

El modelo de Toulmin y la evolución del concepto de continuo en los clásicos griegos

César Augusto Delgado G

Resumen

En este artículo se aplica el modelo para el análisis de la variación conceptual propuesto por Stephen Toulmin. Este modelo resulta útil y propio para el estudio epistemológico de los conceptos matemáticos necesario para el diseño de situaciones y experiencias didácticas. Para ilustrar su funcionamiento, estudiamos la variación del concepto del continuo matemático considerando tres momentos de la historia de los griegos antiguos, desde Pitágoras (500 a.C.) hasta Arquímedes (212 a.C.), con la pretensión de identificar los problemas y obstáculos que surgieron en la génesis del continuo matemático, las respuestas que se alcanzaron en la época, sus limitaciones y los problemas que quedaron abiertos como tarea para los matemáticos posteriores. El contenido se divide en tres partes: La primera presenta el modelo de Toulmin; en la segunda presentamos un estudio de la historia del concepto del continuo matemático en el período griego y en la tercera aplicamos el modelo al estudio de la evolución del continuo en el período griego. Finalmente, se identifican algunos obstáculos epistemológicos presentes en la época.

Palabras y frases claves: filogénesis, obstáculo epistemológico, variación conceptual, continuo numérico.

Introducción

Compartimos la hipótesis de que existe una relación entre la evolución conceptual en el aula y en la ciencia. Tanto en la escuela como en la comunidad matemática el conocimiento no surge de forma milagrosa, transparente, inmediata, de una vez y para siempre. Todo lo contrario, la aproximación epistemológica de la matemática muestra la lenta variación del *estatuto* de una noción. Así, como los problemas que constituyeron su fuente, los obstáculos que hubo que salvar y las dificultades conceptuales evacuadas para alcanzar su solución.

La constitución de una nueva noción implica la superación de un conocimiento anterior que ha tenido éxito en el pasado, pero que ahora se revela insuficiente para obtener las respuestas a las nuevas cuestiones generadas por problemas igualmente inéditos que se deben resolver. Estas superaciones no son ni inmediatas ni plenas, sino que se debe vencer cierta

inercia de concepciones antiguas, que en la sombra dirigen las acciones y los razonamientos.

En el caso de la matemática la hipótesis es válida. Por un lado, el *estudio filogenético* de los conceptos revela que los conceptos sufren un proceso lento de institucionalización¹ en el que intervienen *factores internos* de la matemática como disciplina científica y externos de los entornos social, cultural y científico de la época. Por otro lado, el *estudio ontogenético* de los conceptos, realizados por los didactas, muestra que los procesos de construcción de los esquemas conceptuales asociados a los conceptos matemáticos son igualmente lentos y son regulados por *factores internos* propios de la naturaleza del aprendizaje humano y *externos* ligados a las instituciones pedagógicas, científicas, estatales, etc., que imponen restricciones sobre el funcionamiento de la institución educativa.

En el caso de la *filogénesis*, factores externos como los paradigmas filosóficos de la época, el contrato social, los intereses socio-económicos, etc., combinados con los factores internos como los conocimientos disponibles, las técnicas conocidas, los sistemas de representación simbólica, etc., hacen que los conocimientos establecidos, que han tenido cierto éxito en el pasado, se revelen insuficientes para alcanzar una explicación satisfactoria para las nuevas cuestiones cuyas respuestas se perciben como necesarias. La lentitud, entonces, no se explica por la negación al progreso de la ciencia en un momento dado, ni por la displicencia social hacia las comunidades científicas, etc.; sino, más bien, que estos señalamientos son efectos causados por algo más profundo e “invisible” que permanece en “la sombra” de las acciones y los razonamientos individuales y que llega a ser socialmente compartido. Se trata de *representaciones de conocimientos matemáticos* que circulan en la época, que han tenido éxito en el pasado, pero que impiden asimilar el nuevo conocimiento. Para progresar, es necesario modificar estas representaciones que se han convertido en verdaderos obstáculos epistemológicos en el sentido de Bachelard:

“...hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. No se trata de considerar los obstáculos ex-

¹Entendiendo por institucionalización, el proceso que va desde la presencia implícita de un conocimiento en las acciones o razonamientos que son constituyentes de la actividad humana en un momento dado (estatuto protomatemático); pasando, luego, a ser reconocido como un instrumento útil en la matemática, pero no es objeto de estudio en sí mismo (estatuto paramatemático); y finalmente, se toma conciencia de su función en un cuerpo teórico, y por tanto de la necesidad de hacerlo objeto de estudio para articularlo de forma coherente con los conocimientos establecidos, hasta alcanzar su aceptación por la comunidad científica (estatuto matemático).

ternos como la complejidad, la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer íntimamente, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones... se conoce en contra de un conocimiento anterior destruyendo conocimientos mal adquiridos o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza a la espiritualización.” ([1, pág.15]).

Similarmente, en el caso de la ontogénesis, factores externos como el entorno social, el curriculum matemático, la organización didáctica de la enseñanza, las concepciones de los docentes respecto de la matemática, etc., combinados con los factores internos de la propia naturaleza del conocimiento matemático objeto de enseñanza, *inducen representaciones* de los conceptos matemáticos que se convierten en obstáculos epistemológicos presentes en los razonamientos y ejecuciones de los estudiantes. Los fracasos y los errores persistentes, señal de su presencia, no se explican por las actitudes de los estudiantes hacia la matemática; ni por los métodos empleados por sus profesores; sino que, estas pseudo-explicaciones son más bien consecuencia, en última instancia, de aquellas *representaciones epistemológicas* que orientan y determinan éstas actitudes y aquellos métodos.

El análisis epistemológico en sus dos vertientes filogenética y ontogenética permite

“... al didacta tomar distancia y controlar las representaciones epistemológicas de las matemáticas inducidas por la enseñanza ... [...], desprenderse de la ilusión de transparencia de los objetos que manipula en el nivel del saber y en consecuencia lo auxilia en el manejo de las representaciones erróneas inducidas por la enseñanza” ([7, pág. 15])

Para abordar este estudio empleamos el modelo de análisis de Stephen Toulmin (1977) donde se plantea que para explicar la *evolución y racionalidad* de la empresa científica es necesario no sólo referirse al objeto de estudio en el que se centran las actividades de una disciplina en particular sino también a las actitudes profesionales por las que se guían esas actividades.

Objeto y actitudes profesionales definen entonces adecuadamente los problemas de que se ocupa una “disciplina” en un momento dado. Lo que se destaca en esta perspectiva es que las respuestas a la pregunta de cómo surgen los problemas en la ciencia y cómo se resuelven, involucra la “praxis”, vale decir, *la acción* de sujetos producto de su cultura, prisioneros de actitudes, hábitos, creencias, limitados por conocimientos e

instrumentos técnicos de la época. Ellos buscan escapar de estas “prisiones” mentales superando sus propios esquemas de conocimiento. *Significa entonces involucrar, además de la actividad teórica y a diferencia de ella, la actividad que es intrínsecamente transformadora de la realidad exterior al sujeto sobre todo pero también transformadora del propio sujeto.*

“Para formular el punto en términos generales: los problemas de la ciencia nunca han estado determinados por la naturaleza del mundo solamente, sino que han surgido siempre del hecho de que, en el campo involucrado, nuestras ideas sobre el mundo están en conflicto con la naturaleza o unas con otras.” ([10, pág. 160])

De esta manera la tarea de la ciencia es resolver los problemas que plantean tales conflictos, para aproximar o disminuir la distancia entre las “ideas corrientes” que tenemos sobre el mundo, sus posibilidades para actuar sobre él y nuestros “ideales intelectuales” razonables.

“Los problemas surgen (sostengo) cuando nuestras ideas sobre el mundo están en conflicto con la naturaleza o entre sí, esto es, cuando nuestras ideas corrientes quedan atrás, en algunos aspectos remediabiles, de nuestros ideales intelectuales.” ([10, pág. 160])

Lo que para nosotros es importante aquí es precisamente la relación que establece Toulmin entre los problemas conceptuales de la ciencia y su fuente: el conflicto cognitivo entre las ideas mismas o entre ellas y la experiencia. Es decir:

“Los problemas conceptuales en la ciencia provienen de la comparación, no de “proposiciones” con “observaciones”, sino de ideas con la “experiencia”. Nuestras presentes facultades explicativas deben ser juzgadas a la luz de las ambiciones y los ideales intelectuales relevantes. Y no se puede definir apropiadamente la naturaleza de los “problemas” científicos sin considerar también el carácter de esos ideales.” ([10, pág. 160-161])

Por “ideales intelectuales” (I) de una ciencia se entiende, según él, aquellas concepciones muy generales compartidas por la comunidad de la disciplina acerca de la *forma general que debe tomar una explicación completa de cierto fenómeno*, para poder explicar *perfectamente* las relaciones que lo definen, y ello es posible porque se comparte cierto objetivo comunal. Y son ideales porque desde su perspectiva la realidad sólo se conoce por aproximaciones sucesivas y siempre superables.

Para satisfacer tales ideales la comunidad científica dispone del patrimonio, que hereda de la experiencia histórica: teorías, conjeturas, conceptos, instrumentos técnicos, etc. Lo así heredado, junto con los intereses de la época y las formas de aproximación al mundo constituyen la “capacidad corriente” (C), disponible para lograr la inteligibilidad necesaria y suficiente.

El desequilibrio que se produce en determinado momento entre el ideal y la capacidad da origen a conflictos que son la fuente del planteamiento de un nuevo problema (P) a resolver, es decir:

Problemas científicos = Ideales explicativos–Capacidades corrientes.

Así pues, el desequilibrio entre I y C es la fuente de los conflictos que se constituyen en problemas para la comunidad científica y el motor del progreso de la empresa científica es la búsqueda, siempre incompleta, de nuevas re-equilibraciones entre I y C.

Respecto a la forma de la evolución de los problemas, Toulmin afirma que ella es secuencial y continua, sin importar el cambio que sufren, de época en época, los conceptos y técnicas reales para resolverlos; los cambios no resultan de “saltos” repentinos, sino de la acumulación gradual de modificaciones menores, que son capitalizadas por la experiencia cultural. Por tanto, interesa observar las exigencias locales e inmediatas de cada situación intelectual y las ventajas ligadas a diferentes novedades conceptuales. Tales exigencias son específicas de la situación; la sucesión de problemas que se generan entre ellas y la capacidad para satisfacerlas no obedece a los dictados externos de la lógica, sino a hechos históricos transitorios y propios de la situación problemática particular. Por tanto, la fuente de los problemas científicos se encuentra en la relación histórica entre las actitudes de los científicos profesionales y el mundo de la naturaleza que estudian.

Bajo estos supuestos fundamentales Toulmin propone como unidad de análisis la variación conceptual, focalizando la atención en las cuestiones que se levantan de una época a otra, sus debates y las soluciones propuestas.

1 El modelo de Toulmin

Para encontrar explicaciones a la evolución y racionalidad de la empresa científica, Stephen Toulmin concibe un metasistema análogo al usado en biología para el estudio de poblaciones. En este caso los conceptos de una ciencia, que coexisten en un tiempo determinado. De manera semejante a la explicación darwinista de la especiación en términos de variación y

selección, se considera que los conceptos existentes en un momento dado pueden ser concebidos como producto de un proceso dual de “*variación conceptual*” y “*selección*”, que perpetúa “*variantes conceptuales*”. Toulmin considera que el cambio conceptual es la unidad básica de la dinámica científica. Para abordar su estudio de tal manera que tanto los factores racionales como causales sean tenidos en cuenta propone una alternativa de análisis (C) que combina dos de los tipos de análisis posibles: transversal (A) y longitudinal (B).

El *análisis transversal* consiste en considerar conjuntos representativos de *todos* los conceptos presentes en épocas sucesivas del desarrollo de una ciencia. La virtud de este análisis es que permite el estudio racional del cambio desde el punto de vista lógico formal que plantea la relación entre los conceptos en cada época; su debilidad es que la explicación de la aparición de nuevos conceptos y el abandono de otros, que se observa al comparar los conjuntos representativos sucesivos, no se puede obtener del análisis lógico formal de los conceptos de cada conjunto representativo. La causalidad de los cambios conceptuales se refiere a “los cambios “no lógicos” entre conjuntos representativos de conceptos, es decir a las condiciones en que podemos decir que se ha agregado un nuevo concepto o se ha desplazado uno viejo *por buenas razones*”([10, pág. 209]).

El *análisis longitudinal* consiste en estudiar la aparición, desarrollo y destino ulterior de conceptos particulares a lo largo de toda la historia de vida del concepto. Este análisis permite identificar cada punto de ramificación o de interrupción de la línea genealógica y pone en evidencia las “buenas razones” que en el momento se expresan para aceptar o rechazar un concepto. La debilidad de esta dimensión de análisis consiste en que “no logra diferenciar los dos aspectos complementarios del cambio conceptual: I) la introducción en el debate en curso de variantes conceptuales cuyo mérito aún no ha sido evaluado y II) la incorporación en el repertorio de variantes seleccionadas” (idem). Esta no discriminación está presente, porque para alcanzarla es necesario el análisis lógico formal de los conceptos en cuestión. Pero este análisis no es posible sin tomar en cuenta un conjunto representativo de conceptos relacionados.

Toulmin propone entonces adoptar un modelo en el que se tome en cuenta los *conceptos principales* que definen los conjuntos conceptuales representativos de una ciencia y considerar como variables del cambio el *aspecto racional* que provee el análisis transversal (explica la selección) y el *aspecto causal* que se obtiene del análisis longitudinal o genealógico (variación o causalidad del cambio) y explica las *buenas razones* de la selección. La combinación de estas dos variables da como

resultado una tercera variable evolutiva, dependiente de las dos anteriores, que permite alcanzar las explicaciones de la evolución conceptual. En resumen, el modelo de Toulmin se define en términos de tres variables: A) *Representación transversal*, B) *Representación longitudinal* y C) *Representación evolutiva*.

Representación Evolutiva (C)

Aborda la evolución de los conceptos (C) como función de A) La variable que da información de los conjuntos a los que pertenecen los conceptos principales vigentes en el tiempo t_i y cuya relación modifica o puede modificar el concepto C^y objeto del estudio; y B) la variable que da cuenta de la racionalidad de los conceptos principales dando cuenta de los conflictos, justificaciones o rechazo de los conceptos. El análisis de la tripla (A, B, C) “ofrece la gran ventaja de señalar claramente las diferencias entre innovación y selección” (Idem. pág. 209). Establecidas las repre-

sentaciones se debe intentar responder a tres conjuntos de preguntas “que permitirán elaborar un cuadro del cambio conceptual como un proceso histórico, en el que son operativos tanto los factores racionales como los causales” (Idem. pág. 212).

A) Respecto a la innovación o variación conceptual. Se refiere a las preguntas que permiten establecer las consideraciones y factores de la innovación conceptual.

1. ¿En qué circunstancia aparecen las innovaciones conceptuales, en una disciplina particular o en muchas?
2. ¿En qué condiciones el ingreso de tales variantes será vigoroso o lento, o más vigoroso en una disciplina que en otra?
3. Si la variación conceptual se produce predominantemente en ciertas direcciones preferidas, ¿Qué factores o consideraciones son responsables por la elección de esas consideraciones?

B) Con respecto a las cuestiones concernientes a los procedimientos de selección. Se refiere a los procedimientos de selección por los que se aceptan algunas variantes, se rechazan otras y se ponen en reserva otras aún, a la espera de una prueba adecuada. Por ejemplo:

1. ¿Qué tipos de factores o consideraciones determinan cuáles de las variantes conceptuales son aceptadas y, por ende, ingresan al repertorio establecido?
2. ¿En qué medida reposa esa selección en apelaciones explícitas a consideraciones cuya relevancia y fuerza persuasiva son colectivamente reconocidas dentro de la profesión?
3. ¿Podemos dar una explicación satisfactoria de los criterios por los cuales los que practican una ciencia distinguen los cambios conceptuales bien fundados y apropiadamente justificados de los cambios mal concebidos, apresurados, retrasados o no intencionales?

C) Respecto a la relación entre cambio conceptual y unidad de la ciencia. Toulmin considera, por último, conjuntamente dos aspectos A y B de los cambios conceptuales:

1. ¿En qué circunstancias el equilibrio entre la variación y la perpetuación selectiva servirá para mantener la continuidad de una disciplina única y compacta?
2. ¿En qué circunstancias conducirá, en cambio, al abandono de una disciplina anterior o a su desplazamiento por dos o más disciplinas sucesoras?

Una vez que se responda a este conjunto de preguntas se está en capacidad de clasificar los cambios conceptuales. Para ello se debe tener en cuenta que los conceptos son el resultado de soluciones, acertadas o no, parciales o totales, a problemas que se plantea la comunidad científica. Toulmin

entiende los problemas (**P**) que surgen en la investigación científica como el resultado de la diferencia entre los ideales explicativos (**I**) planteados por la necesidad de comprender un fenómeno y la capacidad (**C**) real para lograr la inteligibilidad necesaria y suficiente, es decir:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{C}$$

Toulmin distingue quince tipos de variaciones conceptuales en función de cinco tipos de problemas y tres modos de resolverlos. Respecto a los tipos de problemas dice:

“Consideremos por turno las cinco clases típicas de fenómenos. a) Siempre hay ciertos fenómenos que la ciencia de la naturaleza puede esperar razonablemente explicar, pero para los que ningún procedimiento disponible proporciona todavía un tratamiento exitoso... b) Siempre hay fenómenos que pueden ser explicados hasta cierto punto usando procedimientos explicativos corrientes, pero con respecto a los cuales los científicos desearían explicaciones más completas o más precisas... c) Comprende los problemas que se presentan cuando consideramos la mutua relación de diferentes conceptos coexistentes en una misma rama de la ciencia... d) Incluye los que conciernen a la mutua relación de conceptos de diferentes ramas de la ciencia... e) Estos problemas surgen de conflictos entre conceptos y procedimientos corrientes, de las ciencias especiales y las ideas y actitudes corrientes entre la gente en general”. (Idem. pág. 187-188).

Respecto a los modos de resolver problemas dice:

“En teoría, en todo caso, se puede comenzar a resolver problemas de cualquiera de los cinco tipos principales examinados en el capítulo anterior en cualquiera de tres modos alternativos: 1) refinando la terminología, 2) introduciendo nuevas técnicas de representación o 3) modificando los criterios para identificar casos a los que sean aplicables las técnicas corrientes”. (Idem. pág. 215)

Se tomará en consideración la tipología del cambio dada establecida por [6, pág. 371]. De acuerdo a ella consideramos los tipos (PxS_i : problema de tipo x , Solución de tipo i):

PaS_1	PbS_1	PcS_1	PdS_1	PeS_1
PaS_2	PbS_2	PcS_2	PdS_2	PeS_2
PaS_3	PbS_3	PcS_3	PdS_3	PeS_3

Explicación del cambio conceptual.

“Una vez descritos y clasificados los cambios, Toulmin introduce elementos explicativos que nos ofrecen criterios de selección de conceptos constituyendo el aspecto normativo de los modelos de cambio científico. Para que tenga lugar el cambio Toulmin propone unas condiciones previas que son simples posibilidades que pueden o no hacerse realidad. Por condiciones previas entiende los foros profesionales de discusión. A continuación examina los factores internos y externos que intervienen en el cambio. Como factores internos cita los modelos matemáticos, las técnicas experimentales, la invención de instrumentos, la importación de las ideas de otra ciencia básica, y el reconocimiento de nuevos principios de clasificación. En cuanto a los factores externos Toulmin cita el ejercicio de la propia curiosidad y en general todo lo que tenga que ver con factores sociológicos. Ve los factores internos y externos como dos filtros que influyen independientemente en el cambio conceptual, a veces coinciden (es lo más positivo para el progreso de la ciencia) a veces se oponen. Lo importante es la relación entre unos y otros factores. La frase los factores sociales son necesarios pero los intelectuales son cruciales resume la idea de Toulmin sobre la interrelación entre ambos factores” (Idem. pág. 373-374).

2 El período de los griegos antiguos (500-212 A.C.)

Para identificar los problemas que se plantea la comunidad matemática en este período y cuya solución genera la evolución conceptual del continuo matemático, describiremos brevemente los principales hechos que constituyeron el punto de partida para el largo proceso de su constitución rigurosa. Nuestra indagación se orienta a identificar los obstáculos epistemológicos que, en la época, hicieron lenta la solución de los problemas y cómo ellos fueron superados.

Los griegos antiguos plantearon el problema del continuo al preguntarse: ¿qué relación existe entre lo discreto y lo continuo? En principio los Pitagóricos entrevieron audazmente un isomorfismo entre los puntos de la recta y los números. Tanto las figuras geométricas como los números constituían abstracciones producidas por la mente distintas de los objetos físicos. Esta manera de diferenciar lo abstracto y lo concreto les permitió descubrir una armonía entre el mundo abstracto de las ideas y el universo físico.

“Estaban sorprendidos por el hecho de que los fenómenos que eran de muy diferente forma desde el punto de vista cualitativo, pre-

sentaban propiedades matemáticas idénticas. Por lo tanto, las propiedades matemáticas deberían ser la ciencia de tales fenómenos” ([9, 1992, pág. 203]).

Así, imaginaron un Universo infinito en un estado constante de cambio y permanencia. El secreto para la comprensión de este Universo estaba en descubrir los términos ocultos y las conexiones que creaban simultáneamente los modelos de unidad y cambio.

En su deseo de encontrar un primer principio ellos sostuvieron, que los números constituyen el universo entero. El concepto de número que manejaban los pitagóricos era el de

“una progresión de multitudes comenzando en una unidad y una regresión que terminaba en ésta” ([8, pág. 69-70])

Es decir, un número representaba una clase de agregados y por tanto era discreto. La unidad era indivisible y constituía la esencia del universo.

A pesar de poseer tan limitado concepto de número (entero positivo), intentaron “identificar los reinos de número y magnitud” ([2, pág. 19]). El espacio estaba constituido por puntos, el tiempo estaba constituido por instantes. Puntos e instantes eran los átomos de Demócrito y a ellos les correspondían números. El espacio y el tiempo tenían también una cualidad conocida como “continuidad”. “Pese a que las magnitudes geométricas se pueden dividir indefinidamente, los átomos son las últimas partículas indivisibles” ([9, 1992, pág. 207]). De esta manera se deduce la continuidad de la recta, como determinada por la “contigüidad” de sus partes “que se unen según lo continuo”

En consecuencia, una línea era mirada como formada de un número integral de mónadas o unidades geométricas. Este punto de vista se contradijo con el descubrimiento de los inconmensurables: no era posible elegir una unidad pequeña, que permitiera medir la diagonal del cuadrado respecto a su lado. Así, la diagonal de un cuadrado no estaba constituida por una “progresión de multitudes”, i.e. por un entero. Esto contradecía uno de los elementos fundamentales de la doctrina pitagórica, que en boca de Filolao se expresaba:

“Todas las cosas que pudieran ser conocidas tienen número; pues no es posible que sin número nada pueda ser conocido ni concebido” ([2, pág. 85])

consideraciones filosóficas como esta situaban la aritmética en un lugar de privilegio.

2.4 Los pitagóricos y el planteamiento del problema del continuo

El descubrimiento pitagórico de las razones inconmensurables planteó en su época el problema de la relación entre lo discreto y lo continuo. Los primeros en cuestionar el continuo numérico fueron los eleáticos, escuela fundada por Parménides que rivalizó con los pitagóricos.

“El principio fundamental de los eleáticos era el de la unidad y permanencia del Ser, punto de vista que contrastaba profundamente con las ideas pitagóricas de multiplicidad y cambio”. ([2, pág. 108]).

Zenón de Elea (450 a.C.) fue alumno de Parménides. Sus cuatro paradojas conocidas con los nombres de “la dicotomía”, “de la flecha”, de “Aquiles y la tortuga”, y la “del estadio” pretendían refutar las ideas de la divisibilidad infinita del tiempo y el espacio; negar la existencia de indivisibles o átomos matemáticos, como constituyentes del espacio y el tiempo.

“Tanto el argumento de la DICOTOMÍA como la de AQUILES sostienen que el movimiento es imposible bajo la hipótesis de la subdivisibilidad indefinida del espacio y el tiempo; los argumentos de la FLECHA y el ESTADIO tratan de demostrar en cambio que el movimiento es igualmente imposible si hacemos la hipótesis opuesta, es decir, la de que la subdivisibilidad del espacio y del tiempo termina en indivisibles” ([2, pág. 109]).

Lo que encontramos aquí es evidentemente el obstáculo epistemológico del infinito potencial, que impide concebir el proceso de subdivisión infinita para alcanzar el límite. Esto llevó a concebir la unidad como indivisible. Por tanto, el número sólo se puede obtener por una división finita pues todo proceso de división debe terminar en la unidad que es indivisible. Para superar estos “errores” es necesario admitir el infinito actual que admite la divisibilidad infinita.

Según [2, pág. 111], las paradojas de Zenón influyeron notablemente en el pensamiento matemático griego y junto con el impacto del conocimiento de los inconmensurables llevaron a restringir el dominio de los números a lo discreto y lo continuo se atribuyó a lo geométrico. Se cortó así la posibilidad de desarrollar el concepto de isomorfismo entre los puntos de la recta y los números reales, que más adelante constituirían el principio fundamental de la geometría analítica.

La ausencia de argumentos a favor de un continuo numérico obligó a los matemáticos de la época a aferrarse al continuo físico que era sugerido en la matemática por las magnitudes geométricas. Desde este último

punto de vista, la geometría en lugar de los números debería explicar el mundo.

El paradigma ontológico platónico que predominaba en la época condujo a precisar el objeto de estudio y el método de la ciencia matemática. Platón (427-347 a.C.) propuso que las *idealizaciones perfectas* de los objetos físicos constituían la auténtica realidad. Diferenció el mundo de las ideas (de los estados perfectos) del mundo físico (la realización imperfecta del mundo ideal).

“Por lo tanto, todo el mundo ideal merece estudio y sólo se puede obtener un conocimiento infalible en las puras cosas intangibles. Sobre el mundo físico sólo podemos tener opiniones y la ciencia física está condenada a verse hundida en el fango de las sensaciones” ([9, 1992, pág 73-74])

Esta concepción llevaría a Platón a privilegiar el razonamiento deductivo de la matemática sobre el razonamiento inductivo de las ciencias experimentales.

“Platón fue el primero en sistematizar las reglas de la demostración rigurosa y se supone que sus seguidores ordenaron los teoremas en orden lógico” ([9, pág. 75]).

El razonamiento deductivo seguido por reglas lógicas preestablecidas y aceptadas era el más seguro para transitar en la filosofía. El aceptar unos axiomas y razones lógicas era garantía para obtener conclusiones “verdaderas”.

“Mientras que la inducción, la experimentación y las generalizaciones basadas en la experiencia sólo pueden dar un conocimiento de lo probable, la deducción conduce a resultados absolutamente seguros si las premisas son correctas” ([9, pág. 75]).

La consecuencia positiva que se obtuvo de esta precisión ontológica en la matemática de la época fue establecer el razonamiento deductivo como un modo válido para tratar los objetos matemáticos, sujeto a normas que filtran el conocimiento que se considera como aceptable. Por otro lado, esta posición implicó que las ciencias experimentales tuvieran poco apoyo para su desarrollo. Las observaciones eran interpretaciones de nuestros sentidos. Por tanto, el mundo material que observamos es una copia del mundo ideal inteligible, que es el verdadero, y sólo se puede conocer por medio del razonamiento lógico que nos libera de las falsas interpretaciones. Es decir, la verdad no está en la apariencia sensible sino en la idea de la cosa. Únicamente el mundo de las ideas es real.

La fuerza de la epistemología de Platón se demuestra en su supervivencia, con ciertos refinamientos y variaciones, hasta la época moderna. La encontramos en el idealismo trascendental de Kant según el cual “los fenómenos son simples representaciones” y también en el idealismo absoluto de Hegel: “la idea se realiza dialécticamente en el espíritu absoluto”.

En el contexto filosófico de Platón (existencia de un mundo independiente y eterno de las ideas, que constituía la realidad del universo del que formaban parte los conceptos matemáticos),

“la mónada pitagórica y el atomismo matemático de Demócrito, los cuales dieron a toda línea una densidad, quizás apelaban demasiado fuerte a la experiencia sensorial material para galantear a Platón por lo que él recurrió al altamente abstracto APEIRON o INFINITO INDETERMINADO. De acuerdo a Platón, el CONTINUUM podía mirarse mejor como el generado por el fluir del apeiron que se pensaba como una agregación siempre grande de indivisibles. Este punto de vista representaba una fusión de lo continuo y lo discreto no contrario al intuicionismo moderno de Brouwer.... Platón aparentemente no dio respuestas directas a las dificultades involucradas en la inconmensurabilidad o en las paradojas de Zenón, aunque sí expresó su oposición al concepto de infinito de Pitágoras y la mónada como una unidad dotada de posición y también al atomismo de Demócrito”.([3, pág. 28]).

Para poder extender a los inconmensurables las demostraciones geométricas que se basaban en conmensurables, Eudoxo (408-355 a.C.) introdujo la idea de magnitud continua. No se trataba de un número, sino de entidades geométricas (longitud, área, volumen, etc.) las cuales eran continuas, contrariamente a los números que eran discretos.

“Eudoxo definía entonces una razón de magnitudes y a partir de ella una proporción, es decir una igualdad de dos razones que cubría los casos conmensurables e inconmensurables ” ([9, pág. 79]).

Las razones y proporciones no se representaban numéricamente sino que estaban ligadas a la geometría. Esta idea de Eudoxo resolvió el problema de los inconmensurables del mundo de los antiguos, pero

“forzó una nítida separación entre número y geometría, dado que únicamente la geometría podría manejar las razones inconmensurables” ([9, pág. 79]).

De esta manera se pasó de lado respecto al infinito o simplemente sobrevivió bajo la “sombra” de la intuición. Al mismo tiempo que, se cerró el

paso a los problemas que más tarde conducirían al concepto de número racional e irracional como tales. El sistema filosófico de Platón fue invertido por su discípulo Aristóteles (384-322 a.C), quien optó por una visión opuesta a la de su maestro, dando a la filosofía una perspectiva diferente: la idea existe pero no está en otro mundo, por el contrario se encuentra en el mundo presente a los sentidos, y es un dato que la filosofía debe explicar dando sentido a sus relaciones por medio de la observación, razonando y pensando. Se trata pues de una filosofía de la inmanencia. Aristóteles fue un enciclopedista: escribió sobre mecánica, física, matemáticas, lógica, meteorología y muchos temas más. En lo que respecta a la matemática, su obra es importante por establecer

“los principios básicos de la matemática, distinguiendo entre los axiomas o nociones comunes, que son verdades comunes a todas las ciencias, y los postulados que son primeros principios aceptables para una ciencia concreta. Entre los axiomas incluye los principios lógicos, tales como la ley del tercio excluido” ([9, pág. 83-84]).

Los comentaristas de la obra de Aristóteles destacan su concepto de definición, que coincide con la idea moderna.

Aristóteles traslada el papel que Platón había establecido a las ideas como la realidad del universo, y del cual harían parte las matemáticas, a la materia. Era la sustancia concreta la que constituía el mundo independiente y eterno. La matemática labora sobre las ideas;

“así, la matemática, trabaja con objetos abstractos que se derivan de propiedades de los cuerpos físicos” ([9, pág. 83])

La dupla Platón-Aristóteles dan origen a dos paradigmas de la epistemología que han logrado sobrevivir hasta el momento actual y muestra la dinámica interna que generan dos doctrinas opuestas en el dominio del pensamiento.

El continuo de Aristóteles. El continuo sólo está con las magnitudes geométricas, el número representa lo discreto. Para Aristóteles el continuo no puede ser concebido como una acumulación de puntos. Esto se expresa en sus discusiones sobre la concepción de la recta ideal y su relación con los puntos:

“Un punto, dice, es indivisible y tiene posición; pero entonces ninguna acumulación de puntos, por muchos que incluyera, podría darnos algo divisible, mientras que una recta es desde luego una magnitud divisible. Por lo tanto los puntos no pueden construir

nada continuo como una recta, pues un punto no puede ser continuo con otro punto. Un punto, añade, es como el ahora en el tiempo; el ahora es indivisible y no una parte del tiempo. Un punto puede ser el comienzo, un final o un divisor en un segmento pero no es parte de él ni de ninguna magnitud. Solamente por movimiento puede un punto generar una recta y ser así origen de la magnitud. También afirma que si un punto no tiene longitud, si una recta estuviera compuesta de puntos, tampoco tendría longitud, y análogamente si el tiempo estuviera constituido de instantes, no habría ningún intervalo de tiempo.” ([9, pág. 84]).

Estas ideas llevan a la conclusión que en su sistema los puntos y los números son magnitudes discretas que se deben distinguir de la magnitudes continuas que pertenecen a la geometría. No es posible concebir entonces un continuo numérico. La definición de Aristóteles de continuo es la siguiente:

“Una cosa es continuo cuando los límites en los que se tocan dos partes sucesivas cualesquiera son uno y el mismo y están, como la palabra misma continuo implica, juntos” ([9, pág. 84]).

Esta idea está ligada a la percepción, abstraída de los entes físicos; la continuidad es una propiedad que hace que extremos de dos cosas contiguas sean una misma cosa y se mantengan unidas.

El infinito en Aristóteles. Distingue dos clases de infinito: potencial y actual. El potencial evoca la posibilidad de superación, por ejemplo todo número entero positivo admite uno siguiente por lo que la lista de los números es ilimitada. El infinito actual es la consideración de la totalidad con todos sus elementos, por ejemplo el conjunto de los enteros. El infinito potencial se caracteriza porque las partes se consideran dadas o construidas sucesivamente, proceso que, por consiguiente, no puede ser completo. Por tanto el conjunto de partes como tal sólo existe en potencia. Si se consideran las partes como dadas simultáneamente se está aceptando un infinito actual. El infinito potencial está ligado al procedimiento, la acción y la dinámica.

Los atomistas admitieron un universo infinitamente grande, con formas infinitamente numerosas de mundos en él, es decir, un infinito actual. Aristóteles negó la existencia de un infinito actual, no aceptó lo infinitamente pequeño o infinitamente grande o infinitamente numeroso. Todos los infinitos según él, son solamente potenciales.

Refiriéndose a la doctrina del infinito en potencia, Aristóteles dice:

“No afecta a la teoría matemática, puesto que los matemáticos no necesitan del infinito ni hacen uso de él, sino tan solo de magnitudes tan grandes como se quiera, pero finitas; y la división que se realice sobre una magnitud muy grande puede aplicarse en igual razón a otra magnitud cualquiera, de manera que ello no supone diferencia alguna para la demostración.” (Physica, III, 7, 207^b 27-34).

Concepciones como esta constituyeron lo que Cantor denominó el “horror al infinito” y que aquí expresa la eliminación del infinito actual y el rastro del obstáculo de la “inducción incompleta” que se manifiesta en los errores que se generan al derivar propiedades de unos pocos casos particulares. Se puede responsabilizar a tales obstáculos de la génesis tardía de conceptos matemáticos (límite, número real, convergencia, continuidad, etc.) que tiene su base precisamente en el concepto de infinito.

2.5 El continuo en los elementos

Queda establecido que los griegos no pensaron en un continuo numérico tal y como se define en nuestros tiempos, es decir, un conjunto compacto y conexo. Solamente Aristóteles define un continuo físico como se ha anotado, pero en los Elementos de Euclides se encuentran referencias implícitas a las ideas que deben configurar el concepto de conjunto continuo. Sin embargo,

“si se busca en Euclides el enunciado explícito de un principio de continuidad, no encontraremos nada” ([4, pág. 18])

Algunos comentaristas de Euclides afirman que éste había captado intuitivamente la continuidad pero no enunció el principio de continuidad de la recta, necesario para algunas demostraciones deficientes en las que, por ejemplo, se requiere la existencia de puntos de intersección entre dos líneas. Maurice Caveing argumenta contundentemente que el concepto de continuidad de la recta y la estructura del continuo están lejos de ser captados por la intuición, ya sea ésta empírica o racional.

“Euclides hace objeto al continuo de un tratamiento muy complejo que... exige... se formulen varios principios (orden denso de los puntos de la recta, orden total entre las magnitudes de la misma especie, existencia de la cuarta proporcional, axioma de la medida); lejos de venir dado de entrada en una intuición única y primitiva, dichos principios se manifiestan por el contrario, uno a uno, a través del análisis regresivo de los requisitos de diversos procedimientos operatorios” ([4, pág. 30]).

Esta conclusión se basa en planteamientos que reconstituyen los conceptos necesarios, desde el punto de vista moderno, para atribuir a los autores de los “Elementos” un conocimiento implícito o intuitivo del continuo, mostrando la imposibilidad de tal suposición.

Por ejemplo, siguiendo los razonamientos de Caveing, en el libro X y XII de los Elementos se descubren algunos enunciados no explícitos por Euclides y que parecen surgir de la mano por su necesidad operatoria. Tal es el caso en la demostración de la proposición *X, 1*

Proposición X, 1. Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que la mitad, repitiendo este proceso quedará en algún momento una magnitud menor que la más pequeña de las dos magnitudes dadas.

Euclides usa implícitamente las siguientes resultados:

1. Orden Total: Dadas dos magnitudes A, B de la misma especie se da una de las tres situaciones siguientes:

$$A > B, \quad A < B, \quad A = B$$

2. Propiedad Arquimediana: Dadas dos magnitudes A, B ($B < A$) de la misma especie, existe n en los naturales tal que $nB > A$.

En su argumentación se apoya en la definición *V, 4*

Definición V, 4. Entre dos magnitudes A, B ($A > B$) existe una razón de la una a la otra si y sólo si existen enteros $m_i, n_i, i = 1, 2, 3, \dots$ tales que: $m_1 A > n_1 B > m_2 A > n_2 B > \dots$

y supone implícitamente 2, que ya había sido utilizada y establecida como lema por Eudoxo.

En el libro XII se supone la existencia de “la cuarta proporcional” sin ninguna demostración.

Cuarta Proporcional. Dadas las magnitudes A, B, C , (siendo A y B de la misma especie) existe una magnitud X (de igual especie que C) que es a C como B es a A .

“Es fácil darse cuenta de que la afirmación de existencia de esta magnitud en general constituye un sustituto débil del axioma de continuidad de Dedekind ” ([4, pág. 25].

Pero, por supuesto, el contexto es bastante diferente. Se trata de un conocimiento implícito en los procedimientos: un saber hacer. Hace falta

una toma de conciencia que conduce al saber por qué se hace lo que se hace, y esto estaba fuera del alcance de los matemáticos de la época.

Para observar cómo la necesidad operatoria (procedimental) obliga a suponer lo anteriormente expuesto, comentaremos la demostración de la Proposición XII,2 que se apoya en la proposición XII,1.

Proposición XII, 1. La razón entre los polígonos semejantes inscritos en círculos es como la razón entre los cuadrados de los diámetros de ambos círculos.

Proposición XII, 2. La razón entre dos círculos es la misma que la que hay entre los cuadrados de sus diámetros.

Los pasos que sigue Euclides en la demostración son los siguientes:

1. Prueba que si $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$ son polígonos regulares, inscritos en la circunferencia, de 4, 8, 16, $\dots, 2n, \dots$ lados; entonces se puede agotar el área del círculo, sustrayendo el área de los polígonos, siendo el área del polígono P_n más de la mitad de la diferencia entre el área del círculo y el área del polígono P_{n-1} .
2. Usa la proposición X,1 para afirmar que: la diferencia entre el área del círculo y la de un polígono regular con un número de lados, infinitamente grande, puede hacerse menor que cualquier magnitud fijada de antemano.

Si S y S' son las áreas de los círculos y d, d' sus diámetros. Euclides desea probar que:

$$S : S' = d^2 : d'^2$$

Supongamos que no se cumple la igualdad y en su lugar se tiene:

$$S : S'' = d^2 : d'^2 \quad (1)$$

donde S'' es un área mayor o menor que S' . (Se asume la existencia de la cuarta proporcional). Si $S'' < S'$. De lo probado en 1 y 2 y la proposición X,1 se sigue que, existe un polígono P' tal que:

$$P' < S' - S''$$

por tanto

$$S'' < P' < S' \quad (2)$$

Si inscribimos en S un polígono P , semejante a P' , por la proposición XII,1

$$P : P' = d^2 : d'^2 \quad (3)$$

y por (1) y (3), $S : S'' = P : P'$ o equivalentemente

$$P : S = P' : S''$$

Pero $P < S$. Luego $P' < S''$ lo que contradice a (2). De forma similar se puede probar que S'' no puede ser mayor que S' . Luego $S'' = S$ y teniendo en cuenta (1) queda demostrada la proposición.

Como se puede observar, en esta demostración se impone la necesidad de aceptar el orden total entre magnitudes, la existencia de la cuarta proporcional y el infinito actual, que son ideas que configuran la estructura del continuo geométrico. Estas nociones no son explícitas pero de alguna manera han surgido de la necesidad para precisar los conceptos, en especial para eludir el problema planteado por los inconmensurables.

“Pero no es necesario un axioma de continuidad del tipo de Dedekind. Basta con el axioma de Arquímedes, y el orden denso de los puntos racionales. En otras palabras, la continuidad no es accesible; pero sólo se alcanza a través de la divisibilidad indefinida, es decir potencialmente” ([4, pág. 29]).

Si consideramos las siguientes definiciones:

Definición V,1. Una magnitud es parte de otra mayor cuando la mide.

Definición V,5. Se dice que dos magnitudes están en la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, si cuando tomamos cualquier equimúltiplos de la primera y la tercera y cualquier equimúltiplos de la segunda y la cuarta, los primeros equimúltiplos exceden, son iguales o son menores que los segundos equimúltiplos, tomados en el orden correspondiente.

Se puede observar que estas definiciones permitieron a los griegos eludir el obstáculo numérico de los inconmensurables y la proposición X,1 constituyó el principio sobre el cual está basado el método de exhausción de Eudoxo. El método permitió calcular el área del círculo, el volumen de la pirámide, el cono, el cilindro y la esfera, gracias a que

“excluye los infinitesimales de todas las demostraciones en la geometría de los griegos” ([3, pág. 33])

De esta manera se pasa por un lado de los problemas de la divisibilidad infinita, del continuo y su relación con los infinitesimales. Esto es claro puesto que a pesar que el proceso indicado en X,1 se realiza tantas veces como se desee:

“Los matemáticos Griegos nunca consideraron literalmente este proceso como la ejecución de un número infinito de pasos, tal y como nosotros lo hacemos en el paso al límite” ([2, pág. 34]).

“El método de exhausción, aunque equivalente en muchos aspectos a el tipo de argumento ahora empleado en la prueba de existencia de un límite en el cálculo diferencial o integral, no presenta el punto de vista involucrado en el paso al límite” ([2, pág. 85]).

Así, por ejemplo, la sucesión $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$ de las áreas de los polígonos inscritos en el círculo en X,1, tendría un límite C si para todo $\epsilon > 0$ existe N natural tal que si $n > N$ entonces

$$|P_n - C| < \epsilon$$

Este número C sólo cumple la propiedad establecida en términos analíticos por la definición, la cual emplea lógica formal, el concepto de número real y el de orden. En tanto que, en el contexto del método de exhausción el razonamiento está guiado por intuición espacial, la subdivisión ilimitada y la argumentación por reducción al absurdo.

Esta concepción que teme al infinito impide ver un proceso de aproximación como una operación que llega a un resultado (como es el caso del límite). Es decir, la *encapsulación* del proceso *en una definición* que capta sus elementos invariantes y esenciales, eliminando así el problema del infinito. Por tanto es necesario recurrir a otra manera de justificar el procedimiento. En este caso se recurre a un razonamiento *mirando el resultado* y luego pasar a una demostración. No poseer la operación de paso al límite restringe la obtención de nuevos resultados, aquellos que no se dejan captar por una visualización geométrica o no se pueden intuir físicamente. Esta observación, señala la manifestación del rechazo que opone el obstáculo “horror al infinito” a una nueva concepción que es aquella que admite el “estatus de operación del límite”.

2.6 El continuo de Arquímedes

Quien más se acercó entre los antiguos al proceso de paso al límite fue Arquímedes de Siracusa (287-212 a. C.),

“Él, más que ningún otro autor griego acercó la geometría a la mecánica y utilizó con gran ingenio argumentos geométricos para dar demostraciones”.([9, pág. 233].

Gracias a que imaginó las figuras geométricas como constituidas por segmentos de líneas o láminas delgadas pudo desarrollar un método heurístico dirigido por consideraciones físicas que facilitaban el descubrimiento de proposiciones matemáticas. El nuevo conocimiento, obtenido mediante un razonamiento inductivo, posteriormente era demostrado rigurosamente por medio del método de exhaustión.

“El método deductivo de exhaustión no era una herramienta que se adaptara bien para el descubrimiento de nuevos resultados pero Arquímedes lo combinó con consideraciones infinitesimales” ([2, pág. 48]).

En el tratado de Arquímedes conocido como *El Método* se expone el uso de ideas procedentes de la mecánica para obtener teoremas matemáticos correctos. En este libro se calcula el área del segmento parabólico, empleando la ley de las palancas y la idea de superficie hecha de segmentos de rectas.

“Arquímedes empleó su método heurístico, simplemente como una investigación preliminar a la demostración rigurosa por el método de exhaustión”([2, pág. 51]).

En el tratado *La cuadratura de la parábola* se demuestra con todo el rigor el problema del cálculo del área del segmento parabólico. El procedimiento empleado es el del método de exhaustión sin hacer referencia al infinito ni a los infinitesimales.

Es importante destacar el comentario de Carl Boyer respecto a la prueba del área del segmento parabólico :

“...él entonces demostró que el área de n de tales polígonos estaba dada por la suma (en la notación actual):

$$A\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4n-1}\right)$$

donde A es el área del triángulo inscrito que tiene la misma base y vértices que el segmento (de la parábola). La suma infinita de la serie es $\frac{4}{3}A$, y esto fue probablemente lo que permitió a Arquímedes inferir que el área del segmento parabólico era también $\frac{4}{3}A$. Sin embargo él no estableció el argumento de esta manera, en lugar de encontrar el límite de la suma infinita, él encontró la suma de los n primeros términos y adicionó el residuo, usando la igualdad

$$A\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \frac{1}{4^{n-1}}\right) = \frac{4}{3}A$$

Cuando el número de términos es grande, la serie “agota” $\frac{4}{3}A$ sólo en el sentido griego que el residuo $\frac{1}{3} \frac{1}{4^n - 1}$ puede ser tan pequeño como se desee. Esto es, por supuesto, exactamente el método de prueba para la existencia de un límite; pero Arquímedes no interpretó así el argumento. El no expresó la idea de la no existencia de residuo en el límite o que la serie infinita es rigurosamente igual a $\frac{4}{3}A$. En lugar de esto, él probó, por una doble reducción al absurdo (el método de exhausción), que el área del segmento parabólico, no puede ser ni mayor, ni menor que $\frac{4}{3}A$. ([2, pág. 52]).

Nuevamente, está presente aunque en otro contexto el obstáculo de “horror al infinito” que rechaza la admisión del proceso de paso al límite como una operación matemática. Parece sorprendente que en este contexto numérico no haya prosperado la noción de operación matemática ligada a la situación para obtener un resultado. Mucho más, si tomamos en cuenta que aquí se realizan aproximaciones sucesivas, guiadas por la heurística, aparentemente cercanas a la operación con límites, en el sentido de que permiten descubrir el resultado (y no como ocurre en el método de exhausción en donde, el resultado, se conoce previamente)

El concepto de función. La geometría griega no se ocupó de la variación y por el contrario sólo estudió figuras estáticas. En consecuencia, los griegos no se aproximaron al concepto de función. Sin embargo, en el caso de Arquímedes se presenta una situación atípica en la geometría griega. Por ejemplo sorprende su definición de la espiral:

“el lugar geométrico de un punto en el plano que, partiendo del extremo de una semirrecta se mueve uniformemente sobre ella, mientras que la semirrecta gira uniformemente alrededor de su extremo” ([2, pág. 172]).

Las ecuaciones paramétricas del movimiento son:

$$r = k t \quad q = w t$$

Eliminando el parámetro t obtenemos la ecuación polar $r = a q$. Con la descomposición del movimiento,

“Arquímedes parece haber hallado la dirección instantánea del movimiento resultante de los dos componentes por medio del paralelogramo de las velocidades, esta parece ser la primera vez que se determinó la tangente a una curva que no fuera una circunferencia”. ([2, pág. 173]).

Arquímedes dedujo y demostró que “el área limitada por la primera vuelta de la espiral y la línea inicial, es igual a un tercio del primer círculo” ([9, pág. 160]). El procedimiento es básicamente el mismo descrito anteriormente, la novedad está en que ahora considera sectores circulares inscritos y circunscritos, acotando el área A por sumas superiores ($\overline{S}$) e inferiores ($\underline{S}$) de manera que la diferencia $|\overline{S} - \underline{S}|$ sea tan pequeña como se desee.

“Esta manera no es la misma que “agotando” el área añadiendo cada vez más figuras lineales. Sin embargo en la última parte de la demostración Arquímedes utiliza el método indirecto de demostración igual a como lo hizo en la prueba del área del segmento parabólico y como lo hace Euclides en sus demostraciones por aproximaciones sucesivas. No hay ningún límite explícito en el proceso” ([9, pág. 161-162])

Pero, la forma de acotar el área es exactamente la misma con la que hoy se demuestra la existencia del límite.

3 Aplicación del modelo al estudio de la formación y evolución del concepto de continuo en los clásicos griegos

De acuerdo al modelo de Toulmin, primero se deben identificar los elementos constitutivos de las tres representaciones del modelo.

A) Representación transversal

Esta representación permite identificar los conceptos que serán motivo de análisis en las siguientes representaciones. El período estudiado se caracteriza por ser la génesis del problema del continuo matemático y el establecimiento de la misma matemática como una disciplina intelectual independiente. Estos hechos dificultan la definición de la “totalidad de los conceptos de la disciplina que existen en un tiempo t determinado”. A costa de omitir algunas ideas que contribuyeron en la definición del objeto y método de las matemáticas, se opta por concentrar nuestra atención en los conceptos que en su evolución constituirían el desarrollo de la disciplina y en particular en aquellos relacionados con el concepto del continuo matemático. La representación de los conceptos matemáticos en tiempos de Pitágoras (t_p), de los Elementos de Euclides (t_e) y en los tiempos de Arquímedes (t_a) es la siguiente:

B) Representación longitudinal

En el período de estudio, la evolución genealógica del concepto de continuidad y conceptos relacionados se ilustra en la Figura N° 3, a la cual corresponden las siguientes caracterizaciones:

- Cp:** Continuo pitagórico. Es cierta “cualidad” inherente a espacio y tiempo, que relaciona el todo con sus “últimos” elementos constitutivos (átomos). Los átomos que forman una pluralidad tenían por una parte características de la unidad geométrica, el punto, y por otra las características de la unidad numérica. Lo continuo era geométrico y numérico.
- Ce:** Continuo en los Elementos. El continuo sólo está en las magnitudes geométricas. El número representa lo discreto.
- Ca:** Continuo arquimediano. Es sugerido por los sentidos, ligado a la mecánica y generado por el movimiento. El continuo geométrico es obtenido por la agregación de infinitos indivisibles geométricos.
- DL:** Dominio logístico pitagórico. Se ocupa de la aplicación de la aritmética a problemas comerciales o técnicos.
- Dp:** Dominio aritmético pitagórico. Se ocupa de la esencia y propiedades de los números y el espacio.
- DG:** Dominio geométrico euclidiano. Se ocupa de la forma y relaciones del espacio percibido por los sentidos (espacio usual).
- DA:** Dominio aritmético euclidiano. Se ocupa de la esencia y propiedades de los números.
- Np:** Número pitagórico. Es el conjunto de los enteros positivos. Los racionales positivos están implícitos en la definición de razón.
- Ne:** Número euclidiano. Es el conjunto de los enteros positivos. Los racionales positivos y los irracionales están implícitos en las definiciones de razón y proporción respectivamente.
- R:** Razón. Es una relación entre dos magnitudes del mismo tipo con respecto a su tamaño.
- Mp:** Magnitud pitagórica. Es algo que se puede “medir”. Sólo cubre entidades (longitud, área, volumen) en el caso que sean conmensurables.

P: Proporción. Definición V,5 de los Elementos.

Me: Magnitud euclidiana. Extiende el dominio de Mp a las cantidades inconmensurables.

Ip: Infinito pitagórico. Es actual.

Ie: Infinito euclidiano. Es potencial.

ip: Indivisibles pitagóricos. Son los elementos “últimos” que constituyen la pluralidad, átomos o partículas físicas indivisibles.

ia: Indivisible arquimediano. Las superficies están formadas por infinitos segmentos lineales, los sólidos por infinitas láminas delgadas, segmentos y láminas son los indivisibles. El concepto es más físico que geométrico.

C) Representación evolutiva

Consideramos conjuntamente las variables A y B, como se muestra en la Figura N° 4, para poder analizar la evolución conceptual y obtener los resultados del análisis.

Resultados del estudio epistemológico del continuo en el período griego

Expresaremos ahora algunos resultados de los desarrollos del continuo por los griegos, respondiendo las preguntas referentes a:

- A) La innovación o variación conceptual.
- B) Los procedimientos de selección.
- C) La relación entre cambio conceptual y unidad de la disciplina.

Las respuestas resultan de la consideración de los resultados observados en el estudio de la dimensión evolutiva :

A) La innovación o variación conceptual

Durante el período griego se introdujo el problema (P_1) del continuo que se plantea al buscar respuesta a la pregunta

P_1 : ¿Cuál es la relación entre lo discreto y lo continuo.?

La pregunta surge del planteamiento de las paradojas de Zenón que cuestionaron la concepción pitagórica del continuo (**Cp**)

Cp: Continuo pitagórico. Es cierta “cualidad” inherente a espacio y tiempo, que relaciona el todo con sus “últimos” elementos constitutivos (átomos). Los átomos que forman una pluralidad tenían por una parte características de la unidad geométrica, el punto, y por otra las características de la unidad numérica. Lo continuo era geométrico y numérico. Los pitagóricos entonces concebían la recta formada por partículas (átomos) y la continuidad estaba dada por contacto entre ellas.

Esta idea es cuestionada y se produce una primera variación conceptual que notaremos (V_1) hacia un continuo (**Ce**) concebido por la escuela aristotélica y que aparece implícito en los Elementos:

Ce: Continuo en los Elementos. El continuo sólo está en las magnitudes geométricas y la noción es sugerida por representaciones externas; en los elementos no se encuentra un enunciado explícito del continuo, tan sólo se menciona (postulado 2 de los Elementos), pero aparece implícitamente en algunas demostraciones que involucran la intersección de líneas y en la existencia de la cuarta proporcional. Respecto a la solución del problema P_1 , se designa al número (enteros positivos, y cocientes entre enteros) para representar lo discreto y la geometría lo continuo.

Posteriormente, en tiempos de Arquímedes surge una segunda variación (V_2), jalonada por razones eminentemente prácticas, que define el continuo arquimedianiano:

Ca: Continuo arquimedianiano. Es sugerido por los sentidos, ligado a la mecánica y generado por el movimiento. El continuo geométrico es obtenido por la agregación de infinitos indivisibles geométricos.

Esta noción se operativiza permitiendo descubrir límites, pero no se define como una operación de paso al límite que, de esta manera, se relega a una cierta heurística no explícita sino tan sólo inferida por los comentaristas de la obra de Arquímedes.

Respecto a la solución al problema P_1 , aparece una clara, aunque implícita, relación entre continuo y paso al límite. Tal relación implícita e inferible de los procedimientos permanece bajo la tutela restrictiva del

infinito potencial. El objeto ideal geométrico se ve como un objeto concreto sobre el que se opera para obtener un resultado. La continuidad de grandezas aparece implícita en los razonamientos.

Consideramos las dos variaciones:

V_1 : variación del continuo pitagórico (**Cp**) al continuo euclidiano (**Ce**) .

V_2 : variación que da forma al continuo arquimediano (**Ca**) como un híbrido de **Cp** y **Ca**.

V_1 : Los pitagóricos audazmente entrevieron un isomorfismo entre los puntos de la recta (recordemos que la recta son segmentos que se extiende según lo continuo) y los números. Si la recta era formada por agregados y continua (por contacto), entonces los números formaban un continuo numérico (Cp). Esta posición no satisface los ideales explicativos del momento. Se encuentra más razonable admitir lo continuo en lo geométrico que viene sugerido por el movimiento. Se separa lo aritmético, que corresponde a lo discreto, de lo geométrico, que da cuenta de lo continuo.

A.1 Los factores causales de la variación.

La variación V_1 surge como resultado:

- Del enfrentamiento de dos teorías filosóficas rivales (pitagóricos y eleáticos). Surgen paradojas que Cp no puede explicar. En este caso las exigencias de los ideales explicativos superan los conocimientos, del número y sus propiedades, de la época.
- Del predominio de la noción de infinito potencial que impide ver el infinito actual. Este obstáculo se manifiesta en los razonamientos respecto a las paradojas de Zenón (la divisibilidad potencialmente infinita sin alcanzar el límite)
- De la ausencia de un concepto de número más amplio y la imposibilidad de constituirlo dados los instrumentos teóricos del momento.
- De la imposición a los sentidos del continuo físico y lo abstracto del continuo numérico. El continuo físico se constituye en obstáculo para avanzar en la construcción de un continuo matemático, por lo contrario reafirma el continuo geométrico como sugerido por el movimiento.

Los factores causales de la variación V_2

El híbrido es el resultado de:

- Una imaginación sutil (indivisible geométrico de arquímedes).
- El acercamiento de dos disciplinas (física y geometría).
- Los resultados positivos en la matemática del método heurístico de Arquímedes al relacionar áreas, indivisibles y mecánica.

A.2 Respecto al rigor y lentitud del cambio de estatuto de las nociones:

Este aspecto lo interpretamos a la luz de las definiciones introducidas por Chevallard (1985) respecto al estatuto que adquiere una noción en su proceso de institucionalización (ver pie de página No 1). Una noción tiene un estatuto protomatemático si ella interviene en los razonamientos y procesos matemáticos de forma implícita, se consideran obvias. Posteriormente una noción puede adquirir un estatuto paramatemático, es decir se considera una herramienta útil y se hace uso de ella, se tiene conciencia de ella y se le asigna un nombre pero no es objeto de estudio para el matemático. Finalmente, la noción puede ingresar al dominio de la matemática y se constituye en objeto de estudio para el matemático. Se nombra y define. En tal caso su estatuto es matemático. Así, Chevallard señala una dirección del proceso de institucionalización de un concepto:

$$\text{protomatemático} \rightarrow \text{paramatemático} \rightarrow \text{matemático}$$

que ocurre tanto en la filogénesis del concepto, en el seno de una comunidad científica, como en la ontogénesis, en el marco de un sistema didáctico.

Observamos que en tres siglos que son los que comprende el período estudiado no se logró avanzar en la constitución del continuo numérico. Esto se explica en términos de la lentitud que imponen los obstáculos epistemológicos en el sentido de Bachellard (1938).

La prisión psíquica, creada por la obligación de apelar a la intuición geométrica, impidió a los griegos liberar la abstracción matemática de un fuerte condicionamiento de las percepciones físicas. Por ello encontramos en el infinito potencial un obstáculo epistemológico cuya manifestación causa serias perturbaciones que actualmente se conocen con el nombre de “horror al infinito”. El infinito potencial de Aristóteles niega la posibilidad de un infinito actual, en “acto”, y repercute durante siglos llevando al manejo poco riguroso de conceptos y definiciones por la ausencia de una elaboración teórica del infinito actual. Su sustituto paso a ser la “intuición” que lleva a aceptar como válido aquello que se comprueba para “pocos” casos y,

luego, por una inducción incompleta se extiende de manera abusiva a “todos”. Esto no desconoce que la “intuición” no ha jugado un papel importante, sólo señala que depender de ella como criterio de validación ha llevado a inconsistencias y retardos en el avance de la disciplina.

El “horror al infinito” es responsable de la resistencia al cambio de la concepción C_e , pero además se pone en evidencia que ni el continuo geométrico sugerido por la visión corpuscular de la recta, ni el numérico son de ningún modo intuitivos (entendiendo, intuición como evidencia inmediata producida por un dato sensorial o por el razonamiento).

A.3 La selección de los cambios.

Nos interesa señalar ahora los factores que son responsables de que los cambios se dieran en cierta dirección y no en otra. En V_1 la variación se produjo preferentemente en la dirección de C_e por los siguientes factores:

- El sentido práctico. La geometría griega es más cercana al mundo de lo concreto. Por tanto, el desarrollo de C_e permitía resolver los problemas prácticos que a ellos les interesaban.
- Los obstáculos epistemológicos. El continuo no es intuitivo. El número sólo es posible por abstracción, por tanto, su desarrollo conceptual es más lento debido a los obstáculos que se deben superar: horror al infinito, obstáculo de la concepción física del continuo (corpuscular y dinámica).
- Desarrollos desiguales entre geometría y aritmética.
- El paradigma filosófico de la época.

B) Procedimientos de selección

Respecto a los procedimientos de selección de la época, por medio de los cuales se aceptan o rechazan ciertas variantes conceptuales.

B.1 Respecto a los factores que determinaron el ingreso de la variante conceptual.

En el caso V_1

(a) Factores externos:

- El paradigma eleático del Universo exigía un continuo sin indivisibles.

- Las exigencias de la economía y la organización social de los griegos, se satisfacían con los desarrollos explicativos de la geometría de los Elementos. No era imperativo un continuo numérico.
- El desarrollo incipiente de la mecánica, más cualitativo que cuantitativo, no exigía un concepto numérico más completo. Los matemáticos no enfrentaron una exigencia intelectual para emprender la tarea.

(b) Factores internos:

- La ausencia de sistemas simbólicos más desarrollados que permitieran abstraer de los procedimientos operatorios las ideas implícitas, que conducirían a la construcción de un continuo numérico.
- El temor al infinito.
- La solución que brindó el trabajo de Eudoxo al obviar los problemas planteados por los inconmensurables, el infinito y los indivisibles.
- La prisión psíquica, creada por la apelación a la intuición sensorial, que impedía a los griegos liberar la conceptualización de un fuerte condicionamiento de los sentidos.

En el caso de V_2

(a) Factores externos:

- El desarrollo de la física arquimedianana permitió establecer una relación entre mecánica y geometría, que parecía ser prometedora.

(b) Factores internos:

- Los conceptos físicos eran aplicables a los “objetos” matemáticos.
- La relación del continuo geométrico compuesto por indivisibles y la mecánica produjo un método heurístico de gran poder en el descubrimiento de nuevas relaciones matemáticas.

B.2 Respecto a las consideraciones en que reposa la selección de la variante.

La selección ha obedecido a “buenas razones” generadas por el debate entre las escuelas pitagóricas y eleática, debido a que la matemática

no está constituida (en la época) propiamente como una disciplina independiente. El debate se plantea desde la perspectiva filosófica.

B.3 Respecto a los criterios de selección.

Por la razón que ya hemos expuesto del desarrollo incipiente de la matemática como disciplina, es claro que tales criterios que permiten distinguir los cambios conceptuales “válidos” de los “erróneos”, son deficientes y tan sólo encontramos evidencia de rigor en el texto de los Elementos de Euclides, el cual define los estándares de rigor de la época

C) Relacion cambio conceptual unidad de la ciencia

El cambio conceptual, en el período estudiado da origen a tres ramas de la matemática: lógica, aritmética y geometría. La unidad de la matemática no se ve amenazada, cada rama identifica sus metas y problemas propios, así como el núcleo que les es común.

Conclusiones

Del estudio histórico se desprende que:

- Se niega temporalmente la posibilidad de la existencia de un continuo numérico. El desarrollo posterior de este concepto muestra que concepciones incompletas pueden ser estables por largos períodos de tiempo, a menos que surjan nuevos problemas de los cuales se deriven las teorías necesarias para desestabilizar un concepto incompleto o errado.
- El tipo PdS_2 de la variación V_2 reafirma la última parte de la conclusión anterior. Indica que la negación de los indivisibles por una parte y, por otra, los resultados obtenidos de su utilización para derivar resultados matemáticos válidos permiten concluir que es plausible admitir un continuo geométrico formado por indivisibles.
- La densidad y el orden denso de magnitudes racionales e irracionales no lograron ser comprendidas completamente por los griegos.
- No es suficiente poseer una idea de divisibilidad potencialmente infinita para acceder al concepto de límite.
- El método de los infinitesimales de Arquímedes es la forma procedimental de la operación matemática de paso al límite. Como

instrumento para calcular demostró ser útil y por ello fue aceptado en la comunidad matemática. La prospectiva del desarrollo de este concepto muestra que la toma de conciencia, el paso de lo procedimental a lo conceptual, fue un largo proceso resultado de la actividad de la comunidad matemática y de su reflexión sobre la actividad misma.

- La polémica surgida de la propuesta pitagórica del continuo planteó un problema: ¿cuál es la relación entre lo discreto y lo continuo?

Estos hechos revelan la existencia de un conjunto de obstáculos epistemológicos cuya interrelación y predominio explica la exclusión de las nociones fundamentales del cálculo en la época griega y su lentitud para alcanzar su institucionalización en las matemáticas de las épocas subsiguientes. La investigación permite señalar los siguientes obstáculos presentes en la época analizada:

Obstáculos epistemológicos

1. El paradigma filosófico de las matemáticas. Para los griegos las matemáticas no son una creación, ellas preexisten en la naturaleza. El hombre se limita a descubrirlas y a describirlas. Las ideas aceptadas eran aquellas que se alcanzaban por interpretación estrictamente lógica, pero los postulados en que se fundamentan estas deducciones no eran arbitrarios y estaban sugeridos por concepciones establecidas por la experiencia empírica.

Esta concepción cierra el paso a la especulación y admite sólo aquello que es comprobable por la experiencia. Sin embargo, ella favorece la instauración en la cultura griega del valioso método deductivo con el que se alcanza la perfección del sistema axiomático de la geometría de Euclides. Pero a causa de la misma concepción ésta se limita a la recta, la circunferencia y las figuras relacionadas con ellas; constituyendo así el conjunto de las curvas “verdaderas”. El rigor exigía que se demostrara la existencia de la figura, es decir, se admiten sólo aquellas que se obtenían por regla y compás excluyendo las demás. Por ejemplo, la parábola se consideró como una sección cónica estudiando sus propiedades cualitativas sin ocuparse de las propiedades matemáticas. Las limitaciones, consecuencia del obstáculo epistemológico, no se circunscribieron a esta visión restringida de la geometría sino que provocó lo que Cantor denominó el “horror al infinito”

2. El “horror al infinito”. Los griegos eludieron el infinito actual, admitiendo sólo el infinito potencial.

Este obstáculo está relacionado con (1) porque para concebir el infinito actual era necesario alejarse de lo sensible y entonces acudir a la especulación, actividad intelectual que filosóficamente era rechazada. La señal de la presencia de este obstáculo es el rechazo en la matemática griega de lo infinitamente pequeño, lo infinitamente grande y los procesos infinitos. Por ejemplo, el concepto de lo infinitamente pequeño está implícito en la relación existente entre los puntos de una línea. Para eludirlo, Aristóteles separó los dos conceptos, puntos y recta, admitiendo que los puntos (lo discreto) estaban en la recta. Pero, negó que ella (lo continuo) pudiera estar conformada por puntos pues lo continuo no se puede construir a partir de lo discreto.

Esta incompreensión de la relación entre lo discreto y lo continuo, a causa de la exclusión de lo infinitamente pequeño, también condujo a la omisión del paso al límite. Entonces se recurre al método de exhausción que exige que la diferencia entre las magnitudes que se aproximan y su magnitud límite sea estrictamente positiva para que intuitivamente sea aceptable la aproximación.

3. El obstáculo geométrico. Las concepciones que hemos enumerado contribuyeron a afirmar el predominio de la geometría como el modelo perfecto de razonamiento y validación de los objetos matemáticos aceptables.

Esta concepción y la incapacidad para admitir el número irracional condujeron a separar la aritmética de la geometría impidiendo el desarrollo del álgebra y lo complicado de las demostraciones geométricas constituyó un obstáculo para el desarrollo del cálculo. Como consecuencia de la presencia de estos obstáculos el pensamiento griego presenta las siguientes limitaciones:

- Se niega, temporalmente, la posibilidad de la existencia de un continuo numérico. Esta es una concepción errónea. El desarrollo posterior de este concepto muestra que estas concepciones pueden ser estables por largos períodos de tiempo, a menos que surjan nuevos problemas de los cuales se deriven las teorías necesarias para desestabilizarlo. Se afirma que lo continuo sólo puede referirse a los objetos geométricos. Esta es una concepción pertinente e inadaptada

- La variación V_2 , que plantea una solución en la que se relacionan conceptos de la física con conceptos geométricos para resolver un problema práctico, reafirma la última parte de la conclusión anterior. Indicando que la negación de los indivisibles por una parte y por otra los resultados obtenidos de su utilización para derivar resultados matemáticos válidos, lleva a una posición contradictoria que no ve plausible admitir un continuo geométrico formado por indivisibles y los procesos que conducirían a la noción de límite.

La presencia de estas limitaciones en el pensamiento griego nos enseña que:

- La idea del continuo en matemáticas es altamente abstracta y no es intuitiva. No es suficiente poseer una idea de divisibilidad potencialmente infinita, para acceder al concepto de límite. El método de los infinitesimales de Arquímedes es la forma operatoria de la noción matemática de paso al límite. Como instrumento para calcular demostró ser útil y por ello fue aceptado en la comunidad matemática. La toma de conciencia, el paso de lo operativo a lo conceptual, fue un largo proceso resultado de la actividad de la comunidad matemática y de su reflexión sobre la actividad misma. El concepto de función está implícito en los cálculos astronómicos de los griegos antiguos, en tablas y gráficas, pero el concepto como tal no es abordado como objeto de estudio por los griegos. Al respecto Boyer comenta:

“Nosotros hemos visto que la geometría griega trató en su mayor parte con la forma más que con la variación, así que el concepto de función no fue desarrollado.” ([2, pág. 56])

- El concepto de continuidad está implícito en los razonamientos griegos respecto al movimiento, que era entendido en un sentido amplio de “cambio” que incluía las grandezas geométricas. También se encuentra implícito en el manejo de las proporciones, pero referida siempre al modelo geométrico, como lo confirma Youschkevitch (1976) cuando explica la influencia del pensamiento aristotélico en las ideas de los matemáticos de la edad media. Él comenta que Oresme dirá a mediados del siglo XIV que toda cosa medible, excepto los números (que Oresme concebía a la imagen de los griegos), se debe imaginar como una cantidad continua.

“Esto porque los puntos, líneas y superficies en los cuales, según Aristóteles, la medida o razón (mensura seu proportio) es hallada inicialmente, son necesarios para medir estas “cosas”; en todas las otras cosas, la medida o razón es estudiada por la relación mental con los puntos, líneas y superficies.”([11, pág. 18])

Así, la continuidad geométrica se traslada a toda cosa medible.

- La polémica surgida de la propuesta pitagórica del continuo planteó un problema cuya solución se obtendría 2.000 años después (Dedekind, Cantor). Los obstáculos conceptuales que se superaron en esta larga trayectoria han enriquecido la matemática.

Referencias

- [1] Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Librairie Philosophique. París. Traducción al castellano: La formación del espíritu científico. Siglo XXI. México, 1990.
- [2] Boyer, C. *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza editorial, (1987).
- [3] Boyer, C. (1959). *The History of the Calculus and his Conceptual Development*. Dover Publications. New York.
- [4] Caveing, M. Descles, J., Dieudonné. *et al* (1988). *Pensar la Matemática*. Baralona: Tusquets Editores.
- [5] Chevallard, Y. (1985) *La Transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage. Grenoble. Traducción al Castellano: La transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Aique. Argentina. (Edición consultada 1991)
- [6] Estany, A; Izquierdo, M. La evolución del concepto de afinidad analizada desde el modelo de Toulmin. *Llull*, Vol. 13, pág. 349-378. Barcelona. 1990
- [7] Farfán, M. R. *Ingeniería didáctica, un estudio de la variación y el cambio*. Grupo Editorial Iberoamérica. México (1997)
- [8] Heath, T.L. *A Hystory of Greek Mathematics*. Vol. I. Oxford University Press. (1921)
- [9] Kline, M. (1972.) *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a Nuestros Días*. Madrid: Alianza Editorial.
- [10] Toulmin, S. (1977) *La Comprensión Humana, el Uso Colectivo y la Evolución de los Conceptos*. Madrid: Alianza Editorial.

- [11] Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for history of exact sciences*, 16, 36-85. Traducción al Francés: Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXe siècle. trad. Bellemin, J., *Fragments d'histoire des Mathematiques*. Broucheure APMEP, 41, pp. 7-68.

Dirección del autor: César Augusto Delgado G Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali, Colombia.