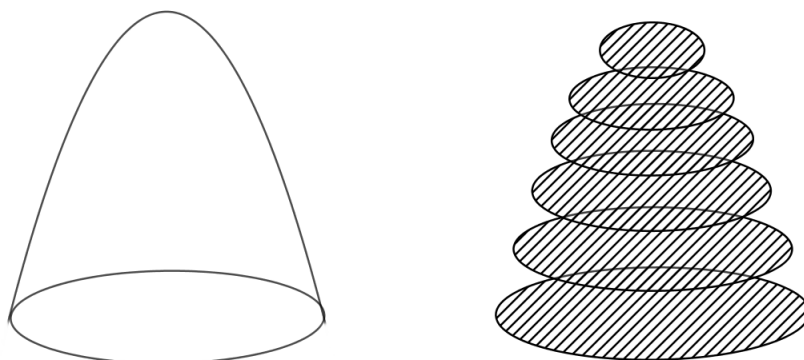


Figura 1.12. Todos los planos de un sólido.

Según Canizales y Erazo [13, p.70], Cavalieri intentaba demostrar que las colecciones de indivisibles son magnitudes en el sentido de los *Elementos* de Euclides por lo que podemos compararlas y operarlas. Sin embargo surge un cuestionamiento en torno a la forma de tratar con ellas, es decir ¿Se puede asumir que los infinitos indivisibles de una figura, con los infinitos indivisibles de otra, son iguales en cantidad?

El método distributivo de los indivisibles

Se encuentra la relación entre las colecciones indivisibles de dos figuras, haciendo una partición de cada indivisible, analizando las colecciones de los elementos de esta partición y encontrando el resultado final al unir estas colecciones. Según Edwards [18, p.106] este método conduce al cálculo de la “sumas de potencias”, que se puede expresar en lenguaje moderno como:

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}. \quad (1.7)$$

Para describir el método utilizado por Cavalieri, en [13, p.76] se parte de un cuadrado $ABCD$ con lados a , dividido por dos triángulos a partir de su diagonal AC (ver Figura 1.13). Si x e

y denotan las longitudes de las secciones PQ y QR de estos triángulos congruentes, entonces $x + y = a$, ahora

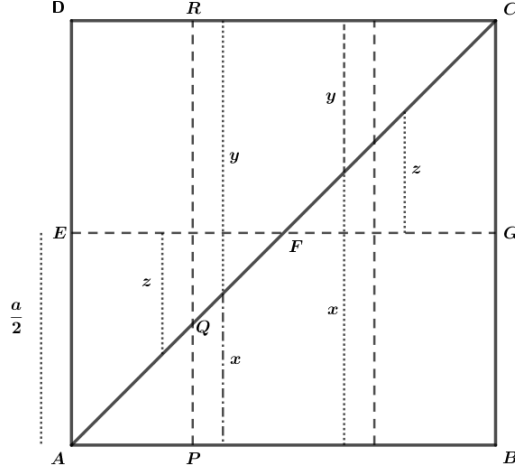


Figura 1.13. Cuadrado $ABCD$, dividido por dos triángulos.

$$\sum_A^B a = \sum_A^B (x + y) = \sum_A^B x + \sum_A^B y = 2 \sum_A^B x,$$

dado que $\sum_A^B x = \sum_A^B y$ por simetría, entonces:

$$\sum_A^B x = \frac{1}{2} \sum_A^B a = \frac{1}{2} a^2, \quad (1.8)$$

pues $\sum_A^B a$ representa el área del cuadrado.

Para calcular $\sum_A^B x^2$ se inicia con:

$$\begin{aligned} \sum_A^B a^2 &= \sum_A^B (x + y)^2 = \sum_A^B x^2 + 2 \sum_A^B xy + \sum_A^B y^2 \\ &= 2 \sum_A^B x^2 + 2 \sum_A^B xy \text{ (simetría)} \\ &= 2 \sum_A^B x^2 + 2 \sum_A^B \left(\frac{a^2}{4} - z^2 \right) \end{aligned}$$

Donde $x = (a/2) - z, y = (a/2) + z$. Por lo tanto

$$\sum_A^B a^2 = 4 \sum_A^B x^2 - 4 \sum_A^B z^2 \quad (1.9)$$

La $\sum_A^B z^2$ sobre los triángulos AEF y CFG , representa el volumen de una pirámide, que con relación al volumen de $\sum_A^B x^2$, es:

$$\sum_A^B z^2 = \frac{1}{4} \sum_A^B x^2.$$

La sustitución de este resultado en (1.9) da en este tratamiento el volumen de una pirámide (ver Figura 1.14)

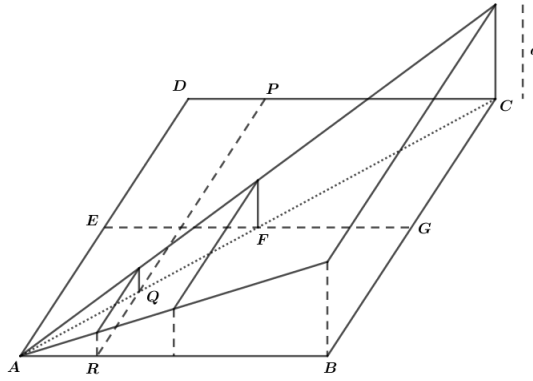


Figura 1.14. Volumen de una Pirámide.

$$V(P) = \sum_A^B x^2 = \frac{1}{3} \sum_A^B a^2 = \frac{1}{3} a^3, \quad (1.10)$$

ya que $\sum_A^B a^2$ representa el volumen de un cubo con borde a [18, pp.107-108].

Pasando a las sumas de cubos, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_A^B a^3 &= \sum_A^B (x+y)^3 = \sum_A^B x^3 + 3 \sum_A^B x^2 y + 3 \sum_A^B x y^2 + \sum_A^B y^3 \\ \sum_A^B a^3 &= 2 \sum_A^B x^3 + 6 \sum_A^B x^2 y \quad (\text{simetría}). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Para evaluar $\sum_A^B x^2 y$ se recurre a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_A^B a^3 &= a \sum_A^B a^2 = a \left(2 \sum_A^B x^2 + 2 \sum_A^B x y \right) \\ &= a \left(\frac{2}{3} \sum_A^B a^2 + 2 \sum_A^B x y \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \sum_A^B a^3 + 2 \sum_A^B (x+y)xy \\
\sum_A^B a^3 &= \frac{2}{3} \sum_A^B a^3 + 4 \sum_A^B x^2y \quad (\text{simetría}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum_A^B x^2y = \sum_A^B x^3/3$, y la sustitución de este resultado en (1.11) da

$$\sum_A^B x^3 = \frac{1}{4} \sum_A^B a^3 = \frac{1}{4} a^4. \quad (1.12)$$

Las fórmulas (1.8), (1.10) y (1.12) son las tres primeras instancias de la fórmula general

$$\sum_A^B x^n = \frac{a^{n+1}}{n+1}, \quad (1.13)$$

equivalente a (1.7), que Cavalieri infirió luego de verificarlo caso por caso hasta $n = 9$. Con base en este resultado, podría escribir inmediatamente el área bajo la curva $y = x^n$ (un entero positivo) sobre la unidad intervalo,

$$A = \sum_0^1 x^n = \frac{1}{n+1},$$

y el volumen del sólido obtenido al girar esta área alrededor del eje x ,

$$V = \pi \sum_0^1 x^{2n} = \frac{\pi}{2n+1}.$$

Esta unificación y generalización de resultados anteriores constituyó un paso gigante hacia el desarrollo de los procedimientos algorítmicos del cálculo. Cavalieri siempre consideró el método distributivo como suplemento del colectivo y nunca como una teoría independiente, motivo por el cual, quizás, no se molestó en darle nombres distintos.

1.2.3. El método aritmético del infinito: Wallis

En 1641, con el método de los indivisibles, Evangelista Torricelli (1608-1647) descubrió un teorema, que le expuso a su maestro Cavalieri. Este mencionaba que “... existe un sólido de longitud infinita pero dotado de una sutileza tal que, aún prolongado al infinito, no supera la cantidad de un pequeño cilindro” [39, p.334]. En 1656, John Wallis (1616-1703) publicó su *Arithmetica infinitorum*, en esta obra, él cuenta cómo se había familiarizado con el método de indivisibles gracias a Torricelli y también se aventuró a dar ese salto que precisaba la Geometría, al introducir el álgebra en sus deducciones.

El método de inducción incompleta para el cálculo de cuadraturas

Para Wallis, según Recalde [32, pp.229-233], el cálculo de la cuadratura de una curva, tiene que ver con calcular X de la proposición:

$$\frac{T}{P} = \frac{1}{X},$$

donde el área de figura curvilínea es T , y P es el polígono circunscrito en T . Inicialmente encuentra valores de X en curvas de la forma $y = x^n$, basados en la Figura 1.15, trata de

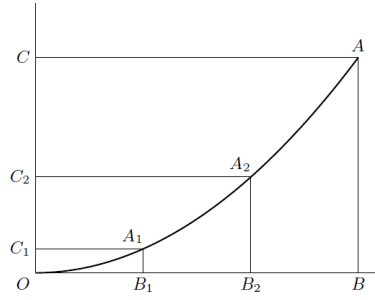


Figura 1.15. Curvas de la forma $y = x^n$.

establecer la proporción entre el triángulo curvilíneo OAB y el paralelogramo $OCAB$, en términos modernos se tendría que:

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{(C_1A_1)^n}{(C_2A_2)^n}, n \in \mathbb{Z}^+.$$

Con la cuadratura de $OCAB$, el problema consiste en hallar X , tal que:

$$\frac{\text{Cuad. } OAB}{\text{Cuad. } OCAB} = \frac{1}{X}.$$

Si $n = 1$, entonces OA se reducirá a una recta, OAB a un triángulo rectilíneo y X sería igual a 2. Para el caso general, Wallis considera el triángulo OAB y el paralelogramo $OCAB$ formados de una infinidad de segmentos paralelos. La idea de Wallis fue establecer un formalismo para las sumas infinitas. Si se toma la región limitada por la curva $y = x^n$, el eje x y la recta $x = a$ como se puede ver en la Figura 1.16, se tendrá que:

$$\frac{\text{cuad. } OAB}{\text{cuad. } OCAB} = \frac{\sum_{x=0}^a y}{\sum_{x=0}^a x} = \left[\frac{\left(\frac{0.a}{h}\right)^n + \left(\frac{1.a}{h}\right)^n + \dots + \left(\frac{h.a}{h}\right)^n}{a^n + a^n + \dots + a^n} \right]_{h \rightarrow \infty} = \left[\frac{\sum_{i=0}^h i^n}{\sum_{i=0}^h h^n} \right]_{h \rightarrow \infty}.$$

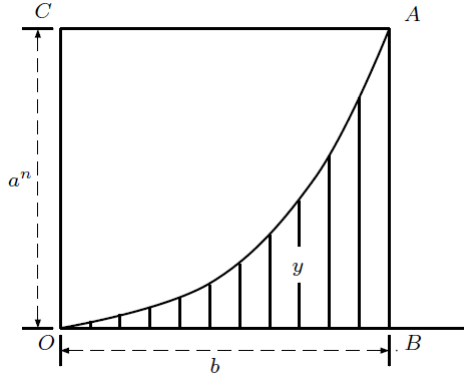


Figura 1.16. Curva $y = x^n$, limitada por el eje x y la recta $x = a$.

Para llegar al caso general, Wallis empieza considerando casos particulares. Para el caso de $n = 1$, en términos modernos se establece la siguiente igualdad:

$$\left[\frac{\sum_{i=0}^h i}{\sum_{i=0}^h h} \right]_{h \rightarrow \infty} = \left[\frac{\frac{h(h+1)}{2}}{h(h+1)} \right]_{h \rightarrow \infty} = 1/2.$$

Wallis sigue el mismo proceso para $n = 2$, obteniendo $\frac{1}{3}$, para el caso de $n = 3$, obtiene $\frac{1}{4}$. Wallis establece la proposición general consignando los resultados de las diez primeras potencias y con ese resultado encuentra el caso general para n enteros positivos.

$$\left[\frac{\sum_{i=0}^h i}{\sum_{i=0}^h h} \right]_{h \rightarrow \infty} = \frac{1}{n+1}.$$

Lo que significa que en la proporción

$$\frac{\text{cuad. } OAB}{\text{cuad. } OCAB} = \frac{1}{X},$$

donde $X = n + 1$. De esta manera, si consideramos la región limitada por la curva $y = x^n$, el eje x y la recta $x = a$, dado que el área del paralelogramo $OCAB$ es a^{n+1} (tiene base a y altura a^n) entonces $\frac{1}{n+1} a^{n+1}$ corresponde a la cuadratura de la región OAB .

El método de Wallis fue extender su resultado para exponentes racionales al observar que para las curvas del tipo $y = (\sqrt[n]{x})^p = x^{p/q}$, siguiendo un proceso similar para encontrar la cuadratura bajo la curva de $y = x^k$, se tiene que la región acotada por la curva $y = x^{p/q}$, el eje x y la recta $x = 1$, está dada por:

$$\text{Cuad } [x^{p/q}]_0^1 = \frac{q}{p+q}.$$

La noción de límite e infinito en Wallis

El germen del concepto aritmético de límite de una sucesión infinita de números la podemos encontrar en la *Arithmetica Infinitorum* de Wallis, como sigue:

... un número al que se aproxima la función de modo que la diferencia entre este número y la función puede hacerse menor que cualquier cantidad fijada de antemano y que se anula cuando el proceso se continuará hasta el infinito [26, p.513].

Podemos entender que la definición presentada por Wallis es de cierta manera muy vaga, pero para la época aún no se habían trabajado conceptos como el de función que hace referencia a una sucesión infinita de números, además en esta expresión se hace alusión a la proposición X.1 de los *Elementos* de Euclides, cuando se menciona que “la función puede hacerse menor que cualquier cantidad fijada de antemano y que se anula cuando el proceso se continuará hasta el infinito”, también se observa un proceso infinito (infinito potencial), lo cual nos lleva a entender que la idea de Wallis en el fondo es correcta.

Los indivisibles de Wallis poseen cantidad, es decir las líneas tienen anchura, al igual que los planos tienen grosor. Su método consiste en rellenar una superficie (o un sólido) con paralelogramos (paralelepípedos) de anchura infinitesimal y uniforme, en una cantidad infinita. Esa anchura ha de ser la mínima posible: un “infinitésimo”. Por primera vez en la historia de la matemática hallamos “infinitésimos” [39, p.342]; estos son una invención de Wallis los cuales surgen del cociente entre una magnitud finita y otra infinita.

El infinito absoluto de Wallis, según Yuste [39, p.342], es un infinito potencial actualizado, es una cantidad mayor que cualquier otra asignable. Por consiguiente, el infinitésimo, $\frac{1}{\infty}$, traduce el hecho de partir una superficie o volumen en infinitas porciones infinitamente pequeñas. Wallis realiza operaciones sin tener en cuenta los objetos, por ejemplo establece que la suma de infinitas partes infinitésimas nos proporciona una magnitud finita:

$$\left(\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} + \dots \right) \cdot h = h$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) \cdot h = h$$

Además se tienen igualdades como: $\frac{1}{\infty} \cdot \infty = 1$ y $\left(\frac{1}{\infty} \cdot h \right) \cdot \infty = h$.

1.3. Las cantidades infinitamente pequeñas

A las cantidades con las que trabajaban tanto Newton como Leibniz en la conformación del cálculo, en algunas ocasiones se las consideraba como infinitesimales, o como cantidades evanescentes o incipientes o cantidades infinitamente pequeñas.

1.3.1. Límite e Infinitesimales: Newton

Basándose en las obras de René Descartes (1596-1650,), de Wallis y de Isaac Barrow (1630-1677), Isaac Newton (1642-1727) fundó su cálculo fluxional, el cual fue publicado mediante una serie de tratados sobre:

- Series infinitas *De analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* de 1711.
- Método de fluxiones y series infinitas *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitorum* de 1736.
- Cuadratura de curvas denominado *De Quadratura Curvarum*, de 1704.
- *Principia* de 1687 que suministraban al público en general indicaciones sobre sus métodos de cálculo infinitesimal.

Los concepto de límite e infinitesimal se puede observar en algunos apartados de las obras que mencionamos en la lista, relacionados a tres aspectos, el primero tiene que ver con el método de razones primeras y últimas, el segundo aspecto con fluentes y fluxiones y el tercero con la cuadratura de curvas, de los cuales hablaremos a continuación.

Método de razones primeras y últimas

Para dar cuenta de este método, centramos nuestra atención en el Libro I, Sección 1 de *Principia* que se puede ver en Struik [35, pp. 291-294] donde se encuentra el método de las razones primeras y últimas que es un intento de definir la noción de límite, su trabajo empieza con el siguiente lema:

Lema I: Las cantidades, y las proporciones de las cantidades, que en cualquier tiempo finito convergen continuamente a la igualdad, y antes del final de ese tiempo se acercan entre sí más y más que cualquier diferencia dada, se vuelven finalmente iguales.

Newton busca definir en el Lema 1, el límite de las sucesiones y las razones o relaciones de las sucesiones, el tiempo representa para él, lo que sería para nosotros el concepto de número real. En este sentido en términos modernos si se tiene dos sucesiones monótonas de números reales a_n, b_n una creciente y otra decreciente respectivamente, ambas convergentes, entonces para cualquier diferencia dada sus límites son iguales, es decir que para una diferencia $\varepsilon > 0$, existe un número entero positivo N tal que $n = N$ conducen $|a_n - b_n| = \varepsilon$, entonces $l_1 = l_2$, donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l_1, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l_2.$$

Según Dugac [17, pp.47-48], la idea para una demostración de este lema parte de su negación y suponer que en última instancia son desiguales, por lo que no pueden acercarse más a la igualdad que por la diferencia D dada; es decir que $|l_1 - l_2| = D > 0$, como las sucesiones consideradas son convergentes, existe N_1 tal que $n \geq N_1$ implica $|a_n - l_1| \leq \varepsilon$, y existe N_2 tal que $n \geq N_2$ conduce $|b_n - l_2| \leq \varepsilon$. Por lo tanto, si $n \geq N_3 = \sup(N, N_1, N_2)$, entonces

$$\begin{aligned} |l_1 - l_2| &= |l_1 - u_n + u_n - v_n + v_n - l_2| \\ &\leq |u_n - l_1| + |u_n - v_n| + |v_n - l_2| \leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

Entonces es suficiente tomar $\varepsilon = \frac{D}{6}$, donde $\varepsilon < D$ para llegar a una contradicción.

Lema II: Si en alguna figura $AacE$ (Ver Figura, 1.17) determinada por las rectas Aa, AE y la

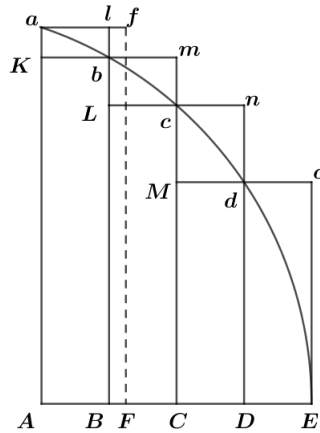


Figura 1.17. Método de razones primeras y últimas: Lema II

curva acE , se inscribirá cualquier número de paralelogramos $Ab, Bc, Cd, etc.$, comprendidos

bajo iguales bases $AB, BC, CD, etc.$, Y los lados, $Bb, Cc, Dd, etc.$, paralelos a un lado Aa de la figura; y los paralelogramos $aKbl, bLcm, cMdn, etc.$, se completan: entonces, si se supone que la amplitud de esos paralelogramos está disminuida, y su número aumenta al infinito, es posible que las relaciones últimas de la figura inscrita $AKbLcMdD$, la figura circunscrita $AalbmcndoE$ y la figura curvilínea $AabcdE$, tendrán entre sí, son proporciones de igualdad.

Tenemos que la diferencia de las figuras inscrita Ab y circunscrita Al es el paralelogramo Kl y en general son la suma de los paralelogramos Kl, Lm, Mn, Do . Además las figuras Ab, Al y Kl comparten la base AB y si esta se supone disminuida en infinitum, se vuelve menor que cualquier cantidad dada, de igual manera sucede con el resto de las figuras. Y por lo tanto (por Lema I) las figuras inscritas y circunscritas se vuelven en última instancia iguales entre sí; y mucho más, la figura curvilínea intermedia será en última instancia igual a cualquiera.

Los dos lemas que siguen, así como sus corolarios en uno de ellos Newton usa la palabra “límite”, revelan el significado que le da a su “método de las razones primeras y últimas”, que corresponde en última instancia al concepto de límite.

Lema III: Las mismas razones últimas, también son razones de igualdad, cuando las anchuras $AB, BC, DC, etc.$, de los paralelogramos son desiguales y todas están disminuidas en infinitum.

Suponga que AF (Ver Figura, 1.17) es igual a la mayor amplitud y complete el paralelogramo $FAaf$. Este paralelogramo será mayor que la diferencia de las figuras inscritas y circunscritas; pero, debido a que su ancho AF se reduce en infinito, será menor que cualquier rectángulo dado.

- **Corolario I.** Por tanto, la suma última de estos paralelogramos evanescentes coincidirá en todas sus partes con la figura curvilínea.
- **Corolario II.** Mucho más será la figura rectilínea comprendida bajo las cuerdas de los arcos evanescentes $ab, bc, cd, etc.$, coincidirá en definitiva con la figura curvilínea.
- **Corolario III.** Y también la figura rectilínea circunscrita comprendida bajo las tangentes de los mismos arcos.

■ **Corolario IV.** Y, por tanto, estas figuras últimas (en cuanto a sus perímetros acE) no son rectilíneas, sino límites curvilíneos de figuras rectilíneas.

Lema IV: Si en dos figuras $AacE, PprT$ (Ver Figura 1.18), se inscriben (como antes) dos series de paralelogramos, un número igual en cada serie, y, siendo sus bases disminuidas en infinitum, si las razones últimas de los paralelogramos en una figura a los de la otra, cada uno para cada uno respectivamente, son los mismos: digo, que esas dos figuras, $AacE, PprT$, están entre sí en la misma proporción.

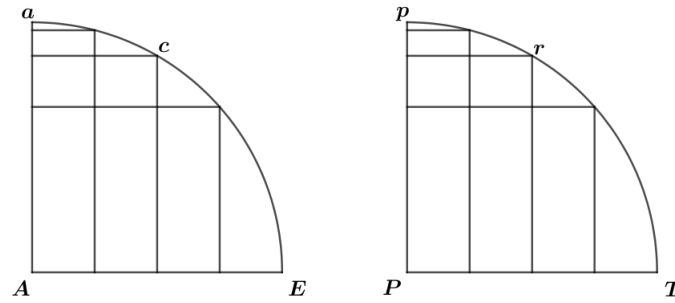


Figura 1.18. Método de razones primeras y últimas: Lema IV

Porque así como los paralelogramos en uno son iguales a los paralelogramos en el otro, así (por composición) es la suma de todos en el uno a la suma de todos en el otro; y así es una figura a la otra; porque (por Lema III) la primera cantidad a la primera suma, y la última cantidad a la última suma, están ambas en la razón de igualdad.

Corolario. Por lo tanto, si dos cantidades de cualquier tipo se dividen de cualquier manera en un número igual de partes, y esas partes, cuando su número aumenta y su magnitud disminuye en infinito, tienen una relación determinada entre sí, la primera con la primera, el segundo al segundo, y así sucesivamente en orden, todos juntos serán entre sí en la misma proporción dada. Pues sí, en las figuras de este Lema (Ver Figura 1.18), los paralelogramos se toman entre sí en la razón de las partes, la suma de las partes siempre será como la suma de los paralelogramos; y, por lo tanto, suponiendo que el número de paralelogramos y partes se aumente, y sus magnitudes disminuidas en infinito, esas sumas estarán en la razón última del paralelogramo en una figura al paralelogramo correspondiente en la otra; es decir (por suposición), en la relación última de cualquier parte de una cantidad a la parte

correspondiente de la otra.

Después de haber enunciado varios lemas, Newton escribe en una importante nota: “Empecé con estos lemas para no deducir largas demostraciones por método de reducción al absurdo, que fue utilizado por los antiguos geómetras” [17, p.48]. Finalmente prefirió el método de las razones primeras y últimas de las cantidades que surgen y se desvanecen, es decir, deducir los límites de las sumas y las proporciones.

Fluentes y Fluxiones

Jhon Wallis publicó en 1693 en el Libro II de sus *Obras Matemáticas* la investigación que había realizado Newton sobre cálculo diferencial. En esta obra es donde aparece por primera vez la notación de Newton para las fluxiones:

Sean v, x, y, z cantidades fuentes, sus fluxiones se denotan respectivamente por $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Y dado que estas fluxiones también son cantidades indeterminadas y se hacen más grandes o más pequeñas por un movimiento continuo, podemos considerar las velocidades con las que aumentan o disminuyen como sus fluxiones, y las podemos denotar por dos puntos de la siguiente manera: $\ddot{v}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$, y podemos considerar el crecimiento o la disminución de estas mismas fluxiones como fluxiones. [17, p.49]

Retomando la idea de la cita anterior tenemos que:

- Fuentes: son cantidades que varían con respecto al tiempo, denotadas por x, y .
- Fluxiones: es la rapidez de cambio de las fuentes, representadas por $\dot{x}, \dot{y}$.

Newton interpretó el cociente de las fluxiones como la pendiente de la recta tangente, esto es:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx}.$$

Además, procura formalizar la idea de cantidades infinitesimales⁵ bajo la noción de fuentes y fluxiones, sin embargo las cantidades infinitesimales o infinitamente pequeñas introdujeron en la comunidad matemática de la época inconformidad. Dicha inconformidad se hallaba en el hecho que las cantidades infinitesimales cumplieran las siguientes leyes, en un cociente

⁵Son entendidas como una cantidad menor que cualquier cantidad positiva dada, pero no nula.

dividían a diferentes cantidades por ser consideradas distintas de cero, y como sumando desaparecen en determinadas expresiones al no afectar el resultado, por ser infinitamente pequeñas. A estas cantidades se le conoce como “cantidades evanescentes”.

Pero Newton a través de procesos algorítmicos se dio cuenta en términos generales de estos problemas. Es decir, a los incrementos correspondientes a las fluxiones las expreso en función de los incrementos de tiempo; esto es si “ o ” es entendido como un incremento infinitesimal de tiempo, entonces los incrementos correspondientes a x, y están dados por $\dot{x}o, \dot{y}o$, llamados “momentos”. Estas cantidades son introducidas en el Libro II de *Principia*, y corresponde a la noción de diferencial de una función que conocemos actualmente.

A través del siguiente ejemplo problema planteado en [37, p.38] observamos el proceso usado por Newton, para obtener la tangente de una curva en un punto, teniendo en cuenta los incrementos infinitesimales. Sea la curva de ecuación

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0 \quad (1.14)$$

Sustituyendo x por $x + \dot{x}o$ y y por $y + \dot{y}o$, tenemos:

$$(x + \dot{x}o)^3 - a(x + \dot{x}o)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0$$

Teniendo en cuenta (1.14), desarrollando los binomios establecido, dividiendo por o y despreciando los demás términos que contengan a o , resulta

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ax\dot{y} + ay\dot{x} - 3y^2\dot{y} = 0$$

Despejando se tiene el cociente diferencial:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}$$

El cual es la relación que satisfacen las fluxiones. A partir de ella puede obtenerse la tangente a la curva (1.14) en cualquier punto (x, y) de la misma.

Cuadratura de Curvas

Con las herramientas obtenidas en los dos apartados anteriores, es decir los “momentos” (infinitesimales), las fuentes y fluxiones y su método de razones primarias y últimas, Newton

publicó la primera exposición completa de esta teoría de las fluxiones en su *Tractatus de quadratura curvarum*, que se puede ver en Struik [35, pp. 303-305]. Además introduce el triángulo característico y la definición de tangente como “límite” de una secante.

Newton consideraba que las cantidades matemáticas (líneas) describen un movimiento continuo, y por lo tanto, se generan por el movimiento continuo de puntos; las superficies por el movimiento de líneas; los sólidos por el movimiento de superficies; ángulos por la rotación de los lados; porciones de tiempo por un flujo continuo: y así en otras cantidades. Estas génesis realmente tienen lugar en la naturaleza de las cosas y se ven a diario en el movimiento de los cuerpos. Por tanto, considerando que las cantidades que aumentan en tiempos iguales y al aumentar se generan, se hacen mayores o menores según la mayor o menor velocidad con que aumentan y se generan; esto gracias a las fuentes y fluxiones.

Para la introducción del triángulo característico, se tiene en cuenta las áreas ABC , $ABDG$ (Ver Figura 1.19) que se describen mediante las ordenadas BC y BD moviéndose a lo largo

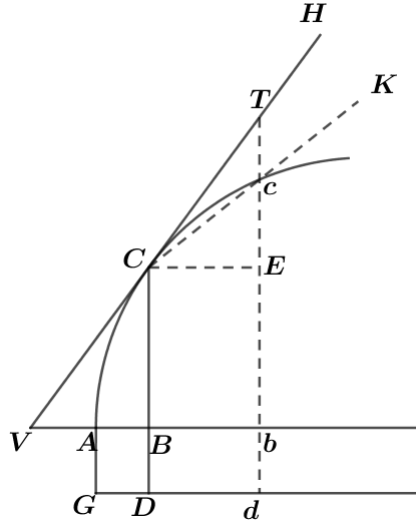


Figura 1.19. Triángulo Característico.

de la base AB con un movimiento uniforme, las fluxiones de estas áreas serán entre sí como las ordenadas descritas BC y BD , y las fluxiones pueden ser expuestas por estas ordenadas,

porque estas ordenadas son como los aumentos nacientes de las áreas.

Deje que la ordenada BC avance desde su lugar a cualquier lugar nuevo bc . Complete el paralelogramo $BCEb$ y dibuje la recta VTH tangente a la curva en C , y encontrando las dos líneas bc en T y BA en V , y Bb, Ec y Cc serán los aumentos ahora generados de la abscisa AB , la ordenada BC y la curva ACc ; y los lados del triángulo característico CET están en la primera proporción de estos aumentos considerados como nacientes, por lo tanto, las fluxiones de AB, BC y AC son como los lados CE, ET y CT de ese triángulo CET , y pueden ser expuestas por estos mismos lados, o lo que es lo mismo, por los lados del triángulo VBC , que es similar al triángulo CET .

Para dar cuenta de la definición de tangente como “límite” de una secante, se tiene el propósito de tomar las fluxiones en la relación última de las partes evanescentes. Dibuje la línea derecha Cc , y produzcala a K . Deje que la ordenada bc vuelva a su lugar anterior BC , y cuando los puntos C y c se fusionen, la recta CK coincidirá con la tangente CH , y el triángulo evanescente CEc en su forma final se volverá similar al triángulo CET , y sus lados evanescentes CE, Ec y Cc estarán en última instancia entre ellos como lo son los lados CE, ET y CT del otro triángulo CET y, por lo tanto, las fluxiones de las líneas AB, BC y AC están en la misma proporción. Si los puntos C y c están distantes entre sí por una pequeña distancia, la recta CK estará igualmente distante de la tangente CH por una pequeña distancia. Que la recta CK pueda coincidir con la tangente CH , y que se puedan encontrar las relaciones últimas de las rectas CE, Ec y Cc , los puntos C y c deben fusionarse y coincidir exactamente, llegando a determinarse la recta tangente como “límite” de una recta secante.

1.3.2. Infinitesimales: Leibniz

Para dar cuenta de las cantidades infinitesimales usadas por Gottfried Leibniz (1646-1716) centramos nuestra atención en Cambray [12] quien presenta de manera detallada en el desarrollo del cálculo de Leibniz un método denominado “método de transmutación”, en él se recoge toda la tradición anterior, especialmente el método de indivisibles de Cavalieri que fue presentado anteriormente en esta investigación, donde el objetivo de este método es realizar el cálculo de cuadraturas y la comparación de áreas, lo que desencadena en uno

de los aportes más grandes de Leibniz como es el “Teorema fundamental del cálculo” del cual no se hablará en este trabajo debido a un interés metodológico, el cual se centra en las cantidades infinitesimales.

El método de transmutación

El resultado más importante obtenido por Leibniz, el cual lo erige como uno de los creadores del cálculo, es su método de “transmutación”. El método de transmutación se puede expresar en los siguientes términos:

Método de transmutación: Sean A y B dos regiones planas, cada una dividida en indivisibles (estos pueden ser tomados como una infinidad de rectángulos infinitesimales). Si existe una correspondencia uno a uno entre los indivisibles en A y los de B , tales que indivisibles correspondientes tengan iguales áreas, entonces se dice que B es derivado de A por transmutación, concluyendo que tiene áreas iguales. [32, p. 252]

En 1675 Leibniz realiza un estudio detallado sobre cuadraturas, donde para calcular de manera analítica las relaciones utiliza el simbolismo de Cavalieri. Partiendo de la Figura 1.20 considera una sucesión de ordenadas “ y ” correspondientes a la curva $\widehat{OC}$, separadas

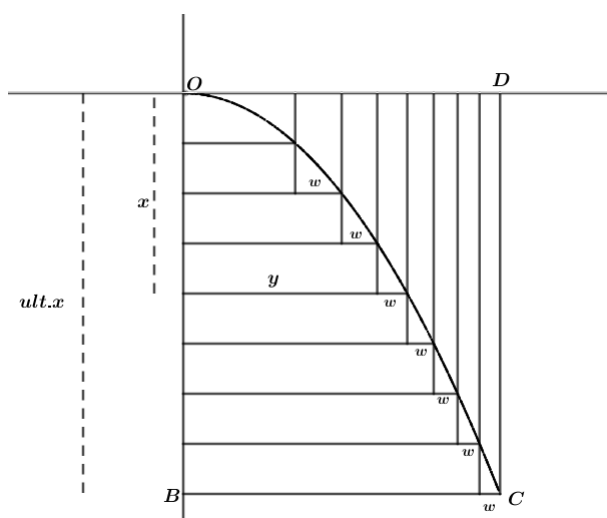


Figura 1.20. Sucesión de ordenadas y correspondientes a la curva $\widehat{OC}$.

por una distancia infinitamente pequeña, con lo cual OBC es igual a la suma de las ordenadas y . Sea además las diferencias sucesivas entre estas ordenadas “ y ” una cantidad infinitamente pequeña representada por w , los rectángulos $w \times x$ se interpreta como los momentos de las diferencias w con respecto al eje OD (momento = peso $\times$ distancia al eje).

Como se puede observar en la figura $\widehat{OCB}$ es el complemento de $\widehat{OCD}$ (representa el momento total de las diferencias w). En el rectángulo $ODCB$ encuentra Leibniz que los momentos (rectángulos $w \times x$) de las diferencias w con respecto a una línea OB perpendicular al eje OD son iguales al complemento $\widehat{OCB}$ de la suma de los términos “ y ”, y recíprocamente la sucesión de sumas de ordenadas y es igual a la sucesión de sumas de las cantidades w , de modo que podemos eliminar y y considerar solamente las cantidades w y su sucesión de sumas respectivamente [23, p.91].

El tratamiento geométrico de las ideas de Leibniz estuvieron basadas en el “triángulo característico”, el cual afirmó haber encontrado cuando realizó un estudio sobre los trabajos de Blaise Pascal (1623-1662). En la Figura 1.21, considerando el segmento EE' tangente a

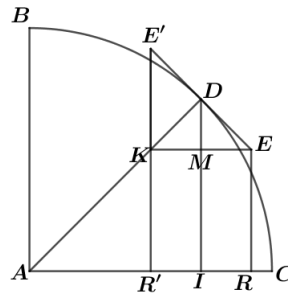


Figura 1.21. Triángulo Característico.

la circunferencia en el punto D . Leibniz utilizó en sus investigaciones el triángulo EDM , al que llamó triángulo característico. Tomaba el segmento ED como una cuerda o un lado recto “infinitamente pequeño” de los que forman la circunferencia.

Leibniz generalizó el uso de las propiedades del triángulo característico a todas las curvas (ver Figura 1.22), al reemplazar el radio del círculo por la normal n a la curva en el punto D . Además Leibniz, exploró el uso de elementos triangulares OPP' (Ver Figura 1.23), fue

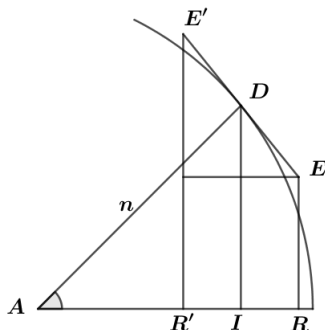


Figura 1.22.

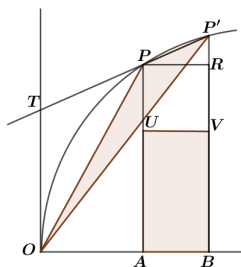


Figura 1.23.

de esta manera como el triángulo característico permitió a Leibniz explorar sus resultados con sucesiones numéricas en un contexto geométrico.

Miremos con más detalle, el uso del triángulo característico en el método de transmutación. Para esto se toma en cuenta, la siguiente curva dada $OPP'Q$ (Ver Figura 1.24), y sea PDP' el triángulo característico en un punto P de ella. La cuadratura de esta curva es igual a la suma de los elementos trapezoidales $APP'A'$; también es igual al área del triángulo OBQ

$$\left(\frac{1}{2}OB \times BQ\right)$$

Más la suma de los elementos triangulares OPP' . Al considerar que PP' es un segmento de recta “infinitamente pequeño” de los que forman la curva $OPP'Q$, la línea recta tangente por el punto P será la prolongación de PP' y cortará al eje vertical en T . Trácese OS perpendicular a PT . Resulta que el triángulo OTS así construido es semejante al triángulo $PP'D$ (ambos son triángulos rectángulos y el ángulo $PP'D$ es igual al ángulo STO , pues $P'D$ es paralela a TO) y por lo tanto

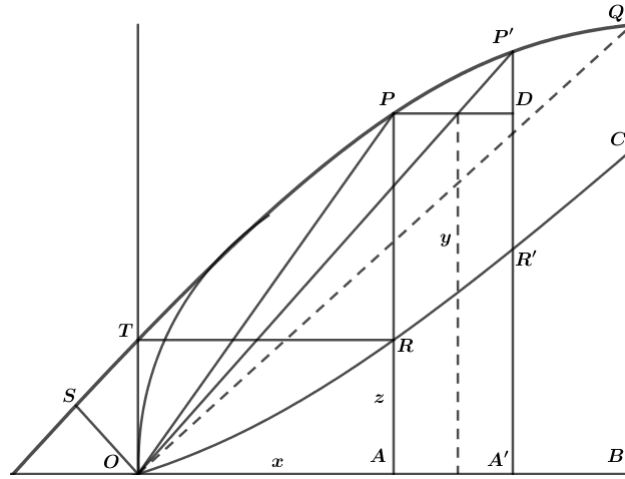


Figura 1.24. Método de Transmutación.

$$\frac{OS}{TO} = \frac{PD}{PP'} \quad \text{o} \quad OS \times PP' = TO \times PD.$$

Obsérvese que OS (altura) por PP' (base) es el doble del área del triángulo OPP' .

Para cada punto P sobre $OPP'Q$ se determina un punto R al trazar la tangente PT y tomando $AR = OT$. De esta manera se construye otra curva, $ORR'C$. La cuadratura de esta nueva curva es igual a la suma de los elementos trapezoidales $ARR'A$, cada uno de los cuales tiene como área $RA \times AA' = TO \times PD$. Pero $OS \times PP' = TO \times PD$; esto es, el doble del área de cada triángulo infinitesimal OPP' es igual al área de su correspondiente “rectángulo infinitesimal” $ARR'A$. Entonces, la cuadratura del sector $OPP'Q$ por encima de la línea recta OQ es igual a la mitad de la cuadratura de la curva $ORR'C$.

Por lo tanto,

$$\text{cuadratura de } OPP'Q = \frac{1}{2} \text{cuadratura de } ORR'C + \left(\frac{1}{2} OB \times BQ \right).$$

El rasgo más sobresaliente del método de transmutación es que relaciona el trazado de tangentes con la determinación de cuadraturas: para determinar la nueva curva $ORR'C$ cuya cuadratura debe ser más fácil obtener que la de la original $OPP'Q$, es necesario trazar las tangentes PT por cada punto P de ésta. Así mostró y utilizó Leibniz su conclusión de que la determinación de cuadraturas y el trazado de tangentes son “operaciones” inversas

una de la otra.

Consideró en el estudio de las curvas una sucesión de ordenadas y equidistantes (Ver Figura 1.25), y si la distancia entre ellas se toma “infinitamente pequeña” (despreciable

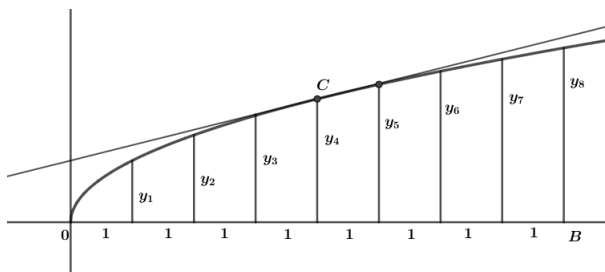


Figura 1.25. Cuadratura de la curva

al compararla con cantidades finitas, pero diferente de cero), la suma de las ordenadas dará la cuadratura de la curva, y la diferencia entre dos ordenadas consecutivas dará el valor de la pendiente de la recta tangente correspondiente.

El límite y el infinito como conceptos fundadores del cálculo

En los siglos XVIII y XIX se dieron los fundamentos del cálculo infinitesimal, de donde brotaron nuevas e importantes ramas de la matemática. Pero antes de que esto pudiese llevarse a cabo hubo que desarrollar el propio cálculo infinitesimal, pues, si bien Newton y Leibniz habían creado los métodos básicos, quedaba mucho por hacer. Había que extender las técnicas de derivación y de integración a ciertas funciones conocidas y a otras todavía por conocer y quedaban por establecer los fundamentos lógicos del cálculo infinitesimal. Los matemáticos del siglo XVIII extendieron el cálculo infinitesimal y fundaron nuevas ramas del análisis. Elaboraron un tratamiento puramente formal del cálculo infinitesimal y de las ramas del análisis resultante de él.

El tratamiento puramente formal del cálculo infinitesimal y de las ramas del análisis resultante de él, contaba con una técnica insuperable, aunque no fue guiada por un elaborado pensamiento matemático sino por agudas percepciones de carácter físico e intuitivo. Estos esfuerzos formales resistieron la prueba de posteriores exámenes críticos y dieron lugar a grandes líneas de pensamiento. Para apreciar el trabajo y los argumentos de los pensadores del siglo XVIII será útil tener presente que ellos no distinguían entre álgebra y análisis¹. Por

¹La distinción entre el álgebra y el análisis como ramas de las matemáticas, tiene que ver con que el álgebra se ocupa de las operaciones aritméticas, así como de las ecuaciones en que las incógnitas sólo se ven afectadas por ese tipo de operaciones. Su proceso histórico está relacionado con el desarrollo de los símbolos algebraicos, con procedimientos genéricos para solución de ecuaciones de primer y segundo grado, con el cálculo de polinomios y los primeros rudimentos del cálculo vectorial y matricial. Por otro lado el análisis se encarga de cuestiones en los que están implicados procesos de paso al límite, como el cálculo diferencial y el cálculo integral; además de éstos, hay

ejemplo, no se percibe la necesidad del concepto de límite y por lo tanto el tratamiento de series infinitas reducía los cálculos infinitesimales a una manipulación puramente algebraica [26, pp.533-534].

2.1. Los predecesores en las ideas de Leibniz

2.1.1. El análisis de las cantidades infinitamente pequeñas

Muchas de las ideas de los Bernoulli y Leibniz sobre el cálculo diferencial se hicieron públicas en un libro titulado *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes* de 1696 por Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661-1701), quien reconoció libremente su deuda con sus maestros: “He hecho uso gratuito de sus descubrimientos, de modo que francamente les devuelvo lo que quieran reclamar como suyo” [35, p.312].

En 1691 Johann Bernoulli (J. Bernoulli), conoció a L'Hôpital quien quedó encantado con el nuevo análisis de lo infinitamente pequeño que J. Bernoulli presentó. Así que L'Hôpital contrató a J. Bernoulli quien estuvo dispuesto a ayudarlo y comunicarle algunos descubrimientos exclusivos, lo cual se realizó mediante un contrato que se firmó por ambos, donde L'Hôpital le pidió enviarle sus resultados, a lo cual J. Bernoulli respondió “sólo tiene que hacerme saber sus deseos categóricos, si ya no tengo que publicar nada en mi vida, los seguiré con precisión y ya nada de mi autoría será visto” [28, p.5].

El libro de L'Hôpital se publicó siguiendo el estilo clásico de Euclides y Arquímedes, iniciando con dos definiciones y dos axiomas, como un intento de formalizar el concepto intuitivo de cantidades infinitesimales y las operaciones que regían su uso.

Entre 1700 y 1706 prevaleció un debate muy acalorado en el seno de la Académie des Sciences de París sobre la admisibilidad lógica del nuevo cálculo; las discusiones giraron en torno a la validez de los métodos infinitesimales y las bases sobre las que se apoyaban de acuerdo con

otros temas, como la suma de series infinitas, que también implican procesos “infinitos” del mismo tipo. El término “análisis” también se utiliza para indicar un enfoque bastante más riguroso en los temas de cálculo, y la fundamentación del sistema de los números reales.

la manera en que L'Hôpital había presentado la estructura de este nuevo saber matemático.

La primera etapa del debate (1700-1701) no fue hecha pública. Michel Rolle (1652-1719) fue el líder del grupo anti-infinitesimalista que negaban la existencia de cantidades que no satisficiera el axioma arquimedian², no aceptaba la noción común 8 de los *Elementos*³, y tampoco aceptaba la manipulación, aparentemente arbitraria, de los infinitesimales. En el caso de los infinitesimales el problema para Leibniz era asegurar el uso confiable de las cantidades infinitesimales y no su existencia. El segundo debate, público a partir de 1702, trataba cuestiones no sólo sobre los fundamentos del nuevo cálculo sino también sobre los resultados, lo que impulsó el avance de las investigaciones.

En lo que sigue presentaremos algunos aportes importantes de la obra de L'Hôpital que se pueden ver en la traducción al español, realizada por Núñez, R. [28, pp.28-30].

Definición I: Se llaman cantidades variables aquellas que aumentan o disminuyen continuamente; y por el contrario, cantidades constantes las que permanecen siendo las mismas mientras las otras cambian.

Definición II: La parte infinitamente pequeña en la que una cantidad variable aumenta o disminuye continuamente, es llamada la diferencia.

Para dar claridad a la definición II, L'Hôpital se refiere a la Figura 2.1, sea AMB una línea curva cualquiera que tiene como eje o diámetro la recta AC en la cual se denota: $AP = x$, $PM = y$, la cuerda $AM = z$, el arco $\widehat{AM} = s$ y la cuadratura $AMP = \mathbf{L}$, luego describe con centro en A y radio AM , el pequeño arco MS , si se traza una segunda ordenada pm “infinitamente próxima” a PM , entonces las diferenciales de las variables son, como se ve: $dx = Pp$, $dy = mR$, $dz = Sm$, $ds = Mm$ (donde la cuerda Mm y su arco Mm coinciden) y $d\mathbf{L} = MPpm$. L'Hôpital explica que “ d ” es un símbolo que se usa para representar la diferencial de la variable. Los segmentos $Pp, mR, \dots$ deben considerarse como “infinitamente pequeños”, no se menciona si existen, pero sí cómo se comportan, como se evidencia en el

²Si A y B son dos magnitudes (que pueden ser incommensurables) entonces siempre existe un número natural n tal que $nA > B$.

³El todo es mayor que la parte [19, p.201]

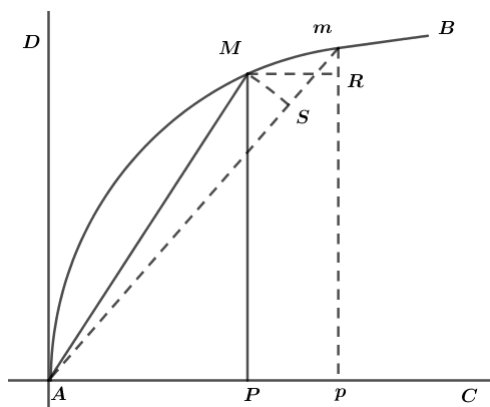


Figura 2.1. Definición II, de L'Hôpital.

siguiente postulado:

Postulado I. Se pide que se puedan tomar indistintamente una por la otra a dos cantidades que no difieran entre sí más que por una cantidad infinitamente pequeña, o (lo cual es lo mismo) que una cantidad que no se incremente ni se haga disminuir más que por otra cantidad infinitamente menor que ella, pueda considerarse como que permanece siendo la misma.

Lo que quiere decir que AP puede considerarse igual a Ap o bien $x = x + dx$, MP igual a mp ($y = y + dy$), etc. El segundo postulado menciona que:

Postulado II. Se pide que una línea curva pueda ser considerada como el ensamblaje de una infinidad de líneas rectas, cada una infinitamente pequeña, o (lo cual es lo mismo) como una poligonal de un número infinito de lados, cada uno infinitamente pequeño, los cuales determinan, por los ángulos que forman entre sí, la curvatura de la línea.

Como ejemplo, menciona que la porción de curva Mm y el arco de círculo MS (Ver Figura 2.1) se puedan considerar como líneas rectas debido a su pequeñez infinita, de modo que el pequeño triángulo mSM pueda ser supuesto rectilíneo. Con estos postulados L'Hôpital construyó todo el edificio del cálculo diferencial.

Según Grattan-Guinness [23, p.97], el concepto de diferencial que tiene L'Hôpital, es un poco diferente al de Leibniz, en el caso de Leibniz el diferencial es una cantidad infinitamente pequeña entre valores sucesivos de una variable; en el caso de L'Hôpital no considera las variables como recorriendo una sucesión de valores infinitamente próximos, sino como creciendo y decreciendo de manera continua y entonces las diferencias son las partes infinitamente pequeñas o que aumentan y disminuyen.

2.1.2. Johann Bernoulli y el infinito

Johann Bernoulli (1667-1748), junto a Leibniz con quien mantuvieron una fuerte correspondencia ayudaron a la creación de los elementos del cálculo diferencial e integral, lo cual quedó registrado en los artículos que hacían públicos en el *Acta Eruditorum* alrededor de 1700.

Los diálogos de Leibniz y J. Bernoulli

Con respecto a la investigación sobre la naturaleza de los infinitesimales existe un interesante intercambio de cartas las cuales se pueden ver más detenidamente en Álvarez [1], que se da entre Leibniz y Johann Bernoulli en el período entre 1698 y 1699, donde ambos están convencidos de la potencialidad del cálculo infinitesimal y coinciden en la aceptación del cálculo, pero difieren en su fundamentación.

En la correspondencia Leibniz le manifiesta a J. Bernoulli que los infinitesimales posiblemente sean producto de la imaginación, aunque son útiles para caracterizar la realidad. La línea no tiene fin, como lo había planteado Euclides, el admitir infinitesimales con existencia real implica una admisión del infinito *actual*, aspecto que Leibniz no está dispuesto a tolerar, pues para Leibniz es difícil admitir la referencia de una entidad matemática si no se puede establecer un paralelismo con un fenómeno natural. A lo anterior J. Bernoulli responde que los infinitesimales probablemente existan con referencia en la naturaleza, pero no está seguro de ello.

En la discusión mencionada anteriormente, Leibniz comenta que se debe buscar algo a lo que no se llegue por un proceso de reducción progresiva. Quizás en el cálculo pueda ser de gran utilidad práctica admitir tales ideas; pero hablar de esto en la naturaleza puede resultar absurdo. En cualquier caso, la utilidad de los infinitesimales, a pesar de su falta de

referencialidad, es manifiesta y dan razón de ello sus múltiples aplicaciones.

J. Bernoulli le recuerda a Leibniz que si algo es divisible al infinito, por ejemplo la materia, entonces esa última parte será infinitesimal. Tal partícula de materia mantendrá una relación respecto al resto igual que una línea respecto a un plano, o un plano respecto a un cuerpo tridimensional. J. Bernoulli defiende la existencia real de los infinitesimales y ve una continuidad de los mismos con los reales. Lo infinitamente pequeño se identifica con lo indefinidamente pequeño.

Rápidamente responderá Leibniz y menciona que la existencia de los infinitesimales es completamente de ficción, no es posible en absoluto su existencia. Por más que se remonte, no se llegará nunca a los infinitesimales; la divisibilidad es hasta el infinito, sin que se pueda poner tope alguno. Aunque no se tenga de hecho una porción de materia que no sea eso, porción, no por ello se llega a una porción indivisible infinitesimal. Tampoco se puede decir que los infinitesimales no sean nada. Lo que sucede es que no son una cantidad más, ni siquiera una cantidad nula.

En la respuesta de J. Bernoulli se defiende. Acusa a Leibniz de no haberle entendido. J. Bernoulli no ha pretendido decir que a partir de cierto momento la materia ya no sea capaz de división, sino que a partir de cierto momento es infinitesimal. Le plantea su gran interrogante a Leibniz: si la materia es divisible al infinito, cómo no tiene alguna de éstas partículas existencia infinitesimal, pues si todas las cantidades en que se subdivide algo finito son finitas y se considera en *acto* el número, infinito, de dichas cantidades finitas, se llega a una suma infinita. J. Bernoulli afirma que Leibniz admite la posibilidad de que se pueda considerar en *acto* las infinitas partes en las que puede dividirse algo finito. No estaba claro que Leibniz admitiera tal cosa en absoluto. Lo que sí es evidente es que ése es un punto de capital importancia para J. Bernoulli, como dejará claro la segunda parte de la polémica.

A partir de este momento, en la misma carta, introduce J. Bernoulli un ejemplo matemático que será tomado repetidamente por los dos como objeto de discusión. En palabras de J. Bernoulli:

Piensa alguna magnitud determinada que sea dividida en partes descendentes en esta progresión geométrica $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$. Mientras el número de términos sea finito, reconozco que cada uno de ellos habrá de ser también finito; pero si existen todos los términos en *acto*, entonces existirá realmente el infinitesimal y todos los sucesivos de magnitud infinitesimal. Supongamos la suma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$. Si tenemos un número finito de términos no hay problema, el siguiente será finito. Pero si consideramos en *acto* todos los infinitos términos de ella, tendrá que haber infinitesimales por la misma razón expuesta anteriormente. [1, pp.69-70]

J. Bernoulli termina reclamando a Leibniz que le demuestre por qué es imposible la existencia de infinitesimales, pues si bien él no está seguro de que pueda demostrar la existencia de los mismos, de lo que sí está cierto es de que la opción por su existencia debe quedar abierta.

En la siguiente carta se reafirma Leibniz en sus opiniones, el infinito “actual” no es posible. Leibniz responde a la argumentación de J. Bernoulli de considerar un infinito número de términos como un todo: no hay infinito en *acto*, ni existencia de infinitesimales, aunque la divisibilidad sea real. No se puede cambiar de nivel y llegar al del infinito “actual” o al del infinitesimal. Sólo se puede considerar el infinito “actual” si se tuviera previamente números finitos e infinitos que acotasen por arriba y abajo los números finitos.

J. Bernoulli contesta y suaviza su posición: aunque no se pueda demostrar la existencia de infinitesimales como pretendía, tampoco puede demostrarse su inexistencia. Sin embargo lo más probable es que sí existan. Es obvio que J. Bernoulli está en una órbita diferente a la de Leibniz, está jugando con la posibilidad del infinito “actual”, cosa que Leibniz no quiere. Además J. Bernoulli para respaldar su concepción plantea lo siguiente: si hay diez miembros en una serie entonces habrá un décimo, que en el ejemplo propuesto será $1/10$. Si hay cien, se dará el centésimo, en nuestro ejemplo $1/100$. Si se dan infinitos, entonces existirá el infinitésimo.

Finalmente Leibniz le da una respuesta, que pretende definitiva, con respecto al argumento de J. Bernoulli, el cual menciona que si se dan diez tenemos el décimo, si se dan infinitos tenemos el infinitésimo, no sirve. No vale aquí un paso de lo finito a lo infinito. Cuando se dice que se dan infinitos términos, no quiere decirse, como piensa J. Bernoulli, que esté

completo el conjunto de dichos términos, sino que se dan más términos que cualquier número que se pueda fijar. Insiste Leibniz en que el ejemplo de J. Bernoulli no vale pues si se afirma que se da el décimo término de la serie también podría decirse que lo que se afirma es que se da el último término de la serie que es el mínimo de ellos. En el caso de una serie infinita postular tal número supone contradicción. Perfectamente, piensa Leibniz, puede suponerse una serie infinita de términos, todos ellos finitos. Si se fija en un término cualquiera de dicha serie, hasta llegar a él hay un número finito de términos. A partir de él hay todavía un número potencialmente infinito e indefinido, de términos. En ningún caso hace falta postular números infinitesimales o infinitos. No es necesario afirmar el infinito “actual” para dar explicación de la serie y admitir la existencia de infinitesimales. Una serie infinita es indefinida y consta de números finitos. La justificación del cálculo no puede ir por ahí como pretende J. Bernoulli, L'Hôpital y otros.

J. Bernoulli no se convenció y además es que le parece completamente evidente: si se dan infinitos términos se dará el infinitésimo y los que le siguen. Lo cual no quiere decir que el infinitésimo sea el último término de la serie, hay más detrás de él. En cierto modo J. Bernoulli malinterpreta a Leibniz que no admite un infinito “actual”, pero sí el infinito entendido potencialmente en una serie. Y se lo manifiesta en una carta donde concede que se da una multitud infinita, pero esta multitud no constituye un número como si fuera una totalidad. Sólo significa que son más numerosos los términos que los que se pueden designar por un número.

Leibniz hace su cálculo independiente de las controversias metafísicas sostenidas sobre la existencia “actual” de los infinitesimales. A finales del siglo XVII Leibniz comprende que hay que distinguir dos cuestiones: primera, el problema filosófico de si un concepto implica algo que es objetivamente existente o no. Segunda, si la aplicación de un concepto en matemáticas está bien fundamentada o no. Ambas son cosas diferentes. Los infinitesimales no existen y su existencia no es necesaria para que haya una buena fundamentación del cálculo dentro del hacer matemático, geométrico, de la época. La justificación del cálculo se hace en otra dirección.

La discusión no termina y como lo mencionamos en la sección anterior surge en un contexto mucho más conflictivo. J. Bernoulli era un acérrimo partidario del cálculo y, a fin de cuentas, la discusión sobre la existencia de los infinitesimales no ponía en juego la potencia del cálculo. La polémica que se va iniciar justo entonces en la Academia Real de las Ciencias de París será diferente. Habrá una pugna entre partidarios y enemigos del cálculo. Además los partidarios entienden que existen los infinitesimales y esa es la forma de justificarlos. Leibniz deberá apoyarlos y hablará de infinitesimales; era la única forma de hacerse entender.

La determinación de áreas

En 1742 J. Bernoulli publicó las lecciones que había dado a L'Hôpital sobre “el método de las integrales”, afirmando que lo relacionado al cálculo diferencial lo podían encontrar en el trabajo de L'Hôpital. J. Bernoulli define la integral como la inversa de la diferencial, la cual difiere de la de Leibniz quien la consideraba como una suma de cantidades infinitamente pequeñas es decir que $\int y \cdot dx = \mathbf{L}$ significa que la suma de rectángulos infinitamente pequeños $y \times dx$ nos da $\mathbf{L}$, en cambio para J. Bernoulli, significa $d\mathbf{L} = y \cdot dx$.

J. Bernoulli menciona que el uso principal del cálculo integral es la determinación de áreas, para eso toma la curva de la Figura 2.2, la cual está dividida en pequeñas áreas, que

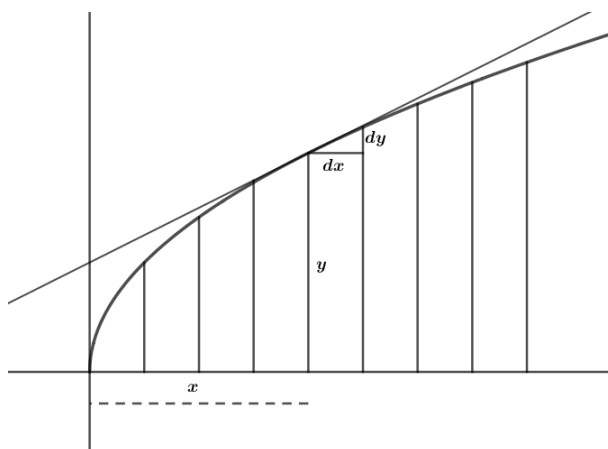


Figura 2.2. Determinación de áreas.

representan las diferenciales de dichas áreas, y lo que se debe hacer es hallar su expresión de

la forma $f(x) \cdot dx$ donde x es la variable. El área buscada es igual a la integral $\int f(x) \cdot dx$.

J. Bernoulli hizo fundamental los diferenciales de órdenes superiores en lugar del concepto de límite. En el cálculo integral, la figura delimitada por una pieza infinitamente pequeña de una curva, las ordenadas de sus puntos finales y la diferencia correspondiente en las abscisas, que él consideraba como un paralelogramo. Aunque pensó en una superficie como la suma de tales diferenciales de área, no definió la integral como tal, sino más bien como la inversa del diferencial, con la adición de una constante elegida adecuadamente, una definición que persistió durante el siglo siguiente.

2.1.3. Las series y el análisis de los infinitamente pequeños en Euler

Leonhard Euler (1707-1783) promovió el nuevo análisis, organizándolo de manera formal en tres textos, *Introductio in analysin infinitorum* de 1748; *Institutiones calculi differentialis* de 1755 e *Institutiones calculi integralis* de 1768-1770. Anteriormente se consideraba que el cálculo diferencial estaba ligado a la geometría, pero Euler hizo del tema una teoría formal de las funciones que no tenía necesidad de volver a concepciones geométricas. La noción “función” de Euler según Grattan-Guinness [23, pp.102-103] se encuentra definida en términos de expresiones algebraicas donde incluso las series infinitas fueron parte de estas. Euler realizó un inventario y las clasificó, para lo cual utilizó algunos tipos de procedimientos infinitesimales como el desarrollo binomial, etc.

El análisis de los infinitamente pequeños

Euler introdujo el cálculo diferencial como un cálculo de diferencias infinitamente pequeñas, volviendo a una concepción afín a la de Leibniz, con respecto en una cita de Grattan-Guinness [23, p.105] se menciona que “El análisis de los infinitos... no será otra cosa que un caso especial del método de diferencias... que se presenta cuando las diferencias que previamente habíamos supuesto finitas se toman infinitamente pequeñas”.

La visión formalista a la que la notación de Leibniz se adaptó de manera tan notable permitió el desarrollo del cálculo durante el siglo XVIII. Pero con el éxito del cálculo diferencial, Euler se limita menos en la justificación de sus procedimientos, dado que él no está interesado en fundamentar su teoría. Sus puntos de vista y tratamientos a los procesos

infinitesimales eran similares a los de Wallis y Johann Bernoulli. Euler consideraba que las cantidades infinitamente pequeñas eran casi cero además de ser el recíproco de una cantidad infinitamente grande.

Euler se opuso a la noción de infinitesimal como una cantidad menor que otra dada, es decir al infinito potencial; en este sentido los diferenciales dx y dy deben ser cero, y los diferenciales de los órdenes superiores, también. Euler, sostenía que los ceros representados por los diferenciales debían distinguirse por el hecho reconocido de que la razón $\frac{0}{0}$ podría, en cierto sentido, representar cualquier relación de números finitos; así, el cálculo era simplemente la determinación de la relación de incrementos evanescentes, un procedimiento heurístico para encontrar el valor de la expresión $\frac{0}{0}$, sin importar la naturaleza de las cantidades [10, p.244].

Euler sostuvo que $\frac{a}{dx}$ es infinito porque $dx = 0$, entonces $\frac{a}{dx^2}$ es infinito de segundo orden; y, más generalmente, correspondiente a los órdenes de los diferenciales, hay un número infinito de grados de infinito; sin embargo, no justificó la transición de uno a otro, pero siguió a Taylor (1685-1731), en la simple sustitución de los incrementos por cero. Por ejemplo, al determinar el diferencial de x^2 permitió que x se convirtiera en $x + \omega$. La relación de los incrementos en x y x^2 fue entonces $1 : 2x + \omega$. Esto siempre es diferente de la proporción $1 : 2x$ a menos que ω desaparezca. Euler, por lo tanto, sustituyó 0 por ω [10, p.245].

La idea que más adelante será retomada por Cauchy, de que el ∞ era una especie de límite entre los números positivos y negativos, similar al 0, que sostenía que la relación $\frac{a}{0} = \infty$, fue planteada por Euler. Lo anterior era interpretado como que nada por el infinito puede dar como resultado una magnitud finita, la falta de cuidado con la que Euler manejó el infinito también se evidencia en su uso de series divergentes. Como Leibniz había sugerido que $1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$, Euler sostuvo que de $\frac{1}{(1+x)^2}$ ⁴ se podía concluir que $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots = \frac{1}{4}$. Bajo un punto de vista algo diferente, Euler agregó que $1 - 3 + 5 - 7 + \dots = 0$. Numerosos ejemplos similares de series divergentes se encuentran en

⁴Que se da, cuando se reemplaza en la serie infinita: $\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$ que había sido planteada por Leibniz, quien además plantea $\frac{1}{(1-x)} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$, lo cual se puede encontrar en [27].

su trabajo.

En la medida en que Euler se limitó a funciones de buen comportamiento⁵, no se involucró en esas sutiles dificultades relacionadas con las nociones de infinito. Aunque sus puntos de vista sobre los principios fundamentales del cálculo carecían de la apariencia de precisión y rigor que entraron en las matemáticas en el siglo siguiente, la tendencia formalista que inauguró su trabajo fue liberar el nuevo análisis de todas las cadenas geométricas. También hizo más aceptable la interpretación aritmética que más tarde aclararía el cálculo a través del concepto de límite que Euler mismo descuidó.

Series infinitas

En su obra de 1748, Euler publicó desarrollos de series infinitas para todas las funciones estándar de la época, tales como cocientes de polinomios, exponenciales, logaritmos, senos y cosenos, incluso aquellas generalmente definidas geométricamente, las cuales podían representarse por series infinitas. Estas series, vistas de este modo, se enmarcan en lo algebraico.

En Grattan-Guinness [23, pp.102-105] se da la deducción del desarrollo de la serie a^z , donde Euler razona de la siguiente forma: Sea $a > 1$ y sea ω un número infinitamente pequeño, entonces $a^\omega = 1 + \psi$, con ψ un número infinitamente pequeño; pongamos $\psi = k\omega$, donde k depende solo de a ; entonces $a^\omega = 1 + \omega$ donde $\omega = \log(1 + k\omega)$ con el logaritmo de base a . Euler realiza la demostración para $a = 10$ el valor de a puede hallarse aproximadamente por medio de la tabla de logaritmos y escribe: $a^{i\omega} = (1 + \omega)^i$, donde $i \in \mathbb{R}$, de donde por el desarrollo binomial se obtiene

$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3\omega^3 + \dots \quad (2.1)$$

Si z es cualquier número positivo finito, entonces $i = \frac{z}{\omega}$ es infinitamente grande y sustituyendo $\omega = \frac{z}{i}$ en (2.1) nos queda

$$a^z = a^{i\omega} = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1 \cdot 2i}k^2z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2i \cdot 3i}k^3z^3 + \dots$$

⁵Podríamos clasificar una *función de buen comportamiento* como aquella que está definida en todas partes, que consta de una sola variable, que es continua y además que todas sus derivadas son definidas y continuas.

Pero si i es infinitamente grande entonces $\frac{i-1}{i} = 1$, $\frac{i-2}{i} = 1$, y así sucesivamente, con lo cual llegamos al resultado

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2 z^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3 z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots.$$

Si tomamos un a de tal manera que $k = 1$, aparecen los logaritmos naturales, los cuales son representado por la letra e por Euler y escribe el resultado final de la forma:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots.$$

Más adelante Euler se ocupa de las funciones trigonométricas, haciendo uso de la siguiente fórmula

$$(\cos z \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1} \operatorname{sen} nz, \quad (2.2)$$

desarrollando (2.2) obtiene expresiones para $\cos nz$ y $\operatorname{sen} nz$ y tomando z infinitamente pequeño, de tal manera que $\operatorname{sen} z = z$ y $\cos z = 1$, $v = nz$ finito y n infinitamente grande consigue llegar por métodos parecidos a los anteriores, al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \cos v &= 1 - \frac{v^2}{1 \cdot 2} + \frac{v^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{v^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots, \\ \operatorname{sen} v &= v - \frac{v^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{v^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{v^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots. \end{aligned}$$

2.2. El problema de los fundamentos

2.2.1. Críticas a la fundamentación del cálculo por Berkeley

Entre los críticos de las teorías de Newton y Leibniz se encuentra a George Berkeley (1685-1753), quien intenta demostrar, como bien se puede ver en el título de su obra *El Analista, o discurso dirigido a un matemático infiel, donde se examina sus objetos, principios o inferencias del análisis moderno están formulados de manera más clara, o decididos de manera más evidente, que los misterios religiosos y los asuntos de la fe*, de 1734. Los fundadores del cálculo habían establecido claramente las reglas de operación que debían observarse, y el sorprendente éxito de éstas cuando Euler y otros muchos los aplicaron a los problemas matemáticos y científicos, llevó a los matemáticos a pasar por alto el estado insatisfactorio de los fundamentos de la materia.

A lo largo del siglo XVIII en Inglaterra, la falta de claridad de Newton y su inconsistencia en la notación fue seguida por una confusión entre las “fluxiones” y los “momentos”. En el continente, el racionalismo metafísico⁶ de Leibniz fue descuidado por sus seguidores, quienes libremente intentaron interpretar los diferenciales como infinitesimales reales o incluso como ceros.

Lo que se preguntaba Berkeley, entre otras cosas es:

Y, ¿Qué son estas fluxiones? ¿Las velocidades de incrementos evanescentes? ¿Y que son estos mismos, incrementos evanescentes? No son ni cantidades finitas, ni cantidades infinitamente pequeñas, ni son tampoco una simple nada. ¿No podríamos llamarlos los fantasmas de las cantidades desaparecidas? [23, p.119].

Después de dar una explicación del método de fluxiones, Berkeley criticó una demostración de los *Principia* en la que Newton había utilizado cantidades infinitamente pequeñas para determinar el momento de un producto:

Suponga que el producto o rectángulo AB aumenta por movimiento continuo: y que los incrementos momentáneos de los lados A y B son a y b . Cuando los lados A y B fueren deficientes, o menores en la mitad de sus momentos, el rectángulo sería $A - \frac{1}{2}a \times B - \frac{1}{2}b$ es decir, $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. Tan pronto como los lados A y B se incrementan en las otras dos mitades de sus momentos, el rectángulo se convierte en $A + \frac{1}{2}a \times B + \frac{1}{2}b$ o $AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. Del último rectángulo, subduzca el primero, y la diferencia restante será $aB + bA$. Por lo tanto, el incremento del rectángulo generado por todos los incrementos a y b es $aB + bA$. [Traducido al Español de [35, p.336]]

Berkeley objetó que se debe tomar las cantidades completas a y b como incrementos o decrementos para encontrar el momento de AB , y en este caso se tendría que omitir del cálculo final la cantidad infinitamente pequeña ab . Berkeley, criticó dejar de lado la cantidad infinitamente pequeña ab , si el resultado es rigurosamente correcto, citando un pasaje de *De quadratura*, en el que Newton menciona “no descuidar nada, por pequeño que sea”.

⁶En el tratamiento que Leibniz le daba a las cantidades infinitesimales se aseguraba su uso confiable, mas no su existencia.

Newton no había entrado en la justificación de la demostración que acabamos de mencionar, pero había indicado que uno podría encontrar esto en el método de las razones primeras y últimas. Berkeley, por lo tanto, recurrió a este tipo de razonamiento, tal como lo aplicó Newton en una de sus principales demostraciones: la de encontrar la fluxión de x^n , en la que Newton había tratado de evitar lo infinitamente pequeño. Según [37, pp.39-40] Newton había dado a x un incremento o , y gracias al teorema binomial, obtuvo

$$(x + o)^n = x^n + nx^{n-1}o + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}o^2 + \dots$$

que es igual a

$$(x + o)^n - x^n = nx^{n-1}o + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}o^2 + \dots,$$

para así obtener el incremento en x^n , se había dividido entre o para encontrar la razón de los incrementos de x^n de x , y luego había dejado o volverse evanescente ($o = 0$), determinando así la razón final de los incrementos (o de las fluxiones). Berkeley afirmó que Newton no hizo caso de la ley de contradicción, suponiendo primero que x tiene un incremento y luego, para alcanzar el resultado, permitiendo al incremento ser cero, por ejemplo, suponiendo que no hubo incremento.

Berkeley sostuvo que la suposición de que los incrementos se desvanecen, destruye la suposición de que eran incrementos, pues llevaba a considerar $\frac{0}{0}$, debido a la falta de explicación de los términos “cantidad evanescente”. La interpretación en términos de límites, considera la secuencia infinita formada por las proporciones a medida que el incremento se aproxima a cero, y esto no tiene un último término, aunque se define como tener un límite. La expresión de “razón última” es engañosa, y en todos los casos indica una falta de apreciación de las sutiles dificultades involucradas en los conceptos de infinito, continuidad y número real, dificultades que no se resolvieron hasta la segunda mitad del siglo XIX.

El método de diferenciales de Leibniz también fue criticado por Berkeley, según Struik [35, p.335]

En lugar de las velocidades con las que se generan incrementos, consideran los incrementos o decrementos mismos, que llaman diferencias, y que se supone que son infinitamente pequeños. La diferencia de una línea es una línea infinitamente pequeña... Suponen que las cantidades finitas consisten en partes infinitamente pequeñas, y las curvas son polígonos,

de los cuales los lados son infinitamente pequeños, que por los ángulos que hacen uno con otro determinan la curvatura de la línea.

Berkeley explicó que al encontrar la tangente por medio de diferenciales, uno primero supone incrementos; pero estos determinan la secante, no la tangente. Sin embargo, uno deshace este error al descuidar los diferenciales superiores y, por lo tanto, “en virtud de un doble error se llega, no a la ciencia, sino a la verdad”.

Berkeley argumentó que el concepto de velocidad depende del espacio y los intervalos de tiempo, en consecuencia, para él, es imposible concebir una velocidad instantánea. Berkeley, deseaba excluir de las matemáticas la idea de velocidad instantánea. Esto está en consonancia con las ideas tempranas de Berkeley, que lo llevó a pensar en la geometría como una ciencia aplicada que se ocupa de magnitudes finitas que se componen de “mínimas sensibilidades” indivisibles. Berkeley sugirió que sería mejor en el cálculo considerar incrementos de velocidades. Está claro que había una necesidad obvia de una aclaración lógica de muchos de los términos que Newton había usado. Las animaciones de Berkeley tuvieron éxito en hacer que este hecho fuera apreciado; como resultado, en los siguientes años aparecieron unos artículos que intentaron remediar la situación.

2.2.2. El límite como fundador del cálculo por D’Alembert

Jean le Rond D’Alembert (1717-1783) trató seriamente de comprender los fundamentos del cálculo. El enfoque que se mostró más importante para resolver el problema de los fundamentos, fue su teoría de límites bajo los términos de “indefinidamente grande” e “indefinidamente pequeño”.

D’Alembert interpretó la teoría de “razones primeras y últimas” de Newton, no literalmente, sino como un límite, en los siguientes términos:

Se dice que una magnitud es el límite de otra magnitud, cuando la segunda puede acercarse más a la primera que a una magnitud dada, tan pequeña como esa magnitud [dada] puede suponerse; sin embargo, sin que la magnitud que se está acercando sea capaz de superar la magnitud a la que se acerca, la diferencia entre una cantidad y su límite es absolutamente insignificante ... Hablando correctamente, el límite nunca coincide, o nunca llega a ser igual,

a la cantidad de la cual es un límite, pero este último siempre puede acercarse más y más, y puede diferir de él en tan poco como se desee. [Traducido al Español de [22, p.8]]

El concepto de límite es base fundamental del cálculo y con él se logra una cercanía a la formalización del infinito potencial, pues hay un proceso potencial que está íntimamente ligado al concepto de límite. En este sentido para D'Alembert, la base del cálculo diferencial se encontraba en la idea del límite. Al respecto menciona que, “la diferenciación de las ecuaciones consiste simplemente en encontrar los límites de la razón de diferencias finitas de dos variables incluidas en la ecuación” [10, p.247].

Los infinitesimales de segundo orden y superiores también fueron definidos por D'Alembert en una terminología equivalente a la de las relaciones limitantes:

Cuando uno dice que una cantidad es infinitamente pequeña con respecto a una cantidad que en sí misma, ya es infinitamente pequeña, esto significa simplemente que la razón de la primera de estas cantidades, a la segunda, es siempre mucho más pequeña que la segunda cantidad como lo es a la última de una cantidad dada. [Traducido al Español de [10, p.248]]

D'Alembert agregó inmediatamente la explicación interpretada en términos de razones de límites, como se ve en la siguiente cita: “y que la razón puede suponerse tan pequeña como queramos al imaginar la segunda cantidad suficientemente pequeña” [10, p.248].

Según Boyer [10, p.248], esta definición de infinitesimales de orden superior indica la manera general en que estas cantidades se interpretan en la actualidad, sin embargo, esta carece de claridad y resolución. Además, no establece inequívocamente que el límite de la razón debe ser cero para los infinitesimales de orden superior. Estas debilidades de D'Alembert serán corregidas más adelante por Cauchy, mientras tanto, la interpretación de lo infinitamente pequeño como un infinitesimal fijo, continuó a pesar de la oposición de D'Alembert.

D'Alembert también trató de aclarar el concepto de “infinito”, afirmó que: “la noción de infinito es realmente la de lo indefinidamente grande y es solo un resumen conveniente para la interpretación en términos de la doctrina de los límites” [10, p.249]. Con esta comprensión, señaló que uno puede tener órdenes de cantidades infinitamente grandes análogas a la de los infinitesimales. Debido a su ideología geométrica, la elaboración de D'Alembert del concepto de límite carecía del rigor claro, necesario para hacerla aceptable como un sustituto de la

interpretación infinitesimal.

En el artículo *Différentiel* de 1764, D'Alembert convierte a una secante en una tangente cuando los dos puntos de la secante se vuelven uno. Para esto D'Alembert según Struik [35, p.343], toma la parábola AM (Ver Figura 2.3), de ecuación $y^2 = ax$; donde $AP = x$ y $PM = y$, y a es un parámetro. Sea la tangente MQ a esta parábola en el punto M . Supongamos que el problema está resuelto y tomemos una ordenada pm a cualquier distancia finita de PM ; y, dibujemos la línea mMR a través de los puntos M, m . Es evidente, primero, que la relación $\frac{MP}{PQ}$ de la ordenada a la subtangente es mayor que la relación $\frac{MP}{PR}$ o $\frac{mO}{MO}$ que es igual, por la similitud de los triángulos MOm , MPR .

Segundo, que cuanto más cerca esté el punto m del punto M , más cerca estará el punto R del punto Q , en consecuencia, más cerca estará la relación $\frac{MP}{PR}$ o $\frac{mO}{MO}$ a la relación $\frac{MP}{PQ}$; finalmente, que la primera de estas proporciones se aproxima a la segunda tan cerca como se desee, dado PR pueden diferir tan poco como se desee de PQ . Así que la relación $\frac{MP}{PQ}$ es el límite de la relación de mO o OM . Por lo tanto, si somos capaces de representar la relación $\frac{mO}{MO}$ en forma algebraica, entonces tendremos la expresión algebraica de la relación MP a PQ y, en consecuencia, la representación algebraica de la relación de la ordenada a la subtangente, lo que nos permitirá encontrar esta subtangente.

Sea $MO = u$, $Om = z$; tendremos $ax = y^2$, y $ax + au = y^2 + 2yz + z^2$. Luego, en vista de que $ax = y^2$, se deduce que $\frac{z}{u} = \frac{a}{2y + z}$.

Este valor $\frac{a}{2y + z}$ es en general, la relación de mO a OM , donde sea que se elija el punto m . Esta relación es siempre menor que $\frac{a}{2y}$; pero cuanto menor sea z , mayor será la relación y, dado que uno puede elegir z tan pequeño como se desee, la relación $\frac{a}{2y + z}$ se puede acercar lo más posible a la relación $\frac{a}{2y}$. En consecuencia, $\frac{a}{2y}$ es el límite de la relación $\frac{a}{2y + z}$, es decir, de la relación $\frac{mO}{MO}$. Por lo tanto, $\frac{a}{2y}$ es igual a la relación $\frac{MP}{PQ}$, que también encontramos que es el límite de la relación de mO a Om , ya que dos cantidades que son los límites de la misma cantidad son necesariamente iguales entre sí [35, pp.343-344].

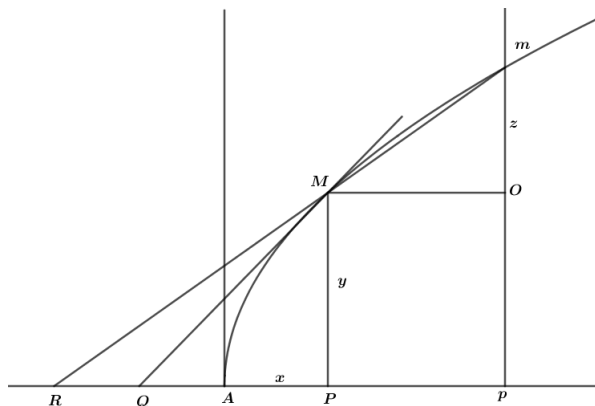


Figura 2.3. Parábola AM de ecuación $y^2 = ax$.

De esto se deduce que $\frac{MP}{PQ}$ es igual a $\frac{a}{2y}$. Por lo tanto, $PQ = \frac{2y^2}{a} = 2x$. Ahora, según el método del cálculo diferencial, la relación de MP a PQ es igual a la de dy a dx ; y la ecuación $ax = y^2$ produce un $adx = 2ydy$ y $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y}$. Entonces $\frac{dy}{dx}$ es el límite de la relación de z a u , y este límite se encuentra haciendo $z = 0$ en la fracción $\frac{a}{2y + z}$.

Luego, llamando a s la subtangente, se tiene que $\frac{y}{s} = \frac{a}{2y}$; por lo tanto $s = \frac{2y^2}{a} = 2x$. Se suponen que las cantidades llamadas u están divididas por otras cantidades infinitamente pequeñas; en este estado no denotan cantidades infinitamente pequeñas ni cocientes de las mismas; sino que son los límites de la razón de dos cantidades finitas. Lo mismo vale para las diferencias de segundo orden y para las de orden superior [35, p.345].

La razón por la que la teoría de límites se tardó tanto en cobrar su valor en los fundamentos, fue que D'Alembert solo considero límites de magnitudes, lo cual solo se eliminaría una vez el concepto se aplique a funciones bajo condiciones de comportamiento de la variable independiente especificadas de manera explícita. En el artículo titulado *Différentiel* D'Alembert llegó a la expresión de la derivada como el límite de un cociente de incrementos. Sin embargo, esta idea principal no fue seguida inmediatamente [35, pp.341-342].

2.3. Los puntos de vista a finales del siglo XVIII

2.3.1. Lagrange y el cálculo como álgebra

Para el desarrollo de este apartado nos basamos en la libro de Grabiner [22], donde se menciona que uno de los primeros matemático importantes en tratar los fundamentos del cálculo como un problema serio fue el matemático Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), a quien no sólo le preocupaba el problema de las fundamentos, sino que, a diferencia de sus contemporáneos, volvía al problema una y otra vez. Este interés repetido se produjo en parte debido a los siguientes puntos:

1. A los requisitos que conllevaba la enseñanza del cálculo, se debía preparar un material entendible para los estudiantes. En una carta a Euler en 1754, Lagrange declaró que había resuelto los elementos del cálculo diferencial e integral para el uso de sus alumnos en la escuela militar de Turín. Incluso afirmó “haber desarrollado la verdadera metafísica de sus principios, en la medida de lo posible”.
2. En parte porque se convenció tanto de la validez de las críticas que había realizado el teólogo Berkeley que no pudo seguir contento con los fundamentos existentes.

Lagrange estaba impresionado, como muchos otros matemáticos de la época, por la tradición euclidiana. Además, pensó que el cuerpo de resultados del cálculo era más o menos completo y necesitaban una sistematización. Así que en 1797, Lagrange publicó un libro *Fonctions analytiques*, y con esta obra afirmaba haber resuelto el problema de poner el cálculo de forma rigurosa.

El libro de Lagrange difería notablemente de las exposiciones anteriores del cálculo. Sin duda, su trabajo, como el de otros, dio definiciones de los conceptos básicos. Pero, lo más importante, fue que obtuvo los principales resultados existentes de su fundamentación. La contribución de *Fonctions analytiques* a la rigorización del análisis no radica en la definición específica de Lagrange de la derivada como el coeficiente del término lineal en la serie de Taylor, sino en otras cosas, por ejemplo tomar en serio el rigor; en la demolición de los puntos de vista más antiguos; en este sentido empezó su investigación, estudiando a fondo los resultados recibidos del cálculo a partir de sus definiciones; y en el desarrollo de las técnicas necesarias para llevarlo a cabo.

En 1760, Lagrange retomó el tema, que había dejado planteado en 1754, esta vez para aclarar la descripción del filósofo del cálculo, el fraile barnabita Hyacinth Sigismund Gerdil, y su opinión en oposición a la de Fontenelle, era que no había un infinito “actual” en matemáticas, una conclusión que Gerdil creía que tenía importantes implicaciones para la filosofía. Lagrange pensó que era necesaria una explicación clara y la dio en una nota al pie del documento de Gerdil; porque, aunque Gerdil había deseado principalmente demostrar que el cálculo no necesitaba el infinito, Lagrange (que estuvo de acuerdo) también quiso dar sus propias razones para creer que el cálculo era riguroso. Los resultados verdaderos, dijo Lagrange, se obtuvieron sólo mediante la cancelación mutua de errores, pero nadie pudo probar que los errores siempre se cancelaran. Sin embargo, agregó Lagrange, que el cálculo aún podía justificarse: el cálculo newtoniano era completamente riguroso. Para ilustrar esto, Lagrange esbozó brevemente los principios del método de las razones primeras y últimas.

Entre 1760 y 1772, Lagrange cambió sus puntos de vista sobre la suficiencia de la base Newton-D'Alembert para el cálculo. En un artículo publicado en 1772, declaró que los conceptos del cálculo sólo podían hacerse rigurosos si se definían en términos de conceptos algebraicos, es decir, el cálculo debía reducirse a álgebra. Esta visión de Lagrange finalmente prevaleció con Bolzano y Cauchy. La pregunta importante por ahora es, ¿por qué Lagrange rechazó las opiniones anteriores? No dio razones explícitas hasta mucho más tarde, pero puede haber quedado insatisfecho con los fundamentos infinitesimales estándar, fluxiones y límites, a través de las críticas de Berkeley. Claramente no creía que los fundamentos más antiguos estuvieran a la altura de los estándares de razonamiento esperados en matemáticas. Él creía que un estándar adecuado se cumplía sólo en el álgebra⁷.

⁷Con respecto a los trabajos del álgebra desarrollados por Lagrange, podemos destacar algunos de los artículos que compartió a la Academia de Berlín, entre los cuales se encuentran:

- La solución entera de las ecuaciones cuadráticas, 1769, y de ecuaciones indeterminadas, 1770.
- Un tratado de la teoría de eliminación de parámetros, 1770.
- El proceso general por resolver una ecuación algebraica de cualquier grado, 1770 y 1771.
- La solución completa de una ecuación binomial de cualquier grado.
- Un tratamiento de determinantes de segundo y tercer orden, y de sus invariantes de 1773.
- El teorema que lleva su nombre: “si G es un grupo finito de orden n y H un subgrupo de orden m , debe ser n múltiplo de m , o m divisor de n . El número $i = \frac{n}{m}$ se llama índice del subgrupo”.

En los trabajos de Lagrange perdura una idea hacia la generalización: su idea de que cualquier resultado particular, de algún interés, es y debe demostrarse que es un caso especial de algún principio más general. Su extremo amor por la generalidad era inusual para su tiempo y contrasta con el énfasis de muchos de sus contemporáneos en resolver problemas específicos. La base algebraica del cálculo, en Lagrange, fue consistente con la tendencia generalizadora de querer llevar todos los conceptos del cálculo a expresiones e ideas algebraicas.

Lagrange explicó por primera vez su nueva idea de los fundamentos algebraicos del cálculo en un artículo de 1772, *Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables*. Creía que había una “teoría de series” totalmente algebraica que daba a cualquier función una expansión de series de potencias; fue sobre esta idea que descansó su nueva fundamentación. El cálculo diferencial, considerado en toda su generalidad, dijo, consiste en encontrar directamente, y mediante procedimientos fáciles y simples, las funciones $p, p', p'', \dots$ en la expansión general

$$u(x+h) = u(x) + ph + p'h^2 + p''h^3 + \dots$$

para una función dada $u(x)$. Lagrange dijo que esta visión del cálculo era “la más clara y simple que se haya dado”. Por lo tanto, estaba rompiendo consciente y explícitamente con la tradición anterior. Su nuevo fundamento tenía la intención de ser puramente algebraico, no contaminado ni por la filosofía ni por ideas confusas, “independiente de toda metafísica y toda teoría de cantidades infinitamente pequeñas y evanescentes”.

Lagrange se convirtió así en el primer matemático importante en otorgar la validez de las críticas a los antiguos fundamentos del cálculo. Sin embargo, en 1772 Lagrange todavía no había roto por completo con la actitud dominante hacia los fundamentos, los cuales se basaban en las ideas de Newton y Leibniz. Por un lado las ideas de Newton estaban relacionadas con la teoría de flujos y fluxiones y por otro las de Leibniz trataban con diferenciales; no fue sino hasta 1797 cuando dio por escrito razones explícitas para rechazar los puntos de vista anteriores. Los fundamentos no fueron el tema principal de su artículo de 1772, y sus comentarios al respecto fueron breves e incidentales. En este momento ni siquiera dedujo las reglas algorítmicas básicas del cálculo diferencial de su nueva base, y

mucho menos dio tales deducciones para obtener resultados más complicados.

Sin embargo, Lagrange pensó que era importante encontrar una base exacta y algebraica para el cálculo, y continuó pensando esto por el resto de su vida. Pero en 1772 seguía siendo una idea embrionaria, no un objetivo realizado. Todavía no estaba satisfecho con su propio fundamento; sabemos esto porque, a través del concurso de premios de la Academia de Ciencias de Berlín en 1784, él y sus colegas hicieron un llamamiento a los académicos para resolver el problema de los fundamentos del cálculo.

2.3.2. La competencia del problema berlinés

El método de Lagrange recibió poco reconocimiento, tal vez como resultado de la novedad de las ideas, la notación involucrada, y la búsqueda de una base satisfactoria para el cálculo. Para alentar los esfuerzos en esta dirección, en el tiempo en el que Lagrange fue director de la sección matemática de la Academia de Berlín, se anunció en 1784 la convocatoria de un premio para “una teoría clara y precisa de lo que se llama el infinito en matemáticas”:

Es bien sabido que la geometría superior emplea regularmente lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño... La Academia, en consecuencia, desea una explicación de cómo es posible que se hayan podido deducir tantos teoremas correctos a partir de unos presupuestos contradictorios, así como... un principio verdaderamente matemático que pueda sustituir correctamente al del infinito... [23, p.134]

Dos ensayos a gran escala de matemáticos dedicados a exponer los fundamentos del cálculo y derivar la estructura existente de los resultados de estos fundamentos, estuvieron a cargo de: Simon Antoine Jean L'Huilier (1750-1840) *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs* de 1788 y Lazare Carnot (1753-1823) *Reflexiones sobre la metafísica del cálculo infinitesimal* de 1797.

Lagrange no consiguió lo que quería, aunque el premio le fue concedido a L'Huilier, por su serio y laborioso estudio sobre los límites y su significación para el cálculo, eso muestra que Lagrange y sus colegas estaban empleando estándares más altos de lo que eran entonces en las discusiones de fundamentos. A todas las contribuciones les faltaba claridad, la simplicidad, y especialmente el rigor, decía el informe del comité.

2.3.3. La noción de Límite antes de Cauchy

A continuación presentaremos los aportes de tres matemáticos importantes, tomando algunos apartados de Karl B. Boyer [10]. Iniciaremos presentando a Simón L'Huilier, quien fue el primero en intentar resolver el problema planteado por Lagrange en la Academia de Berlín.

Simon L'Huilier

Según Boyer [10, p.255], L'Huilier, en su ensayo se dispuso a mostrar que el método exhaustivo, convenientemente extendido, era suficiente para establecer con certeza los principios del cálculo. De conformidad con este propósito, modificó este método exhaustivo para interpretarlo en términos de límites.

L'Huilier definió el límite en los siguientes términos:

El valor del que una variable puede llegar a diferir en menos de una cantidad arbitrariamente pequeña". [23, p.134]

Además planteó una operatividad al demostrar los teoremas del cociente y del producto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{p_n}{q_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} p_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} q_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n q_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} q_n \right)$$

esto, suponiendo que los límites mencionados existan. Introdujo la notación de “lím”, con esto L'Huilier neutralizó en buena medida la claridad de su teoría de límites, sin embargo su obra no tuvo la influencia que merecía.

Según Boyer [10, p.255], L'Huilier tomó al cociente diferencial como noción fundamental en sus trabajos, definiéndolo como el límite de la razón entre el incremento de la función y el de la variable independiente. L'Huilier enfocó la atención en un solo número (la derivada) como el límite de una sola variable (la razón de los incrementos), en lugar de una razón última de dos cantidades evanescentes, como lo había planteado Newton. Aunque se mantuvo para representar esto el nombre “cociente diferencial” y la cantidad de símbolos, insistió en que este último no era más que un símbolo $\frac{dy}{dx}$ que debía interpretarse como un único número. Al tratar con cocientes diferenciales de órdenes superiores, advirtió nuevamente que el símbolo

$\frac{d^2y}{dx^2}$ no debía dividirse como cociente. Esto contrasta notablemente con el trabajo de Newton y Leibniz, en el que se consideraba que las fluxiones y diferenciales de cualquier orden tenían un significado independiente de la relación o ecuación en la que ingresaron.

Según Boyer [10, p.255], aunque la definición de L'Huillier del cociente diferencial es en la mayoría de los aspectos la que se encuentra en los libros de texto elementales actuales sobre cálculo, no parece haber sido consciente de las posibles dificultades involucradas en el concepto de límite. Había evitado el misticismo del infinitesimal, la vaguedad de la proporción última y la inanidad del símbolo $\frac{0}{0}$; pero no se dio cuenta de que la sutileza del concepto de límite era hacer esencial una definición extremadamente cuidadosa. L'Huillier se ocupaba únicamente de funciones muy sencillas, por lo que ignoraba las deficiencias de su presentación. Su variable siempre fue menor o mayor que su límite. “Dada una cantidad variable siempre menor o mayor que una cantidad constante propuesta; pero que puede diferir de esta última en menos que cualquier cantidad propuesta, por pequeña que sea, esta cantidad constante se llama el límite en grandeza o en pequeñez de la cantidad variable”. La variable no podía oscilar, como podría hacerlo en nuestra visión más general.

L'Huillier cayó en un error sugerido por la vaga idea de uniformidad expresada en la ley de continuidad de Leibniz. Dijo que “si una cantidad variable en todas las etapas disfruta de una determinada propiedad, su límite gozará de esta misma propiedad”. La falsedad de esta doctrina es inmediatamente evidente por el hecho de que los números irracionales pueden definirse fácilmente como los límites de sucesiones de números racionales, o por la observación de que las propiedades de un polígono inscrito en un círculo no son las de la figura limitante: el círculo. El error de L'Huillier a este respecto fue probablemente el resultado de su incapacidad para ver que el concepto de límite debía identificarse con la naturaleza de las sucesiones convergentes infinitas y con la cuestión de la naturaleza de los números reales y el continuo. La insuficiencia de su concepción del número puede inferirse además del hecho de que sintió la necesidad de distinguir entre valores límite y proporciones límite.

Aunque L'Huilier buscó correctamente la base del cálculo en el concepto de límite, su exposición de esto fue una simplificación excesiva de lo que luego se dio cuenta de que

era una pregunta muy difícil. Siguiendo a D'Alembert al considerar el infinito desde el punto de vista de la magnitud más que de la agregación, negó la existencia de una cantidad realmente infinita porque sintió que su aceptación conduciría a tales “contradicciones” como $\infty + n = \infty - n$ sostenía que había demostrado que el cálculo era independiente de toda idea de infinito, ya sea grande o pequeño. En esto no se dio cuenta de que toda la teoría de los límites se basa, en última instancia, en la de los agregados infinitos. Este hecho no se reconoció claramente hasta el siglo siguiente.

Los agregados infinitos ya eran tema de discusión desde el tiempo de los filósofos medievales, y fue especialmente con Galileo Galilei (1564-1642) quien centró la atención en la correspondencia entre agregados infinitos, más que en la relación de magnitudes finitas e infinitas: un cambio en el punto de vista que condujo a la formulación final del cálculo en el siglo XIX [10, p.70].

Al justificar esta conclusión, Galileo indicó un cambio significativo de énfasis, porque en lugar de considerar el infinito desde el punto de vista de la magnitud, como habían hecho Aristóteles y muchos eruditos medievales, centró la atención, como Platón, en el infinito como multiplicidad o agregación. Al respecto, indicó que la clase infinita de todos los números enteros positivos podría ponerse en una correspondencia uno a uno con una parte de esta clase, por ejemplo, con todos los cuadrados perfectos. Esta característica de los conjuntos infinitos se redescubrió con Bolzano en el siglo XIX y posteriormente en ese siglo se hizo fundamental en el establecimiento del cálculo sobre una teoría rigurosamente desarrollada de los ensamblajes infinitos. [10, p.115-116]

Lazare Carnot

Según Boyer [10, p.257], la monografía de L'Huilier no fue ampliamente leída, ni sus puntos de vista fueron generalmente aceptados en ese momento. La indecisión sobre la verdadera base del cálculo siguió siendo tan aguda como antes. Como resultado, apareció la obra de Carnot, que mencionamos anteriormente. El trabajo de Carnot gozó de una popularidad verdaderamente notable, apareciendo en numerosas ediciones y en varios idiomas desde esa época hasta hace muy poco.

Carnot realiza una revisión a los métodos relacionados con la fundamentación del cálculo, incluyendo la teoría de Berkeley sobre la compensación de errores y el enfoque de Euler

relativo al cálculo con ceros. La discusión interesante que se encuentra en Carnot es la definición y el uso que hace de los “infinitesimales”, y en su obra los define como:

Llamó cantidad infinitamente pequeña a cualquier cantidad a la que se la considera como decreciendo continuamente, de tal manera que se puede hacer tan pequeña como queramos, sin vernos obligados por ello a variar aquellas [otras cantidades] cuyas relaciones mutuas investigamos. [23, p.135]

Con respecto a la noción de “límite”, Carnot escribió que:

Un límite no es otra cosa que una cantidad fija a la que se supone que tiende indefinidamente una cantidad auxiliar, de manera que puede diferir de ella tan poco como queramos y que su razón última a ella sea una razón de igualdad. [23, p.136]

En vista de la falta de claridad y uniformidad en las exposiciones del cálculo entonces corrientes, Carnot deseaba hacer la teoría rígidamente precisa. Considerando las muchas interpretaciones contradictorias del tema, buscó saber “en qué consistía el verdadero espíritu del análisis infinitesimal”. Sin embargo, en la selección de su principio unificador, lo hizo de una manera deplorable. Llegó a la conclusión de que “los verdaderos principios metafísicos del Análisis Infinitesimal ... son, sin embargo, los principios de la compensación de errores, como habían sugerido Berkeley y Lagrange. En su expansión de este punto de vista, volvió sustancialmente a las ideas que Leibniz había expresado. Sostuvo que para estar seguro de que dos cantidades designadas son rigurosamente iguales, es suficiente demostrar que su diferencia no puede ser una “quantité designée”. Parafraseando a Leibniz, Carnot dijo además: que cualquier cantidad se puede sustituir por otra que se diferencia de ella por un infinitesimal, que el método de los infinitesimales no es más que el del agotamiento reducido a un algoritmo; que los “quantités inappréciables” son meros auxiliares que se introducen, como números imaginarios, sólo para facilitar el cálculo, y que se eliminan al llegar al resultado final.

Según Boyer [10, p.258], Carnot incluso se hizo eco de la explicación favorita de Leibniz en términos de la ley de continuidad. Sostuvo que uno puede concebir el análisis infinitesimal bajo dos puntos de vista, según que los infinitesimales se tomen como “quantités efectivos” o se consideren como “quantités absolus nuls”. (Leibniz, sin embargo, no los había admitido como absolutamente, sino sólo relativamente, cero.) En el primer caso, consideró

que el cálculo debía explicarse sobre la base de una compensación de errores: debían hacerse “ecuaciones imperfectas” “perfectamente exacto” por el simple expediente de eliminar las cantidades cuya presencia ocasionó los errores; En el último caso, consideró el cálculo como un “arte” de comparar cantidades que desaparecen entre sí para descubrir a partir de estas comparaciones las relaciones entre las cantidades propuestas. A la objeción de que estas cantidades que desaparecen son o no son cero, Carnot respondió que “las llamadas cantidades infinitamente pequeñas no son simplemente cantidades nulas en absoluto, sino cantidades nulas asignadas por una ley de continuidad que determina la relación”. Esta explicación es sorprendentemente parecida a la dada por Leibniz aproximadamente un siglo antes.

Junto con su establecimiento de la “verdadera metafísica” del cálculo infinitesimal, Carnot procedió a mostrar que las diversas opiniones sobre el tema eran esencialmente reducibles a esta misma base. Al demostrar esto, señaló que el método exhaustivo hizo uso de sistemas análogos de cantidades auxiliares conocidas. El método de Newton de las razones primeras y últimas fue similar, excepto que en él los lemas liberaron el trabajo de la necesidad del argumento mediante una doble reducción al absurdo. Carnot sintió que el método de Cavalieri también eran ciertamente corolarios del método de agotamiento. Reconoció que el método de los límites no era diferente del de las razones primeras y últimas, por lo que también era una simplificación del método exhaustivo. Además, todos estos métodos conducen al resultado del análisis infinitesimal, pero por una ruta difícil y tortuosa. El método de Lagrange también lo vio vinculado al cálculo infinitesimal, ya que descuida los otros términos de las series infinitas. Por lo tanto, los diversos puntos de vista que sentía, algo así como lo había hecho L’Huillier, eran meras simplificaciones del método exhaustivo que se efectuaron reduciendo esto a un algoritmo conveniente. En la medida en que el método infinitesimal combinaba la facilidad de los procedimientos de cálculo aproximado con la exactitud de los resultados del análisis ordinario, no veía ningún punto en intentar, bajo el pretexto de un mayor rigor, sustituirlo por un método menos natural.

Junto con su establecimiento de la “verdadera metafísica” del cálculo infinitesimal, Carnot procedió a mostrar que las diversas visiones del tema eran esencialmente reducibles a esta misma base.

Al demostrar esto, señaló que el método exhaustivo hacía uso de sistemas análogos de cantidades auxiliares conocidas. El método de Newton de las razones primarias y últimas era similar, excepto que en él los lemas liberaron a la obra de la necesidad del argumento mediante una doble *reductio ad absurdum*. Carnot sintió que los métodos de Cavalieri y Roberval también eran corolarios del método exhaustivo. Reconoció que el método de los límites no era diferente del de la primera y la última razón, de modo que también era una simplificación del método exhaustivo. Además, todos estos métodos conducen a los resultados de un análisis infinitesimal, pero por una dificultad y ruta tortuosa. El método de Lagrange también lo vio vinculado al cálculo infinitesimal, en el sentido de que descuida los otros términos de la serie infinita. Los diversos puntos de vista, por lo tanto, los consideraba, en cierto modo como L'Huilier, meras simplificaciones del método de agotamiento que se efectuaban reduciendo esto a un algoritmo conveniente. En la medida en que el método infinitesimal combinaba la facilidad de los procedimientos de cálculo aproximado con la exactitud de los resultados del análisis ordinario, no veía ningún sentido en intentar, bajo la apariencia de mayor rigor, sustituirlo por un método menos natural.

Aunque el trabajo de Carnot fue ampliamente leído, difícilmente se puede decir que haya conducido a una comprensión más clara de las dificultades inherentes al nuevo análisis. Aunque se dio cuenta de que los diferenciales debían definirse de alguna manera como variables, anticipándose, hasta cierto punto, a la visión de Cauchy, no pudo dar definiciones adecuadas a estas porque, como Leibniz, pensaba en términos de ecuaciones más que de función, concepto que llevó a Cauchy a hacer fundamental la derivada. Además, Carnot, miembro de una escuela de matemáticos que enfatizó la relación de las matemáticas con la práctica científica, parece, a pesar del título de su trabajo, haber estado más preocupado por la facilidad de aplicación de las reglas de procedimiento que por la lógica en el razonamiento involucrado. En este sentido, su obra se parece a la de Leibniz, cuyas explicaciones de los diferenciales parafraseo en gran medida y cuyo método defendió con una calidez casi polémica.

Los matemáticos del continente habían estado de acuerdo fundamentalmente en que, pragmáticamente, el cálculo diferencial ofrecía el mejor método de procedimiento; pero fue precisamente en la lógica del asunto que discrepaban. En este último punto, Carnot fue

de poca ayuda, ya que después de señalar lo que la mayoría de los hombres se habían dado cuenta durante mucho tiempo que todos los métodos del nuevo análisis estaban esencialmente relacionados procedió a hacer básico el sistema infinitesimal, el que era lógicamente, quizás, el más débil de todos. Al hacerlo, apuntó hacia una visión diametralmente opuesta a la que habían indicado D'Alembert y L'Huilier y por la que, en última instancia, procederá el desarrollo riguroso, siguiendo la obra de Cauchy.

Sylvestre Lacroix

Según Boyer [10, p.264], en el año 1797, en el que Carnot intentó una concordancia de todos los sistemas del cálculo y en el que Lagrange intentó seriamente establecer su método, se publicó el primer volumen de quizás el libro de texto más famoso y ambicioso sobre el tema que había aparecido hasta ese momento *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* de Lacroix. Lacroix declaró en el prefacio de esta obra que había sido el nuevo método de Lagrange el que lo había inspirado a componer un tratado sobre el cálculo que debía tener como base las ideas luminosas que este método había sustituido por lo infinitamente pequeño. Su texto, sin embargo, indica bien la indecisión de la época, ya que a pesar del objetivo declarado de la obra, la base del tema permaneció algo en duda. Lacroix interpretó el método de series de Lagrange en términos de los límites de D'Alembert y L'Huilier. A este respecto, sin embargo, oscureció el significado de esta relación al hablar del límite de las series divergentes, y siguiendo a Euler en el estudio de series infinitas como $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + \dots$. Además, no compartía con Lagrange la sospecha de que el método de Leibniz se basaba en una idea falsa de lo infinitamente pequeño. Es cierto que Lacroix hizo uso de infinitesimales. Aunque aceptó la metafísica de Lagrange, adoptó la notación diferencial de Leibniz. Este hecho a veces confunde su pensamiento y lo llevó, como lo había hecho Euler, a considerar el coeficiente diferencial (como Lacroix llamó) como un cociente de ceros.

Quien sucedió a Lagrange como profesor de análisis de la École Polytechnique en 1799 fue Sylvestre-François Lacroix (1765-1843), quien escribió un tratado de tres volúmenes con el cual buscaba ayudar a aquellos estudiantes que no vivían en París, los cuales no podían acceder a trabajos originales de revistas. En los trabajos de Lacroix no se encuentra la definición de límite como tal, pero dio algunos ejemplos en los que sí se puede rastrear la noción de límite:

Por ejemplo, definió a para ser el límite de la función $\frac{ax}{x+a}$ ya que x aumenta indefinidamente, ya que la diferencia entre a y el valor de esa función “se hace más pequeña a medida que x se hace más grande, y se puede hacer menos que cualquier cantidad, por pequeña que sea, de modo que la fracción propuesta pueda acercarse a la distancia deseada”. [Traducción al Español de [22, pp.80-81]]

Lacroix mencionó que en el caso de sumas de series alternas, una cantidad podría superar u oscilar alrededor de su límite, lo que iba en contra de lo que pensaban los matemáticos del siglo XVIII como D’Alembert.

La falta por parte de Lacroix de distinción crítica al tratar los métodos de Newton, Leibniz y Lagrange dio a su obra una apariencia algo parecida al intento de Carnot de demostrar la congruencia de las numerosas representaciones del cálculo. El matemático y astrónomo Laplace elogió esta actitud por parte de Lacroix, diciendo que tal acercamiento de métodos sirvió como una aclaración mutua, la verdadera metafísica probablemente se encuentra en lo que tenían en común. Sin embargo, parece que en ese momento al menos era deplorable, porque conducía a una confusión de pensamientos sobre el tema justo cuando más se necesitaba precisión lógica. Sin embargo, en su obra más popular de 1802 el *Traité élémentaire*, un resumen de su tratado más amplio, Lacroix omitió el método de Lagrange e hizo básica la explicación en términos de límites, aunque de nuevo con una falta de rigor que hizo interpretaciones en términos de infinitesimales posibles. El éxito de esta obra, que pasó por muchas ediciones y fue traducida a varios idiomas, dio lugar a otros textos del mismo tipo; y fue en gran parte a través de ellos que el método de los límites se hizo familiar, si no riguroso. Fue a través de esos textos que la notación leibniziana y la doctrina de los límites suplantaron en Inglaterra el método de las fluxiones e interpretaciones que ya se habían confundido irremediablemente con lo infinitamente pequeño.

El año 1816, en el que se tradujo al inglés la obra más corta de Lacroix, marca un importante período de transición, porque fue testigo del triunfo en Inglaterra de los métodos utilizados en el continente. Este punto particular de la historia de las matemáticas marca una nueva época por una razón mucho más significativa, porque al año siguiente apareció una obra de Bolzano que indicaba el surgimiento del período de rigor matemático en todas las ramas de la materia. En el cálculo, la nueva actitud dio como resultado el establecimiento lógico del

análisis superior sobre el concepto de límite, y así puso fin al período de indecisión que había comenzado con las invenciones del método de fluxiones y del cálculo diferencial.

En los trabajos de L'Huillier, Carnot y Lacroix podemos encontrar varios aspectos importantes relacionadas con el concepto de límite, para las futuras generaciones como son: una operatividad, una simbología, lo que permite tener un concepto de límite cada vez más maduro con respecto a la formalidad, para de esta manera ser retomado por Cauchy en su *Curso de Análisis*.

La formalización del infinito potencial mediante el concepto de Límite

Las objeciones planteadas en el siglo XVIII con respecto a los métodos de fluxiones, razones primeras y últimas, límites, diferenciales y funciones derivadas, no fueron resueltas satisfactoriamente. Los argumentos en los que se basan estos métodos eran equivalentes a los de Zenón y se basaban en cuestiones del infinito y la continuidad. Sin embargo, los defensores de todos los métodos, excepto el de los diferenciales, protestaron porque no tenían necesidad de invocar la noción de infinito. Los defensores del cálculo diferencial, a su vez, aunque intentaron justificar sus procedimientos en términos de estos conceptos, no pudieron proporcionar explicaciones lógicamente consistentes de ellos.

El método de los límites, que en ese momento parecía no conducir al infinito, proporciona la base lógica para el mismo; y el método de Lagrange, desarrollado para evitar estas dificultades, planteó preguntas que señalan el camino hacia su solución. A principios del siglo XIX los críticos de Lagrange comenzaron a cuestionar la validez de su principio según el cual una función continua siempre puede expresarse, por medio del teorema de Taylor, como una serie infinita. Comenzaron a criticar el uso casi indiscriminado de series infinitas. Lagrange al igual que Arquímedes, no consideraba que la serie continuará hasta el infinito, sino sólo hasta un punto en el que el resto era lo suficientemente pequeño. Sin embargo, en el siglo XIX, el concepto de infinito se volvería básico en el cálculo mediante el uso de series infinitas y agregados infinitos.

Entre los matemáticos de principios del siglo XIX, fue probablemente Bernard Bolzano (1781-1848) quien planteó las ideas más profundas sobre dos aspectos que trataremos a continuación, los cuales corresponden a:

1. Los fundamentos del análisis.
2. El infinito

Con respecto a los fundamentos del análisis, los aportes de Bolzano fueron poco conocidos por sus contemporáneos, sin embargo fueron redescubiertos y estudiados por Weierstrass y sus alumnos.

Como Lagrange había sentido que la introducción del tiempo y el movimiento en las matemáticas era innecesaria, Bolzano intentó evitar en sus pruebas cualquier consideración derivada de la intuición espacial [10, p.268]. Bolzano dio una definición de función continua y por primera vez, indicó claramente que la base de la idea de continuidad se encontraba en el concepto de límite:

Una función como $f(x)$ es continua en un intervalo si para cualquier valor de x en este intervalo la diferencia $f(x+\Delta x) - f(x)$ se vuelve y permanece menor que cualquier cantidad dada para Δx lo suficientemente pequeña, ya sea positiva o negativa [Traducción al español de [10, p.268]]

Al presentar los elementos del cálculo, Bolzano se dio cuenta claramente de que el tema debía explicarse en términos de límites de proporciones de diferencias finitas, como lo había hecho L'Huilier. En este sentido, Bolzano menciona que:

En otras palabras: si x es una variable independiente y $y = f(x)$ designa una variable dependiente de ella, debe ocurrir (si nuestro cálculo es correcto para todos los valores de x entre $x = a$ y $x = b$) que y dependa de x de manera tal que, para todos los valores de x entre a y b , el cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(que surge al dividir el incremento de y por el incremento de x) puede aproximarse arbitrariamente a alguna constante o a alguna cantidad $f'(x)$ dependiente exclusivamente de x , con tal que a Δx se le de un valor suficientemente pequeño y permaneciendo en esa vecindad o aproximándose todavía más cuando Δx es menor [9, pp.100].

Lagrange había sentido que la noción de límite estaba ligada a un cociente de cantidades evanescentes o de ceros. Euler mencionó que $\frac{dy}{dx}$ se podía ver como un cociente de ceros y Lacroix tendía a seguirlo. Bolzano además enfatizó en que este cociente no debía interpretarse como una razón de dy a dx o como el cociente de cero entre cero, sino que era más bien

un símbolo para representar la derivada de y con respecto a x [9, pp.102]. Bolzano sostuvo además, que una función no tiene un valor determinado en un punto x_0 si esta se reduce a $\frac{0}{0}$. Sin embargo la función, tiene un valor límite cuando unos se acerca a x_0 , y de forma correcta indicó que, al adoptar el valor límite como el significado de $\frac{0}{0}$, la función puede hacerse continua en este punto x_0 [10, p.269].

Desde la invención del cálculo se había sentido que la continuidad de una función era suficiente para asegurar la existencia de una derivada. Sin embargo, en 1834, en su *Théorie des fonctions* (Teoría de funciones) donde separa el concepto de continuidad del de derivabilidad, Bolzano dio un ejemplo de una función de variable real, continua en un intervalo cerrado, no diferenciable en ningún punto de ese intervalo.

Esto podría haber servido en matemáticas para mostrar que las funciones continuas no necesitan, a pesar de las sugerencias de la intuición geométrica y física, tener derivada. Sin embargo, debido a que el trabajo de Bolzano no se conocía en ese momento, el papel de demostrar que una función continua no necesita tener derivada, estaba reservado para Weierstrass quien publicó alrededor de 1850 el primer ejemplo de una función continua y diferenciable en ninguna parte.

Aunque las ideas de Bolzano indican la dirección en la que se ubicaría la formulación final del cálculo y que debía seguir gran parte del pensamiento del siglo XIX, no constituyeron la influencia decisiva para determinar esto. Su trabajo pasó desapercibido; afortunadamente, Cauchy persiguió ideas similares casi al mismo tiempo y logró establecerlas como básicas en el cálculo.

Con respecto al segundo aspecto, relacionado con el infinito, se tiene que Bolzano negó la existencia de magnitudes infinitamente grandes e infinitamente pequeñas, mantuvo la posibilidad de un infinito “actual”, aunque no lo haya aceptado del todo, resaltando la paradoja que Galileo había señalado: “que la parte en este caso podría ponerse en correspondencia uno a uno con el todo” [6, p.55]. Las *Paradojas del infinito*, la última obra de Bolzano, fue publicada tres años después de su muerte, obra que hubiese pasado desapercibida si no fuera por Hermann Hankel (1839-1873) quien señalaría que este escrito

contenía “excelentes comentarios sobre el concepto de infinito”. Desde el comienzo de su libro, Bolzano se reveló como el que, en ese momento, había penetrado profundamente en la cuestión del infinito, ya que afirmó lo siguiente:

Ciertamente no todas, como dice Kastern, pero sin duda alguna sí la mayoría de las afirmaciones paradójicas que surgen en el ámbito de las matemáticas, tienen que ver con el concepto de “infinito”, ya sea que lo mencionan directamente o involucrándose de manera indirecta en su demostración. [9, p.39]

Es por eso que Bolzano se esfuerza por aclarar la noción de infinito. El libro *Paradojas del infinito* consta de argumentos filosóficos, y además, de un significado matemático que está lejos de ser insignificante.

En [9, pp.50-51], Bolzano enuncia una proposición que será adoptada más tarde por Richard Dedekind (1831-1916), sobre la existencia de conjuntos infinitos¹. Bolzano demuestra que “el conjunto de las proposiciones y de las verdades es un conjunto infinito”, ya que cuando se considera una verdad cualquiera A (por ejemplo, la proposición “existen verdades”) descubrimos otra proposición expresada por la frase “ A es verdadera”, distinta de la proposición A , que llamaremos B . En este sentido se deriva a partir de A una proposición distinta llamada B y, parte de esto para obtener otra proposición llamada C diferente tanto de A como de B y así, sucesivamente en un proceso sin fin. Con esto, Bolzano concluye que el conjunto de todas las proposiciones es más grande que cualquier conjunto finito.

A lo largo del libro *Paradojas del infinito* Bolzano establece una biyección entre diferentes conjuntos infinitos. En particular, entre conjuntos infinitos A y B donde A es un subconjunto propio de B . Por ejemplo establece la biyección

$$x \mapsto y = \frac{12}{5}x$$

entre los intervalos $[0, 5]$ y $[0, 12]$.

De la ecuación ($5y = 12x$) se sigue igualmente que a todo valor de x corresponde un único valor de y y viceversa. Y es también claro que a toda cantidad x en el conjunto entre 0 y 5

¹Esta proposición planteada como “**Teorema:** Existen sistemas infinitos”, se encuentra en la Sección 5: FINITO E INFINITO en *¿Qué son y para que sirven los números?* de Dedekind [24, p.798]

corresponde una cantidad en el conjunto 0 y 12. Inversamente: siempre que y se encuentre entre 0 y 12, x ha de localizarse entre 0 y 5 [9, pp.65].

A pesar de la biyección entre dos conjuntos como se plantea en el ejemplo anterior, Bolzano no está considerando que los intervalos $[0, 5]$ y $[0, 12]$ tengan el mismo tamaño, con relación a la cantidad de elementos infinitos; sino que él sigue considerando que el intervalo $[0, 5]$ es más pequeño que el intervalo $[0, 12]$.

3.1. Cauchy y la definición de límite

Agustín-Louis Cauchy (1789-1857) fue un matemático francés, discípulo de Lagrange y Lacroix. Además del estudio de las matemáticas donde realizó grandes aportes, Cauchy también estudió lenguas clásicas e ingeniería. Cauchy, asentó las bases del análisis matemático, a través de las siguientes obras:

- *Cours d'analyse* [15] publicado en 1821.
- *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* [14] publicado en 1823.
- *Leçons sur le calcul différentiel* publicado en 1829.

Cauchy necesitaba reconstruir el análisis a partir de la aritmética, así que buscó establecer una nueva operación que estuviese ligada a los procesos infinitos, donde el concepto de función y el concepto de límite jugaron un papel central. Para esto fue necesario aclarar bajo estos conceptos algunas definiciones las cuales eran algo contradictorias como la de derivada, integral, convergencia y en especial, las de cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes; definiciones que serán trabajadas a continuación.

3.1.1. El límite y los infinitesimales

Hemos visto que la noción de límite se ha ido desarrollando gradualmente a partir del método exhaustivo planteado por los griegos, hasta el método de razones primeras y últimas que se encuentra en los *Principia* de Newton. Robins, D'Alembert y L'Huilier invocaron la noción de límite como “el” concepto básico del cálculo, y como tal fue incluido por Lacroix en sus libros de texto. A lo largo de este período, el concepto de límite careció de precisión en su formulación. Esto resultó del hecho de que se basaba en la intuición geométrica, ya que

durante este tiempo las ideas de aritmética y álgebra se establecieron en gran medida sobre las de magnitud geométrica. Sus inventores interpretaron el cálculo como un instrumento para tratar las relaciones entre cantidades involucradas en problemas geométricos, y como tal fue ampliamente aceptado por sus sucesores. Euler y Lagrange, en un sentido representan excepciones a esta regla, porque deseaban establecer el cálculo sobre el formalismo de su concepto de función dada por expresiones analíticas.

Sin embargo, en el trabajo de Cauchy, el concepto de límite se convirtió, en un concepto claro y definitivamente aritmético más que geométrico. Anteriormente, cuando se quería ilustrar la noción de límite, la que más probablemente se recordaba era la de un círculo definido como el límite de una sucesión de polígonos inscritos y circunscritos. Tal ilustración sirvió de inmediato para plantear preguntas sobre la forma en que esto debe ser interpretado:

- ¿La noción de límite es el acercamiento o la coincidencia entre los lados de un polígono y los puntos que representan el círculo?
- ¿El polígono se convierte alguna vez en el círculo?
- ¿Son iguales las propiedades del polígono y el círculo?

Cuestionamientos como estos permitieron que se fundamentara mejor el concepto de límite. Sin embargo, estas preguntas también evidencian la dificultad de acercarse al concepto de límite, ya que exigían algún tipo de visualización en el paso de un polígono a un círculo, por el cual las propiedades de la primera figura se fusionan con las de la segunda.

Gracias al concepto de límite Cauchy puede incorporar cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes; además incorpora las definiciones de función continua, convergencia, derivada e integral. Para la rigorización del análisis era necesario que las definiciones y los procesos de demostración estuvieran libres de referentes geométricos, físicos o metafísicos. Cauchy tomó como punto de partida de su programa fundamentador el concepto de límite, donde el límite prefigura un tratamiento en términos de inecuaciones, lo cual se desarrollará posteriormente gracias a la escuela alemana liderada por el matemático alemán Karl Weierstrass. El concepto de límite antes de Cauchy estuvo vinculado a procesos de aproximación en el cálculo, pero poniéndolo como base en su teoría se ve en la necesidad de elaborar una definición precisa que permita establecer sus propiedades. En este sentido presenta los presupuestos teóricos que tomará como base de su construcción. Inicialmente

establece diferencias entre número y cantidad.

En su obra *Curso de análisis* [15, p.5-6], Cauchy presenta a los números como “la medida absoluta de las magnitudes”. Y a la cantidad como “un número precedido de signos”. Por otro lado, la definición de cantidad variable “es aquella que recibe sucesivamente varios valores diferentes los unos de los otros”. Con la cual se prepara para realizar la incorporación del concepto de límite.

Definición de límite: Cuando los valores atribuidos a una variable particular se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que terminan por diferir de él tan poco como queramos, este valor fijo se llama límite de todos los demás valores. [Traducción al español de [15, p.6]]

Esta es la definición presentada por Cauchy en términos retóricos, es la más clara definición de límite que se ha presentado hasta ese momento. Sin embargo, los matemáticos posteriores como Weierstrass tratarán de establecer la definición de límite, aún más formal y precisa, al ser llevada a los términos $\varepsilon - \delta$, y al encapsular la expresión “se aproximan indefinidamente” que es mencionada en la definición de límite planteada por Cauchy.

Para ilustrar el concepto de límite, Cauchy presenta dos ejemplos, el primero menciona que un número irracional es el límite de diversas fracciones que le dan mejores aproximaciones, y el segundo, planteado en términos geométricos, es el del círculo como límite, hacia el cual convergen las áreas de los polígonos inscritos cuando el número de sus lados crece más y más [15, pp.6-7].

Desde la noción que Aristóteles le dio a las cantidades infinitamente pequeñas, estas cantidades habían estado ligadas a la intuición geométrica. La noción de cantidades infinitamente pequeñas no había prosperado en términos aritméticos, esto debido a que los griegos consideraban a la unidad como la mínima cantidad numérica, y las fracciones racionales se habían tratado como razones de dos números asociados a una magnitud geométrica. Sin embargo, en el siglo XVII vino un rápido aumento de los métodos algebraicos en geometría, de modo que desde la época de Fermat los infinitesimales habían sido la preocupación tanto del álgebra como de la geometría.

Además de lo anterior existen dos hechos que sustentan porque las cantidades aritméticas infinitamente pequeñas no prosperaron, el primero corresponde a un aspecto filosófico de que la unidad aritmética es el concepto que resulta al abstraer de las “cosas” los rasgos que conciernen exclusivamente a su singularidad; así que no tiene sentido, desde el pensamiento griego dividir a la unidad, dado que ésta perderá su esencia de la misma manera como un hombre o un caballo no pueden ser divididos sin que pierdan su esencia. Lo que acabamos de mencionar encierra la esencia de la cantidad discreta tal como la define Aristóteles: “las subdivisiones de una cantidad discreta no se pueden continuar más allá de la unidad y, en consecuencia, sólo es posible llevar a cabo un número finito de estas divisiones” [38, p.7]. La indivisibilidad caracteriza al número, bajo esto, el dominio numérico se limita como una necesidad lógica, a los números naturales.

El segundo aspecto está relacionado con el continuo geométrico, que parte del punto de vista griego donde se establece una diferencia entre la aritmética y la geometría, es decir entre contar y medir. Lo cual perdurará hasta que no se logre mostrar que los números reales son completos y continuos; y dado que para el pensamiento griego los números son discretos, no es posible dividir infinitamente a la unidad aritmética, si no se la considera continua y las cantidades continuas que se tienen hasta esa época, son magnitudes geométricas; pero no aritméticas.

En sus investigaciones, Newton manifestaba no haber considerado las cantidades infinitamente pequeñas, sin embargo al estudiar su método de razones primeras y últimas, en términos de la noción de límite, pareciese que sus magnitudes evanescentes se volvieran infinitesimales, lo que contradice sus argumentos. Por su parte Leibniz había negado la existencia de infinitesimales actuales, ya que a veces los consideraba asignables, a veces no asignables y, en ocasiones, cualitativamente cero, sin embargo, el desarrollo durante el siglo XVIII del concepto de función, con su énfasis en las relaciones entre variables, llevó a Cauchy a hacer del infinitesimal no solo una cantidad asociada a lo geométrico y a las magnitudes físicas sino que llegó a ser considerada como una cantidad variable como se verá más adelante en su definición.

Con la definición de variables y límite de esas variables, Cauchy define lo que se conoce como infinitesimal, o cantidad infinitamente pequeña, que corresponde a valores sucesivos de dicha variable disminuyendo indefinidamente, de tal manera que caen por debajo de cualquier número dado, donde una variable de este tipo tiene como límite al número cero. A continuación menciona a las cantidades infinitas como aquellas donde los valores numéricos sucesivos, de una variable, dada aumentan más y más de tal manera que se elevan por encima de cualquier número dado, tendiendo al infinito positivo como límite, denotado por el símbolo ∞ si es una variable positiva; e infinito negativo, denotado por $-\infty$ si es una variable negativa.

Después, Cauchy entiende que debe relacionar las nociones de límite e infinito así que utiliza la definición de límite para presentar la definición de cantidades infinitas, como sigue:

Definición de cantidades infinitas: Decimos que una cantidad variable se vuelve infinitamente pequeña, cuando su valor numérico disminuye indefinidamente de tal manera que converge hacia el límite 0. ... Decimos que una cantidad variable se vuelve infinitamente grande, cuando su valor numérico aumenta indefinidamente de tal manera que converge hacia el límite ∞ . [Traducción al español de [15, pp.21-22]]

En este sentido, Cauchy define las cantidades infinitas que, mucho siglos atrás, habían sido planteadas por Aristóteles como el “infinito potencial”, el cual se evidencia tanto en la expresión “disminuye indefinidamente”, como en la expresión “aumenta indefinidamente”, presentes en la definición de cantidades infinitas planteadas por Cauchy.

Con respecto a las cantidades infinitamente pequeñas, en [15, pp.21], vemos que Cauchy distingue entre una disminución constante y una disminución indefinida. Por ejemplo, el área de un polígono regular circunscrito sobre un círculo dado disminuye constantemente a medida que el número de lados aumenta, pero no lo hace de forma indefinida, pues tiene como límite el área del círculo dado. De la misma manera, sucede con una variable que toma los diferentes valores de la sucesión:

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots,$$

si se lleva al infinito, esta sucesión disminuirá constantemente, pero no indefinidamente ya que sus valores sucesivos convergen hacia el límite 1. Por otro lado, si una variable toma los

valores sucesivos de diferentes términos de la sucesión:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \dots,$$

en el infinito la sucesión no disminuye constantemente, pues la diferencia entre sus términos es alternante, sin embargo disminuye indefinidamente, pues sus valores se vuelven más pequeños que cualquier número dado.

Con respeto a las cantidades infinitamente grandes, Cauchy menciona que es también importante tener en cuenta que una variable que aumenta constantemente es diferente a una variable que aumenta indefinidamente. En el caso del área de un polígono regular inscrito en un círculo dado, aumenta constantemente a medida que aumenta el número de lados, pero no indefinidamente. Por otro lado, los términos de la sucesión de números enteros

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

aumenta constantemente e indefinidamente [15, pp.22].

Cauchy empieza a explorar las propiedades de las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes. En particular en [15, pp.22], Cauchy menciona lo siguiente:

Sea α una cantidad infinitamente pequeña, esto es, una variable cuyo valor numérico decrece indefinidamente. Cuando las diferentes potencias enteras de α , a saber

$$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots,$$

entran en el mismo cálculo, estas diferentes potencias son llamadas, respectivamente, infinitamente pequeñas de primer, segundo, tercer orden, etc. En general, llamamos a cualquier cantidad variable infinitamente pequeña, de primer orden si su razón con α converge a un límite finito distinto de cero, cuando el valor numérico de α disminuye. Llamamos a una cantidad variable que involucra a α infinitamente pequeña, del segundo orden si su razón con α^2 converge hacia un límite finito diferente de cero, y así sucesivamente para órdenes superiores. Dado esto, si k denota una cantidad finita distinta de cero y ε denota un número variable que decrece indefinidamente con el valor numérico de α la forma general de las cantidades infinitamente pequeñas de primer orden es

$$k\alpha \text{ o al menos } k\alpha(1 \pm \varepsilon).$$

De forma análoga funciona para los órdenes superiores, y en general para las cantidades infinitamente pequeñas de orden n (donde n representa un número entero), las cuales serán

$$k\alpha^n \text{ o al menos } k\alpha^n(1 \pm \varepsilon).$$

Newton había trabajado con los infinitesimales, o cantidades evanescentes, de primer orden, Leibniz había intentado definir los de órdenes superiores de los infinitesimales y D'Alembert había retomado estas ideas en términos de límites. En cierto sentido D'Alembert, había reconocido que los infinitesimales debían considerarse variables y que los órdenes de magnitudes infinitamente pequeñas debían definirse en términos de proporciones de estos; pero su trabajo, carecía de la precisión de la declaración necesaria para su aceptación general, algo que Cauchy complementó con lo que enunciamos anteriormente.

Con respecto al infinito actual, Cauchy negó la posibilidad de su existencia en matemáticas, debido a las paradojas a las que tal suposición parecía conducir. Sin embargo dio un gran paso para la *formalización*² del infinito potencial aristotélico a través de la noción de límite.

3.1.2. Conceptos basados en la definición de límite

La definición de límite planteada anteriormente, es la base fundamental del constructo teórico elaborado por Cauchy, pues se hace uso del concepto de límite para presentar las definiciones de continuidad y convergencia que se pueden ver en el *Cours d'analyse* [15], como también las definiciones de derivada e integral desarrolladas en el *Cálculo infinitesimal* [14]. A continuación presentaremos estas definiciones tomando algunos apartados de Judith Grabiner [22] e iniciaremos presentando el concepto de continuidad y las propiedades básicas de las funciones continuas, dado que son necesarias para el estudio de los conceptos de derivada e integral.

Continuidad

Tanto Cauchy como Bolzano, independientemente uno del otro, dieron la primera definición rigurosa de función continua, reconociendo por un lado su potencial para probar teoremas y por otro el papel vital que la definición podría jugar en el análisis matemático. Con la

²Anteriormente entre diferentes matemáticos se habían planteado nociones de límite e infinito potencial que Cauchy recogió, y basándose en nociones claras para la época como la de cantidad variable definió su concepto de límite, y con él, fundamento el infinito potencial, es decir, retomando las ideas de sus predecesores le dio un nombre, un símbolo, una definición y empezó a trabajar con este tipo de infinito como objeto independiente de los de demás.

definición de función continua, Cauchy demostró los teoremas del valor intermedio, del valor medio para derivadas e integrales y de la existencia de la integral definida.

La definición de función continua planteada por Cauchy, se estableció de dos formas: la primera usa un lenguaje algebraico y la segunda un lenguaje más intuitivo relacionado con los infinitesimales. Sin embargo, dado que las cantidades infinitamente pequeñas planteadas por Cauchy, son consideradas variables cuyo límite tiende a ser cero, ambas definiciones son equivalentes. A continuación presentamos la definición, tomada de Cauchy [15, p.26].

Definición de función continua: Sea $f(x)$ una función de la variable x , y suponga que para cada valor de x entre dos límites dados, la función siempre toma un valor único y finito. Si, a partir de un valor de x comprendido entre estos límites, agregamos a la variable x un aumento α infinitamente pequeño, la función f se incrementa en la diferencia

$$f(x + \alpha) - f(x),$$

la cual dependerá al mismo tiempo de la nueva variable α y del valor de x . Dado esto, la función $f(x)$ es una función *continua* de x , entre los límites asignados, si para cada valor de x entre estos límites, el valor numérico de la diferencia

$$f(x + \alpha) - f(x),$$

decrece infinitamente con el valor numérico de α . En otras palabras, *la función $f(x)$ es continua con respecto a x entre los límites dados, si, entre esos límites, un incremento infinitamente pequeño en la variable, siempre produce un incremento infinitamente pequeño en la función.*

También decimos que la función $f(x)$ es una función continua de la variable x en una vecindad, de un valor particular de la variable x , cuando ésta sea continua entre dos límites de x , que encierran ese valor particular, aún si ellos están muy cerca.

Finalmente, cuando la función $f(x)$ deja de ser continua en la vecindad de un valor particular de x , decimos que ésta llega a ser discontinua y que hay una *disolución de continuidad* para este valor particular.

Una vez dada esta definición, Cauchy realizó la prueba sobre la continuidad de la función $y = \sin(x)$, para así poder ejemplificar la definición y evidenciar la claridad con la que se

comprende este concepto.

La definición, casi simultánea, por parte de Cauchy y Bolzano³, de función continua, recoge algunas ideas de los puntos de vista sobre la continuidad, planteados por los analistas del siglo XVIII. Según Grabiner, [22, p.88]:

Un gran número de propiedades relacionadas al concepto moderno de continuidad fueron discutidas en este periodo, y varias veces llamadas por el nombre continuidad. Estos puntos de vista mencionan que “una función podría llamarse continua ésta tenía la propiedad del valor intermedio; si era diferenciable; si era representable por una única fórmula; “si no tiene saltos”; o, si dado un cambio “mínimo” en la variable independiente, la función solo sufría un cambio “mínimo” en sí misma”.

El alcance de las definiciones dadas por Cauchy y Bolzano, desencadenaron según Grabiner [22, p.88], en los siguientes tres aspectos:

1. Ellos fueron capaces de elegir la propiedad esencial de una función continua a partir de las primeras caracterizaciones. (La propiedad esencial en el sentido de ser capaces de respaldar demostraciones acerca de otras propiedades)
2. Una vez ha sido elegida esta propiedad, ellos fueron más allá del lenguaje del siglo XVIII para dar a la continuidad una definición precisa basada en desigualdades.
3. Ellos usaron esta propiedad definitoria como la base para demostraciones de teoremas acerca de funciones continuas.

Esta propiedad definitoria, es justamente la que tanto Cauchy como Bolzano necesitaban para la demostración completamente diferente del teorema del valor intermedio. Además, para Cauchy, esta propiedad fue de gran utilidad en sus trabajos de cálculo diferencial e integral. Esto deja entrever las grandes cualidades de Cauchy para determinar la propiedad crucial de un concepto partiendo de un conglomerado de resultados.

Una vez demostrado el teorema del valor intermedio, Cauchy utilizó este teorema y la definición de función continua, en su trabajo sobre cálculo, con el objetivo de demostrar los teoremas del valor medio para derivadas e integrales y demostrar la existencia de la

³La definición de Bolzano se dio en un lenguaje ligeramente diferente y más preciso, pero su significado es el mismo.

integral definida. Más adelante otros matemáticos ampliaron la teoría de funciones continuas de Cauchy; por ejemplo Weierstrass y su escuela distinguieron, entre continuidad puntual y uniforme, aspecto que no se encontraba consignado en los trabajos de Cauchy.

Convergencia

El concepto de límite planteado por Cauchy formaliza el concepto de convergencia de series, y este último reside en heurísticas que ayudan a formalizar los procesos infinitos. Además, según Grabiner [22, p.97], el concepto de convergencia es importante en el desarrollo del análisis, por dos razones:

1. El tratamiento de convergencia de Cauchy es la primera demostración práctica de su sofisticada comprensión de cómo el concepto de límite podría traducirse en desigualdades complicadas para probar teoremas.
2. Mientras Cauchy no basó su cálculo en series de potencias como Lagrange, las series y, en particular, las series de potencias, conservan una importancia que solo es superada por la derivada e integral en la teoría y aplicaciones del cálculo, desde el tiempo de Euler hasta el siglo XX. De hecho, Cauchy fue la primera persona en apreciar que la teoría de series infinitas no era simplemente una extensión menor del álgebra de los polinomios, sino que se le podía dar una base en la teoría de los límites al igual que los otros conceptos de análisis.

A continuación presentamos la definición de convergencia de una serie de Cauchy, [15, p.85]:

Llamamos *serie*, a una sucesión indefinida de cantidades,

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$$

que siguen la una a partir de la otra, de acuerdo a una ley determinada. Estas cantidades en sí mismas son los *términos* de la serie considerada. Sea

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

la *suma* de los primeros n términos, donde n denota cualquier número entero. Si, para valores cada vez mayores de n , la suma S_n se acerca indefinidamente a cierto límite S , se dice que la serie es *convergente*, y el límite en cuestión se llama la *suma* de la serie. Por el contrario, si la suma S_n no se acerca a ningún límite fijo cuando n crece indefinidamente, la serie es *divergente* y no tiene una suma.

Al dar esta definición, Cauchy se apartó un poco del uso común que le daban los matemáticos del siglo XVIII al término convergente.

Según Grabiner [22, p.99], los matemáticos del siglo XVIII afirmaban que una serie era convergente cuando el n -ésimo término tiende a cero y divergente cuando el n -ésimo término no lo hace. Este resultado es refutado por el ejemplo de la serie armónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots,$$

cuyo n -ésimo término tiende a cero, pero no tiene una suma finita.

La divergencia de la serie armónica ya era conocida desde el siglo XIV por Nicolás Oresme (1320-1382) y fue redescubierta por Jakob Bernoulli en 1689. Euler era consciente de que una serie cuyo n -ésimo término va a cero, no necesita tener una suma finita. Cauchy formalizó de buena manera el hecho crucial acerca de una serie infinita, hecho que no tiene que ver, con que los términos de la serie convergen a cero, sino con que las sumas de términos de la serie converjan a un límite. Lo importante para Cauchy era si la serie producía un número finito bien definido, como su suma; por el contrario, si la serie no tiene suma se denomina *divergente*, lo que conlleva a una comprensión clara de las series, tanto convergentes como divergentes.

La definición de Cauchy sobre la convergencia de series guarda una estrecha relación con sus predecesores, pues, aunque Cauchy fue bastante conservador en su terminología, no criticó explícitamente la terminología anterior ni desvaloro las investigaciones anteriores con respecto a la convergencia.

La originalidad del trabajo de Cauchy sobre series no radica solamente en su definición de convergencia, ni tampoco en su insistencia de no confiar en los cálculos sobre series divergentes, porque la discusión que se dio sobre series infinitas que se encuentran en el *Traite* de Lacroix, expresan esencialmente lo mismo. Lacroix, anteriormente había señalado que la serie para la función $\frac{a}{a-x}$ desarrollada en potencias de x , es:

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \dots$$

cuya suma es exactamente $\frac{a}{a-x}$ sólo si $x < a$. Este ejemplo generó una reflexión similar a la que ya había hecho D'Alembert, de que para estar seguros al usar un desarrollo de series de este tipo “debemos discutir con cuidado la convergencia de series numéricas ... y debemos contar con estas determinaciones sólo cuando podemos asignar los límites de la diferencia que se puede encontrar entre estas series y el valor verdadero” [22, p.101].

Para que el desarrollo de la serie sea útil, Lacroix menciona que la diferencia entre la serie y su valor verdadero “sea menor que cualquier cantidad dada, no importa cuán pequeña esta sea, a medida que se toman más y más términos”. Lo que lleva a pensar que la suma de una serie infinita debe entenderse como el límite de las sumas parciales, este argumento ya se encontraba implícito en los trabajos sobre series del siglo XVIII, así que la definición de convergencia de Cauchy, es solo el comienzo de una definición correcta, para la teoría de todo lo que comprende la convergencia.

La teoría de convergencia de Cauchy abrió nuevos caminos y estableció nuevos resultados sobre una nueva base rigurosa. Haciendo uso de las desigualdades y tomando como base el concepto de límite y la suma de series, Cauchy creó una nueva teoría general de series. Reconocer la utilidad de las técnicas anteriores, hacer las generalizaciones correctas y sobre todo explorar los métodos para demostrar los teoremas generales sobre series, fueron los grandes logros, por los cuales se reconoce la originalidad de Cauchy. Sus demostraciones de convergencia, dieron lugar a un campo completamente nuevo. Cauchy ayudó a fundamentar la teoría rigurosa de las series de potencias, que fueron esenciales para el análisis matemático del siglo XIX. Fueron los trabajos de Cauchy sobre las series infinitas, los que inspiraron a las nuevas generaciones de matemáticos como Niels Henrik Abel (1802-1829) y proporcionaron el primer gran contraste entre el nuevo análisis de Cauchy y el análisis anterior a él.

Derivada

Uno de los conceptos más importantes del cálculo es el concepto de derivada, definido por Cauchy en términos de límites. El tratamiento de derivadas de forma rigurosa se registró por primera vez en el *Cálculo Infinitesimal* de Cauchy. Sin dejar por fuera los desarrollos de sus antecesores, Cauchy tomó el viejo concepto de cociente diferencial y le dio un significado nuevo y preciso. Así que definió la derivada al estilo del siglo XVIII, como el límite de la

razón del cociente de diferenciales.

A continuación presentamos la definición, a la cual hicimos alusión:

Definición de derivada: Cuando la función $y = f(x)$ permanece continua entre dos límites dados de la variable x , y asignamos a esta variable un valor entre los dos límites en cuestión, un incremento infinitamente pequeño, asignado a la variable, produce un incremento infinitamente pequeño en la función misma. En consecuencia, si establecemos $\Delta x = i$, los dos términos de la *relación de las diferencias*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

serán cantidades infinitamente pequeñas. Pero, si bien estos dos términos se acercarán al límite cero, de forma indefinida y simultánea, la relación en sí misma puede converger hacia otro límite, ya sea positivo o negativo. [Traducción al Español de [14, p.9]]

En esta definición según Grabiner [22, pp.114-115], Cauchy consideró el límite de la razón de las diferencias $[f(x+i) - f(x)]/i$ en un intervalo de continuidad de $f(x)$, donde la continuidad era necesaria para que $f(x+i) - f(x)$ e i pudiesen “acercarse indefinidamente y simultáneamente al límite cero”, o equivalentemente ser “cantidades infinitamente pequeñas”. Cauchy definió una cantidad infinitamente pequeña como una variable cuyo límite da cero. Para Cauchy, implícitamente cada función diferenciable debe ser continua. Cauchy observó como hicieron muchos de sus predecesores que aunque el numerador y el denominador de la razón $[f(x+i) - f(x)]/i$ se fueran a cero, la razón en sí misma puede converger a otro límite o positivo o negativo. Pero Cauchy, agregó al trabajo de sus predecesores “Este límite, cuando existe, tiene un valor definido para cada valor particular de x ; pero varía con x ... y será una nueva función de la variable x Para indicar esta dependencia, le damos a la nueva función el nombre de función derivada, y la designamos por medio de la notación y' o $f'(x)$ ”. La frase “este límite, cuando existe” ejemplifica la actitud rigurosa de Cauchy. Y aunque la definición de derivada es verbal, Cauchy la tradujo al álgebra de desigualdades para usarla en la demostración de teoremas sobre derivadas y crear la primera teoría rigurosa de derivadas.

El teorema crucial, de esa teoría rigurosa de derivadas, se refiere a los límites del cociente de diferencias, el cual se puede ver en [22, p.115] que empieza de la siguiente manera: si $f(x)$ es continua entre $x - x_0$, $x = X$, y si A es el mínimo de $f'(x)$ en ese intervalo mientras que

B es el máximo, entonces

$$A \leq \frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} \leq B$$

En su demostración, Cauchy tradujo su definición de derivada al lenguaje de las desigualdades $\varepsilon - \delta$ de la siguiente manera “Designar por δ y ε dos números muy pequeños; el primero se elige de tal manera que, para valores numéricos de i menores que δ , y para cualquier valor de x entre x_0 y X , la relación $[f(x+i) - f(x)]/i$ siempre permanece mayor que $f'(x) - \varepsilon$ y menor que $f'(x) + \varepsilon$ ”. Esta es la primera aparición, en la historia, de la notación $\varepsilon - \delta$.

De esta manera Cauchy expresó la propiedad crucial de la derivada en términos que cualquier matemático pudiera reconocer. El único inconveniente de esta traducción de la definición es que asumió que su δ funcionaría para todas las x en el intervalo dado. Sin embargo, el uso de la desigualdad para traducir la definición es uno de sus más grandes logros. Según Grabiner [22, p.115], Cauchy fue el primero en saber exactamente a qué se refería con “la derivada es el límite del cociente de diferencias infinitesimales”.

Con respecto a la derivada, los conceptos de límite, continuidad y convergencia, Cauchy separó la propiedad crucial $\varepsilon - \delta$ del conglomerado del trabajo anterior y explotó esa propiedad en sus demostraciones de teoremas.

Para la rigorización del cálculo diferencial, en especial la teoría y aplicaciones, Cauchy contó con el trabajo que había realizado anteriormente Lagrange, pues Lagrange fue el primero en aplicar la poderosa herramienta de las técnicas $\varepsilon - \delta$ al cálculo, pero donde Lagrange veía un método para realizar demostraciones, Cauchy veía la propiedad esencial de la definición de derivada, así que basó su trabajo en un conjunto lógicamente coherente de definiciones y usó sus propias teorías de límite y continuidad para realizar las demostraciones rigurosas.

Integral

El último concepto principal de la teoría de Cauchy, que se basa en el concepto de límite, es el de integral definida. Este concepto requiere para su comprensión de las definiciones que discutimos anteriormente. Cauchy, según Grabiner [22, p.140], definió la integral como “el límite de sumas”; donde la clave de su teoría es la demostración de la existencia de la integral definida de una función continua; y demostró, en lo que se conoce como *el teorema*

fundamental del cálculo que la integral era la inversa de la derivada.

Cauchy encontró relativamente pocos avances con respecto al trabajo realizado por sus predecesores, en lo que respecta a la integral definida. Antes de Cauchy, los matemáticos generalmente se habían limitado a elaborar los cimientos para el cálculo *diferencial*, pues consideraban que dado que la integral se enunciaba como la inversa de la derivada, entonces el cálculo diferencial se encargaría del concepto de integral. Así que el trabajo fuerte, relacionado tanto con las técnicas como con los conceptos, fueron realizadas por Cauchy. Cauchy regresa a la visión leibniziana de la integral como una suma, sin embargo necesitaba que esta noción fuera más precisa.

No fue suficiente decir que la integral definida es el límite de sumas, primero necesitaba especificar las sumas con precisión y después tenía que demostrar que el límite de las sumas existía, lo que sigue está tomado de Grabiner [22, pp.146-148].

Sea $f(x)$ una función continua respecto a la variable x en un intervalo comprendido por los límites x_0, X , se propone definir la integral definida

$$\int_{x_0}^X f(x)dx.$$

Cauchy comenzó dividiendo el intervalo $[x_0, X]$ en n (*no* necesariamente iguales) partes, obteniendo las diferencias $\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, X - x_{n-1}\}$. Multiplicó cada uno de estos “elementos” por el valor de f de su extremo izquierdo, para formar la suma:

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}). \quad (3.1)$$

Cauchy señaló que el valor de S obviamente depende tanto de n como del modo de división del intervalo. La pregunta crucial es si el modo particular de división ya no importa si el tamaño de los subintervalos se vuelve muy pequeño y n muy grande. Usando la continuidad de $f(x)$ (en lo que ahora llamamos continuidad uniforme), Cauchy pudo demostrar que el modo de división no importa, por lo que S tiene un límite único, que luego definió como la *integral definida*.

Para demostrar que el valor de la integral es independiente del modo de dividir el intervalo $[x_0, X]$, Cauchy comenzó eligiendo el caso más simple: solo hay un subintervalo, $[x_0, X]$. Al

construir una partición de este intervalo dado, Cauchy demostró que para alguna constante θ entre 0 y 1

$$S = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)]. \quad (3.2)$$

Volviendo ahora a (3.1), Cauchy aplicó la misma técnica aprovechada en (3.2) para cada una de las n partes o subintervalos $\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, X - x_{n-1}\}$. Obteniendo la suma:

$$\begin{aligned} S = & (x_1 - x_0)f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1)f[x_1 + \theta_1(X - x_0)] \\ & + \dots + (X - x_{n-1})f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ahora definió un conjunto de ε_k valores para $k = 0, 1, \dots, n - 1$ por

$$f(x_k - \theta_k(x_{k+1} - x_k)) = f(x_k) \pm \varepsilon_k$$

obteniendo, la siguiente suma:

$$S = (x_1 - x_0)[f(x_0) \pm \varepsilon_0] + (x_2 - x_1)[f(x_1) \pm \varepsilon_1] + \dots + (X - x_{n-1})[f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}] \quad (3.4)$$

Cauchy argumentó que si los subintervalos de longitud $x_k - x_{k-1}$ se toman lo suficientemente pequeños, entonces el ε_k se volverá “muy cercano a cero”, de modo que tomar una subpartición de la partición original no cambiará apreciablemente el valor de S dado por (3.1).

Cauchy observó que dados dos modos de división cuyas partes son muy pequeñas, siempre se puede construir un tercer modo de división que subdivida cada uno de los dos modos dados. El valor de S para esta nueva subdivisión es arbitrariamente cercano al valor de S para *cualquier* división anterior; y así, concluyó Cauchy, como los valores numéricos de los elementos $x_k - x_{k-1}$ se vuelven muy pequeños y n se hace muy grande, los diferentes valores de S , para los dos modos de división dados, difieren solo imperceptiblemente entre sí. Por lo tanto, “Si hacemos que los valores numéricos de estos elementos disminuyan mientras su número aumenta, el valor de S finalmente llega a ser, para todo propósito práctico, constante. O, en otras palabras, finalmente alcanza un cierto límite ...”. Retomando los aspectos anteriores, con respecto a la integral Grabiner [22, pp.147-148] menciona:

Aquí Cauchy asumió implícitamente la misma propiedad de los números reales que asumió al establecer el criterio para series: si los diversos valores de alguna expresión similar a S , como en el ejemplo anterior, o la enésima suma parcial de una serie, se acercan más y más

entre sí, entonces la expresión tiene un cierto límite. En este caso, observó Cauchy, el límite del valor de S depende solo de $f(x)$ y de los puntos finales x_0 y X del intervalo, y “este límite es lo que se llama una **Integral Definida**”.

Observe que Cauchy usó la noción de integral definida del siglo XVIII de una manera nueva y precisa. Primero demostró que existía el límite de las expresiones dadas por S ; solo entonces definió la integral como igual a ese límite. Reintrodujo la notación convencional, que atribuyó a Joseph Fourier (1768-1830),

$$\int_{x_0}^X f(x)dx$$

para la integral definida, pero recordó a sus lectores que con el símbolo $\int$ (una S establecida para *suma*) y la notación

$$\int f(x)dx,$$

“indica no una suma de productos ... sino el límite de una suma de ese tipo”.

El planteamiento de la integral definida de Cauchy, contó con algunos predecesores los cuales tenían las siguientes ideas:

1. aproximaciones de una integral por sumas;
2. discusiones detalladas de la diferencia entre las sumas aproximadas y el valor de la integral;
3. declaraciones de que las sumas aproximadas se acercan arbitrariamente a la integral para subdivisiones lo suficientemente pequeñas, independientemente del modo de partición;
4. argumentos de que existe un límite común para las sumas aproximadas sucesivas para subparticiones comunes suficientemente pequeñas.

Las obras de Euler y Lacroix incluyen las tres primeras características. El propio trabajo de Cauchy sobre su criterio de convergencia, incluye la cuarta característica, de modo que aquí Cauchy fue su propio predecesor.

3.2. Las Conferencias de Weierstrass de 1861

Aunque fue Cauchy quien dio a los conceptos del cálculo su forma general actual, basada en el concepto límite, no se había dicho la última palabra en cuanto al rigor. Karl Weierstrass (1815-1897) construyó una base aritmética puramente formal para el análisis, como rama

de las matemáticas, alejándose de algunas nociones relacionadas con el movimiento y la intuición geométrica.

3.2.1. Los Argumentos $\varepsilon - \delta$

Para Weierstrass era natural no confiar en la intuición, entonces trato de ser lo más riguroso posible en sus desarrollos matemáticos. Weierstrass no compiló los elementos del cálculo en una serie de tratados, como sí lo hizo Cauchy, sino que sus puntos de vista se conocieron gracias a sus estudiantes, quienes asistieron a sus conferencias y publicaron las notas de clase.

Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) tomó notas de estas conferencias que más adelante serían publicadas por Pierre Dugac (1926-2000) como *Éléments d'analyse de Karl Weierstrass* [16]. Dugac resaltó los nuevos aspectos relacionados con conceptos fundacionales en el análisis matemático, como son: función continua, derivada, una nueva definición moderna de infinitesimales y el concepto de límite en términos de $\varepsilon - \delta$.

Weierstrass inició sus conferencias definiendo lo que para él era magnitud variable, en su discurso empieza mencionando que a diferencia de una constante inmutable, la cual solo puede tomar un valor, una *magnitud variable* se refiere a que se puede tomar no solo valores individuales, sino un número infinito de ellos, donde estos valores pueden ser positivos o negativos, entonces pasa a llamarse variable ilimitada. Pero una magnitud variable también puede ser limitada y tener límites inferior o superior o ambos al mismo tiempo.

Al hacer la base del cálculo rigurosamente formal, Weierstrass también atacó la apelación a la intuición del movimiento continuo, implícito en la expresión de Cauchy: “una variable se acerca a un límite”. Desde Weierstrass las ideas de variable y límite involucran consideraciones permanentemente estáticas. Weierstrass interpretó una variable x como, simplemente, una letra que designa cualquier valor de una colección de números. Además una variable continua en términos de consideraciones estáticas: “si para cualquier valor x_0 del conjunto y para cualquier sucesión de números positivos $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, por pequeños que estos sean, hay en los intervalos $x_0 - \delta_i, x_0 + \delta_i$ otros elementos del conjunto, esto se llama continuo” [10, p.286].

Weierstrass dio la definición de una “función” utilizando la noción de correspondencia, esto quiere decir que una variable cambia, siempre y cuando lo haga la otra. Lo que lo llevó a la siguiente definición importante, que no apareció directamente en la teoría de Cauchy y que se pueden encontrar en Nakane [30, p.54]:

Si es posible determinar, para h , una cota δ , tal que para *todo* valor de h que en valor absoluto, sea menor que δ , $f(x+h) - f(x)$ llega a ser más pequeño que cualquier cantidad ε , por pequeña que ella sea, se dirá que una variación infinitamente pequeña del argumento corresponde a una variación infinitamente pequeña de la función.

En sus trabajos Weierstrass no definió *cambios infinitamente pequeños de variables* sino *cambios infinitamente pequeños de los argumentos* corresponden a cambios infinitamente pequeña de la función, los cuales se presentaron en términos de desigualdades $\varepsilon - \delta$. Weierstrass fundamentó su teoría en esta correspondencia, y dio paso a la definición de “función continua”:

Si ahora una función es tal que a cambios infinitamente pequeños del argumento corresponden cambios infinitamente pequeños de la función, entonces se dice que es una función continua del argumento, o que cambia continuamente con este argumento. [Traducción al Español de [30, p.54]]

Es decir, $f(x)$ es continua, dentro de ciertos límites de x , si para cualquier valor x_0 en este intervalo y para un número positivo arbitrariamente pequeño ε , es posible encontrar un intervalo alrededor de x_0 de tal manera que para todos los valores en este intervalo la diferencia $f(x) - f(x_0)$ es en valor absoluto menor que ε ; o, como Heine lo expresó según las conferencias de Weierstrass, si, dado un ε , se puede encontrar un η_0 tal que para $\eta < \eta_0$ la diferencia $f(x \pm \eta) - f(x)$ es menor, en valor absoluto, que ε [10, p.287].

Según Grabiner [22, p.14], el trabajo de Cauchy influyó en los principales analistas de mediados del siglo XIX de manera directa e indirecta a través de otros personajes. Como evidencia de la influencia de Cauchy, podemos notar el uso generalizado de sus métodos de prueba en trabajos posteriores como los de Weierstrass, donde se hace uso de la notación épsilon-delta que Cauchy introdujo.

Con respecto a las funciones continuas, tanto Cauchy como Bolzano, iniciaron su teoría de continuidad demostrando teoremas, como el del valor intermedio para las funciones continuas, el del valor medio para derivadas e integrales; y para probar la existencia de la integral definida para lo que Cauchy llamó una función continua. Esta teoría sería ampliada más adelante por Weierstrass y su escuela, realizando la distinción entre continuidad puntual y uniforme, dado que la definición de función continua en Cauchy era global [22, p.96-97].

Weierstrass usaba el concepto de “infinitamente pequeño” en sus conferencias. Solo hasta que dio su definición de derivada, Weierstrass en realidad continuaba usando el término “infinitésimamente pequeño” y a menudo escribía sobre “una función que se vuelve infinitamente pequeña con h ”. Sin embargo en sus desarrollos se pueden ver, varios ejemplos donde las cantidades “infinitésimamente pequeñas” involucran los términos $\varepsilon - \delta$. La definición continua es un ejemplo de esta relación. Se presume entonces, que en sus conferencias, Weierstrass utilizaba constantemente las desigualdades $\varepsilon - \delta$, a pesar que sus definiciones no fueron escritas directamente en términos de desigualdades.

3.2.2. La definición de límite

Ahora presentamos la definición de Weierstrass, de “límite de una función”, en términos de $\varepsilon - \delta$, que no fue publicada por Dugac, pero se encuentra en el trabajo de Stolz (1885):

El número L es el límite de la función $f(x)$ para $x = x_0$ si, dado cualquier número arbitrariamente pequeño ε , se puede encontrar otro número δ tal que para todos los valores de x que difieran de x_0 , en menos de δ , el valor de $f(x)$ diferirá del de L en menos de ε .

[Traducción al Español de [10, p.287]].

Esta expresión de la idea límite, así como las definiciones de Cauchy, de la derivada y la integral, proporcionaron las concepciones fundamentales del cálculo con una precisión que puede constituirse en formulaciones rigurosas de estos conceptos. Obsérvese que en la definición de límite planteada por Weierstrass, no hay referencia a los infinitesimales, de tal manera que la designación del “cálculo infinitesimal” que es usado hoy en día, resulta inapropiado. Aunque varios matemáticos, desde la época de Newton y Leibniz hasta Bolzano, habían tratado de evitar el uso de cantidades infinitamente pequeñas, puede considerarse que el simbolismo de Weierstrass elimina efectivamente del cálculo la noción persistente de

“infinitesimal” [10, p.287].

Weierstrass definió el concepto de límite para una función y también para una serie. Hay que recordar que hoy en día aplicamos el término “límite” no a variables como lo hizo Cauchy sino a funciones y series. Así, el origen de la definición moderna de límite apareció en este contexto.

3.3. Comentarios Finales

El trabajo de Cauchy estableció una nueva forma de ver los conceptos del cálculo. Como resultado, el tema se transformó de una colección de métodos poderosos y resultados útiles en una disciplina matemática basada en definiciones claras y demostraciones rigurosas. La definición de límite de Cauchy, y el método usado por él, están asociados a la notación de desigualdades y, en algunas interpretaciones, hace uso de la notación $\varepsilon - \delta$ para precisar los conceptos de continuidad, convergencia, derivada e integral. Y muchas de las consecuencias importantes de estas teorías en el estudio de la convergencia, las demostraciones de existencia para la solución de ecuaciones diferenciales y las propiedades de integrales definidas fueron pioneras del propio Cauchy. Él reunió, tanto definiciones como demostraciones de teoremas, en un solo sistema lógicamente conectado y lo hizo de forma rigurosa.

Con el trabajo de Cauchy y sus inicios en la formalización del análisis matemático, se empezó a consolidar una base puramente aritmética para la noción de continuo geométrico, que surge de los problemas relacionados con la medida de magnitudes, problema que había sido planteado por la antigüedad griega, y que gracias al cálculo diferencial e integral, alcanzaría un primer nivel de sistematicidad. En este sentido, según Arbeláez [2, p.19] “La instauración del análisis como rama autónoma de las matemáticas, finaliza con la formulación aritmética del continuo geométrico y el reconocimiento del concepto de límite como herramienta teórica que formaliza los procesos infinitos”. Para dar cuenta de lo anterior, basándose en los trabajos de sus predecesores, Cauchy reunió tres elementos que mencionamos a continuación:

1. los principales resultados del análisis, la mayoría de los cuales ahora podía probar;
2. algunos conceptos fructíferos y técnicas de álgebra (particularmente aproximaciones algebraicas) y análisis;

3. y el rigor y la estructura de prueba de la geometría griega.

Durante mucho tiempo, la geometría griega se había considerado el modelo de prueba y rigor para el álgebra, el cálculo y el análisis. Si los orígenes de las matemáticas modernas se remontan al Renacimiento, entonces el rigor y la estructura, características de la geometría griega, primero se convirtieron efectivamente en parte de las matemáticas modernas solo con el trabajo de Cauchy. Por supuesto, la idea de finales del siglo XIX de que las matemáticas son la ciencia de los sistemas lógicos abstractos en general está ausente del trabajo de Cauchy. Pero la rigorización del cálculo de Cauchy fue un primer paso indispensable en esa dirección.

Cauchy dejó algunos asuntos pendientes, pero hay poco en el análisis del siglo XIX que no esté marcado, directa o indirectamente, por sus ideas. La estructura lógica básica que erigió Cauchy proporciona el marco en el que todavía pensamos en el cálculo riguroso.

La mayoría de personajes que hemos venido mencionando en los capítulos 1 y 2 de esta investigación como, Newton, Leibniz, Bernoulli y Berkeley, influyeron de cierta manera en Cauchy. Pero Cauchy además de discusiones relacionadas con la filosofía; necesitaba de discusiones relacionadas con las matemáticas, y las matemáticas que necesitaba provenían del trabajo de los principales matemáticos del siglo XVIII, como son Euler, D'Alembert, y sobre todo Lagrange.

Cauchy pudo ver dónde nadie más había podido, cómo podrían usarse ideas que habían planteado los matemáticos del siglo XVIII, para construir un nuevo cálculo riguroso. No comenzó ni completó la rigorización del análisis, pero más que ningún otro matemático, fue responsable de la primera gran revolución en rigor matemático desde la época de los antiguos griegos.

A pesar del cuidado con el que trabajó Cauchy, hubo una serie de expresiones en su exposición que requirieron más explicaciones. Las expresiones:

- acercarse indefinidamente
- tan poco como se desee
- últimas proporciones de incrementos infinitamente pequeños

debían entenderse en términos del concepto de límite, pero surgieron dificultades que se habían planteado en el siglo anterior.

La idea misma de una variable que se acerca a un límite provocó vagas intuiciones de movimiento y la generación de cantidades. Además, en la presentación de Cauchy había ciertas brechas lógicas sutiles, como la omisión de una definición clara de la más fundamental de todas las nociones: “número”, que es absolutamente esencial para la definición de límites y, por lo tanto, para la de los conceptos del cálculo, en esta cuestión, la dificultad es esencialmente la de un círculo vicioso en la definición de números irracionales, que Weierstrass buscó resolver.

Según Gabriela Arbeláez [2, pp.96-97], es claro que, en principio, Weierstrass siguió los delineamientos de Cauchy, pero más adelante empezó a buscar no sólo el lenguaje adecuado, sino a debilitar las hipótesis de algunos de los teoremas y establecer la demostración correcta para aquellos resultados erróneos de Cauchy. Ella presenta, al menos, las siguientes diferencias generales entre el análisis de Cauchy y el de Weierstrass:

1. En Weierstrass aparece la noción de variable como soporte fundamental. De esta manera desaparecen expresiones como “tan cercano como se quiera” y se da paso a un álgebra de inequaciones a partir de la forma “ $\varepsilon - \delta$ ”.
2. Weierstrass implementó claramente las definiciones de ínfimo y supremo.
3. Weierstrass establece un tratamiento conjuntista ausente en la obra de Cauchy. Esto le permite clarificar e incorporar muchos aspectos topológicos de $\mathbb{R}$.
4. En el análisis de Weierstrass se da la exigencia de una definición precisa de números irracionales, lo cual trajo como consecuencia la supresión de los infinitesimales.
5. La técnica “ $\varepsilon - \delta$ ” permitió a Weierstrass establecer la diferencia entre continuidad y continuidad uniforme de una manera precisa. Cuestión que en Cauchy no se diferencia.

Además es importante mencionar que con Weierstrass se llega a un techo en nuestra investigación, pues se presenta la definición formal de límite en términos de $\varepsilon - \delta$, la cual subsume el concepto de infinito potencial que había sido planteado por Aristóteles y definido por Cauchy, escondiéndolo, sin permitir su visualización, dejando el concepto de límite de forma estática, tal como lo conocemos actualmente.

La noción de límite en relación con el infinito como obstáculo epistemológico

4.1. La noción de obstáculo epistemológico

Uno de los primeros teóricos en hablar sobre los obstáculos epistemológicos, fue el filósofo francés Gaston Bachelard, en su obra *La formación del espíritu científico*. En este libro, los obstáculos se encuentran enfocados en un contexto más de las ciencias experimentales y haciendo uso de la denominación “obstáculo epistemológico”, menciona que:

... hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. No se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad o la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar a la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discernimos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos. [7, p.15]

Bachelard menciona que la noción de obstáculo epistemológico “puede ser estudiada en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la práctica de la educación” [7, p.19]. Además, el papel del epistemólogo es seleccionar los documentos recogidos por el historiador y juzgarlos desde la razón. Y también que “Un hecho mal interpretado por una época, sigue siendo un *hecho* para el historiador. Según el epistemólogo es un obstáculo, un contrapensamiento” [7, p.20].

El epistemólogo tendrá que esforzarse en captar los conceptos científicos en efectivas síntesis psicológicas progresivas, estableciendo, respecto de cada noción, una escala de conceptos, mostrando cómo un concepto produce otro, cómo se vincula con otro. Entonces tendrá

cierta posibilidad de apreciar una eficacia epistemológica. Y de inmediato el pensamiento se presentará como una dificultad vencida, como un obstáculo superado.

Ahora presentaremos algunos obstáculos epistemológicos que desarrolló Bachelard en [7], de los cuales daremos su significado en términos generales.

- Bachelard plantea la “experiencia básica” como el conocimiento que se adquiere en los primeros años de aprendizaje, el cual está basado en libros de texto que presentan un conocimiento inmóvil, el cual es visto como verdad absoluta. Sin embargo, no se aprende directamente de la experiencia propia. El tomar un conocimiento como verdad absoluta, impide que el individuo tenga su mente abierta para adquirir nuevos conocimientos o conocimientos que contradigan lo aprendido, esta predisposición aleja al individuo del conocimiento verdadero.
- Para Bachelard el “conocimiento general” es un obstáculo que estanca el avance de conocimiento, pues en cuanto se toma un concepto como ley general, se anula la curiosidad, además del deseo de conocer más, pues ya todo está descubierto. Una ley es tan clara, tan completa, tan acabada en sí misma que no se siente ya la necesidad de estudiarla. El dar definiciones demasiado amplias para las cosas hace pasar por encima de los detalles de lo singular. El conocimiento general como obstáculo epistemológico consiste en la creación o modificación de conceptos, generalizando las leyes, sobre otros conceptos que han surgido fuera de la tradición histórica.
- El “obstáculo verbal”, es concebido como el uso inadecuado de palabras o de imágenes para explicar un concepto o teoría. Cuando un estudiante adquiere un conocimiento a través de un ejemplo simple, no podrá contrastarlo con la complejidad real del objeto quedándose con una explicación superficial. Es uno de los obstáculos más difíciles de superar, este obstáculo se presenta cuando se explica un concepto utilizando una sola cualidad o calificativo creyendo que la respuesta es tan evidente que no hay necesidad de explicarla más a fondo.
- El “conocimiento unitario y pragmático”. Exponer una teoría como perfecta y única porque es dada por un experto limita el pensamiento, se pueden construir estructuras mentales imposibles de romper, de modo que cuando se plantea la teoría de otro autor no es aceptada. Idealizar una teoría o crear falsas expectativas puede rayar en la perfección y puede crear obstáculos al adquirir otros conocimientos. Este obstáculo se presenta cuando se sobrevalora un tema.

- El “obstáculo sustancialista”, es uno de los más complejos que se dan en el proceso cognitivo, en el cual la sustancia se extiende a toda cualidad del objeto y esto puede ser contradictorio por sus diferentes características, puesto que la sustancia se juzga o se define por la sensación inmediata que percibamos de dicho objeto. Lo que se debe hacer para superar dicho obstáculo, es no reducir la sustancia a una sensación inmediata, sin elaborar un proceso analítico y racional que revele cualidades abstractas que se manifiesten en los diversos espacios en los que influye el fenómeno u objeto.
- El “obstáculo animista”, da mayor importancia a los contenidos que tengan de por medio la vida o todo lo que se relacione con ella, realizar ejemplos utilizando la naturaleza para explicarse o utilizar los fenómenos biológicos, como explicación de los fenómenos físicos incurrir en el obstáculo animista. Otorgarle alma a ciertos objetos a la hora de adquirir nuevos conocimientos, no es erróneo solo que se debe relacionar adecuadamente el concepto con la imagen, es decir la imagen debe permitir crear las conexiones cognitivas apropiadas para traducir el concepto apropiado.
- Con relación a los “obstáculos del conocimiento cuantitativo”, se plantean dos métodos para la investigación de un tema, el descriptivo y el cuantitativo, quienes incurrir en este obstáculo toman el método descriptivo como falaz ya que es subjetivo y aporta errores en la descripción, se tiene la concepción que lo objetivo es todo lo que se pueda contar, lo cuantitativo se preocupa por la precisión, esto puede producir un exceso de datos haciendo perder la perspectiva.

Estos obstáculos, han perdurado durante mucho tiempo. Es probable que tengan su equivalente en el pensamiento del niño. Aunque el entorno cultural y material actual ha cambiado indudablemente las condiciones en que los niños presentan estos obstáculos.

4.2. Obstáculos epistemológicos en educación matemática

El concepto de obstáculo epistemológico en el campo de la Didáctica de las matemáticas fue abordado por Brousseau en [11], quien basado en las concepciones de Bachelard, muestra que los errores que cometen los estudiantes, a la hora de resolver un problema, están formados por obstáculos, tanto en el funcionamiento del profesor como en el del alumno, donde el error constituye el significado del conocimiento adquirido. En este sentido Brousseau menciona que sus investigaciones van encaminadas a examinar cuestiones de los obstáculos relacionados

con problemas didácticos.

En relación a la noción de obstáculos epistemológicos, [11, p.105] menciona que:

El mecanismo de adquisición de conocimiento¹ descrito anteriormente puede aplicarse a la epistemología o la historia de la ciencia, así como al aprendizaje y la enseñanza. En cualquier caso, la noción de obstáculo parece fundamental para plantear el problema del conocimiento científico.

Según Brousseau, él todavía no puede proporcionar una lista de obstáculos tan simple como la de Bachelard, pero sí da surgimiento a líneas amplias, así como a clases de obstáculos; sin embargo, dice:

La noción de obstáculo en sí misma se está formando y diversificando: no es fácil decir generalidades relevantes sobre este tema, mejor hacerlo caso por caso. Además, del trabajo de identificar y describir los principales obstáculos para la constitución de conceptos, se están desarrollando estudios sobre las características operativas del conocimiento, tanto como soporte y tanto como obstáculo. [Traducción al español de [11, p.105]].

La noción de obstáculo tiende a extenderse fuera del estricto campo de la epistemología, a la didáctica, la psicología, la psicofisiología, etc. Brousseau presenta en [11, pp.105-107], algunas manifestaciones de obstáculos en la didáctica de las matemáticas, que podemos ver a continuación:

- Un obstáculo se manifiesta por errores, pero estos errores no se deben al azar, los obstáculos no son fugaces, ni erráticos, son reproducibles y persistentes.
- El obstáculo se constituye como un conocimiento, con objetos, relaciones, métodos de aprehensión, pronósticos con evidencias, consecuencias olvidadas, ramificaciones y resistencia al rechazo. Para superar un obstáculo se requiere un trabajo de la misma naturaleza que el establecimiento del conocimiento, que es rechazado; se requiere de interacciones dialécticas entre el estudiante y el objeto de su conocimiento.
- El conocimiento ayuda a superar un obstáculo, esto se logra, en una interacción entre el alumno y su entorno y, más precisamente, entre el alumno y una situación que hace que

¹Este mecanismo se refiere a la adquisición de conocimiento y a su aprehensión desde un punto de vista cognitivo.

el conocimiento sea “interesante”, significa que sea “óptimo” en un determinado campo, definido por características numéricas “informativas” de este conocimiento.

Brousseau en [11, pp.108] presenta el origen de los diversos obstáculos didácticos, donde la noción de obstáculo epistemológico tiende a reemplazar el error de enseñanza o la dificultad intrínseca del conocimiento. En este sentido, se encuentran obstáculos didácticos de origen:

1. Ontogénico: son aquellos que surgen debido a las limitaciones (neurofisiológicas, entre otras) del sujeto que desarrolla el conocimiento en un momento de su desarrollo: se apropian de sus medios y objetivos. La epistemología genética destaca las etapas, las observaciones y las asimilaciones, que al mismo tiempo se asemejan a las etapas del desarrollo de los conceptos por las leyes de los reglamentos que los hacen aparecer, y difieren de ellos por la naturaleza exacta de las limitaciones que determinan estos reglamentos.
2. Didáctico: son aquellos que parecen depender solo de una elección o un proyecto del sistema educativo. Por ejemplo, la presentación actual de decimales en el nivel elemental es el resultado de una larga evolución en el marco de una elección didáctica hecha por los enciclopedistas y luego por la convención.
3. Epistemológico: son aquellos de los que uno no puede, y no debe escapar, por el hecho mismo de su papel constitutivo en el conocimiento específico. Se pueden encontrar en la historia de los mismos conceptos. Esto no significa que debemos amplificar su efecto o que debemos reproducir en un entorno escolar las condiciones históricas en las que los hemos superado.

Con respecto a la anterior clasificación, en este trabajo, estamos interesados en lo epistemológico, lo cual podemos encontrar en el desarrollo histórico del saber matemático. Estos obstáculos no siempre se van a reproducir en el medio escolar, pues no se dan las mismas condiciones históricas para los estudiantes.

4.3. Obstáculos epistemológicos relacionados con la noción de límite

La investigación realizada por Anna Sierpinska en [34] se sitúa dentro de la línea de investigaciones indicadas en [11], centrando su atención en el caso particular de la noción de

límite, donde se propone una lista de obstáculos relativos a esta noción. Sierpinska quien se basa además en [7], menciona que la aparición de los obstáculos tiene un carácter inevitable y señala también que no tiene sentido tratar de evitar obstáculos; debemos enfrentar el obstáculo, tomar conciencia de él y luego rebasarlo para avanzar en el desarrollo de nuestro conocimiento. En este sentido Sierpinska [34, pp.8-9], menciona que

Es en este sentido que como parte de nuestra investigación la historia desempeña el papel de una herramienta. Sin embargo, el estudio histórico no procede paralelamente al estudio experimental. Estos dos estudios están en interacción. Por un lado, es de esperar que el conocimiento de las condiciones históricas, bajo las cuales un obstáculo ha sido reconocido y luego cruzado, nos ayudará a comprender las fuentes y la naturaleza de un obstáculo similar descubierto en los estudiantes. Por otro lado, es posible que el descubrimiento y el análisis de los obstáculos o dificultades, encontradas en el estudiante de hoy, puedan arrojar algo de luz sobre los puntos de vista adoptados por los matemáticos del pasado.

A partir del estudio del desarrollo histórico de la noción de límite que presentamos en los capítulos anteriores, creemos que podemos proponer una lista de obstáculos relacionados con la noción de límite, que también se puede encontrar en [34, p.38], estos son:

1. Horror al Infinito.
2. Obstáculos relacionados con la noción de función.
3. Obstáculos geométricos.
4. Obstáculos lógicos.
5. El obstáculo del símbolo.

Esta lista y la clasificación correspondiente se presentan a continuación. Es de resaltar que en este trabajo estamos interesados principalmente en obstáculos relacionados con lo que se ha denominado el horror al infinito.

4.3.1. Horror al Infinito

Según Sierpinska [34, p.39] la expresión *Horror al Infinito* hace referencia a Georg Cantor (1845-1918), cuando este decía: “el horror del infinito es como una forma de miopía que nos impide ver el infinito real, aunque en su forma superior este infinito nos creó y nos mantiene, y en sus formas secundarias transformadas se manifiesta por todas partes de nosotros, y llega

a habitar nuestras mentes”. En Sierpinska [34, p.39], se encuentra una clasificación más detallada del obstáculo denominado “horror al infinito” en el siguiente sentido:

- a) Rechazo a la operación matemática de paso al límite.
- b) Obstáculo de tipo algebraico.
- c) Límite relacionado con un movimiento físico.

Presentamos a continuación cada uno de estos ítems, para los cuales nos basamos en la siguiente rejilla que se puede ver en la Figura (4.1)². Para su elaboración tuvimos en cuenta varios factores como el desarrollo histórico que realizamos en esta investigación, la clasificación de los obstáculos presentados en [34] y la rejilla de análisis que presenta Arbeláez en [2].

Autor	a) Infinitesimales b) Indivisibles	Método - Heurística	Límite	a) Infinito Potencial b) Infinito Actual	a) Rechazo a la operación matemática de paso al límite. b) Obstáculo de tipo algebraico. c) Límite relacionado con un movimiento físico.
Euclides - Arquímedes	a)	Exhaustivo	Proposición X.I. de los <i>Elementos</i> .	a)	a)
Kepler	a)	Aproximación	-	a)	a)
Cavalieri	b)	Indivisibles	-	b) → a)	a)
Wallis	b) → a)	Aritmético del infinito	Sucesiones de números.	b)	b)
Newton	a) → Cantidades relacionas con el movimiento	Fluxiones	Razones primeras y últimas de cantidades evanescentes.	b)	c)
Leibniz	a) → Diferenciales	Sumas y Diferencias	-	b)	-
Euler	Rechaza a)	Algorítmico	-	-	b)
D'Alembert	-	Geométrico	Teoría de límites como fundamento del cálculo.	-	c)
Cauchy	Formaliza a)	Analítico	Definición formal.	Formaliza a) → b)	c)

Figura 4.1. Rejilla de análisis del obstáculo epistemológico: Horror al Infinito

²En esta tabla, la columna 4 se centra en la aparición de la noción del concepto de límite en las diferentes proposiciones, teorías o métodos trabajados y la columna 5 hace mención al tipo de infinito ya sea potencial o actual, con el cual trabajan los diferentes personajes.

Rechazo a la operación matemática de paso al límite

Según Sierpinski [34, p.39], el “paso al límite” se puede ver como un método de demostración que sigue un esquema riguroso, que elimina el problema del infinito. Podemos evidenciar manifestaciones de este obstáculo, en el *método exhaustivo*, el cual es utilizado por Arquímedes para realizar la cuadratura del círculo y la cuadratura de la parábola, ver [4] y [5], el cual se encuentra apoyado en los hallazgos de intuición, y reducción al absurdo; donde se tiende a considerar al círculo como el límite de los polígonos inscritos (o circunscritos), donde el número de lados se incrementa indefinidamente, en un sentido potencial. En este sentido, el método exhaustivo de los griegos es un método deductivo y riguroso, con el cual se evade el infinito, gracias al uso de la proposición X.1 de los *Elementos* de Euclides y del método de demostración denominado “reducción al absurdo”.

En el método utilizado por Kepler, el paso al límite se considera como la búsqueda de lo que sabemos sólo mediante aproximaciones. Tanto en el cálculo del área de un círculo, donde sus infinitesimales son triángulos, como en el caso de una esfera donde sus infinitesimales son conos; se supone que se trata un número infinito en el sentido potencial de términos de una sucesión, cuando en realidad este número es finito, y son los infinitesimales quienes constituyen las aproximaciones, que forman el objeto en sí, es decir el círculo y la esfera. Para dar este paso, se elimina casi todos los términos que siguen a continuación, es decir el proceso infinito, obteniendo el resultado deseado [34, p.44].

En la filosofía griega, Demócrito afirmaba que los cuerpos físicos, están constituidos en última instancia por átomos indivisibles; por el contrario Aristóteles pensaba que lo continuo puede ser dividido ilimitadamente únicamente en elementos de la misma naturaleza y esto conlleva a que sería imposible dividirlo en elementos indivisibles, por lo que desde el punto de vista aristotélico, una superficie plana acotada no puede estar constituida de lo que Cavalieri llama “todas las líneas”. Aunque pareciera que Cavalieri se inclinara más por el pensamiento atomista, debido a sus indivisibles, al parecer tenía una posición según Rodríguez y Sandoval [33, p.23], ambivalente, en la que sostiene que los indivisibles no constituyen el continuo y también considera que son una herramienta para realizar el cálculo de las cuadraturas. Las paradojas de Zenón estuvieron relacionadas a la aplicación de procesos infinitos en geometría. Debido a la incapacidad de los geómetras griegos de

responder claramente, ellos dejaron por fuera de las matemáticas el uso de métodos que involucra el concepto de infinito e hicieron del *horror del infinito*, parte de la tradición matemática griega [29, p.34].

En el método de fluentes y fluxiones de Newton, se considera a un incremento infinitesimal como una cantidad infinitamente pequeña distinta de cero, esto al compararla con una cantidad denominada momento [37, p.35], que más adelante será criticada por Berkeley por obedecer a cuestiones metafísicas. En el método de sumas y diferencias de Leibniz, considera “los diferenciales” como cantidades infinitamente pequeñas tal que cuando se busque su razón no puedan ser consideradas iguales a cero [27, p.32].

Obstáculo de tipo algebraico

Wallis en su método aritmético del infinito, da un paso trascendente que va desde los indivisibles a los infinitesimales e introduce el símbolo para el infinito como “ ∞ ” e infinitamente pequeñas como “ $\frac{1}{\infty}$ ”. Wallis, realiza la transferencia automática de métodos de álgebra para manipular cantidades finitas a magnitudes infinitas, en este sentido, en la siguiente cita, se puede observar el tratamiento que les da: “ $\infty \cdot A \cdot B \cdot \frac{1}{2 \cdot \infty} = \frac{A \cdot B}{2}$ ” [34, p.47] donde se encuentra un síntoma de este obstáculo epistemológico, del tipo algebraico. Podemos observar que el lenguaje algebraico de esta cita, tomado literalmente, va en contra de la lógica matemática.

En el caso de Euler, se basa en una posición formal deliberada y se limita menos en la justificación de sus procedimientos algorítmicos, dado que él no está interesado en fundamentar su teoría. Sus puntos de vista y tratamientos a los procesos infinitesimales eran similares a los de Wallis. Euler consideraba que las cantidades infinitamente pequeñas eran casi cero además de ser el recíproco de una infinitamente grande. En este sentido rechaza los infinitesimales y por su tratamiento en las series de procesos infinitos cae en el obstáculo epistemológico relacionado con el álgebra.

Límite relacionado con un movimiento físico

El obstáculo consiste en asociar el paso al límite con un movimiento físico, un acercamiento: “nos estamos acercando indefinidamente” o “nos estamos acercando cada vez más”, como

sucede con Newton, D'Alembert y Cauchy. Mientras que para un “acercamiento ilimitado” el infinito potencial es suficiente; para la noción de límite en la teoría formal de Weierstrass, diseñada de forma “estática”, se requiere que consideremos todos los términos de una sucesión, en otras palabras, requiere la existencia de un conjunto infinito, cabe resaltar que la definición planteada por Weierstrass es en cierto sentido, la definición de límite que conocemos actualmente en la cual ya existen unas nociones más claras de lo que sería: número real, continuidad e infinito actual.

Cuando se planteó la definición de límite por parte Cauchy y Weierstrass, en los años 1821 y 1885 respectivamente, aún no se tenía claro el concepto de infinito actual, no podemos negar que había algunas ideas por parte de J. Bernoulli o Bolzano, pero no estaba del todo claro como lo presenta Georg Cantor en el año 1873. Después de los trabajos de Cantor es posible tomar todo el conjunto de números reales en un sentido actual, pero mientras lo anterior no suceda, hasta que no haya una instauración del infinito actual, el infinito en el concepto de límite de Cauchy y Weierstrass es un acercamiento potencial.

Newton considera el método de fluxiones, donde presenta la noción de límite como una cantidad (cociente) a la cual una razón de cantidades en movimiento se aproxima continuamente, más que cualquier diferencia dada, lo cual está guiado por las nociones de la física como movimiento. En su trabajo sus nociones son las fluxiones y fluentes las cuales varían con el tiempo.

Tomando las ideas de Newton, D'Alembert trató seriamente de comprender los fundamentos del cálculo mediante su teoría de límites, bajo los términos de indefinidamente grande e indefinidamente pequeño; lo que lo llevó a plantear la definición de límite entre dos magnitudes donde: “la segunda puede acercarse más a la primera que a una magnitud dada, tan pequeña como esa magnitud [dada] puede suponerse” [22, p.8]. Sin embargo, debido a su apego a las nociones geométricas, la elaboración de D'Alembert del concepto de límite carecía del rigor claro, necesario para hacerla aceptable como un sustituto de la interpretación infinitesimal.

Cauchy fue el primero en incorporar una definición formal de límite en [15, p.6] al mencionar que “una variable particular, se aproxima indefinidamente a un valor fijo, de tal manera que acaban por diferir de él tan poco como queramos”. Cauchy entiende que debe relacionar las nociones de límite e infinito. Su trabajo de fundamentación del análisis matemático debe pasar por incorporar definiciones para lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande. Sin embargo en su definición de límite, la expresión “aproximarse indefinidamente”, aún guarda reminiscencias con el movimiento. Cauchy en su presentación de lo infinitamente pequeño, cuando habla de valores numéricos que disminuyen indefinidamente, no sólo se está refiriendo a variaciones discretas, sino también a variaciones continuas. A través de esta noción, Cauchy logra dar los primeros pasos en la formalización del infinito potencial [2, p.54] y abona el terreno para el tratamiento del infinito actual en matemáticas, por ejemplo al considerar las sucesiones $\left[\frac{1}{n}\right]$ la cual es un infinitesimal y la sucesión $[n]$ la cual es una cantidad infinitamente grande, Cauchy establece una operatividad entre ellos, en ese aspecto hay una prefiguración del infinito actual.

4.3.2. Otro tipo de obstáculos epistemológicos

El concepto de límite tiene algunas otras problemáticas fuertes, existen otro tipo de obstáculos epistemológicos que no son necesariamente de tipo histórico sino también didáctico, los cuales serán mencionados de manera general a continuación:

- Obstáculos relacionados con el concepto de función. La aparición del concepto general de función fue un momento decisivo que permitió, en el siglo XIX, una formulación clara de la palabra límite, liberada de las intuiciones geométricas y físicas. En las etapas que constituyen la rigorización de la definición de límite, vemos aparecer cada vez más claramente la noción de función, como es el caso de D’Alembert, Cauchy y Weierstrass, lo cual se puede rastrear en cierta medida en [32, pp.268-269]. Un ejemplo de este obstáculo según Sierpiska [34, p.50] tiene que ver con la dificultad para identificar el dominio o condominio de la función y, si la función está dada por una fórmula del tipo $y = f(x)$, entonces la atención se centra en esta fórmula y los conjuntos de valores de x e y permanecen en la sombra.
- Diseño geométrico del concepto de límite. El diseño del círculo como límite de los polígonos inscritos o circunscritos sería uno de los síntomas de este obstáculo: cuanto mayor es el número de lados, más se acerca la forma del polígono a la forma del círculo. Además, una

idea de tangente como límite de la secante variable, donde decimos que en cierto momento la posición de la secante difiere tan poco como queramos de la posición de la tangente, es otro síntoma de este obstáculo. Las fuentes del obstáculo “geométrico” son la falta de un concepto bien formado de número real; en este sentido para Sierpinska [34, p.53] la noción del número real se vuelve clara solo después de haber entendido la noción de límite. No se puede decir si la noción de límite se especificó en el siglo XIX por la definición del número real, o, por el contrario, una definición precisa de la noción de número era posible porque se había entendido la noción de límite y se quería extender el conjunto de números.

- Obstáculos lógicos. Corresponde a la falta de uso de los cuantificadores, al no tener en cuenta que estos no se deben conmutar, a no tener en cuenta su orden. La falta de cuantificadores es un obstáculo para definir la noción de límite, cuando usamos un lenguaje natural y no simbólico. En el lenguaje natural no prestamos mucha atención al orden de las palabras y las sutiles diferencias que se derivan de ese lenguaje.
- El obstáculo del símbolo. El símbolo fue introducido por Simón L’Huillier y más adelante por Cauchy en [15, p.26]. Cauchy se vio obligado a dar un símbolo de límite lo que favorece la operatividad del cálculo de límites de funciones y sucesiones, y así estableció la noción base de los conceptos de derivada, continuidad e integral. Inicialmente, la simbología en el álgebra había sido planteada por Vieta y en ese mismo sentido lo estableció Cauchy, quien al plantear su simbología en el cálculo, esta presentaba similitudes con la del álgebra, lo que oculta las diferencias entre estas dos ramas de las matemáticas y puede conducir a una pérdida de significado del concepto de límite.

Sin embargo Sierpinska [34, p.57] menciona que los obstáculos epistemológicos relacionados a la noción de límite, no son definitivos o exhaustivos. Pues la interacción de la enseñanza con un estudio histórico y filosófico de los problemas relacionados con el infinito, resulta especialmente en un cuestionamiento de su lista, su modificación y una profundización. Además, menciona que la manifestación conjunta de muchos obstáculos epistemológicos encontrados en la historia y en los alumnos, son justificación seria, para establecer cursos de historia del desarrollo de conceptos matemáticos, para la formación de profesores.

El trabajo de B. Cornu (1983) citado por [34, pp.62-63] permite discutir más a fondo los obstáculos para aprender la noción de límite. En este sentido presenta una lista que podemos ver a continuación:

1. Transposición numérica. Es un obstáculo relacionado con la “dificultad de separarse del contexto geométrico y cinemático, para trabajar no en las magnitudes, sino en los números”.
2. Aspecto metafísico. Donde la noción de límite está ligada al infinito. El infinito no entró en el dominio de las matemáticas clásicas y es por eso que este concepto, así como el concepto de límite parecía pertenecer más bien a la metafísica o la filosofía de las matemáticas. De ahí la tendencia a evacuar el infinito del razonamiento matemático, una tendencia que todavía está presente en el trabajo de D’Alembert.
3. Los conceptos de magnitud “infinitamente pequeño” e “infinitamente grande”.
4. ¿El límite es alcanzado o no? (Esta pregunta es, según el autor, “una fuente de obstáculos”, pero no especifica cuáles.

Sierpinska menciona en [34, p.64] que en el segundo obstáculo de B. Cornu corresponde a todo el grupo de obstáculos denominado como “horror al infinito”. Es el grupo más importante, contiene los problemas relacionados con la idea de una constante infinitamente pequeña, la cuestión de si el límite debe o no debe ser alcanzado.

4.3.3. Infinito actual, en la definición de límite, como obstáculo epistemológico

En la historia de las matemáticas, la noción de límite de una sucesión se puede encontrar cuando se realiza la cuadratura de un círculo o una parábola mediante una sucesión de polígonos inscritos y circunscritos. Siendo esta la idea primigenia de lo que más tardes sería formalizado por Cauchy, quien además de presentar la definición de límite en un lenguaje natural, también formaliza el concepto de infinito potencial.

Otro obstáculo epistemológico para tener en cuenta, tiene que ver con la idea de que lo que está formalizando la definición de límite planteada por Cauchy es el infinito actual; sin embargo, existe la posibilidad de que esa idea cobra fuerza, cuando se tome en cuenta la definición de límite que conocemos modernamente, donde no hay un movimiento de la variable, dado que se tiene en cuenta el conjunto infinito de los números reales. El concepto de límite en términos actuales encapsula los procesos infinitos, presentándolos de forma estática, sin permitir su visualización.

La definición de límite planteada por Weierstrass, es la definición moderna de límite, aquella que se encuentra libre de expresiones que apelan a intuiciones geométricas, siendo un resultado de su programa el cual se centraba en la aritmetización del análisis, donde se da significado a la expresión “número real”. Weierstrass corrigió el aspecto relacionado con el movimiento que presentaba la definición de límite planteada por Cauchy, al definir el concepto de límite de forma estática, desde un punto de vista más formal, desde un punto de vista aritmético.

4.4. Algunos ejemplos

A continuación se presentan algunos ejemplos de cálculo de límites, en los cuales pueden percibir algunos de los obstáculos epistemológicos antes mencionados.

4.4.1. Ejemplos

Ejemplo 1

Demostrar que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

no existe.

Demostración: Por reducción al absurdo. Supongamos que existe un $A \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = A$$

Por la definición de límite tenemos que: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tal que:

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) - A \right| < \varepsilon$$

Para A , se debe cumplir que $|A| \leq 1$. Pues si $|A| > 1$, entonces $|A| - 1 > 0$, por lo que podemos elegir un ε , tal que:

$$0 < \varepsilon < (|A| - 1)$$

Pero como $|f(x)| \leq 1$, tenemos:

$$|f(x) - A| = |A - f(x)| \geq |A| - |f(x)| \geq |A| - 1 > \varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(x) - A| > \varepsilon \quad (\rightarrow \leftarrow)$$

Por lo que $|A| \leq 1$.

Ahora con $|A| \leq 1$, elegimos un $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$. Para obtener la contradicción debemos demostrar que no existe un $\delta > 0$, tal que:

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) - A \right| < \frac{1}{2} \quad (4.1)$$

Por la propiedad Arquimediana, para $x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}^+$, tal que:

$$0 < \frac{2}{n\pi} < |x| < \delta$$

Donde $y = \frac{2}{\pi}$. La propiedad Arquimediana nos garantiza un número entero, se mantendrá para cualquier número entero más grande, por lo que podemos elegir uno con la propiedad de ser $n = 4p - 3, p \in \mathbb{Z}^+$. Pero:

$$0 < \frac{2}{n\pi} < |x| < \delta \Rightarrow 0 < \frac{2}{(n+2)\pi} < |x| < \delta$$

Entonces a partir de la definición de $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ y $n = 4p - 3$, tenemos que:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{n\pi}\right) &= \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1 \\ f\left(\frac{2}{(n+2)\pi}\right) &= \sin\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) = -1 \end{aligned}$$

Pero entonces:

$$\left| f\left(\frac{2}{n\pi}\right) - A \right| < \frac{1}{2} \Rightarrow |1 - A| < \frac{1}{2} \quad (4.2)$$

Lo cual satisface (4.1), tomando en cuenta (4.2) y $|A| \leq 1$, tenemos que:

$$\frac{1}{2} < A < 1 \Rightarrow -2 < -1 - A < \frac{-3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2} < -1 - A < 2 \quad (4.3)$$

Además:

$$\left| f\left(\frac{2}{(n+2)\pi}\right) - A \right| = |-1 - A|$$

Y por (4.3) tenemos que

$$\left| f\left(\frac{2}{(n+2)\pi}\right) - A \right| > \frac{1}{2} \quad (\rightarrow \leftarrow)$$

Lo cual contradice la definición de límite que se estableció en (4.1), por lo cual podemos afirmar que no puede haber un $A \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = A.$$

Ejemplo 2

Demostrar que el

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1,$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 2 \\ 0, & x = 2 \end{cases}$$

Demostración: Podemos observar que la función $f(x) = 1$ (ver Figura 4.2), es discontinua

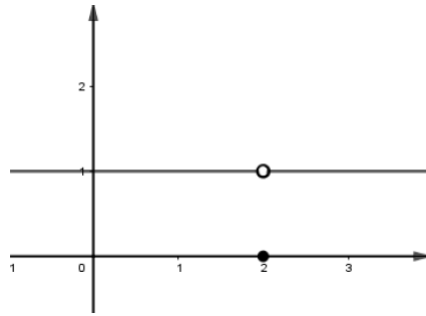


Figura 4.2. El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 2.

en el punto $x = 2$. Al calcular el límite de esta función en el punto $x = 2$, se hace un análisis lateral tanto por izquierda como por derecha, encontrando que el límite será el mismo ya que las imágenes laterales siempre van a tomar el valor de 1. Es decir, que en esta función sus límites laterales coinciden, entonces el límite existe y es 1.

Por definición de límite, tenemos que para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que

$$|x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < \varepsilon \quad (4.4)$$

Es decir que para todo $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que si $x \in (2 - \delta, 2 + \delta)$, $x \neq 2$, entonces $f(x) \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$. Observemos que si x es tal que $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $f(x) = 1$, luego $|f(x) - 1| = 0$.

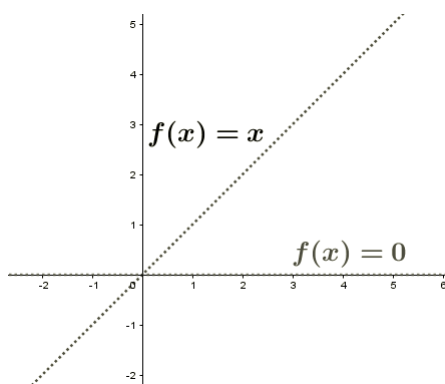
Del resultado anterior y de la definición de límite, tenemos que, la desigualdad de (4.4), siempre se cumple para todo $\varepsilon > 0$, además se puede observar que no hay ninguna dependencia del delta, pues delta puede tomar cualquier valor, y siempre se va a cumplir la implicación de la definición de límite.

Ejemplo 3

En este ejemplo el estudiante puede pensar que la función es discontinua en todo punto. Este obstáculo, está relacionado con la noción de función, pues al creer que la función es discontinua en todo punto, entonces no existiría el límite en ninguno de ellos. Sea:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ x & \text{si } x \text{ es racional} \end{cases}$$

cuya gráfica es:



Si se sugiere la pregunta ¿Existe el límite de la función en el punto $x = 0$? Entonces: ¿Cuál será la respuesta de los estudiantes?

Haciendo uso de la definición, se demuestra que:

1. Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |0 - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow 0 < \varepsilon \quad (4.5)$$

Como $0 < \varepsilon$ es una verdad, el enunciado (4.5) se cumple para cualquier $\delta > 0$. En particular, para $\delta = \varepsilon$, se tiene:

$$0 < |x - 0| < \delta \rightarrow 0 < \delta \rightarrow 0 < \varepsilon \rightarrow |0| < \varepsilon \rightarrow |0 - 0| < \varepsilon \text{ (ya que } \delta = \varepsilon \text{)}$$

Así, se ha establecido que si $\delta = \varepsilon$, el siguiente enunciado se cumple:

$$\text{si } 0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |0 - 0| < \varepsilon$$

El razonamiento anterior demuestra que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0, \text{ si } x \in \mathbb{I}$$

2. Para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |x - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow 0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |x| < \varepsilon$$

El último enunciado indica que es adecuado tomar $\delta = \varepsilon$. Con esta elección de δ se establece el siguiente argumento:

$$0 < |x - 0| < \delta \rightarrow |x| < \delta \rightarrow |x| < \varepsilon \rightarrow |x - 0| < \varepsilon \text{ (ya que } \delta = \varepsilon \text{)}$$

Así, se ha establecido que si $\delta = \varepsilon$, el siguiente enunciado se cumple:

$$\text{si } 0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |x - 0| < \varepsilon$$

El razonamiento anterior demuestra que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0, \text{ si } x \in \mathbb{Q}$$

4.4.2. Discusión acerca de los ejemplos

Para dar solución a estos ejemplos, se parte de la definición formal de límite, sin embargo se utiliza una noción intuitiva para conocer la existencia del límite, esta noción intuitiva corresponde a el infinito potencial, relacionado al obstáculo epistemológico “Horror al infinito” que tiene que ver con entender el límite como un movimiento físico, este es un obstáculo dado que, no hay un movimiento, es decir no nos acercamos al valor c , sino que se toma valores cercanos a c dado que estos ejemplos en especial el 1 y 2 se encuentran en el conjunto de los números reales.

En el caso del ejemplo 3, el cual se desarrolla en dos conjuntos, los cuales son densos e infinitos, sucede de igual manera, el obstáculo de movimiento físico, sigue presente. Dado que en la modernidad se entienden las propiedades del infinito, en estos ejemplos no se da cuenta del obstáculo relacionado con el álgebra.

El obstáculo relacionado con la aceptación del infinito actual en la definición de límite se presenta en el ejemplo 3, donde al tomar valores cercanos a 0, se obtiene como límite en ambos conjuntos a este valor, sin embargo es la toma de valores y la definición de límite lo que nos permite tomar el valor 0, mas no se llega a él, como sucede también en el ejemplo 2.

Comentarios Finales

En este trabajo se sustenta la tesis, según la cual, la noción de infinito potencial planteada por Aristóteles se formaliza a través del concepto de límite en Cauchy. Para dar cuenta de ello, se presenta un desarrollo histórico a través de diferentes personajes, técnicas, métodos y teorías, las cuales se consideran relevantes para el desarrollo del presente trabajo de grado.

De este modo, la idea de infinito potencial aristotélica fue heredada por Euclides quien, en los *Elementos*, incorpora un método formal para hacer matemáticas; sin embargo, no hay una formalización de un objeto matemático que acoja el infinito potencial, no hay un formalismo para involucrar el infinito potencial en la matemática griega; sino una tradición de la concepción filosófica de que en matemáticas se trabaja con el infinito potencial, lo cual se puede evidenciar en Euclides, con el uso de expresiones como: “se extiende indefinidamente”, o “se puede adicionar tanto como se quiera”, o “se puede dividir tanto como se quiera”.

Desde la filosofía surgen las siguientes preguntas: ¿Qué es el infinito? y con respecto a esto ¿Es una cantidad? y si lo es, ¿Es infinitamente pequeña o infinitamente grande? En respuesta a esto, Aristóteles menciona que existen dos tipos de infinito, el potencial y el *actual*. Además, menciona que en matemáticas no hay cantidades infinitamente pequeñas, ni infinitamente grandes en el sentido *actual*; este tipo de infinito tiene validez en la filosofía. Es decir, que para Aristóteles no existen niveles de infinito, no tiene sentido hablar de un infinito más grande que otro; de sumar un infinito con otro para obtener algo de la misma naturaleza. Por ello el infinito actual existe, pero no tiene sentido en las matemáticas griegas. La aritmetización del infinito se establece en matemáticas, sólo hacia finales del siglo XIX,

con los trabajos de Cantor sobre los números ordinales y cardinales transfinitos.

En el método utilizado por Kepler, en el caso de los barriles de vino y otros sólidos de revolución, se podía refinar su aproximación usando más y más cilindros, tantos como se quiera, lo que obedece a un infinito potencial. A medida que se aumenta el número de cilindros, el grosor de cada cilindro puede ser tan fino como se quiera imaginar. Es decir, las capas cilíndricas están apiladas y todas juntas forman el barril que obedece al infinito actual, pero su manera de ver los objetos matemáticos en ese entonces, no permitían el acceso a este tipo de infinito. En el mismo sentido Cavalieri establece un formalismo para tratar el infinito actual en el marco de cuadraturas y curvaturas. Sin embargo su método fracasa por dos razones: (1) no se puede extender para todos los casos, pues los procesos operativos algebraicos son limitados y (2) hace falta de un sustento formal para los indivisibles.

A causa de la discusión presentada en el Capítulo 2 entre Leibniz y J. Bernoulli, podemos ver que hay cierta coincidencia y similitud en los planteamientos de J. Bernoulli y los realizados por Cantor varios siglos después; de modo que las ideas de Cantor tendrían un precursor en J. Bernoulli, en el siglo XVII. Esto muestra que no todos los matemáticos padecían del llamado “horror al infinito”, también hubo matemáticos que estaban a favor del infinito actual que alcanza legitimidad con los trabajos desarrollados por Georg Cantor.

Los trabajos de D’Alembert sobre el concepto de límite, los aportes de Lagrange y Euler, se realizaron con el objetivo de fundamentar el cálculo. Se necesitaba de un personaje trascendental para retomar ese cúmulo de saberes, y construir los nuevos fundamentos. Por un lado Bolzano, respondió al llamado de Lagrange para reducir el cálculo al álgebra; pero fue Cauchy quien dio las definiciones rigurosas y las demostraciones para todos los conceptos fundamentales, quien entendió el poderoso alcance del concepto de límite basado en desigualdades para formalizar el infinito potencial, y así plantear el riguroso cálculo moderno, donde la letra épsilon, ε , que inicialmente se había utilizado para representar un “error”, históricamente se convirtió en el símbolo característico de la precisión y el rigor en el cálculo.

Sustentamos que el concepto de límite planteado por Cauchy formaliza el infinito potencial aristotélico, ya que retomando las ideas de sus predecesores, al infinito potencial se le da un nombre, una simbología y una definición, a través de la definición de cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes. Además, Cauchy toma los infinitesimales, trabaja con ellos, presenta sus características, realiza demostraciones, establece un orden, considerándolos como objetos matemáticos. Estos planteamientos de Cauchy son, claramente, novedosos, en el sentido de que ninguno de sus predecesores logra este nivel de rigorización y este tratamiento de tales cantidades.

El estudio histórico-epistemológico de la noción de límite permite reconocer que sus orígenes y proceso de formalización fueron sumamente complejos y controvertidos y, dependiendo del momento histórico, había una u otra forma de entenderlo. Para la consolidación del concepto de límite se presentaron algunas rupturas con conocimientos previos, hubo avances, lo cual dependía de las herramientas con las que contaban los diferentes matemáticos a la hora de plantear su noción; sin embargo, para plantear sus nociones como es el caso de Wallis y Newton, ellos tuvieron también que mirar hacia atrás, ir a las raíces primigenias del concepto de límite, lo cual se encontraba en los planteamientos de los griegos, especialmente en Euclides y Arquímedes. Y hubo cambios en los puntos de vista teóricos, dependiendo de las dificultades a superar. Las ideas que dieron paso a su formalización como el método exhaustivo, la sucesión aritmética de números, las razones primeras y últimas de cantidades evanescentes, los aportes de diferentes matemáticos como D'Alembert, la simbología de L'Huillier, los aportes de Carnot, Lacroix y su formalización retórica por parte de Cauchy, fueron en gran parte retomadas y por otro lado quedaron encapsuladas en la definición estática planteada por Weierstrass.

La enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite, de una función de valor y variable real, enfrenta grandes desafíos por la complejidad del concepto mismo y de otros conceptos matemáticos que intervienen en la definición, tales como: el concepto de función, la continuidad, lo geométrico, el lenguaje y la simbología de la lógica subyacentes en la definición, entre otros. Pero el epicentro desde este aspecto teórico se centra en lo relacionado con el infinito. Uno de los obstáculos epistemológicos principales es la idea “errónea” de que el concepto de límite encapsula el infinito actual. Realizar un análisis sobre las investigaciones

relacionadas con los obstáculos epistemológicos nos ayuda a entender la naturaleza de los objetos matemáticos y su desarrollo; lo cual puede ayudar a superar las dificultades conceptuales y didácticas de algunos estudiantes y futuros docentes de matemáticas. Como vimos en el capítulo 4, los obstáculos epistemológicos son múltiples, y conocerlos nos ayuda en un primer momento a entender la comprensión de un concepto, a anticipar las dificultades, a indagar con detenimiento en los errores y planear estrategias para superar los obstáculos que se presenten en los estudiantes. En las investigaciones relacionadas con los obstáculos, estos no siempre se repiten en el aula, debido a que no se presentan las mismas condiciones históricas. En este trabajo sólo se analizaron algunos obstáculos epistemológicos relacionados con el concepto de límite, sin embargo, es importante mencionar que obstáculos diferentes a los relacionados con el infinito son relevantes en sí mismos y su estudio se deja para futuras investigaciones.

Referencias

- [1] Álvarez, F. (2000). La polémica entre Leibniz y Johann Bernoulli acerca de los infinitesimales (¿Es Johann Bernoulli un precursor de Cantor?). *Contrastes. Revista Internacional de Filosofía*, 5, 61-75.
- [2] Arbeláez, G. (2011). *Proceso de instauración del análisis matemático en Colombia: 1850-1950*. Cali, Colombia: (Tesis de Doctorado). Universidad del Valle.
- [3] Aristóteles. (1998). *Física*. (Traducido por Echandía, G.). Madrid: Editorial Gredos.
- [4] Arquímedes, (2005). *Tratados: Sobre la esfera y el cilindro; Medida del círculo; Sobre los conoides y esferoides*. (Version de Eutocio, E., Ortiz, P.). Madrid: Editorial Gredos.
- [5] Arquímedes, (2009). *Tratados: Sobre las líneas espirales; Sobre el equilibrio de las figuras planas; Arenario; Cuadratura de la Parábola; Sobre los cuerpos flotantes; Stomachion; Método; Libro de los lemas; Problema de los Bueyes; Fragmentos* . (Versión de Ortiz, P.). Madrid: Editorial Gredos.
- [6] Arrigo, G., D'Amore, B., y Sbaragli, S. (2011). *Infinitos infinitos. Historia, filosofía y didáctica del infinito matemático*. (Traducido por Jiménez, A.). Bogotá: Editorial Magisterio.
- [7] Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico: contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. (Traducido por Babini, J.). México: Siglo Veintiuno Editores.
- [8] Baron, M. (2014). *The origins of infinitesimal calculus*. Elsevier.

- [9] Bolzano, B. (1991). *Las paradojas del infinito*. (Traducido por Álvarez, C.). México: UNAM.
- [10] Boyer, C. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development: (The concepts of the calculus)*. New York: Dover Publications
- [11] Brousseau, M. (1976). Les Obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 4 (2), 101-117.
- [12] Cambray, R. (1995). *Estudio histórico y pedagógico del texto Analyse des infiniment petits... del Marqués de l'Hospital*. Facultad de Ciencias: UNAM, México.
- [13] Canizales, G. y Erazo, J. (2013). *Métodos heurísticos para el cálculo de volúmenes en el siglo XVII bajo la idea naciente de integral definida: una aproximación desde Arquímedes, Cavalieri y Torricelli*. (Tesis de maestría). Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.
- [14] Cauchy, A. (1823). *Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*. Paris, Œuvres complètes, série 2, tome 4, 9-261.
- [15] Cauchy, A. (2010). *Cours d'analyse*. (Versión de Bradley, R., Sandifer, C.). New York: Springer.
- [16] Dugac, P. (1973). Éléments d'analyse de Karl Weierstrass'. *Archive for History of Exact Sciences*, 10, 41–176.
- [17] Dugac, P. (1978). *Sur les fondements de l'analyse de Cauchy à Baire* (Doctoral dissertation). Universidad Pierre et Marie Curie. París.
- [18] Edwards, C. (2012). *The historical development of the calculus*. Georgia: Springer Science and Business Media.
- [19] Euclides. (1991a). *Elementos: libros I-IV*. (Traducido por Puertas M.). Madrid: Editorial Gredos.
- [20] Euclides. (1991b). *Elementos: libros V-IX*. (Traducido por Puertas M.). Madrid: Editorial Gredos.

- [21] Euclides. (1991c). *Elementos: libros X-XII*. (Traducido por Puertas M.). Madrid: Editorial Gredos.
- [22] Grabiner, J. (2005). *The origins of Cauchy's rigorous calculus*. New York: Dover Publications.
- [23] Grattan Guinness, I. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910: una introducción histórica*. Madrid: Alianza Editorial.
- [24] Hawking, S. (2006). *Dios creó los números: Los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia*. Crítica.
- [25] Klein, F. (2004). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Arithmetic, algebra, analysis* (Vol. 1). New York: Courier Corporation.
- [26] Kline, M. (1999). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. (Versión de Martínez, M., Garcidiego, A., Fernández, C.). Madrid: Alianza Editorial.
- [27] Lavine, S. (2005). *Comprendiendo el Infinito*. (Traducido por Torres, E.). México: Fondo de Cultura Económica.
- [28] L'Hôpital. (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*. (Traducido por Núñez, R.). Ciudad de México: UNAM.
- [29] Molina, A. (2008). El método de investigación de Arquímedes de Siracusa: Intuición, mecánica y exhaustión. *Revista de Filosofía*, 26(58), 23-40.
- [30] Nakane, M. (2014). Did Weierstrass's differential calculus have a limit-avoiding character? His definition of a limit in $\varepsilon - \delta$ style. *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*, 29(1), 51-59.
- [31] Pérez, J. (2015). *Orígenes del cálculo. Historia de las Matemáticas*. Granada: Universidad de Granada.
- [32] Recalde, L. (2018). *Lecturas de Historia de las matemáticas*. Cali: Universidad del Valle.

- [33] Rodríguez, A. y Sandoval, C. (2016). *La historia como una herramienta didáctica para la enseñanza del concepto de integral*. (Tesis de Pregrado). Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá D.C.
- [34] Sierpinska, A. (1985). Obstacle épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques*, 6(1), 5-67.
- [35] Struik, D. (1969). *A source book in mathematics, 1200-1800* (Vol. 11). Harvard University Press.
- [36] Toeplitz, O. (2018). *The calculus: a genetic approach*. University of Chicago Press.
- [37] Vega, S. (2019). *El desarrollo histórico-epistemológico de la derivada en el paso de lo geométrico a lo analítico*. (Tesis de Maestría). Universidad del Valle. Cali.
- [38] Waldegg, G. (1996). La contribución de Simón Stevin a la construcción del concepto de número. *Educación Matemática*, 8(2), 5-17.
- [39] Yuste, P. (2002). Modelos algebraicos de Wallis para componer sólidos de dimensión infinita y volumen determinado. *Éndoxa*, 1(16), 333-362.