

ALGO MAS SOBRE EL MODELO PARA EL CORTE DE VARILLAS

Ramón Duque M.
Profesor Titular.
Dpto. de Procesos Químicos y
Biológicos.
Facultad de Ingeniería.
Universidad del Valle.
Cali - Colombia

En el volumen 2 No.1 de HEURISTICA se presentó un artículo escrito por CARLOS JULIO VIDAL H., en donde el autor plantea el problema de cómo realizar el corte de piezas longitudinales para minimizar el desperdicio y lo resuelve mediante un modelo matemático de programación lineal entera.

En realidad el problema se encuentra en muchos textos relacionado con rollos de papel, pero es posible trasladarlo a corte de varillas para mostrar didácticamente como una de las habilidades del modelador de sistemas es el hacer equiparables situaciones aparentemente disímiles.

La situación se formula así: Se tiene un número suficiente de varillas de acero de construcción, de L metros de largo y se desea tener al menos A_1 tramos de L_1 metros cada uno, A_2 de L_2 metros, A_3 de L_3 metros y así sucesivamente.

Cómo cortar para minimizar el desperdicio si se considera a éste como todo tramo menor que L_1 metros?.

Para el planteamiento del modelo es necesario determinar primero cuáles son los patrones de corte de una varilla, es decir, de cuántas diferentes maneras se puede trozar de acuerdo con las dimensiones dadas de los tramos. En el caso en cuestión los patrones son :

PATRON	NUMERO DE VARILLAS DE DIMENSION				DESPERDICIO m
	3 m	5 m	7 m	8 m	
1	4	0	0	0	0
2	2	1	0	0	1
3	1	0	1	0	2
4	1	0	0	1	1
5	0	2	0	0	2
6	0	1	1	0	0
# tramos necesarios	100	150	200	85	

El modelo así ya es fácil de expresar, pero el autor plantea la dificultad de generar los patrones de corte como el verdadero punto fuerte de la situación.

Primero una referencia al modelo y sus resultados y luego algo acerca de los patrones.

1. EL MODELO

Un primer modelo se puede plantear en su forma tradicional como en el artículo de la referencia, habiendo definido que X_i es el número de varillas cortadas de acuerdo con el patrón i:

Minimizar desperdicio

$$D = X_2 + 2X_3 + X_4 + 2X_5$$

sujeta a

$$\begin{array}{rcl} 4X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 & \geq & 100 \\ X_2 + & + 2X_5 + X_6 & \geq 150 \\ X_3 & + X_6 & \geq 200 \\ X_4 & & \geq 85 \end{array}$$

Con todas las variables ≥ 0 y enteras.

Este modelo es resuelto con los siguientes resultados:

$$\begin{array}{lllll} X_1^* = 4 & X_2^* = 0 & X_3^* = 0 & X_4^* = 85 & X_5^* = 0 \\ X_6^* = 200 & D^* = 85 \end{array}$$

Pero si se llama a S_1, S_2, S_3, S_4 los tramos en exceso contados de 3, 5, 7 y 8 metros respectivamente, se tendrá como parte de la solución óptima que:

$$S_1^* = 1 \quad S_2^* = 50 \quad S_3^* = 0 \quad S_4^* = 0$$

O sea que sí como lo plantea el autor, se tomara el costo

de inventario de los tramos cortados en exceso el desperdicio total sería:

$$D_{\text{total}} = (85) + (1 \times 3) + (50 \times 5) = 338 \text{ m}$$

En este punto es posible mejorar el modelo, si se formula como:

Minimizar desperdicio

$$D = X_2 + 2X_3 + X_4 + 2X_5 + 3S_1 + 5S_2 + 7S_3 + 8S_4$$

sujeta a

$$\begin{array}{rcl} 4X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 & \geq & 100 \\ X_2 + & + 2X_5 + X_6 & \geq 150 \\ X_3 & + X_6 & \geq 200 \\ X_4 & & \geq 85 \end{array}$$

y todas las variables ≥ 0 y enteras.

Se muestra la solución de los dos modelos, para ilustrar los resultados finales. Para hacerlo se utilizó la técnica del simplex - dual.

Minimizar:

$$D = X_2 + 2X_3 + X_4 + 2X_5$$

Sujeta a

$$\begin{array}{rcl} 4X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 & \geq & 100 \\ X_2 + & + 2X_5 + X_6 & \geq 150 \\ X_3 & + X_6 & \geq 200 \\ X_4 & & \geq 85 \end{array}$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$$

enteras

Ec. #	BASE	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	SOL
0	Z	1	0	-1	-2	-1	-2	0	0	0	0	0		0
1	S_1	0	-1	-2	-1	-1	0	0	1	0	0	0		-100
2	S_2	0	0	-1	0	0	-2	-1	0	1	0	0		-150
3	S_3	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	1	0		-200
4	S_4	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1		-85

0	Z	1	0	-1	-2	-1	-2	0	0	0	0	0		0
1	S_1	0	-1	-2	-1	-1	0	0	1	0	0	0		-100
2	S_2	0	0	-1	1	0	-2	0	0	1	-1	0		50
3	X_6	0	0	0	1	0	0	1	0	0	-1	0		200
4	S_4	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1		85

0	Z	1	0	-1	-2	-1	-2	0	0	0	0	0		0
1	X_1	0	1	1/2	1/4	1/4	0	0	-1/4	0	0	0		25
2	S_2	0	0	-1	1	0	-2	0	0	1	-1	0		50
3	X_6	0	0	0	1	0	0	1	0	0	-1	0		200
4	S_4	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1		85

0	Z	1	0	-1	-2	0	-2	0	0	0	0	-1	0	85
1	X_1	0	1	1/2	1/4	0	0	0	-1/4	0	0	1/4	0	3 3/4
2	S_2	0	0	-1	1	0	-2	0	0	1	-1	0	0	50
3	X_6	0	0	0	1	0	0	1	0	0	-1	0	0	200
4	X_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	85
5	S_5	0	0	-1/2	-1/4	0	0	0	-3/4	0	0	-1/4	1	-3/4

0	Z	1	0	-1	-2	0	-2	0	0	0	0	-1	0	85
1	X_1	0	1	2/3	1/3	0	0	0	0	0	0	1/3	-1/3	4
2	S_2	0	0	-1	1	0	-2	0	0	1	-1	0	0	50
3	X_6	0	0	0	1	0	0	1	0	0	-1	0	0	200
4	X_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	85
5	S_1	0	0	2/3	1/3	0	0	0	1	0	0	-1/3	-4/3	1

Minimizar:

Nótese como:

$$D = X_2 + 2X_3 + X_4 + 2X_5 + 3S_1 + 5S_2 + 7S_3 + 8S_4$$

Sujeta a

$$\begin{aligned} 4X_1 + 2X_2 + X_3 + X_4 &\geq 100 \\ X_2 + 2X_5 + X_6 &\geq 150 \\ X_3 + X_6 &\geq 200 \\ X_4 &\geq 85 \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

enteras

Aún cuando el proceso de soluciones parciales es muy similar, los dos modelos producen soluciones diferentes. Mientras que en el primero la solución la componen X_1 , X_2 , X_4 y X_6 , en el segundo cambia a X_3 , X_4 y X_6 , con ventaja evidente para este último, que produce un mejor valor para la función objetivo.

El segundo modelo produce la solución óptima entera, mientras que el primero produce un óptimo

Ec. #	BASE	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	S_1	S_2	S_3	S_4	SOL.
0	Z	1	-12	-12	-12	-12	-12	-12	0	0	0	0	-3130
1	S_1	0	-4	-2	-1	-1	0	0	1	0	0	0	-100
2	S_2	0	0	-1	0	0	-2	-1	0	1	0	0	-150
3	S_3	0	0	0	-1	0	0	-1	0	0	1	0	-200
4	S_4	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	-85

0	Z	1	-12	-12	0	-12	-12	0	0	0	-12	0	-730
1	S_1	0	-4	-2	-1	-1	0	0	1	0	0	0	-100
2	S_2	0	0	-1	1	0	-2	0	0	1	-1	0	50
3	X_6	0	0	0	1	0	0	1	0	0	-1	0	200
4	S_4	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	-85

0	Z	1	-12	-12	0	-12	-12	0	0	0	-12	0	-730
1	X_1	0	4	2	1	1	0	0	-1	0	0	0	100
2	S_2	0	-4	-3	0	-1	-2	0	1	1	-1	0	-50
3	X_6	0	-4	-2	0	-1	0	1	1	0	-1	0	100
4	S_4	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	-85

0	Z	1	-12	-12	0	0	-12	0	0	0	-12	-12	290
1	X_3	0	4	2	1	0	0	0	-1	0	0	1	15
2	S_2	0	-4	-3	0	0	-2	0	1	1	-1	-1	35
3	X_6	0	-4	-2	0	0	0	1	1	0	-1	-1	185
4	X_4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	85

parcial con $X_1 = 3 \frac{3}{4}$, situación que se corrige mediante la condición de integridad para X_1 la cual se expresa como

$$1/2 X_2 + 1/4 X_3 + 3/4 S_1 + 1/4 S_4 \geq 3/4$$

La nueva situación le permite a X_1 tomar el valor de 4, pero como el profesor VIDAL lo anota podría tomar cualquier otro valor entero mayor o igual que 4, condición que muestra la fragilidad del primer modelo puesto que no hace variar el valor de la función objetivo, cuando en la realidad aumentaría el desperdicio.

La condición anterior refuerza las ventajas del segundo modelo que produce una solución entera directa, mejor que la del modelo inicial.

De paso, será siempre posible involucrar la condición de integridad para todas las variables, incluso las de holgura, sin el temor de una solución no factible a no ser que el material sea escaso o exista una restricción similar de sentido $\leq$.

Por tanto es posible tomar en consideración costos como el inventario de varillas cortadas en exceso o como el de corte de las varillas. El tomar en cuenta estos factores, mejorará el modelo.

Por último, existen otras alternativas que pueden complementarse entre sí:

- Es intuitivamente claro que entre mayor sea la longitud de las varillas, menor será el desperdicio. Así sucede con material que puede ser enrollado como el alambre de púas, los cables eléctricos y telefónicos o el mismo acero de construcción en diámetros comerciales menores que 12.5 mm.
- Esto sugiere la posibilidad de soldar las varillas pero las especificaciones son tan altas que hacen su costo mayor que el costo del desperdicio.
- También existe la posibilidad de traslapar los tramos desperdiciados o las mismas varillas para obtener la idea anterior de material con longitud ilimitada.
- En esta opción existe un desperdicio por cada unión y su magnitud es cuestión de los Ingenieros Civiles o de un experto en materiales.
- La otra posibilidad es poner de acuerdo a Ingenieros, Arquitectos y Diseñadores en general para que modulen o hagan uniformes las medidas, ya sea mediante cambios en los diseños respectivos o mediante el uso de otros materiales.

La idea global que se trata de mostrar es que el modelo es una herramienta excelente pero siempre y cuando vaya acompañada del conocimiento, del buen juicio y de una buena dosis de imaginación, cualidad de la que, lastimosamente y a menudo, carecemos los Ingenieros.

Para esto último es siempre provechoso trabajar en grupo y buscar la opinión de expertos en el problema que en este caso incluye a los maestros de obra y a los oficiales de construcción.

Es posible que suene a demasiadas complicaciones para un problema sencillo, pero cuando se manejan problemas como el de construir miles de viviendas al mínimo costo, con especificaciones que deben cumplirse, de seguro que las complicaciones no se verán como tales.

2 LOS PATRONES DE CORTE

En los modelos discutidos anteriormente hay sin embargo ya resuelto un interrogante que puede ser el más difícil: cómo generar todas las diferentes formas en las cuales se puede dividir la pieza longitudinal, es decir, cuáles son los patrones de corte.

Retomando la formulación del problema en la forma como se presentó al inicio de este escrito, se plantea una solución que utiliza algo de las nociones de la Programación Dinámica y del Análisis Combinatorio.

Ella sería así:

Tomada la pieza, se puede generar un primer corte de diferentes longitudes: $L_1, L_2, \dots, L_n$ siempre y cuando se cumpla para cada uno que $L_i \leq L$. Por comodidad, se puede ordenar los L_i en forma ascendente.

Para cada una de estas n posibilidades, se genera un segundo corte de longitud $L_1, L_2, \dots, L_n$ siempre y cuando se cumpla que:

$$L_i + L_j \leq L$$

y que

$$L_j \geq L_i$$

y así sucesivamente hasta que se llegue a una de dos situaciones:

$$a. \quad L - \sum L_k < L_1$$

y en este caso la partición quedará completa, con un desperdicio de:

$$D_p = L - \sum L_k$$

El patrón de corte p quedará constituido por los diferentes valores de L_k en que se hizo la partición.

b. $L - \sum L_k \geq L_1$

Si así sucede, el patrón de corte será redundante.

Describiendo la solución como un árbol, se tendrá una rama superior conformada por L_1 en un número igual al máximo entero de $[L / L_1]$ y una rama inferior por L_n en un número igual al máximo entero de $[L / L_n]$ con ramas intermedias como se muestra gráficamente en la figura No. 1.

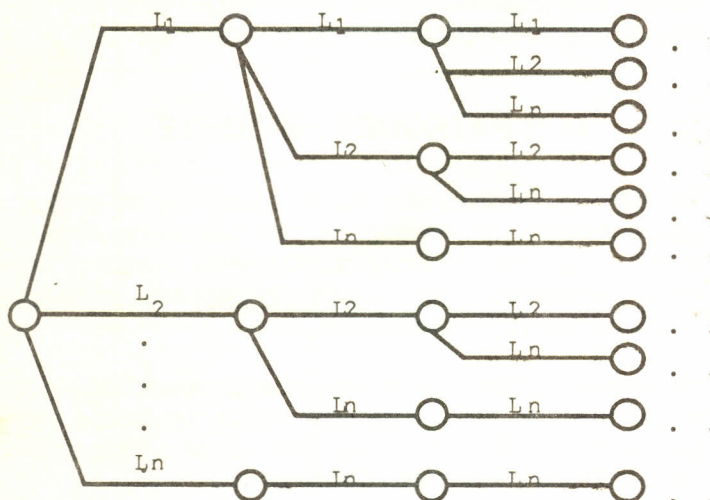


Figura No. 1

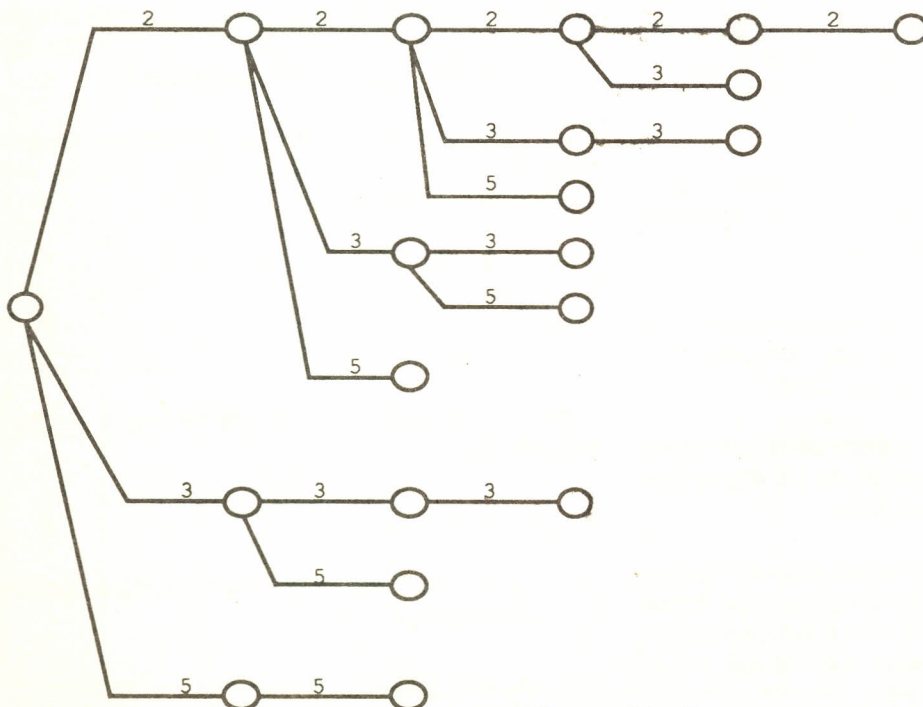


Figura No. 2

HEURISTICA.

Vol 2 No. 2

Como parece ser más sencillo aprender a montar en bicicleta que explicar lo anterior con palabras, se presenta a continuación un ejemplo.

Sea $L = 10$ m
 $L_1 = 2$ m
 $L_2 = 3$ m
 $L_3 = 5$ m

Los patrones se muestran en la figura No. 2 :

Resumiendo en el cuadro No. 2 lo anterior se tendrá:

El ejemplo anterior sugiere el algoritmo de computación que se presenta enseguida, en cuya elaboración se agradece la cooperación del Ingeniero Civil Carlos NAVIA. El algoritmo fué traducido luego a un programa de lenguaje Q - BASIC, que también se incluye.

```
REM *** OPTIMIZACION DE CORTE DE MATERIAL ***
INPUT "LONGITUD DE LA VARILLA"; LT
INPUT "NUMERO DE LONGITUDES MENORES"; N
DIM V(N), MAX(N), L(N)
FOR I=1 TO N
```

```
PRINT "LONGITUD"; i; "="; INPUT L(I)
MAX(I) = INT (LT/L(I))
```

```
NEXT I
LPRINT "
MATERIAL"
LPRINT "
```

OPTIMIZACION DE CORTE DE
LONGITUD
TOTAL A PARTICIONAR
:;LT

Patrón 1 $D_1 = 0$

Patrón 2 $D_2 = 1$

Patrón 3 $D_3 = 0$

Patrón 4 $D_4 = 1$

Patrón redundante

Patrón 5 $D_5 = 0$

Patrón redundante

Patrón 6 $D_6 = 1$

Patrón redundante

Patrón 7 $D_7 = 0$

PATRON No.	TRAMOS DE			DESPERDICIO
	2 m	3 m	5 m	
1	5	0	0	0
2	3	1	0	1
3	2	2	0	0
4	2	0	1	1
5	1	1	1	0
6	0	3	0	1
7	0	0	2	0

GOTO 1

LPRINT " NUMERO DE LONGITUDES EN
QUE SE DEBE PARTICIONAR :";N

LPRINT

FOR I=1 TO N

 LPRINT "LONGITUD =";L(I),

NEXT I

LPRINT "RESIDUO ="

LPRINT

LPRINT

1

 V(1) = V(1) + 1

 GOSUB COMPROBACION

 S = 0

 FOR I=1 TO N

 S = S + V(I) * L(I)

 NEXT I

 IF S > LT THEN GOTO 1

 FOR I=1 TO N

 IF LT - S >= L(I) THEN GOTO 1

 NEXT I

 FOR I=1 TO N

 LPRINT " ";V(I),

 NEXT I

 LPRINT " "; LT - S

 LPRINT

 IF V(N) = MAX(N) THEN END

COMPROBACION:

 FOR I=1 TO N

 IF V(I) > MAX(I) THEN

 FOR K=1 TO I

 V(K) = 0

 NEXT K

 V(I+1) = V(I+1) + 1

 GOSUB COMPROBACION

 END IF

 NEXT I

RETURN

BIBLIOGRAFIA

Para elaborar este escrito se consultó el artículo citado del profesor VIDAL en la Revista HEURISTICA y se tomaron en cuenta numerosas conversaciones con el profesor Daniel ARBELAEZ del Departamento de Sistemas, Facultad de Ingeniería, Universidad del Valle.